
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

18 – 22 de abril de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES

Sea la ecuación diferencial lineal:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)$$

se define el operador lineal como

$$\mathcal{L} = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

Así mismo suele usarse la notación $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, es decir,

$$\mathcal{L} = a_n(x)\,D^n + a_{n-1}(x)\,D^{n-1} + \dots + a_1(x)\,D + a_0(x)$$

Ejemplo 1: $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$Dy - 2y = 0$$

$$(D-2)\,y = 0$$

Aquí el operador $\mathcal{L}$ sería: $\mathcal{L} = D - 2$

Ejemplo 2: $\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = \ln(x)$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$D^3y + 4x\,D^2y + 3\,Dy + 5y = \ln(x)$$

$$(D^3 + 4x\,D^2 + 3D + 5)\,y = \ln(x)$$

El operador diferencial sería:

$$\mathcal{L} = D^3 + 4x\,D^2 + 3D + 5$$

Ecuación diferencial lineal homogénea y No-homogénea.

Una ecuación lineal de orden superior que no tiene término independiente ($g(x)=0$) se dice que es una E.D. lineal HOMOGÉNEA.

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0}$$

↳ Homogénea

Una ecuación lineal que si tiene término independiente se dice que es una E.D. lineal NO-HOMOGÉNEA.

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$$

↳ No-homogénea.

Solución Homogénea y Solución Particular.

Para solucionar una ecuación NO-HOMOGÉNEA se debe primero encontrar una solución a la ecuación homogénea y luego hallar una solución particular que solucione la ecuación homogénea, Es decir, la solución completa sera:

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{Solución Homogénea}} + \underbrace{y_p}_{\text{Solución particular}}.$$

Ejemplo 1: Escribir la parte homogénea de la siguiente ecuación.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = \ln(x)$$

La parte homogénea es:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \longrightarrow (D^3 + 4xD^2 + 3D + 5)y = 0$$

Ejemplo 2: Escribir la parte homogénea de la siguiente ecuación

$$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x)\frac{dy}{dx} + 4xy + e^x = 0$$

término independiente!

Forma homogénea de la ecuación

$$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x)\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

$$\left(5xD^4 + 3x^2D^2 + \sin(x)D + 4x\right)y = 0$$

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

Ecuaciones donde los coeficientes $a_i(x) = a_i$ (constante).

$$\left(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0\right)y = 0$$

La solución a esta ecuaciones se basan en encontrar las raices de un polinomio y se pueden dar tres situaciones distintas:

1) Raices reales distintas
2) Raices reales repetidas (iguales)
3) Raices imaginarias.

> Raices reales no repetidas.

Ejemplo 1: Sea la ED: $y'' - 3y' + 2y = 0$, solucione la E.D.

Escribamos en forma de operador:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

El método de solución consiste en suponer que $y = e^{mx}$ e introducir esta suposición en la ecuación.

Para introducir está propuesta en la ecuación debemos evaluar

$$Dy = D\,e^{mx} = \frac{d}{dx}e^{mx} = me^{mx} = my$$

$$D^2y = D^2e^{mx} = \frac{d^2}{dx^2}e^{mx} = \frac{d}{dx}me^{mx} = m^2e^{mx} = m^2y$$

Con lo cual la ecuación diferencial se vuelve una ecuación algebraica

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

$$D^2y - 3Dy + 2y = 0$$

$$m^2y - 3my + 2y = 0$$

$$(m^2 - 3m + 2)y = 0$$

Como esto se debe cumplir siempre independiente del valor de y tendremos que:

$$\underbrace{m^2 - 3m + 2}_{\text{Ecuación cuadrática}} = 0$$

$$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego,

$$m = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$m = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Con lo cual resultan dos raices:

$$m_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Cada raices corresponde a una solución:
$$y_1 = e^{m_1x}$$
$$y_2 = e^{m_2x}$$

Solución homogénea completa:

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} = c_1e^{2x} + c_2e^{x}$$

Ejemplo 2: Solucione la E.D. homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Escrita en forma de operador tenemos:

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)\,y = 0$$

Proponiendo la solución $y = e^{mx}$ tenemos:

$$Dy = my$$
$$D^2y = m^2y$$
$$D^3y = m^3y$$

Con lo cual la E.D. se convierte en:

$$(m^3 - 6m^2 + 11m - 6)\,y = 0$$

Lo que nos conduce al siguiente polinomio característico:

$$\boxed{m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0} \longrightarrow \text{Polinomio característico}$$

Este polinomio puede ser factorizado como

$$(m-3)(m-2)(m-1) = 0$$

$$\begin{array}{rr}
 & m-3 \\
* & m-2 \\
\hline
 & -2m+6 \\
+ & m^2-3m \\
\hline
 & m^2-5m+6 \\
* & m-1 \\
\hline
 & -m^2+5m-6 \\
 & m^3-5m^2+6m \\
\hline
 & \underline{m^3-6m^2+11m-6}
\end{array}$$

Con esto se sabe que la ecuación se cumple sí $m=3$, $m=2$ ó $m=1$, es decir, la raices son:

$$m_1 = 3$$
$$m_2 = 2$$
$$m_3 = 1$$

Luego la solución a la ecuación homogénea será:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x}$$

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{x}$$

Soluciones de E.D. lineales de Orden Superior.

$$\underbrace{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)}_{\text{Ecuación Diferencial Lineal.}}$$

Ecuaciones Homogéneas $(g(x)=0)$

✓ → Reducción de orden por sustitución. para ED de 2^{do} Order

→ Coeficientes constantes:

- ✓ Raices reales distintas
- Raices reales repetidas
- Raicos imaginarias

Ecuaciones No-homogéneas $(g(x)\neq 0)$

La solución general será:

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{homogénea}} + \underbrace{y_p}_{\text{particular}}$$

La solución particular puede hallarse por medio de técnicas como:

- Coeficientes indeterminados
- Variación de parámetros

> Con Raices reales repetidas:

Ejemplo 1: Solucionar $y'' - 6y' + 9y = 0$

En forma de operador se tiene:

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

Supongamos $y = e^{mx}$ para obtener:

$$(m^2 - 6m + 9)y = 0$$

El polinomio caracteristico sera:

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$(m-3)(m-3) = 0$$

$m_1 = 3$ $m_2 = 3$ raiz repetida $\rightarrow$ $\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}}$?

No tiene sentido.


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN