

# 数值计算问题

## 问题1

假设 $A$ 为一个 $1000 \times 1000$ 的矩阵且具有以下性质： $A(i, i) = i$ ,  $A(i, i + 1) = A(i + 1, i) = \frac{1}{2}$ ,  $A(i, i + 2) = A(i + 2, i) = \frac{1}{2}$ , ...

- 请使用以下的方法，在15个步骤内，分别解答 $Ax = [1, 1, \dots, 1]^T$ 这个线性方程组
  1. Jacobi方法
  2. Gauss-Seidel方法
  3. SOR方法,  $\omega = 1.1$
  4. Conjugate Gradient方法
  5. Conjugate Gradient方法且包含Jacobi预处理
- 请报告每一个步骤的误差

## 问题2

设 $f(x) = e^{-2x}$ 且它的定义域为 $[-1, 1]$

1. 写一个能够生成牛顿多项式的程序
2. 使用程序生成 $n$ 次多项式，其中当 $n = 10$ 、20 和40时具有均匀间隔的点和切比雪夫点
3. 绘制上述类型的多项式（见图3.8）
4. 通过以0.05步长采样，创建每种类型的实际插值误差，并绘制比较图（见图3.11）

## 问题3

给定两个不同的线性方程组如下所示：

(a).

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b).

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. 编写一个程序，实现Gram-Schmidt方法，进行 $QR$ 矩阵分解，并报告出最后 $Q$ 矩阵和 $R$ 矩阵的结果
2. 重复第一个问题，但要实现Householder反射并报告每一步的每个Householder反射器 $H_i$ ，即矩阵 $Q$ 和 $R$
3. 报告最小二乘解和2-norm误差

## 问题4

1. 实现一个简单的Web爬虫
2. 通过上述实现的网络爬虫，获取任何大学的主要网页上的前500个网页的google矩阵，并给出它们的邻接矩阵
3. 实现幂方法
4. 计算google矩阵的主要特征值
5. 列出最高的20个网页