Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 04

Facultad de Ingeniería

APUNTES DE CLASE

14 - 18 de noviembre de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

≫ Ejemplos Probabilidad Conjunta bajo Independencia Estadística.

⋙ Supongamos una moneda cargada de tal forma que la probabilidad de que caiga cara es de 0,8, y de que caiga sello es 0,2

¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras en 3 lanzamientos consecutivos?

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(C_1 C_2 C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3)$$

$$= 0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}8 = 0{,}512$$

$$P(C_1, C_2, C_3) = 51{,}2\%$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 sellos?

$$P(S_1 S_2 S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3)$$

$$= 0{,}2 * 0{,}2 * 0{,}2 = 0{,}008$$

$$P(S_1 S_2 S_3) = 0{,}8\%$$

$$P(C_1 C_2 C_3) + P(S_1 S_2 S_3) = 52{,}0\%$$

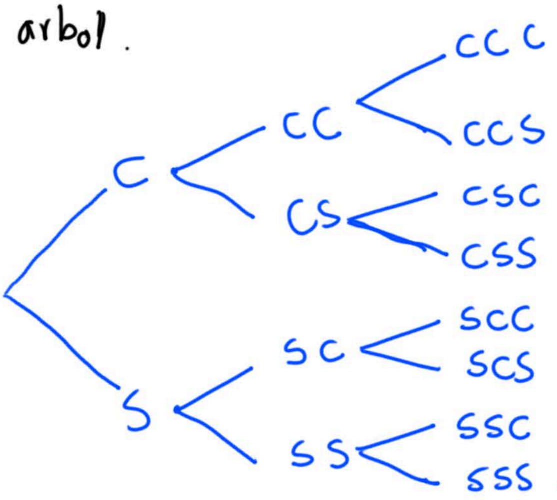
¿Por qué no el 100%?

Los eventos $C_1C_2C_3$ y $S_1S_2S_3$ no corresponden al total de todos los eventos posibles por eso sus probabilidades no suman 1 (100%).

¿Cuál es el espacio muestral?

$$\left.\begin{array}{l}\text{No entran todos los elementos}\\ \text{Si importa el orden}\\ \text{Si hay repetición}\end{array}\right\} \text{Variación con repetición} \qquad VR_2^3 = 2^3 = 8$$

Miremos cuales son esas 8 posibilidades con un diagrama de arbol.



$P(C_1 C_2 C_3) = 0{,}512$

? $P \rightarrow 0{,}48$

$P(S_1 S_2 S_3) = 0{,}008$

>>> En una moneda no cargada. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos 1 cara al realizar 3 lanzamientos?

Evento $A \rightarrow SSS \rightarrow$ que no caiga ninguna cara

Evento $A^c \rightarrow$ Que caiga al menos una cara.

$P(S) = 1/2 \longrightarrow P(A) = P(S_1 S_2 S_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

> PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad CONDICIONAL hace referencia a la probabilidad de que un segundo evento (B) se presente, dado que un primer evento (A) haya ocurrido.

$P(B/A)$: Probabilidad de que se presente B dado que el evento A se haya presentado

- bajo independencia Estadística:

Si los eventos son independientes, la probabilidad de que se presente B, dado que se da A es simplemente $P(B)$.

$$\boxed{P(B|A) = P(B)}$$ → Probabilidad Condicional Bajo independencia estadística.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara en un lanzamiento de moneda habiendo sacado sello ayer?

A: Se saco sello ayer

B: Sacar cara hoy.

$$P(B|A) = P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{2}$$

- Bajo dependencia estadística.

Cuando los eventos son dependientes se tiene:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}}$$ → Probabilidad condicional bajo dependencia estadística.

Recíproco

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- $P(B|A)$: probabilidad que pase B, dado que pasó A.
- $P(AB)$: probabilidad que ocurra A y B
- $P(A)$: probabilidad que ocurra A

Ejemplo: Supongamos que tenemos 10 balotas distribuidas de la siguiente manera:

- 3 son de color rojo y tienen puntos
- 1 es de color rojo y tiene franjas
- 2 son grises y tienen puntos
- 4 son grises y tienen franjas

Una persona saca una balota roja. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga puntos? ¿Cuál es la probabilidad de que tenga franjas?

→ D : Balota con puntos

R: Balota Roja

$$P(D|R) = \frac{P(DR)}{P(R)} \longrightarrow \quad P(DR) = 3/10$$

$$P(R) = 4/10$$

$$P(D|R) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3.10}{4.10} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

→ F: Balota con franjas

R: Balota Roja

$$P(F|R) = \frac{P(FR)}{P(R)}$$

$$P(FR) = 1/10$$

$$P(R) = 4/10$$

$$P(F|R) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1.10}{4.10} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Pregunta tarea:
¿Cuál es la probabilidad de sacar una balota gris dado que se sacó con puntos?

$$\boxed{P(FR) \neq P(F) \cdot P(R)}$$ → Cuando hay dependencia estadística

» PROBABILIDAD CONJUNTA bajo dependencia estadística.

Despejando de la probabilidad condicional, se tiene

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

↓

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(AB)$$

La probabilidad conjunta de A y B sera entonces

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)}$$ → P. Conjunta bajo dependencia Estadística.

Ejemplo: Usando las balotas del ejemplo anterior.
Hallar la probabilidad de sacar una balota roja y con puntos:

$$P(DR) = P(D|R) \cdot P(R) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{10}$$

$$P(DR) = 3/10$$

Tabla de probabilidades bajo condiciones de independencia y dependencia estadística.

Tipos de Probabilidad	Simbolo	Formulas.	
		Independencia Estadística	Dependencia Estadística.
Marginal	$P(A)$	$P(A)$	Suma de las prob. de los eventos en los que ocurre A
Conjunta	$P(AB)$	$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$	$P(AB) = P(B\|A)\,P(A)$ $P(AB) = P(A\|B)\,P(B)$
Condicional	$P(B\|A)$	$P(B\|A) = P(B)$	$P(B\|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

Ejemplo: Una tienda ha sido objeto de muchos robos durante el último mes; pero debido al aumento de seguridad, se ha detenida a 250 ladrones. Se registró el sexo de cada ladrón y si era su primer delito o reincidente. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Sexo	Primer Robo	Reincidente	Total
Hombre	60	70	130
Mujer	44	76	120
Total	104	146	250

Se elige un al azar un ladrón detenido, calcule:

a) Probabilidad de que sea hombre.

b) Probabilidad de que sea primer robo dado que es hombre.

c) Probabilidad de que sea mujer dado que es reincidente

d) Probabilidad de que sea reincidente dado que es mujer.

e) Probabilidad de que sea mujer y robo por primera vez.

Soluciones:

a) $$P(H) = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0{,}52$$

b) $$P(P|H) = \frac{P(PH)}{P(H)} = \frac{60/250}{13/25} = \frac{6/25}{13/25} = \frac{6}{13} = 0{,}461$$

c) $$P(M|R) = \frac{P(MR)}{P(R)} = \frac{76/250}{146/250} = \frac{76}{146} = \frac{38}{73} \approx 0{,}521$$

d) $$P(R|M) = \frac{P(MR)}{P(M)} = \frac{76/250}{120/250} = \frac{76}{120} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30} \approx 0{,}63$$

e) $$P(MP) = \frac{44}{250} = \frac{22}{125} = 0{,}176$$