



Universidade do Minho

# MathemaGrids Solver implementation using Z3 SMT Solver

José Pereira pg27748  
Marta Azevedo pg27763  
Tiago Brito pg27724

22 de Abril de 2015

# 1 MathemaGrids

O MATHEMAGRIDS é um puzzle onde o objectivo é preencher uma tabela  $m \times m$  com inteiros entre 1 e  $m^2$ , de tal maneira que cada um desses números aparece apenas uma vez.

Para além disso, a posição dos números deve respeitar as operações que já estão presentes no tabuleiro.

Neste relatório, pretendemos descrever de forma clara a nossa implementação.

Para isso vamos usar como exemplo o seguinte tabuleiro:

7	x		−		=	38
x		+		+		
	−		−		=	1
−		x		−		
	x		x		=	27
=		=		=		
55		72		6		

Neste exemplo, já é dada uma *hint*, o 7 que aparece na primeira linha, primeira coluna.

## **2 Implementação**

### **2.1 SMT Solver**

Como SMT-SOLVER estamos a usar o z3 Theorem Prover da Microsoft Research. Este, é usado em vários softwares de verificação formal.

### **2.2 Linguagem de Programação**

Como linguagem de interface com o z3 preferimos usar o PYTHON Z3PY devido à sua API fácil de usar e devido a ser uma linguagem simples e eficaz para o que queríamos fazer.

### **2.3 Interface Gráfica**

A nível de interface gráfica, após a pesquisa pelas mais diversas frameworks para python decidimos usar a KIVY v1.9.0.

KIVY trata-se de uma Framework multi-plataforma para python, correndo em Linux, Windows, OS X, Android e iOS que é grátis e se encontra sobre a MIT License. Além disto permite também utilizar os mais diversos protocolos e dispositivos como por exemplo WM Touch, WM Pen, Mac OS X Trackpad e Magic Mouse, etc.

Sendo também uma das principais vantagens o facto de ser "GPU Accelerated"

## 3 Estrutura

De forma ao projeto não se tornar muito complexo, foi feita a divisão por módulos, tendo os seguintes 4 módulos:

### 3.1 `gameGUI.py`

Este é o módulo responsável por toda a interface gráfica. É ele o principal, sendo quem inicializa o jogo e utiliza os restantes módulos de forma a executar as respetivas funções.

### 3.2 `generate_board.py`

Trata-se do módulo responsável por criar tabuleiros e gerar as suas soluções utilizando o Z3.

### 3.3 `parsing.py`

É o módulo responsável por fazer a leitura de um ficheiro de texto. Neste módulo está implementada uma Gramática(utilizando a biblioteca *pyparsing*) de forma a validar o input do ficheiro

### 3.4 `solveMathemaGrids.py`

Este trata-se de um módulo de suporte onde temos algumas funções auxiliares bem como a função que nos permite obter a solução de um tabuleiro lido de ficheiro.

## 4 Execução

Para a execução do programa basta executar na consola

```
$ python gameGUI.py
```

tendo atenção às seguintes dependências:

### 4.1 Python

Disponível já de raiz com o Linux e OSX, mas também disponível para Windows.

### 4.2 Kivy

Necessário *Kivy* v1.9.0 disponível no website <http://kivy.org/>

Para instalar:

```
$ sudo add-apt-repository ppa:kivy-team/kivy
```

```
$ sudo apt-get install python-kivy
```

### 4.3 Z3

Disponível em <https://github.com/Z3Prover/z3>

### 4.4 pyparsing

Disponível em <http://pyparsing.wikispaces.com/> e com instalação simples através do pip, bastando fazer

```
$ pip install pyparsing
```

## 5 Ficheiros input

Para representar um tabuleiro de MATHEMAGRIDs (o do exemplo) usamos o seguinte ficheiro de texto:

```
7*.-.=38
*,+,+
.-.-.=1
-,*,-
.*.*.=27
=,=,=,=
55,72,6
```

Os "." representam os espaços que têm que ser preenchidos com números e as ",", representam os espaços que, apesar de existirem no tabuleiro, não podem ser inseridos com números.

Também estão representadas as operações sendo o \* a multiplicação, o + a soma, - a subtração e / a divisão.

## 5.1 Codificação do MATHEMAGRIDs

Para codificar o puzzle, usamos as seguintes propriedades (descritas em <https://www.brainbashers.com/mathemagrids.asp>):

1. Usar todos os dígitos de 1 a  $m * m$  (no nosso exemplo, até 9);
2. Nenhum número pode ser repetido;
3. As operações são feitas da esquerda para a direita e de cima para baixo, sendo a ordem de prioridade normal da matemática ignorada;
4. Não podem existir divisões por 1 nem multiplicações por 1;
5. Em nenhum ponto, os resultados intermédios do cálculo são valores inferiores a zero.

As variáveis *x\_membros* e *y\_membros* representam a quantidade de espaços em que o jogador pode inserir números nas linhas e nas colunas respetivamente. As regras usadas são:

1. `max_size = [And(1 <= x[j][i], x[j][i] <= size * size)  
for i in range(size) for j in range(size)]`
2. (No ficheiro `generate_board.py`)  
  
`unique = [Distinct([x[j][i] for i in range(size) for j in range(size)])]`
3. Para garantir que as operações são feitas na ordem correta, escrevemos as equações horizontais e verticais que, neste exemplo são :

- **Equações Verticais:**

$$\begin{aligned}(7 * x_{1_2}) - x_{1_3} &= 55 \\ (x_{2_1} + x_{2_2}) * x_{2_3} &= 72 \\ (x_{3_1} * x_{3_2}) - x_{3_3} &= 6\end{aligned}$$

- **Equações Horizontais:**

$$\begin{aligned}(7 * x_{2_1}) - x_{3_1} &= 38 \\ (x_{1_2} - x_{2_2}) - x_{3_2} &= 1 \\ (x_{1_3} * x_{2_3}) * x_{3_3} &= 27\end{aligned}$$

4. 

```
not_one_exceptions = []  
for i in range(len(board)):  
    for j in range(len(board[i])):  
        if str(board[i][j]) == "/" or str(board[i][j]) == "*":  
            if i % 2 == 0:  
                not_one_exceptions.append(Not(x[i/2][(j+1)/2] == 1))  
            else:  
                not_one_exceptions.append(Not(x[(i+1)/2][j/2] == 1))
```

5. Como a operação crítica para isto acontecer é apenas a subtração:

```

bigger_than_zero = []
for i in range(len(board)):
    for j in range(len(board[i])):
        if i % 2 == 0:
            if board[i][j] == '-':
                if j == 1:
                    bigger_than_zero.append(Not(x[i/2][(j-1)/2] - x[i/2][(j+1)/2] < 0))
            else:
                equation = ""
                for n in range(j):
                    if n > 2 and str(board[i][n]) != "." and not(board[i][n].isdigit()):
                        equation = "("+equation+")"+str(board[i][n])
                    else:
                        if board[i][n] == "." or board[i][n].isdigit():
                            equation += "x["+str(i/2)+"]["+str(n/2)+"]"
                        else:
                            equation += board[i][n]
                equation = equation + "-" + "x["+str(i/2)+"]["+str((j+1)/2)+"]" + ">0"
                bigger_than_zero.append(eval(equation))

```

6. Esta regra serve para garantir que o  $y$  em  $x/y$  é um múltiplo do  $x$ . Caso contrário, por exemplo  $6/2 = 3 = 7/2$

```

multiple = []
for i in range(len(board)):
    for j in range(len(board[i])):
        if i % 2 == 0:
            if board[i][j] == '/':
                multiple.append(x[i/2][(j-1)/2] % x[i/2][(j+1)/2] == 0)
            else:
                if board[i][j] == '/':
                    multiple.append(x[(i-1)/2][j/2] % x[(i+1)/2][j/2] == 0)

```

No final, é enviado para o solver:

```
rules = unique+bigger_than_zero+not_one_exceptions+max_size+multiple
```

## 6 *generate\_board.py*

### 6.1 Hints

As hints foram adicionadas ao nosso projeto com o objetivo de ajudar o jogador a chegar mais rapidamente à solução. Como tal, na opção “*Settings*” podemos selecionar duas opções relativamente a este assunto:

1. Ativar hints

## 2. Hints preenchem apenas campos vazios

Se a **opção 1** estiver ativada, quando clicarmos em “*Hint*” no menu inicial é sugerido um número para um espaço (mesmo que este já tenha sido preenchido pelo utilizador).

Se ativarmos a **opção 2**, as sugestões são apenas dados em campos que não tenham sido preenchidos, mesmo que as opções que o utilizador inseriu estejam erradas.

## 6.2 Geração de tabuleiros

A geração de tabuleiros é feita recebendo como argumento o tamanho do tabuleiro e é criada uma matriz com esse tamanho. Por exemplo, para gerar um tabuleiro do mesmo tamanho que o exemplo, o número seria 3.

As operações estão guardadas num array e, de forma aleatoria, são colocadas na matriz.

A seguir, e em conjunto com as regras da secção **3.3** é enviada a matriz ao *solver*. Caso o problema seja satisfazível, é considerada essa matriz uma matriz válida. É enviada para uma função que calcula os valores que vão estar na última linha e última coluna (depois do =).

Depois do tabuleiro pronto, é enviado para um ficheiro de texto onde é armazenada com especificado na secção **3.1**.