TP21 – Effets non linéaires en mécanique

Compétences exigibles du programme.

- **Approche numérique :** utiliser les résultats fournis par une méthode numérique pour mettre en évidence des effets non linéaires.

Beaucoup de systèmes physiques, autour d'un équilibre stable, peuvent être décrits approximativement comme des oscillateurs harmoniques, c'est-à-dire comme des systèmes linéaires. Il existe cependant des effets, dits non-linéaires, qui rendent compte de certaines différences par rapport au comportement de l'oscillateur harmonique.

Ce TP informatique va permettre de fournir des solutions numériques pour des systèmes physiques réels et ainsi mettre en évidence ces effets non linéaires.

I – Mouvement d'un pendule (max. 50 minutes)

On considère un pendule simple de masse m et de longueur l, supposé conservatif. La position du système par rapport à la position d'équilibre stable étant repérée par l'angle θ, son énergie mécanique est donnée par $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2} m\, l^2\, \dot{\theta}^2 + m\, g\, l\, (1 - \cos\theta)$.

1. Identifier le terme correspondant à l'énergie cinétique E_c et celui correspondant à l'énergie potentielle E_p.
   Représenter l'allure de l'énergie potentielle du pendule en fonction de θ (on pourra utiliser python pour tracer une courbe). En déduire la position d'équilibre stable.
2. Déduire de l'expression de l'énergie mécanique l'équation différentielle du mouvement pour $\theta(t)$. Écrire celle-ci en utilisant un seul paramètre, $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$.
3. Linéariser cette équation et identifier la situation obtenue au modèle de l'oscillateur harmonique. À quoi correspond le paramètre T_0, physiquement ?
4. a) Résoudre numériquement les équations du mouvement pour le pendule simple (avant linéarisation) : on prendra $T_0 = 1$ s. Représenter graphiquement le résultat, avec sur le même graphique les solutions correspondant aux conditions initiales suivantes :
      - vitesse nulle et angle $\theta_0 = 0,1$ rad ;
      - vitesse nulle et angle $\theta_0' = 0,5$ rad ;
      - vitesse nulle et angle $\theta_0'' = 1$ rad.

   b) Même question que la a), mais pour les équations obtenues après linéarisation (modèle de l'oscillateur harmonique).

   c) Observer la dernière courbe tracée (et uniquement celle-ci) : quelles sont les grandeurs caractéristiques de la courbe (et du mouvement) que l'on peut facilement mesurer sur le graphique ?

   d) Observer les graphiques.
      Quelle propriété remarquable de l'oscillateur harmonique n'est pas vérifiée par le pendule ?
      On observe donc l'effet non linéaire suivant :

Pour un pendule, la/le/l' .... augmente/diminue avec la/le/l' .... d'oscillation

      (écrire la phrase, et la compléter en indiquant les grandeurs concernées dans le cas général).

5. *(Si vous avez le temps).* Déduire des solutions numériques la période $T(\alpha)$ du pendule en fonction de l'amplitude α d'oscillation. Reporter les résultats dans un graphique. Quelle forme fonctionnelle est-il raisonnable de supposer pour $T(\alpha)$ (pour des amplitudes pas trop importantes) ? Tenter un ajustement pour vérifier et trouver le(s) paramètre(s) de la fonction.
6. *(Si vous avez le temps).* Pour quelle raison une expérience de mesure de $T(\alpha)$ risquerait de ne pas mettre en évidence l'effet non-linéaire constaté grâce à la résolution numérique ? (Vous pouvez essayer avec le matériel à disposition !)
   Remarque : Galilée lui-même s'était trompé ! Vous pouvez chercher sur internet ses écrits à ce sujet.

II – Énergie potentielle avec un terme cubique

On considère maintenant un point matériel de masse m, mobile le long de l'axe (Ox) dans l'énergie potentielle $E_{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{1}{2}k\,x^2 + \dfrac{1}{3}\varepsilon\,k\,x^3$, avec $k > 0$ et ε deux constantes. Le système est supposé conservatif.

1. Représenter l'allure de l'énergie potentielle du système en fonction de x, avec par exemple $\varepsilon = -0,3\ \mathrm{m}^{-1}$ (on pourra utiliser python pour tracer une courbe). En déduire la position d'équilibre stable.
2. Déduire de l'expression de l'énergie mécanique l'équation différentielle pour $x(t)$.
3. Linéariser cette équation : quelle doit être la condition sur x pour rendre possible cette approximation ?
4. a) Résoudre numériquement l'équation du mouvement, dans le cas $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 1$ s, $\varepsilon = -0,3\ \mathrm{m}^{-1}$, vitesse initiale nulle et position initiale $x_0 = -1$ m. Représenter graphiquement le résultat, avec (sur le même graphique) la solution de l'équation différentielle linéarisée.
   b) Quelle propriété de l'oscillateur harmonique (autre que celle identifiée à la question I–4d)) n'est pas vérifiée par le système ?
   Il s'agit d'un deuxième effet non linéaire, qui permet notamment d'interpréter le phénomène de dilatation thermique des solides : expliquer comment.
   c) Comment expliquer que cet effet existe dans le cas d'une énergie potentielle avec un terme cubique mais pas dans le cas du pendule simple ?

III – *S'il reste du temps...*

1. Toujours dans le cas d'une énergie potentielle avec un terme cubique

Résoudre numériquement l'équation du mouvement du point matériel dans l'énergie potentielle avec terme cubique ($T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 1$ s, $\varepsilon = -0,3\ \mathrm{m}^{-1}$) dans le cas d'une vitesse initiale nulle et position initiale $x_0 = -1,7$ m. Interpréter le résultat à l'aide de considérations énergétiques.

2. Revenons au cas du pendule

Résoudre numériquement l'équation du pendule dans le cas d'une position initiale nulle ($\theta(0) = 0$) et une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) = 13$ rad/s. Interpréter le résultat observé à l'aide de considérations énergétiques.