

INFSEN02-1 Sample exam

The INFDEV@HR Team

1 Exam

1.1 Question 1

Given the following lambda program, and a series of relevant delta rules, show the beta reductions for this program.

```
let apply = (λx f→(f x)) in ((apply 3) (λx→(3 + x)))
```

1.2 Relevant delta rules

Integer addition

```
(λm n→ (λs z→((m s) ((n s) z))))
```

Integer three (3)

```
(λs z→(s (s (s z))))
```

Integer size (6)

```
(λs z→(s (s (s (s (s (s z)))))))
```

1.3 Answer 1 (note: you do not need to write all this detail yourself, it is only included for completeness)

```
let apply = (λx f→(f x)) in ((apply 3) (λx→(3 + x)))
```

```
let apply = (λx f→(f x)) in ((apply 3) (λx→(3 + x)))
```

```
((λapply→((apply 3) (λx→(3 + x)))) (λx f→(f x)))
```

```
((λapply→((apply 3) (λx→(3 + x)))) (λx f→(f x)))
```

```
(( (λx f→(f x)) 3) (λx→(3 + x)))
```

$((\lambda x. f \rightarrow (f \ x)) \ 3) \ (\lambda x. (3 + x))$

$((\lambda x. f \rightarrow (f \ x)) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda x. (3 + x))$

$((\lambda x. f \rightarrow (f \ x)) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda x. (3 + x))$

$((\lambda f. (f \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda x. (3 + x)))$

$((\lambda f. (f \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda x. (3 + x)))$

$((\lambda x. (3 + x)) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))))$

$((\lambda x. (3 + x)) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))))$

$(3 + (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))))$

$((+ \ 3) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))))$

$((\lambda m. n \rightarrow (\lambda s. z \rightarrow ((m \ s) \ ((n \ s) \ z)))) \ 3) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$((\lambda m. n \rightarrow (\lambda s. z \rightarrow ((m \ s) \ ((n \ s) \ z)))) \ 3) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$((\lambda m. n \rightarrow (\lambda s. z \rightarrow ((m \ s) \ ((n \ s) \ z)))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$((\lambda m. n \rightarrow (\lambda s. z \rightarrow ((m \ s) \ ((n \ s) \ z)))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$((\lambda n. s \ z \rightarrow ((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ ((n \ s) \ z))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$((\lambda n. s \ z \rightarrow ((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ ((n \ s) \ z))) \ (\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z))))$

$(\lambda s. z \rightarrow (((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ ((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ z)))$

$(\lambda s. z \rightarrow (((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ (((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ z)))$

$(\lambda s. z \rightarrow ((\lambda z. (s \ (s \ (s \ z)))) \ (((\lambda s. z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s) \ z)))$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ (\underline{((\lambda s \ z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ s)} \ z))))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ ((\lambda z \rightarrow (\underline{s} \ (\underline{s} \ (\underline{s} \ z)))) \ z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ (\underline{((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ z})))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ (s \ (s \ (s \ \underline{z}))))))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (\underline{((\lambda z \rightarrow (s \ (s \ (s \ z)))) \ (s \ (s \ (s \ z))))}))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (s \ (s \ (s \ (\underline{s \ (s \ (s \ z))}))))$$

$$(\underline{(\lambda s \ z \rightarrow (s \ (s \ (s \ (s \ (s \ (s \ z))))))})$$

6

1.4 Question 2

Given the following lambda calculus program, and a series of relevant delta rules, give the full typing derivation for the program.

$$(\lambda (m : \text{Nat}) \ (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \ (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \ (z : \alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) \ (((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

1.5 Relevant delta rules

Boolean type:

$$(\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))$$

1.6 Answer 2 (note: you do not need to write all this detail yourself, it is only included for completeness)

$$(\lambda (m : \text{Nat}) \ (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \ (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \ (z : \alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) \ (((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$\underline{\lambda (m : \text{Nat}) \rightarrow \ (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \ (z : \alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) \ (((n \ \alpha) \ s) \ z)))}$$

$$(\lambda (m : \text{Nat}) \ (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \ (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \ (z : \alpha) \rightarrow (((\underline{\text{Nat}} \ \alpha) \ s) \ (((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$\frac{(\lambda(m:\text{Nat}) \underline{(n:\text{Nat})}) \rightarrow \underline{\Lambda\alpha} \Rightarrow \underline{(\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) \ (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat } \alpha) \ s) \ ((n \ \alpha) \ s) \ z))))}{}$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat } \alpha) s) (((\text{Nat } \alpha) s) z))))$$
$$\frac{(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow \underline{(z:\alpha)} \rightarrow \underline{((\text{Nat } \alpha) s) ((\text{Nat } \alpha) s) z}))}{\underline{((\text{Nat } \alpha) s) ((\text{Nat } \alpha) s) z})}$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha) z))))$$
$$\frac{(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda a \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (\underline{z:\alpha}) \rightarrow ((\underline{(\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)}) (\underline{((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) z}))))}{\underline{((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) z}})$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda a \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\underline{\text{Nat}} \ a) (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat} \ a) (\alpha \rightarrow \alpha)) a))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)) \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) (((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\mathbf{Nat}) (n:\mathbf{Nat}) \rightarrow \Lambda \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\underbrace{(\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))}_{\text{induction}}) \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) (((\mathbf{Nat} \ \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda a \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\lambda(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) (\lambda(\alpha \rightarrow \alpha)) ((\lambda(\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ($$

$$\underline{(((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha))} (((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) (((\text{Nat } \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\mathbf{Nat})\ (n:\mathbf{Nat})\rightarrow\Lambda\alpha\Rightarrow\ (\lambda(s:(\alpha\rightarrow\alpha))\ (z:\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\alpha)\ ((\underline{\mathbf{Nat}}\ \alpha)\ (\alpha\rightarrow\alpha))\ \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda a \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) ((\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)) \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha))))$$

$$(\lambda(m:\mathbf{Nat})\ (n:\mathbf{Nat})\rightarrow\lambda a\Rightarrow\ (\lambda(s:(\alpha\rightarrow\alpha))\ (z:\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\alpha)\ ((\forall\alpha\Rightarrow((\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha\rightarrow\alpha))\ a)\ (\alpha\rightarrow\alpha))\ a))))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) \alpha)))$$
$$(\lambda(m:\mathbf{Nat})\ (n:\mathbf{Nat})\rightarrow\lambda\alpha\Rightarrow\ (\lambda(s:(\alpha\rightarrow\alpha))\ (z:\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\alpha)\ (\underbrace{((\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha\rightarrow\alpha)\ (\alpha\rightarrow\alpha))}_{\text{}}))\))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha) \alpha))))$$
$$(\lambda(m:\mathbf{Nat})\ (n:\mathbf{Nat})\rightarrow\Lambda\alpha\Rightarrow\ (\lambda(s:(\alpha\rightarrow\alpha))\ (z:\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\alpha)\ \underline{((\alpha\rightarrow\alpha)\ \alpha)}))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \quad \alpha)))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow \underline{((\alpha \rightarrow \alpha) \alpha)}))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow \alpha))$$
$$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (\underline{z:\alpha}) \rightarrow \underline{\alpha}))$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)))$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \underline{(\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))})$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) \ (n : \text{Nat}) \rightarrow \underline{\Lambda \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)})$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow (\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)))$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \underline{(\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)))})$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \text{Nat})$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) \underline{(n : \text{Nat})} \rightarrow \underline{\text{Nat}})$$
$$(\lambda (m : \text{Nat}) \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}))$$
$$\underline{(\lambda(m:\text{Nat}) \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}))}$$
 $(\text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat})$