
INICIO
GRABACIÓN

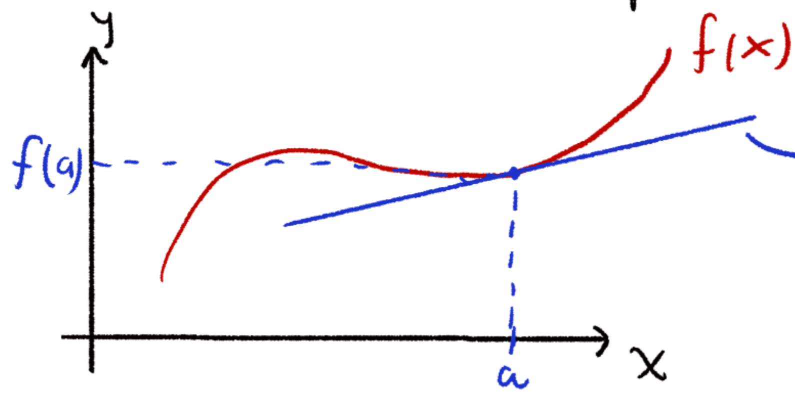
APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Definición de Derivada:

* Es la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto dado.



$y = mx + b$

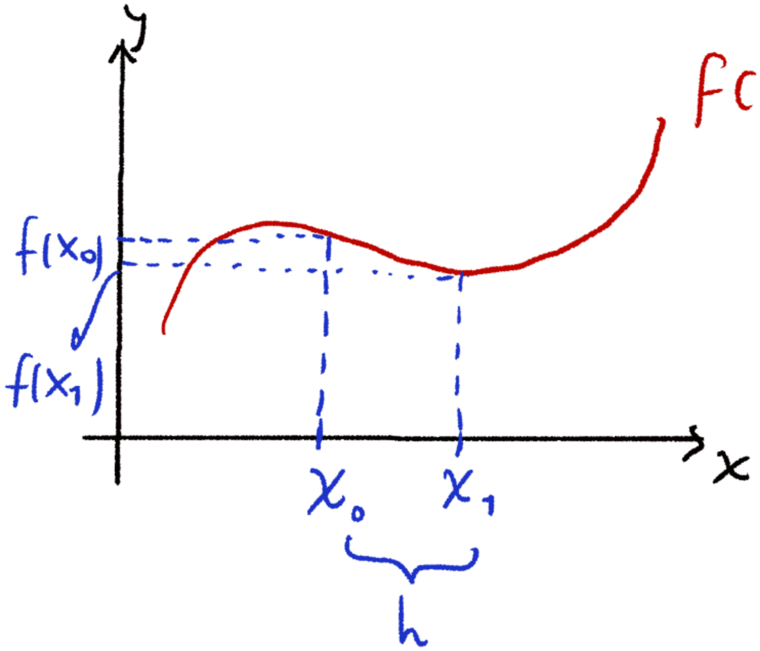
el número m es el valor de la derivada en el punto $(a, f(a))$ de la función $f(x)$.

* Es la razón de cambio infinitesimal de la función con respecto a la variable independiente.

Razón en matemáticas: división

cambio: Resta

Infinitesimal: un cambio muy pequeño, un cambio que tiende a cero.



$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0}$$

$x_0 + h = x_1$

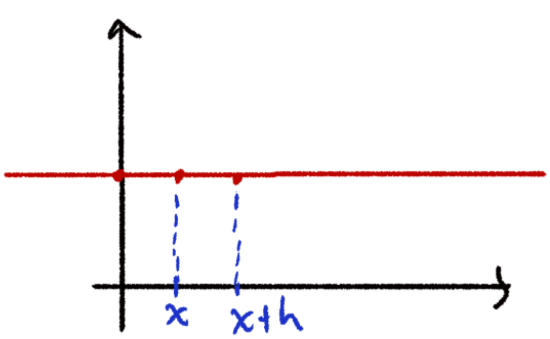
$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\boxed{\dfrac{df}{dx}}$ → derivada de la función f con respecto a x.

Reglas de derivación:

Regla de la constante:

Supongamos la función $f(x) = C$ c es un número



$$\frac{df}{dx} = ? \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} \rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = 0}$$

Regla de la potencia

* Sea $f(x) = x$ hallemos su derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \qquad \boxed{\frac{df}{dx} = 1}$$

* Sea $f(x) = x^2$ hallemos su derivada

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

$$f(x) = x^2 \longrightarrow \frac{df}{dx} = 2x$$

Sea $f(x) = x^n$ entonces su derivada es

$$\boxed{\frac{df}{dx} = n x^{n-1}}$$

Ejemplos $f(x) = x^5 \rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x) = 5x^4$

$f(x) = x^{10} \rightarrow f'(x) = 10x^9$

Regla de la constante por la función

Sea $f(x) = c\, j(x)$

$$\boxed{f'(x) = c\, j'(x)}$$

ejemplo

$f(x) = 2x$

$f'(x) = 2 \cdot 1$

$f'(x) = 2$

$f(x) = 3x^2$

$f'(x) = 3 \cdot 2x$

$f'(x) = 6x$

Regla de la suma y de la resta

Sea $f(x) = g(x) \pm h(x) \pm k(x)$

$$\boxed{f'(x) = g'(x) \pm h'(x) \pm k'(x)}$$

Ejemplos:

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2$$

$$f'(x) = 0 + 3 \cdot 1 - 4(2x)$$

$$\boxed{f'(x) = 3 - 8x}$$

Derivadas de funciones especiales:

función	derivada	función	derivada
$\sin x$	$\to \cos x$	$\sin(u(x))$	$\to \cos(u) \cdot u'$
$\cos x$	$\to -\sin x$	$\cos(u(x))$	$\to -\sin(u) \cdot u'$
e^x	$\to e^x$	e^u	$\to u' e^u$
$\ln x$	$\to \frac{1}{x}$	$\ln u$	$\to \frac{1}{u} \cdot u'$

Regla del producto

Sea $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}}$$

Ejemplo:

$f(x) = x \sin x$

$g(x) = x$

$g'(x) = 1$

$f'(x) = 1 \sin x + x \cos x$

$h(x) = \sin x$

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

$h'(x) = \cos x$

Regla de la división:

Sea $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

Ejemplo $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

$g(x) = \cos x$

$g'(x) = -\sin x$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x) \cdot x^2 - \cos x\,(2x)}{(x^2)^2}$$

$h(x) = x^2$

$h'(x) = 2x$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4}}$$

Regla de la cadena:

Sea $f(\underset{\downarrow \text{argumento}}{x}) = g(\underbrace{h(x)}_{\downarrow \text{argumento}})$ $\rightarrow$ Se deriva de afuera hacia adentro

$$\boxed{f'(x) = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}}$$

Ejemplo: $f(x) = \ln(\sin x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x \rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Sesión de ejercicios semana 1:

Dadas las siguientes funciones, hallar su derivada:

1) $f(x) = x^2 + \cos x + \ln x$

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

3) $f(x) = (\ln x)\ \cos x \cdot x^2$

4) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - \sqrt{\sin x}}{\cos(x^2)}$

Solución:

1) $f(x) = x^2 + \cos x + \ln x$

$$f'(x) = 2x - \sin x + \frac{1}{x}$$

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \boxed{f(x) = \tan x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{f'(x) = \sec^2 x}$$

3) $f(x) = (\ln x \cos x) \cdot x^2$

$$f'(x) = (\ln x \cos x)' \cdot x^2 + (\ln x \cos x) \cdot 2x$$

$$= \left[\frac{1}{x}\cos x + \ln x(-\sin x)\right] \cdot x^2 + 2x \ln x \cos x$$

$$f'(x) = x \cos x - x^2 \ln x \sin x + 2x \ln x \cos x$$

4) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - \sqrt{\sin x}}{\cos(x^2)}$

$$f'(x) = \frac{\left(\ln(x^2) - \sqrt{\sin x}\right)' \cos(x^2) - \left(\ln(x^2) - \sqrt{\sin x}\right) \cdot \left(\cos(x^2)\right)'}{\cos^2(x^2)}$$

$$\left(\ln(x^2) - \underset{\underset{(\sin x)^{1/2}}{\parallel}}{\sqrt{\sin x}}\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{2}(\sin x)^{-1/2} \cdot \cos x$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$\left(\cos(x^2)\right)' = -\sin(x^2) \cdot 2x$$

$$= -2x\sin(x^2)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)\cos(x^2) + \left(\ln(x^2) - \sqrt{\sin x}\right)2x\sin(x^2)}{\cos^2(x^2)}$$

Ejercicios propuestos: 1) Hallar la derivada de:

* $f(x) = e^{(x^2)} + \ln(\sec x)$

* $f(x) = \tan\left(\dfrac{\ln x}{e^{2x}}\right)$

2) Hallar la derivada de $f(x) = 2^x$, se puede realizar con las reglas de derivación?
Si no se puede explique con qué método puede obtenerse la derivada de dicha función.

3) Hallar las derivadas de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado:

* $f(x) = \ln(x^2)$ en $x=0$

* $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ en $x = \pi/2$

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

SANJOSÉ

INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

FIN DE
GRABACIÓN