第三章重点（多项式插值）

样本点插值拟合方法

- **拉格朗日插值法(Lagrange interpolation)的计算**
  给定n个样本点$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，那么我们可以用$y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$来拟合这$n$个点，其形式为，其中：
  - $L_k(x)$是一个多项式
  - $L_k(x_k) = 1$
  - 当$j \neq k$时，$L_k(x_j) = 0$
  - $$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cancel{(x-x_k)}(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\cancel{(x_k-x_k)}(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \frac{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)} \end{aligned}$$

  因此，拉格朗日插值多项式的结果可以表示为：

  $$\begin{aligned} P(x) &= y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)} \end{aligned}$$

- **证明插值多项式的存在性(Existence)与唯一性(Uniqueness)**
  - **存在性Existence**：证明令$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$为$n$个对应不同$x_i$的点，有且仅有一个$n-1$或更少阶的多项式$P(x)$满足当$i = 1, \cdots, n$时$P(x_i) = y_i$
    - 证明：令$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$为$n$个点对应不同的$x_i$，令$P(x)$为这些点的拉格朗日插值多项式（要求写出上面的拉格朗日多项式的表示），那么$P(x)$拟合了这些点，即当$1 \leq i \leq n$时，$P(x_i) = y_i$
  - **唯一性Uniqueness**：证明一个n阶的多项式$P_n(x)$有至多n个零点，除非$P_n(x) \equiv 0$
    - $P(x)$和$Q(x)$为任意两个多项式，它们的阶数均$\leq n-1$且拟合了所有n个点
      令$H(x) = P(x) - Q(x)$也是一个多项式，它的阶数同样$\leq n-1$，那么当$i = 1, \cdots, n$时，其满足$H(x_i) = 0$，即$H(x)$有n个零点
      因此$H(x) \equiv 0$，$P(x) = Q(x)$，唯一性得证
- **牛顿差分(Newton's divided difference)方法计算**
  - **差分定义**：
    $f[x_1 \ldots x_n]$: 拟合$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$这些点的$n-1$阶多项式的**系数**
    - 推论：
      Base case: $f[x_j] = y_j \text{ for } j = 1, \cdots, n$
      Inductive step: $f[x_i \cdots x_j] = \dfrac{f[x_{i+1} \cdots x_j] - f[x_i \cdots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$
  - **公式**：

    $$\begin{aligned} P(x) = f[x_1] &+ f[x_1 x_2](x-x_1) \\ &+ f[x_1 x_2 x_3](x-x_1)(x-x_2) \\ &+ \cdots \\ &+ f[x_1 \ldots x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

    $$P(x) = f[x_1] + \sum_{i=2}^{n} \left\{ f[x_1 \ldots x_i] \prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j) \right\}$$

插值误差

- **插值误差公式的证明**
  - 插值误差**公式定义**：
    - 记$f(x)$为$n+1$阶连续可微函数
    - 拟合n个点$(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$的插值多项式记作$P(x)$
    - 插值误差为：

      $$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

      其中$\min\{x, x_1, \ldots, x_n\} \leq c \leq \max\{x, x_1, \ldots, x_n\}$
  - **证明**：

        - 假设我们已经有了一个$n-1$阶的插值多项式$P_{n-1}(t)$，它在$n-1$个点$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$上与函数$f$相等。接下来，我们考虑加入一个新的插值点$x$，得到新的$n$阶插值多项式：

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) + f[x_1 \ldots x_n x](t - x_1)\ldots(t - x_n)$$

        - 在x这个额外的点上，$P_n(x) = f(x)$。由此得到：

$$f(x) = P_{n-1}(x) + f[x_1 \ldots x_n x](x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

          这个公式对所有的x都成立。
        - 定义一个辅助函数$h(t)$：

$$h(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - f[x_1 \ldots x_n x](t - x_1)\ldots(t - x_n)$$

          注意，在x和$x_1, \ldots, x_n$这些点上，$h(t)$的值为0，因为在这些点上，P_{n-1}与f相等。
        - 根据**罗尔定理（Rolle's theorem）**，在$x, x_1, \ldots, x_n$这$n+1$个点之间，必然存在n个点，使得在这些点上$h'(t) = 0$。继续这个逻辑，可以找到更多的点，直到最终存在一个点c，在这个点上$h^{(n)}(c) = 0$。
        - 由于$P_{n-1}(t)$是一个$n-1$阶多项式，其n阶导数为0，因此有：

$$h^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n! f[x_1 \ldots x_n x]$$

          将c代入上式，得到：

$$f[x_1 \ldots x_n x] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

          最后，根据之前得到的公式，我们有：

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

- 龙格现象
    - 插值次数越高，插值结果越偏离原函数的现象称为龙格现象
        - 一般情况下，多项式的次数越多，利用的数据就越多，而预测也就越准确
        - 但Runge在研究多项式插值的时候，发现有的情况下，并非取节点越多，多项式就越精确。例如$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$，它的插值函数在两个端点处发生剧烈的波动，造成较大的误差
- **切比雪夫点计算**
    - 在区间$[-1, 1]$中，切比雪夫点$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$，$i = 1, \ldots, n$
- **切比雪夫的误差**
    - 具有n个切比雪夫点的坐标可以通过n次切比雪夫多项式求实根得到，n次切比雪夫多项式表示为$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
    - 定理：
        - $\max\limits_{-1 \le x \le 1} |(x - x_1)\cdots(x - x_n)|$的最小值为$\frac{1}{2^{n-1}}$
            - **证明**：利用反证法，记$P_n(x)$为一个一元多项式，设想它是一个比切比雪夫多项式更好的插值点寻找公式，满足当$-1 \le x \le 1$时，$|P_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$，记$f_n(x) = P_n(x) - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$。
                - 当$0 \le 2k \le n$，$x = \cos\frac{2k\pi}{n}$时，$f_n(x) < 0$，因为$T_n(x) = 1$
                - 当$0 \le 2k+1 \le n$，$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}$时，$f_n(x) > 0$，因为$T_n(x) = -1$

              根据中值定理，$f_n(x)$有至少n个根，换句话说，$\deg(f_n) \le n-1$，又根据代数的基本定理，$f_n(x)$有至多$n-1$个根，与前面证明得出的结果矛盾，因此$|P_n(x)| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$
        - 当x_i为切比雪夫点时，**枚举数enumerator**达到最小值
            - **证明**：根据切比雪夫多项式，$(x - x_1)\cdots(x - x_n) = (x - \cos\frac{\pi}{2n})\cdots(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$，因为上述第一条定理且已知$|T_n(x)| \le 1$，因此第二条定理得证
- **切比雪夫的6个性质证明**
    - 切比雪夫多项式的递归表示法可以表示为$T_n(x) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x & n = 1 \\ 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) & n > 1 \end{cases}$
    - **6个性质**分别为：
    i. $\deg(T_n) = n$
    ii. The leading coefficient of T_n is 2^{n-1} for $n \ge 1$
    iii. $T_n(1) = 1$ and $T_n(-1) = (-1)^n$
    iv. $|T_n(x)| \le 1$ for $-1 \le x \le 1$
    v. All zeros of $T_n(x)$ are in $[-1, 1]$ ($x = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$ for $1 \le i \le n$)

vi. $T_n(x)$ alternates between -1 and 1 a total of $n+1$ times. For $0 \le i \le n$, $T_n(\cos\frac{i\pi}{n}) = \begin{cases} -1 & i \text{ is odd} \\ 1 & i \text{ is even} \end{cases}$

- **证明性质1**:
  - **Base case** ($n=0$ and $n=1$): $\deg(T_0(x)) = \deg(1) = 0$ and $\deg(T_1(x)) = \deg(x) = 1$
    Inductive step ($n>1$): $\deg(T_n) = \deg(2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)) = \deg(T_{n-1}(x)) + 1$
    By the induction assumption, $\deg(T_{n-1}(x)) = n-1$
    Hence, $\deg(T_n) = n-1+1 = n$
- **证明性质2**:
  - 记leading coefficient为lc
  - **Base case** ($n=1$ and $n=2$): $\text{lc}(T_1(x)) = \text{lc}(x) = 1$ and $\text{lc}(T_2(x)) = \text{lc}(2x^2-1) = 2$
    Inductive step ($n>1$): $\text{lc}(T_n) = \text{lc}(2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)) = 2 \cdot \text{lc}(T_{n-1}(x))$
    By the induction assumption, $\text{lc}(T_{n-1}(x)) = 2^{n-2}$
    Hence, $\text{lc}(T_n) = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$
- **证明性质3**:
  - **Base case** ($n=1$ and $n=2$): $T_1(1) = 1, T_1(-1) = -1$ and $T_2(1) = 2T_1(1) - T_0(1) = 1, T_2(-1) = 2 \times (-1)T_1(-1) - T_0(-1) = 1$
    Inductive step ($n>2$):

$$T_{n+1}(1) = 2 \times 1 \times T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-1) &= 2 \times (-1) \times T_n(-1) - T_{n-1}(-1) \\ &= -2 \times (-1)^n - (-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \times (1) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

  Hence, $T_n(1) = 1$ and $T_n(-1) = (-1)^n$
- **证明性质4**:
  - 令$y = \arccos x$，那么$x = \cos y$
  - **Base case** ($n=0$ and $n=1$):
    - $T_0(x) = 1 = \cos(0 \times \arccos(x))$
    - $T_1(x) = x = \cos(1 \times \arccos(x))$
    Inductive step

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &= 2x\cos ny - \cos((n-1)y) \\ &= 2x\cos ny - \cos ny \cos y - \sin ny \sin y \\ &= 2\cos y \cos ny - \cos ny \cos y - \sin ny \sin y \\ &= \cos ny \cos y - \sin ny \sin y \\ &= \cos((n+1)y) \\ &= \cos((n+1)\arccos x) \end{aligned}$$

    Therefore, $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, $|T_n(x)| = |\cos(n\arccos x)| \le 1$, for $-1 \le x \le 1$
- **证明性质5**:
  - 根据上面的证明性质4可知$T_n(x) = \cos(n\arccos x)$，令$T_n(x) = 0$，得到括号内的值$n\arccos x = (i - \frac{1}{2})\pi$，$i \in Z$，移项变形可得$x = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi$，因此$T_n(x)$的所有零点都在区间$[-1,1]$内
- **证明性质6**:
  - 根据$T_n(x) = \cos(n\arccos x)$，当$0 \le i \le n$时，

$$\begin{aligned} T_n(\cos\frac{i\pi}{n}) &= \cos i\pi \\ &= \begin{cases} \cos\pi = -1 & i \text{ is odd} \\ \cos 2\pi = 1 & i \text{ is even} \end{cases} \end{aligned}$$

- 根据不同区间计算切比雪夫点
  - 切比雪夫点的原公式只能套用在区间$[-1,1]$中，如果$[a,b] \ne [-1,1]$
  - 我们可以将$[-1,1]$区间拉伸为$\frac{b-a}{2}$倍
  - 将原来的零点移动至$[a,b]$区间的中点，即$\frac{b+a}{2}$
  - 此时切比雪夫点的计算公式就转变为：

$$x_i = \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n} + \frac{b+a}{2} \text{ for } 1 \le i \le n$$

- 此时$|(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \le \dfrac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$在区间$[a,b]$上满足