
INICIO
GRABACIÓN

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ
Facultad de Ingeniería

APUNTES DE CLASE

18 – 22 de julio de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

> ED. con coeficientes constantes con raices repetidas (multiples).

Ejemplo: $y'' - 6y' + 9 = 0$

En forma de operador

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

La ecuación algebraica asociada al polinomio característico es:

$$(m^2 - 6m + 9) = 0$$

Factorizando: $(m-3)(m-3) = (m-3)^2 = 0$

Las raices serán entonces:

$m_1 = 3$
$m_2 = 3$ $\rightarrow$ repetida

Luego, la solución podría ser:

$$y = c_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}$$

Pero esto es lo mismo que:

$$y = (C_1 + C_2)e^{3x} = Ce^{3x}$$

Es decir, esa forma constituye realmente una sola solución.

Tenemos que encontrar la segunda solución, para esto usemos la siguiente suposición: $y = v(x)e^{3x}$

E introduzcamos está propuesta de solución en la ED:

$$(D^2 - 6D + 9)y = (D^2 - 6D + 9)\left[v(x)e^{3x}\right] = 0$$

Por tanto debemos evaluar:

$$\rightarrow D(v(x)e^{3x}) = e^{3x}Dv(x) + v(x)De^{3x}$$
$$= e^{3x}Dv(x) + 3e^{3x}v(x) = e^{3x}(Dv(x) + 3v(x))$$

$$\rightarrow D^2\left(v(x)e^{3x}\right) = D\left(D\left(v(x)e^{3x}\right)\right)$$

$$= D\left(e^{3x}Dv(x) + 3e^{3x}v(x)\right)$$

$$= D\left(e^{3x}Dv(x)\right) + 3D\left(e^{3x}v(x)\right)$$

$$= e^{3x}D\left(Dv(x)\right) + Dv(x) \cdot De^{3x} + 3\left(e^{3x}Dv(x) + 3e^{3x}v(x)\right)$$

$$= e^{3x}D^2v(x) + 3e^{3x}Dv(x) + 3e^{3x}Dv(x) + 9e^{3x}v(x)$$

$$= e^{3x}\left[D^2v(x) + 6Dv(x) + 9v(x)\right]$$

Con lo cuál la ecuación diferencial se vuelve:

$$0 = \left(D^2 - 6D + 9\right)\left(v(x)e^{3x}\right) = e^{3x}\left[D^2v(x) + 6Dv(x) + 9v(x) - 6\left(Dv(x) + 3v(x)\right) + 9v(x)\right]$$

$$0 = \left[D^2v(x) + \cancel{6Dv(x)} + \cancel{9v(x)} - \cancel{6Dv(x)} - \cancel{18v(x)} + \cancel{9v(x)}\right]e^{3x}$$

$$0 = D^2v(x)\,e^{3x}$$

$$0 = D^2v(x)$$

Luego al resolver la ecuación que se obtiene para $v(x)$ tenemos

$$\rightarrow \int D^2v(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}v(x)\right)dx = \frac{d}{dx}v(x) = \int 0\,dx$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = C_1$$

$$\rightarrow \int \frac{dv(x)}{dx}\,dx = \int C_1\,dx$$

$$v(x) = C_1x + C_2$$

Con lo cual tendremos que la solución completa a y será:

$$y = \left(C_1x + C_2\right)e^{3x} = C_1xe^{3x} + C_2e^{3x}$$

Ejemplo 2: $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

El operador asociado sera:

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$$

Suponiendo una solución $y = e^{mx}$ se obtiene la siguiente ecuación característica

$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$$

$$(m-2)(m^2 - 4m + 4) = 0$$

$$(m-2)(m-2)(m-2) = 0$$

$$(m-2)^3 = 0$$

Raiz $m = 2$ con multiplicidad 3(3 raices repetidas)

Luego, supondremos que la solución es entonces: $y = v(x)e^{2x}$

Con lo que obtenemos

$\rightarrow D v(x) e^{2x} = e^{2x}\left(D v(x) + 2v(x)\right)$

$\rightarrow D^2\left(v(x) e^{3x}\right) = D\left(D v(x)\, e^{2x}\right) = D\left[e^{2x}\left(D v(x) + 2v(x)\right)\right]$

$= e^{2x} D\left[D v(x) + 2v(x)\right] + \left(D v(x) + 2(x)\right) D e^{2x}$

$= e^{2x}\left[D^2 v(x) + 2D v(x)\right] + 2e^{2x}\left(D v(x) + 2v(x)\right).$

$= e^{2x}\left[D^2 v(x) + 4D v(x) + 4v(x)\right]$

$\rightarrow D^3\left(v(x) e^{2x}\right) = D\left[e^{2x}\left(D^2 v(x) + 4D v(x) + 4v(x)\right)\right]$

$= e^{2x} D\left(D^2 v(x) + 4D v(x) + 4v(x)\right)$

$+ \left(D^2 v(x) + 4D v(x) + 4v(x)\right). D e^{2x}$

$= e^{2x}\left(D^3 v(x) + 4D^2 v(x) + 4D v(x)\right)$

$+ 2e^{2x}\left(D^2 v(x) + 4D v(x) + 4v(x)\right)$

$$\rightarrow D^3\left(v(x)e^{2x}\right) = e^{2x}\left(D^3 v(x) + 6D^2 v(x) + 12\,D v(x) + 8\,v(x)\right)$$

Con lo cual la ED. queda como

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)\left(v(x)e^{2x}\right) = 0$$

$$e^{2x}\Big[D^3 v(x) + 6D^2 v(x) + 12D\,v(x) + 8\,v(x) - 6\left(D^2 v(x) + 4\,D v(x) + 4v(x)\right)$$
$$+ 12\left(D v(x) + 2v(x)\right) - 8\,v(x)\Big] = 0$$

$$e^{2x}\Big[D^3 v(x) + \cancel{6D^2 v(x)} + \cancel{12D v(x)} + \cancel{8v(x)} - \cancel{6D^2 v(x)} - \cancel{24D v(x)} - \cancel{24v(x)}$$
$$+ \cancel{12D v(x)} + \cancel{24v(x)} - \cancel{8v(x)}\Big] = 0$$

$$e^{2x}\,D^3 v(x) = 0$$

$$D^3 v(x) = 0$$

Integranob 3 veces se obtiene:

$$\rightarrow \int \frac{d^3}{dx^3} v(x)\,dx = \int 0\,dx$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = C_1$$

$$\rightarrow \int \frac{d^2 v(x)}{dx^2}\,dx = \int C_1\,dx$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = C_1 x + C_2$$

$$\rightarrow \int \frac{dv(x)}{dx}\,dx = \int C_1 x + C_2$$

$$v(x) = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$= C x^2 + C_2 x + C_3$$

y con esto tenemos finalmente

$$y = \left(Cx^2 + C_2 x + C_3\right)e^{2x} = C x^2 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{2x}$$

Con los ejemplos que hemos visto podemos pensar que se puede generalizar algunos resultados:

- Si una ED de 2orden tiene raiz repetida m, entonces la solución será: $$y = C_1 x e^{mx} + C_2 e^{mx}$$

- Si una ED de 3orden tiene raiz repetida m con multiplicidad 3, entonces su solución será $$y = C_1 x^2 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_3 e^{mx}$$

Estos resultados se pueden generalizar para cualquier E.D. de orden n, con raiz m repetida n veces, la solución en ese caso sera:

$$y = \sum_{l=0}^{n-1} C_l x^l e^{mx} = C_0 e^{mx} + C_1 x e^{mx} + \dots + C_{n-1} x^{n-1} e^{mx}$$

Ahora bien cuando la raiz m no se repite n veces sino que se repite menos veces entonces la situación cambia, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: Sea la ecuación

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 12y^{(4)} - 6y''' - 9y'' + 12y' - 4y = 0$$

Su ecuación característica es:

$$m^6 - 6m^5 + 12m^4 - 6m^3 - 9m^2 + 12m - 4m = 0$$

La factorización del polinomio característico es:

$$(m-1)^3 (m-2)^2 (m+1) = 0 \longrightarrow$$

$m_1 = 1 \rightarrow$ repetida 3 veces
$m_2 = 2 \rightarrow$ repetida 2 veces
$m_3 = -1 \rightarrow$ No repetida

En ese caso la solución será:

$$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^{x} + (C_4 x + C_5) e^{2x} + C_6 e^{-x}$$

> ED. con coeficientes constante con raices complejas:

Ejemplo: Resolver la E.D. $y'' + 4y' + 8y = 0$

En este caso el polinomio característico será:

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

Para encontrar las raices usaremos la formula de la cuadratica: $am^2 + bm + c = 0 \rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para nuestro caso esto resulta en

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{-1}}{2}$$

$\boxed{\sqrt{-1} = i}$ unidad imaginaria

$$m = -2 \pm 2i \longrightarrow m_1 = -2 + 2i$$
$$m_2 = -2 - 2i$$

Estos raices pueden ser escritar como

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \alpha + i\beta \\ m_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= 2 \end{aligned}$$

De este modo la solución será:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$$

Se ha separado la exponencial real de la exponencial imaginaria para dar uso de la formula de Euler:

$$e^{\pm i\beta} = \cos(\beta) \pm i\sin(\beta)$$

Con lo cual se tiene:

$$y = e^{\alpha x}\left[C_1 \left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) + C_2\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos(\beta x) + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B}\sin(\beta x)\right]$$

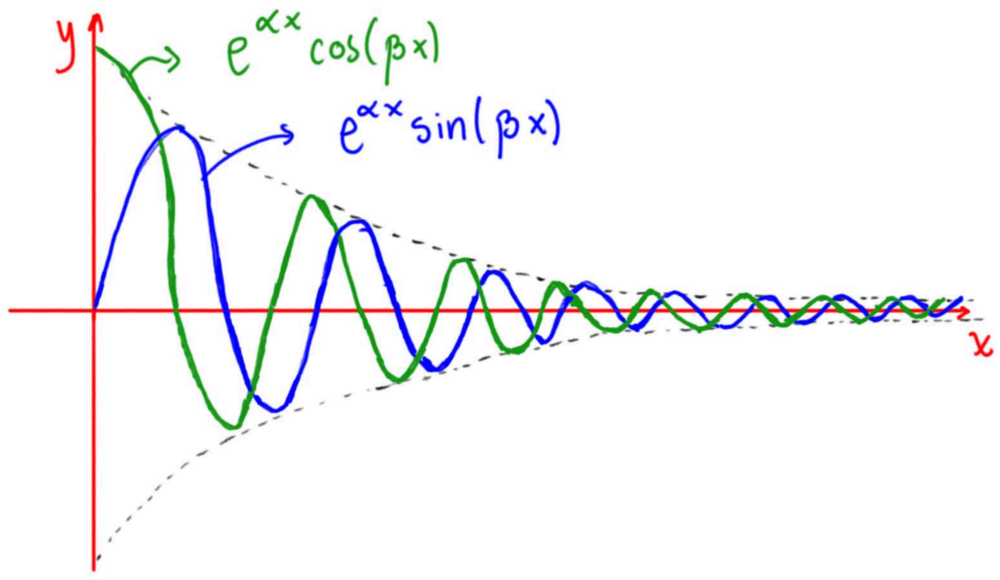
$$y = e^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right]$$

$$y = A e^{\alpha x}\cos(\beta x) + B e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Para nuestro caso teniamos

$$m = \alpha \pm i\beta = -2 \pm i2 \rightarrow \begin{matrix}\alpha = -2\\ \beta = 2\end{matrix}$$

Es decir, $y = Ae^{-2x}\cos(2x) + Be^{-2x}\sin(2x)$




FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
SANJOSÉ
INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA
FIN DE
GRABACIÓN