

# INFSEN02-1 Sample exam

The INFDEV@HR Team

## 1 Question 1

Given the following lambda program, and a series of relevant delta rules, show the beta reductions for this program.

$(1 + 2)$

### 1.1 Relevant delta rules

Integer addition:

$(\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z))))$

Integer one (1)

$(\lambda s \ z \rightarrow (s \ z))$

Integer two (2)

$(\lambda s \ z \rightarrow (s \ z))$

### 1.2 Answer 1 (note: you do not need to write all this detail yourself, it is only included for completeness)

$(1 + 2)$

$((\underline{+} \ 1) \ 2)$

$((\ (\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))) \ 1) \ 2)$

$((((\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))) \ \underline{1}) \ 2)$

$((((\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))) \ (\lambda s \ z \rightarrow (s \ z))) \ 2)$

$((((\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))) \ (\lambda s \ z \rightarrow (s \ z))) \ \underline{2})$

$$(((\lambda m \ n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))) (\lambda s \ z \rightarrow (s \ z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))))$$

$$(((\lambda m \rightarrow \underline{n \rightarrow (\lambda s \ z \rightarrow ((m \ s) ((n \ s) z)))} (\lambda s \ z \rightarrow (s \ z))) (\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))))$$

$$(((\lambda n \ s \ z \rightarrow ((\lambda s \ z \rightarrow (s \ z)) s) ((n \ s) z))) (\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))))$$

$$(\lambda n \rightarrow \underline{s z \rightarrow ((\lambda s \ z \rightarrow (s \ z)) s) ((n \ s) z)}) (\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (((\lambda s \ z \rightarrow (s \ z)) s) ((\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))) s) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (((\lambda s \ z \rightarrow (s \ z)) s) (((\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))) s) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) (((\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))) s) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) (((\lambda s \ z \rightarrow (s (s \ z))) s) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) ((\lambda z \rightarrow (s (s \ z))) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) ((\lambda z \rightarrow (s (s \ z))) z)))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) (s (s \ z))))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow ((\lambda z \rightarrow (s \ z)) (s (s \ z))))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (s (s (s \ z))))$$

$$(\lambda s \ z \rightarrow (s (s (s \ z))))$$

3

## 2 Question 2

Given the following lambda calculus program, and a series of relevant delta rules, give the full typing derivation for the program.

$$(\lambda (m : \text{Nat}) (n : \text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda (s : (\alpha \rightarrow \alpha)) (z : \alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) ((n \ \alpha) s) z))))$$

## 2.1 Relevant delta rules

Integer type:

$$(\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))$$

## 2.2 Answer 2 (note: you do not need to write all this detail yourself, it is only included for completeness)

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) ((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$\lambda(m:\text{Nat}) \rightarrow \lambda(n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((m \ \alpha) \ s) ((n \ \alpha) \ s) \ z)))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ s) ((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) \lambda(n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ s) ((n \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ s) ((\text{Nat} \ \alpha) \ s) \ z))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow \lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow \lambda(z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ s) ((\text{Nat} \ \alpha) \ s) \ z)))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ z))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) \lambda(z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ z))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) ((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha))))$$

$$(\lambda(m:\text{Nat}) (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow (\lambda(s:(\alpha \rightarrow \alpha)) (z:\alpha) \rightarrow (((\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha) (\alpha \rightarrow \alpha)) (((\text{Nat} \ \alpha) \ (\alpha \rightarrow \alpha)) \ \alpha))))$$



$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))$

$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow \Lambda \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha))$

$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow (\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)))$

$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow (\forall \alpha \Rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha)))$

$(\lambda(m:\text{Nat})\ (n:\text{Nat}) \rightarrow \text{Nat})$

$(\lambda(m:\text{Nat})\ (\underline{n:\text{Nat}}) \rightarrow \text{Nat})$

$(\lambda(m:\text{Nat}) \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}))$

$(\lambda(m:\text{Nat}) \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}))$

$(\text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat})$