绪　论

物理学是一门实验科学。实验可以创造高温、低温、高压、高真空等一些特殊的条件来研究物质在特殊环境下的各种属性，还可以对产生各种现象的条件进行严格、精密的控制，实验中出现的现象可借助各种仪器进行观测，而且，实验具有复现性的特点。物理概念的建立、物理规律的发现无不以严格的科学实验为基础，并不断受到科学实验的检验。先于实验的物理理论最终也必须由物理实验来验证。因此，物理实验是物理学在认识物质世界的进程中发现新的事实、总结新的规律、检验新的理论的重要工具。

物理学是自然科学的基础，不论是医学、化学、生物学，还是材料科学、信息或能源技术等，其发展都与物理实验密切相关。从光学、电子、X 光、原子力等各类显微镜的应用，到激光、放射性、核磁共振等诸多测量手段，无不显示出物理实验从物理基础理论到其他应用学科的桥梁作用。物理实验的理论、方法、手段是各类实验中最基本、最普遍的理论、方法和手段，是后续各科实验课程必不可少的基础。不论是理科学生，还是工科、医科等其他专业的学生，重视和学好物理实验课程都是十分重要的。

一、物理实验课程的目的与任务

大学物理实验是继物理理论课后单独开设的一门基础实验课程。它和物理理论课有着密切的关系，但又自成体系。物理实验课程的内容不同于一般的探索性的科学实验研究，课程中开设的必修实验题目，每一个都经过了精心的设计和安排。该课程的主要目的是通过物理实验的基本理论、基本方法和基本技能的训练，使学生从理论和实际的结合上加深对物理理论的理解；通过在实验中不断地分析、解决实际问题，培养学生实事求是、严谨踏实、勇于探索、善于钻研的科学品质和从事科学实验的初步能力。

大学物理实验课程的主要任务是：

1. 通过对物理实验现象的观测和分析，加深对一些重要的物理概念、物理规律的认识和理解。学习运用理论指导实验。
2. 掌握基本物理量的测量方法和实验操作的基本技能。通过阅读教材或资料，了解基本测量仪器的构造原理和性能，熟悉其用途和使用方法；能抓住实验原理和实验方法的要点，正确地进行实验操作和数据记录。
3. 学会使用常用的数据处理方法来研究物理现象、总结物理规律和检验物理理论，分析、判断和评价实验结果，撰写合格的实验报告。
4. 初步学会根据实验目的和要求查阅相关文献资料，确定实验的思路与方案，正确选择和使用仪器，设计和完成一些不太复杂的实验任务。
5. 不断提高观察和思考能力，养成实事求是、一丝不苟的科学态度和积极创新的科学精神。

二、物理实验课程的基本程序和要求

在物理实验课程中，每一个实验项目的完成都要经过预习、实验操作和撰写报告三个基本程序，其要求如下：

1. 认真地做好预习

为了保证实验的顺利进行并达到预期效果， 在实验前必须仔细阅读实验教材或相关资料（观看可供预习的 CAI 课件，或去实验室熟悉仪器设备状况等），了解实验的目的和要求。在基本弄懂实验原理、实验方法和仪器设备的基础上，写出预习报告。预习报告是实验报告的重要组成部分，应在统一印制的实验报告纸上书写。

预习报告的主要内容为：

1） 实验目的；

2） 实验原理（包括原理图、实验的电路图或光路图、测量和计算所依据的公式等），原理应在理解的基础上用自己的语言简明扼要地阐述；

3） 记录测量数据的表格。

2. 正确地进行实验操作

1) 进入实验室前必须详细了解实验室的各项规章制度。

2) 实验开始前应先记录所用主要仪器的编号和规格，并按实验要求对仪器进行安装和调试。

3) 使用任何仪器前，必须先阅读仪器说明书，了解使用注意事项；对于精密贵重的仪器或元件，特别要稳拿妥放，防止损坏；电学仪器务必检查无误后才可通电。

4) 在实验过程中，应该认真仔细地观察现象，及时、正确地读取数据，并用有效数字正确地记录数据（数据的最后一位为误差位）。

5) 实验中的原始数据要直接、如实地记录在预习报告中的数据表格内，不应先记在书或草稿纸上，决不能篡改、伪造实验数据，也不能任意涂改或抛弃测量数据。

6) 原始数据不要用可以擦改的铅笔记录。若实验数据确需更正时，应在错误数据上划一道线，在旁边写上更正后的数据。保留错误数据的笔迹，可为实验后的结果分析提供参考。

7) 在实验过程中不能急于求成，出现问题和遇到困难时，不要害怕和急躁，认真分析后仍解决不了的问题，要及时报告指导教师，不要自行更换实验场地或实验仪器。

8) 在完成全部测量后，要将原始数据交给指导教师审阅签字，得到确认后，再动手拆除并整理仪器装置。

3. 独立地完成实验报告

测量完毕之后，应在预习报告的基础上，应用误差理论及数据处理等方面的知识，及时对实验数据进行分析和处理，计算出测量结果，完成实验报告。

实验操作以后续写的实验报告内容主要包括以下几个方面：

1） 实验的测量内容和完成实验的主要步骤；

2） 实验中使用的仪器设备（包括型号、主要规格和编号等）、实验条件（包括室温、气压等与实验有关的外部实验环境）、实验对象(样品名称、来

源及其编号等)；

3） 数据处理与结果（包括测量数据的整理及图表，根据公式计算的测量结果及不确定度，实验结果的完整表达。计算要写出公式和代入原始数据的计算过程，结果要注意有效数字和单位，图要绘制在坐标纸上）。

4） 对实验的分析和讨论（对实验原理的新认识、实验中观察到的现象分析、对实验结果的评论和误差原因分析，讨论实验中、教材里或教师教学上存在的问题、改进的途径及建议，实验后的体会，对实验思考题的讨论等）。

三、测量误差及数据处理的基础知识

下面介绍的测量误差估计、实验数据处理和实验结果的表示等内容是今后从事科学实验必须了解和掌握的，希望同学们能够在初步学习的基础上，通过每一个实验的具体运用加以掌握。

1. 测量的分类

物理实验是以测量为基础的，研究物理现象、了解物质特性、验证物理原理都要进行测量。测量的本质是把被测量和标准量进行比较，从而确定被测物理量的数值和单位。

1）直接测量和间接测量

按获得测量结果的手段不同，测量分为直接测量和间接测量。

在测定某一物理量时，只需借用预先标定好的仪器便能直接从仪器上读出该量的大小，这种测量叫做直接测量。例如用万用表测量电阻的阻值，就是直接测量。

在测定某一物理量时，不是借助测量仪器直接从仪器上读出该量大小，而是先测定一些辅助量，然后利用直接测量量与被测量之间已知的函数关系推算出该量，这种方法叫间接测量。例如测量小球体积时，直接测量的是小球的直径，根据公式计算出来的小球体积就是间接测量量。

2) 等精度测量和非等精度测量

对某一物理量重复地多次测量，按测量条件的不同，测量分为等精度测量和非等精度测量。

假若每次测量的条件都相同，即由同一观察者，按照同一方法，用同一仪器，在同一环境下测量，每次测量的精确程度是相同的，这种测量叫做等精度测量。如果在对某一物理量作多次测量时，有任何一个测量条件发生了变化，我们就称这种测量为非等精度测量。

因为等精度测量的数据处理比较容易，在本课程中对每一个物理量的多次测量，如无特殊说明，都是指等精度测量。

2．测量误差

在具体测量时，由于测量方法、测量仪器、环境条件、人的观察能力等都不能做到绝对严密，使得测量值永远只能是被测物理量真值（客观存在的真实量值）的近似。也就是说，没有误差的测量结果是不存在的。

由于误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中，被测物理量的真值

是一个理想概念，因此，在实际测量中常用被测量的理论计算值、公认的基本常数值或已修正过的算术平均值等来代替真值，这些值统称为约定真值。

我们将测量值与真实值之差称为绝对误差，绝对误差与真值的比值称为相对误差。由于真值并不知道，因此定义测量值与约定真值之差为测量误差。

即：　绝对误差＝测量值一被测量的真值

$$相对误差（又称为百分误差）= \frac{绝对误差}{真值} \approx \frac{测量值 - 约定真值}{约定真值}$$

测量误差的大小反映的是测量结果的准确程度。绝对误差可以反映对同一被测量的测量结果的优劣，即偏离真值的大小和方向；相对误差则可以比较出对不同被测量的测量结果的优劣，反映出绝对误差对测量结果的影响。

3．误差的分类

测量误差据性质和产生原因的不同，主要分为系统误差和随机误差两类。

1）　系统误差

在等精度测量条件下，多次测量同一物理量，保持恒定或按某一确定规律变化的测量误差，称为系统误差。

如果测量原理本身具有近似性，或测量的方法和理论的要求有出入，仪器制造不够精密、安装调节不妥或没有按规定条件使用，实验环境或条件(如温度、湿度、气压、电场、磁场、光照、辐射等)有规则的变化，实验者缺乏经验（如读取仪表示值时眼睛没有对准指针或准线，总是偏向某一方来读数）等，都会引起系统误差。

在整个测量过程中，误差的大小和符号保持不变的叫已定系统误差。假如实验前未对仪器进行零点调节，就会使测量结果内产生已定系统误差。只知道其存在的大致范围,而不知道其具体数值的系统误差，称为未定系统误差。仪器的允差就属于未定系统误差（部分常用实验仪器的允差见表 1）。未定系统误差随实验条件的

表 1　　部分常用实验仪器的允差

量具	量程	最小分度值	最大允差
钢板尺	500mm 1000mm	1mm 1mm	$\pm 0.15\ mm$ $\pm 0.20\ mm$
游标卡尺	125mm	0.02mm 0.05mm	$\pm 0.02\ mm$ $\pm 0.05\ mm$
螺旋测微器	0~25mm	0.01mm	± 0.004 mm
电子天平	100g 500g	0.1mg 1mg	$\pm 1mg$ $\pm 10\ mg$
普通温度计 精密温度计	0~100^{0}C 0~100^{0}C	1^{0}C 0.1^{0}C	$\pm 1^0 C$ $\pm 0.1^0 C$
指针式电表			量程×准确度等级/100
数字电压表			$\pm$（$a\% \bullet$ 读数　+ 几个字） “$a\% \bullet$ 读数　”为读数误差 “几个字”为使用该量程时的最小误差

变化往往具有一定程度的随机性质,可以对它进行概率估计。

要找出系统误差，需要对整个实验所依据的原理、方法、测量步骤及所用仪器等可能引起误差的各种因素进行分析。由于系统误差的特点是确定性和有规律性，因而不能用增加测量次数的方法使它减小。可以通过校准仪器、改进实验装置和实验方法、稳定实验条件和排除环境影响、提高实验修养、找出修正值、对测量结果进行理论上的修正等，将系统误差减少到最低限度。

2）随机误差

随机误差是指在等精度测量条件下，多次测量同一被测量时，以不可预知的方式变化着的测量误差。实验装置在各次调整操作上的变动、测量仪器指示数值的变动以及观测者本人在判断和估计读数上的变动等实验中各种因素的微小变动性，都会引起测量值围绕着测量的平均值发生有涨落的变化，这个变化量就是各次测量的随机误差。

随机误差的出现，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的。

实践和理论均可证明，在相同条件下，对一个物理量 x 进行重复测量，测量值总是在其真值 X 附近，越靠近 X，出现的概率越大。当测量次数 $n\rightarrow\infty$ 时，随机误差服从正态分布，其形状如图 1 所示。横坐标表示测量误差△N，纵坐标 $f(\Delta N)$ 称为概率密度函数，表示在误差值△N 附近，单位误差间隔内误差值△N 出现的概率。应用概率论的数学方法可导出

$$f(\Delta N)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta N^2}{2\sigma^2}}\quad (\text{其中}\triangle N=x-X) \tag{1}$$

式中 σ 是一个与实验条件有关的常数，称为标准差,它的大小表征测量值的分散程度。任意测量值的标准差，可由下式计算

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{2}$$

对于一确定的测量列，如果真值 X 和标准差 σ 已知，对（1）式进行定积分,则可计算出测量值 x 出现在任意区间内的概率。在概率论中,x 落在(-σ,+σ)、(-2σ，+2σ)、（-3σ，+3σ）区间的概率分别为 68.3%,95.4%和 99.7%。上述区间称为置信区间,其相应的概率称为置信概率。显然，置信区间扩大，则置信概率提高。

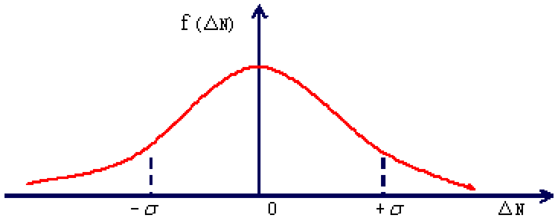

图 1

由图 1 可见，服从正态分布

的随机误差具有如下特性：

A. 单峰性：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

B. 对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

C. 有界性：绝对值很大的误差出现的概率接近零。

根据随机误差服从统计规律的特点，实验中可以采用统计的方法去减小随机误差的影响。

4. 测量的不确定度

由于在实际测量中无法确定真值，国内外对于测量结果中误差的表述、运算规则等存在着不统一，影响了国际间的交流和成果的利用。自从国际计量局在《实验不确定度的规定：建议书 INC（1980）》中提出使用“不确定度”表示实验结果的误差后，世界各国普遍采纳。不确定度的权威文件是国际标准化组织(ISO)、国际计量局(BIPM)等七个国际组织 1993 年联合推出的《测量不确定度表示指南》(Guide to the expression of Uncertainty in measurement 简称 GUM)。

为与国际接轨，自 1999.5.1 起，我国开始执行新的计量技术规范《测量不确定度评定与表示》（JJF1059-1999），在此计量技术规范中对测量不确定度有严格的要求。作为基础物理实验教学，只要求同学们初步了解下列基本概念：

测量不确定度：表示由于测量误差的存在而对测量值不能肯定的程度，即测量结果不能肯定的误差范围。每个测量结果都存在不确定度，作为完整的测量结果不仅要标明其量值的大小，还要标出测量的不确定度，以表明该测量结果的可信赖程度。

标准不确定度：用标准差表示的测量不确定度，记为 u。

标准不确定度一般分为三类：

A类不确定度：多次重复测量用统计方法得到的不确定度，记为$u_{A.}$。

B类不确定度：用非统计方法计算的不确定度，记为u_B。

合成不确定度：某测量值的 A 类与 B 类不确定度按一定规则运算后得出的测量结果的标准不确定度。

1） 直接测量量不确定度的评定

①A 类不确定度

假定对某一物理量进行 n 次等精度测量，测量值分别为 x_1、x_2、x_3…… x_n，则它们的平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (3)$$

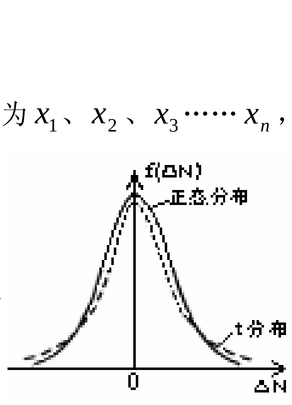

图 2 t 分布与正态分布比较

设测量值中无系统误差，则随机误差的算术平均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-X=\bar{x}-X$$

当 n$\rightarrow\infty$， $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ \Delta N_i \rightarrow 0$ （ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i$ =0），

即随机误差的算术平均值随着测量次数的增加而减小，最后趋于零。因此 $\bar{x}\rightarrow X$（测量的平均值等于真值）。

由于实际中只能作有限次测量，故实际测量的平均值只是该测量量的近真值。这时测量误差不完全服从正态分布规律，而是服从 t 分布规律（也称为学生分布，见图 2）。当 n$\rightarrow\infty$时，t 分布趋近于正态分布。所以，可用多次测量的算术平均值作为近真值的最佳值。

平均值的 A 类不确定度为 $$u_A(\bar{x}) = t\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = t\times\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad (4)$$

t 是当测量次数 n 不满足正态分布而必须考虑的 t 分布修正因子。它与测量次数和置信概率有关[置信概率是指真值落在 $\bar{x}\pm u_A(x)$ 范围内的概率，用 P 表示]。下表给出的是同一置信概率下 t 与 n 的关系。

表 2 P=0.683 时,不同测量次数下 t 因子的值

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	∞
$t_{0.683}$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.03	1.02	1.01	1.00

②B 类不确定度

由于仪器误差$\Delta_{仪}$、测量估计误差$\Delta_{估}$的存在，一个测量量可能有多个B类不确定度分量 u_{B1}， u_{B2}， …u_{Bn}， 如果这些分量相互独立，则 $u_B = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + \ldots u_{Bn}^2}$

仪器误差$\Delta_{仪}$是指在规定条件下正确使用仪器时，仪器的示值与被测量的真值之间可能产生的最大误差。仪器出厂时，在说明书中$\Delta_{仪}$通常采用下列两种方式进行注明：

一是直接给出$\Delta_{仪}$，如一般的螺旋测微器，最大允差为±0.004 mm。

二是给出仪器的准确度等级，如中华人民共和国国家标准《GB 776-76 电测量指示仪表通用技术条件》将仪表按准确度分为 0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5、5.0 七级。在规定条件下使用时，电表的最大允差根据下式计算

$$\Delta_{仪} = \pm\ 量程\times准确度等级\%$$

由于仪器误差在[-△仪，+△仪]范围内是按一定概率分布的，由分布函数的性质可知

$$u_{B仪} = \Delta_{仪} / C$$

式中 C 称为置信因子，其值与仪器误差的概率分布有关，正态分布 C=3，均匀分布 $C=\sqrt{3}$。

鉴于目前人们对仪器误差分布的认识还不统一，实际测量中对某些仪器的误差难以确定其分布性质，因此在本课程中采用简化方法，取 $\Delta_{仪}$ 代替仪器的不确定度。即

$$u_{B仪} = \Delta_{仪}$$

③合成不确定度：

将 A、B 类不确定度按方和根合成，就得到直接测量值的合成不确定度

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

不确定度的大小表示测量结果可信赖程度的高低，不确定度越小，标志着误差的可能值越小，测量结果可信赖程度越高。

求直接测量量不确定度的主要步骤可归结如下：

⑴求出测量数据列的平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

⑵求出标准差 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

⑶求出算术平均值的 A 类不确定度

$$u_A(\bar{x}) = t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = t \times \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

⑷根据测量情况和简化约定得出 u_B：

$$u_B = \sqrt{\Delta^2_{仪} + \Delta^2_{估}}$$

若 $\Delta_{估} >> \Delta_{仪}$， 则 $u_B = \Delta_{估}$

⑸求出合成标准不确定度 $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$

2）间接测量量不确定度的评定

直接测量所得的结果都是有误差的，那么由直接测量值经过函数运算所得的间接测量值也必然有误差。由于误差的传递，直接测量结果的不确定度直接影响到间接测量结果。

设间接测量量 N 与各独立的直接测量值 x，y，z……等有下列函数关系：

$$N= f(x,y,z\cdots\cdots)$$

则间接测量量（其与直接测量量的函数关系为和差形式时）的不确定度的传递公式为：

$$u_N=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2u_x^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2u_y^2+\cdots\cdots(\frac{\partial f}{\partial u})^2u_u^2}$$

间接测量量与直接测量量的函数关系为积商形式时的不确定度的传递公式为：

$$\frac{u_N}{N}=\sqrt{(\frac{\partial\ln f}{\partial x})^2u_x^2+(\frac{\partial\ln f}{\partial y})^2u_y^2+\cdots\cdots(\frac{\partial\ln f}{\partial u})^2u_u^2}$$

（$\frac{u_N}{N}$称为相对不确定度）

求间接测量量不确定度的主要步骤可解析为:

⑴对函数式求微分（或先取对数后再微分）；

⑵合并同类项；

⑶系数取绝对值,并将微分号改为不确定度的符号“u”；

(4) 求平方和后，再开平方。

若只需粗略估计不确定度的大小，则完成前三步即可，此时由算术合成法则得到的不确定度值称为最大不确定度。常用函数的最大不确定度算术合成公式见表3。

表 3　　常用函数的最大不确定度算术合成公式

物理量的函数式	不确定度 U	物理量的函数式	相对不确定度 U/N
N=x±y	Δx+Δy	N=kx(k 为常数)	Δx/x
N=sin x	cos x•Δx	$N=x^n$, n=1, 2, 3, …	n(Δx/x)
N=tg x	$\Delta x/\cos^2 x$	N=x•y	(Δx/x)+(Δy/y)
N=ln x	Δx/x	N=x/y	(Δx/x)+(Δy/y)

5. 有效数字及其运算规则

1）有效数字的概念：

任何测量只能达到一定的精确度，因此，在对含有误差的测量数据进行处理和运算时，如果对这些数值的尾数任意取舍，将会增加误差。所以，在对测量做数据记录或进行数值运算时，为达到准确迅速的目的，就必须了解有效数字及其运算规则。

如用米尺量一细丝的长度，细丝的末端没有刚好落在最小分度的刻度线上，因此在读数时就需要估计最小分度的下一位数值。所读得的数值若是 79.6 毫米。

“79”是从刻度尺上准确读出的，叫做可靠数字。 “6”（即 0.6）是估读出来的，是有误差的，叫做存疑数字。测量结果中所有的准确数字和一位存疑数字统称为有效数字。有效数字的最后一位是误差所在位。

书写有效数字时应注意有效数字的位数与小数点位置无关；单位改变时，有效数字的位数不应发生变化，尤其在把大单位换成小单位时，为保证有效数字位数不变，应用科学记数法书写。在小数点前只写一位数字，用 10 的不同次幂表示。

例如： $1.8m = 1.8 \times 10^{-3} km = 1.8 \times 10^{3} mm$

2）直接测量的读数规则

在物理实验中，用仪器直接测量一物理量，其测量值应估读到仪器最小刻度的下一位，直接测量值应是有效数字。有效数字位数的多少，直接反映测量的准确度，也反映所使用仪器的精度。

在用数字式仪表进行测量时，一般应直接读取仪表的示值。仪表显示数字中不变的部分和变化数字的首位都是有效数字。变化数字的具体数值应根据出现的频繁程度决定。

3）有效数字的运算规则

间接测量结果要通过运算才能得出，这就经常会遇到有效数字位数不同的几个数据之间的运算和运算结果应有几位有效数字的问题。

有效数字运算的一般规则是：

⑴可靠数与可靠数运算结果仍为可靠数。

⑵存疑数与任何数运算，结果为存疑数，但进位数为可靠数。

⑶运算过程可保留两位存疑数，但最后运算结果只保留一位存疑数。

加减运算 结果的有效数字的小数位，应与参与运算的各量中小数位最高的对齐。

例如：2.43+5.717+0.0333=8.18

乘除运算 结果的有效数字位数跟参与运算各量中有效数字位数最少的相同，但当运算结果的第一位数为 1、2、3 时，有效数字位数多取一位。

例如：85.0×1.455=123.7

物理常数和纯数学数字参与运算，不影响测量结果的有效数字位数。

4）有效数字的取舍规则（本课程中采用简化约定）

①不确定度的有效数字

测量结果的不确定度采用“只入不舍”的原则，取一位有效数字（相对误差取两位）。

②测量值最后结果的有效数字

测量值最后结果的有效数字尾数与不确定度的尾数取齐，取舍原则为“四舍六入五凑偶”。即尾数小于五则舍，大于五则入，等于五时通过取舍将前一位凑成偶数，从而使尾数“入”与“舍”的几率相等。

例如：

116.50　　取 3 位有效数字为　　116
115.50　　取 3 位有效数字为　　116
116.51　　取 3 位有效数字为　　117

5）测量结果的表示

要完整地表示一个物理量，必须有数值、单位和不确定度这三个要素。

①直接测量结果的表示

根据所用的置信概率，测量结果的最终表达式为

$$x = \bar{x} \pm u_X \quad (P=0.683) \qquad E = \frac{u_X}{\bar{x}} \times 100\%$$

式中 $\bar{x}$ 为不含系统误差的测量结果，通常就是测量列的平均值，对单次测量即为测量值。不确定度 u_X 取一位有效数字，平均值或单次测量值的最后一位与之对齐。E 为相对不确定度。

②间接测量结果的表示

间接测量结果的表示与直接测量结果的表示相同，即

$$N = \overline{N} \pm u_N \quad (P=0.683) \qquad E = \frac{u_N}{\overline{N}} \times 100\%$$

间接测量结果的有效数字位数也由不确定度决定，即不确定度传递计算结果只保留一位，测量值运算结果的最后一位与不确定度所在位对齐。

[例题]　为测某圆柱体体积，用游标卡尺（125mm，0.02mm）测得其外径和高度的数据如下表所示，试求圆柱体体积V及相对不确定度E_V。

测量次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
外径 D (cm)	6.004	6.002	6.006	6.000	6.000	6.000	6.006	6.004	6.000	6.000
高度 H (cm)	8.096	8.094	8.092	8.096	8.096	8.094	8.094	8.098	8.094	8.096

[解] $V = \frac{1}{4}\pi D^2 H$

外径：$\sigma_D = \sqrt{\frac{\Sigma(D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(6.004-6.0022)^2 + \cdots + (6.000-6.0022)^2}{10-1}}$

$= 0.0020(cm)$

$$u_{DA} = t\times\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = 1.06\times\frac{0.0020}{\sqrt{10}} = 0.00067\,(\mathrm{cm})$$

高度：$\overline{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(8.096 + 8.094 + 8.092 + 8.096 + \cdots) = 8.0950\,(cm)$

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\Sigma(H_i - \overline{H})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(8.096-8.0950)^2 + \cdots + (8.096-8.0950)^2}{10-1}}$$
$$= 0.0017(cm)$$

$$u_{HA} = t\times\frac{\sigma_H}{\sqrt{n}} = 1.06\times\frac{0.0017}{\sqrt{10}} = 0.00057(cm)$$

根据所使用的游标卡尺，可知 $\mu_B = \Delta_{仪}$ 即 $\mu_{DB} = \mu_{HB} = 0.002cm$，

因此

$$u_D = \sqrt{u_{DA}^{\ 2} + u_{DB}^{\ 2}} = \sqrt{0.00067^{\ 2} + 0.002^{\ 2}}$$
$$= 0.0021\ (cm)$$
$$u_H = \sqrt{u_{HA}^{\ 2} + u_{HB}^{\ 2}} = \sqrt{0.00057^{\ 2} + 0.002^{\ 2}}$$
$$= 0.0021\ (cm)$$

$$D = \overline{D} \pm u_D = (6.002 \pm 0.003)cm$$
$$H = \overline{H} \pm u_H = (8.095 \pm 0.003)cm$$
(P=0.683)

于是 $\overline{V} = \frac{1}{4}\pi\overline{D}^2\overline{H} = \frac{1}{4}\times 3.1416\times(6.002)^2\times 8.095 = 229.03(cm^3)$

因为 V 为积商形式的运算，先计算相对不确定度较简便。故先对运算公式取对数

$$\ln V = \ln\frac{\pi}{4} + 2\ln D + \ln H$$

再微分，得 $\frac{dV}{V} = 2\frac{dD}{D} + \frac{dH}{H}$

符号改变后，整理得 $\frac{u_V}{V} = \sqrt{(2\frac{u_D}{D})^2 + (\frac{u_H}{H})^2}$

所以

$$\frac{u_V}{V} = \sqrt{\left(2\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_H}{H}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(2\times\frac{0.003}{6.002}\right)^2 + \left(\frac{0.003}{8.095}\right)^2} = 1.1\times 10^{-3}$$

由此得 $u_V = V\cdot\frac{u_V}{V} = 229.03\times 0.0011 = 0.25(cm^3)$

故圆柱体体积和相对不确定度为

$V = \overline{V} \pm u_V = (229.0 \pm 0.3)cm^3$

$E_V = \frac{u_V}{\overline{V}}\times 100\% = \frac{0.25}{229.03}\times 100\% = 0.11\%.$

6. 数据处理的基本方法

科学实验的目的或是为了找出事物内在规律性，或是为了检查某种理论的正确性，或是为以后的进一步研究、实验提供依据。因而对实验测量收集的大量数据资料必须进行正确的处理。数据处理是指从获得数据起到得出结论为止的整个加工过程，包括记录、整理、计算、作图、分析等多个方面。

下面介绍的是几种常用的数据处理方法。

1）列表法

在记录和处理数据时，将数据排列成栏目清楚、行列分明的表格形式，简明醒目，既有助于表示物理量之间的对应关系，也有助于检验和发现实验中的问题。

数据在列表处理时，应该遵循简明、齐全、有条理的原则：

①栏目均应标明物理量的名称及单位，表中各符号所代表的意义都应有相应的说明，必要时还应加上一个表名。

②列入表中的数据主要应是测量时记录的原始数据。

③确定各待测量在表格中的位置时，应充分注意数据间的联系和测量的顺序。若是函数测量关系的数据表，应让自变量与因变量在表中一一对应。

2)作图法

作图法是研究物理量之间变化规律的重要手段，它具有形象直观、简单方便的优点。要使图线能清楚地、定量地反映出物理现象的变化规律，并能准确地从图线上确定某些物理量值或求出有关常数，作图时不仅应根据具体实验情况选取合适的坐标纸（如直角坐标纸、对数坐标纸、半对数坐标纸、极坐标纸等），并应遵守如下规则：

①若是函数测量关系的图表，应取自变量为横坐标、因变量为纵坐标。画出纵、横坐标轴后，要标出坐标轴的方向，标明坐标轴代表的物理量及单位。

②为使图线能比较对称地充满所选用的整个图纸，坐标轴的分度值不一定从零开始，但坐标分度要均匀。原则上实验数据中的可靠数字在图中也是可靠的，而最后一位的存疑数字在图中亦是估计的。即标记所用的有效数字位数应与原始数据的

有效数字位数相同。坐标分度值的选取还要易于读图或计算（禁忌用 3、7 等数字或以实验点的测量数据进行分度）。

③根据测量数据，用“+”在图中标出每个测量点，使与实验数据对应的坐标准确地落在“+”的中心。并根据各点的分布情况，用直尺或曲线尺连成光滑的直线或曲线。要尽可能使所绘的图线通过较多的测量点，不通过图线的测量点（严重偏离图线的个别点除外）应匀称地分布在图线的两侧，且尽量靠近图线。

④在一张图纸上作多条曲线时，不同实验数据组的测量点应使用不同的符号来表示。利用所作直线求斜率时，应在实验数据范围以内选取靠近直线两端的非测量点。取点的符号应有别于测量点的符号，并在其旁标以坐标。

⑤要用铅笔作图，标点和连线都要细而清晰。有关的计算不要写在图纸上。在图纸的空白位置注明温度、湿度等实验条件和截距、斜率等某些参数，在图纸下方，标出图线的名称、作者、作图日期等某些必要的说明。

数据点拟合成图线后，根据图线可进一步求出该实验物理规律的解析方程。

例如：图线为直线，线性方程的一般形式为：$y=b+ax$。将图中所选的两点坐标值代入方程，可得出直线斜率a和直线在 y 轴上的截距 b 分别为

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$$

3)逐差法

逐差法是物理实验中常用的数据处理方法。一般用于等间隔线性变化测量中所得数据的处理。由误差理论可知，为了减少偶然误差，在实验中都是尽量进行多次测量。但在等间隔线性变化测量中，若采用一般的求平均值的方法，却无法反映出多次测量能减少偶然误差的特点。

例如：用受力拉伸法测定弹簧倔强系数 k。已知在弹性限度范围内，伸长量与所受拉力之间满足 F=kx的关系。通过增加负荷，等间距地改变拉力，测量得到的一组数据如下：

用受力拉伸法测定弹簧的倔强系数

测量次数	1	2	3	4	5	6	7	8
负荷F（$\times 9.8\times 10^{-3}$N）	0	2	4	6	8	10	12	14
标尺读数x_i（10^{-3}m）	0.00	1.50	3.02	4.50	6.01	7.50	9.00	10.50
伸长量$\Delta x=x_{i+1}-x_i$（10^{-3}m）		1.50	1.52	1.48	1.51	1.49	1.50	1.50

由标尺读数逐项相减得到的伸长量可判断出△x_i基本相等，即伸长量与所受的拉力为线性关系。

但是，如果要求弹簧在负荷 $2\times 9.8\times 10^{-3}$N作用下的平均伸长量$\overline{\Delta x}$，用标尺读数逐项相减再求平均值时，有：

$$\overline{\Delta x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}{n}=\frac{(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+\cdots\cdots+(x_7-x_6)+(x_8-x_7)}{7}$$

$$=\frac{(x_8-x_1)}{7}=\frac{(10.50-0.00)\times 10^{-3}}{7}=1.50\times 10^{-3}(m)$$

可见，只有始、末两次测量值起作用，所有中间值全部抵消，与增加负荷 14 ×9.8×10^{-3}N的单次测量等价。

为了保持多次测量的优点，这时可以采用逐差法进行数据处理。

将上列等间隔连续测量的数据分成前后两组（ x_8,x_7,x_6,x_5 ）和（x_4,x_3,x_2,x_1），然后对应项相减（逐差）求平均值，这样各次测量数据全部都用上了。可得

$$\overline{\Delta x}=\frac{1}{4\times 4}[(x_8-x_4)+(x_7-x_3)+(x_6-x_2)+(x_5-x_1)]$$

逐差法可以充分利用测量数据，保持了通过多次测量、减少偶然误差的的优点。当一元函数可以写成多项式形式，即 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$，且自变量 x 是等间距变化时，都可以采用逐差法进行数据处理。

4)最小二乘法

虽然作图法便利、直观，但在图纸上人工拟合直线(或曲线)时有一定的主观随意性，人工拟合的直线往往不是最佳的。若再根据图线确定常数，附加误差有时很明显。因而作图法只是一种粗略的数据处理方法。

由一组实验数据找出一条最佳的拟合直线(或曲线)，常用的方法是最小二乘法。最小二乘法是一种根据实验数据求未知量最佳估值的方法，所得的变量之间的相关函数关系称为回归方程，所以最小二乘法线性拟合亦称为最小二乘法线性回归。

最小二乘法的原理是：若最佳拟合的直线为$Y=f(x)$，则所测各 y_i 值与拟合直线上相应的点$Y_i=f(x_i)$之间的偏差的平方和为最小，

即 $$s=\sum(y_i-Y_i)^2\to\min$$

由于此数据处理的方法是要满足偏差的平方和为最小，故称最小二乘法。

下面只讨论用最小二乘法进行一元线性拟合问题。以直线方程 $y=b+ax$ 为例。因为确定了斜率a和截距b也就确定了直线。所以线性回归就是由实验数据组（x_i,y_i）确定a和b的过程。

因为x_i和y_i均为测量值都含有误差。为讨论简便起见，假设各x_i值的测量误差很小，而主要的误差都出现在y_i上。将直线方程$y=b+ax$代人上式，

得 $$s(a,b)=\sum[y_i-(b+ax)]^2\to\min$$

所求 a 和 b 应是下列方程组的解：

$$\frac{\partial s}{\partial a}=-2\sum(y_i-b-ax_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial b}=-2\sum(y_i-b-ax_i)=0$$

其中 Σ 表示对 i 从 1 到 n 求和。

将上式展开，消去未知数 b，可得直线斜率：

$$a=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$$

将求得的 a 值代入方程组，可得截距：

$$b=\bar{y}-a\bar{x}$$

斜率 a 和截距 b 求出后，所需拟合的直线方程 $y=b+ax$ 就被唯一地确定了。

直线拟合的任务就是用数学分析的方法从观测到的数据中求出一个误差最小的最佳直线方程 $y=b+ax$。按这一最佳直线方程作出的图线虽不一定能通过每一个实验点，但是它以最接近这些实验点的方式平滑地穿过它们。

现在很多函数计算器有直接计算 a、b 的功能，操作很方便。在实验的数据处理中，可直接利用计算器的这些功能，不必进行繁琐的计算。

练习题：

一、. 改正下式中的错误，写出正确答案：

1. M＝(3050 ± 100)kg
2. L=(6371±1)km＝(6371000±1000)m
3. E=(2.865×10^{11} ±4.01×10^{9})N/m^2
4. V=(10.445 ± 0.011)V

二、推出下列公式的不确定度公式：

1、$v=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{Mgl}{m}}$

2、$R=\sqrt{R_1\cdot R_2}$

三、用量程为 500mm 的米尺测量一物体长度 L,测得数据为：38.98cm，38.96cm，38.97cm，38.95cm，38.97cm，38.96cm，38.97cm。试求 $\overline{L}$、u_L，并正确表达出测量结果。