APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.

Una Ecuación Diferencial de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Se dice que es de orden superior y en este caso de n-ésimo orden

Métodos de Solución Directos o sencillos:

1) Ecuaciones inmediatamente integrables:

Este tipo de solución es útil cuando puedo integrar directamente la Ecuación diferencial. Si se requiere una solución específica, deben haber tantas condiciones iniciales como el orden de la Ecuación Diferencial de orden superior.

Ejemplo 1: $y^{(4)} = x$ donde $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$y''(0) = y'''(0) = 0$

Hallar su solución:

4to orden $\dfrac{d^4y}{dx^4} = x \rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right) = x$

Integrar a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx = \int x\,dx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Integro a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int \left[\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right] dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \left[\frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right] dx$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x^5}{120} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4}$$

Solución general.

Como era de 4to orden me dieron 4 condiciones iniciales para obtener la solución específica:

$$y(x)=\frac{x^5}{120}+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4$$

Cuando $x=0$ $y(0)=0$

$$y(0)=\cancel{\frac{0^5}{120}}^{\to 0}+\cancel{C_1\frac{0^3}{6}}^{\to 0}+\cancel{C_2\frac{0^2}{2}}^{\to 0}+\cancel{C_3 0}^{\to 0}+C_4$$

$$\boxed{0=C_4}$$

Cuando $x=0$ $y'(0)=1$

$$y'(0)=\cancel{\frac{0^4}{24}}^{\to 0}+\cancel{C_1\frac{0^2}{2}}^{\to 0}+\cancel{C_2 0}^{\to 0}+C_3$$

$$\boxed{1=C_3}$$

Cuando $x=0$, $y''(0)=0$; Cuando $x=0$, $y'''(0)=0$

$$y''(0)=\cancel{\frac{0^3}{6}}^{\to 0}+\cancel{C_1 0}^{\to 0}+C_2$$

$$y'''(0)=\frac{0^2}{2}+C_1$$

$$\boxed{0=C_2}$$

$$\boxed{0=C_1}$$

$$y(x) = \frac{x^5}{120} + \frac{c_1 x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

$$c_1 = c_2 = c_4 = 0 \qquad c_3 = 1$$

La solución específica es:

$$\boxed{y(x) = x}$$

Nota: forma general de una ecuación diferencial de orden superior que es inmediatamente integrable:

$$y^{(n)}(x) = f(x)$$

2) Ecuaciones Diferenciales de segundo orden con una variable ausente (reducción de orden)

Este método se puede utilizar cuando una de las 2 variables no aparece explícitamente.

Ejemplo 1: $xy'' + y' = 4x$ Solucionar la ED:

Aquí la variable ausente es y. El método de solución es reduciendo el orden de la siguiente forma:

$$y' = V(x) \rightarrow y'' = V'(x)$$

Volviendo a la ED:

$$\underbrace{xV' + V}_{\frac{d}{dx}(Vx)} = 4x \longrightarrow$$ ED de primer orden lineal.

$$\frac{d}{dx}(Vx) = 4x$$

Integro a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}(Vx)\,dx = \int 4x\,dx$$

$$Vx = 4\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$Vx = 2x^2 + C_1$$

$$V(x) = 2x + \frac{C_1}{x} \rightarrow y' = 2x + \frac{C_1}{x}$$

$$y' = 2x + \frac{c_1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{c_1}{x} \qquad \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{c_1}{x}\,dx$$

Integrando a ambos lados:

$$\boxed{y(x) = x^2 + c_1 \ln|x| + c_2}$$ → Solución general

Ejemplo 2: Resolver $2yy'' = 1 + (y')^2$

Aquí la variable ausente es x:

Hacemos reducción de orden:

$$y' = v \rightarrow y'' = v' \qquad v' = \frac{dv}{dx}$$

Reemplazamos en la ED:

$$2yv' = 1 + (v)^2$$

$$2y\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$ → aquí tenemos 3 variables involucradas.

$y' = v$

V es una función que depende de y pero a su vez y depende de x

$$\frac{dy}{dx} = V$$

Ejemplo de R cadena

$V = \ln(x^2) \quad y = x^2$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln y)$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{y} 2x$$

$$= \frac{1}{x^2} 2x$$

$$\frac{d}{dx} V = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} V$$

Reemplazando en la anterior ED:

$$2y \frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

$$2y\, v \frac{dV}{dy} = 1 + v^2$$

→ ED de primer orden separable

$$2y\, v\, dv = (1+v^2)\, dy$$

$$\frac{v}{1+v^2} dv = \frac{1}{2y} dy$$

$$\frac{v}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2y}\,dy$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{1}{2y}\,dy$$

$$\int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\ln|y| + C_1$$

$w = 1+v^2$

$dw = 2v\,dv$

$\frac{dw}{2v} = dv$

$$\int \frac{\cancel{v}}{w}\,\frac{dw}{2\cancel{v}} = \frac{1}{2}\ln|y| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,dw = \frac{1}{2}\ln|y| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln|w| = \frac{1}{2}\ln|y| + C_1$$

$$\ln|1+v^2| + C = \ln|y|$$

$$e^{\ln|1+v^2| + C} = e^{\ln|y|}$$

$$y(x) = e^{c}\,(1+v^2) \rightarrow y(x) = D\,(1+v^2)$$

$$y(x) = D(1+v^2)$$

$$y = D + Dv^2$$

$$y - D = Dv^2 \rightarrow \frac{y-D}{D} = v^2$$

$$v^2 = \frac{y}{D} - 1 \qquad \frac{1}{D} = k$$

$$v^2 = ky - 1 \rightarrow v = \pm\sqrt{ky - 1}$$

$$v = y' \qquad y' = \pm\sqrt{ky - 1}$$ → Separación de variables

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{ky-1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{ky-1}} = \pm dx$$ → Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ky-1}} = \pm\int dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ky-1}} = \pm x + K_2$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ky-1}} = \pm x + K_2$$

$w = ky - 1$

$dw = k\,dy$

$\frac{dw}{k} = dy$

$$\int \frac{dw}{k\sqrt{w}} = \pm x + K_2$$

$$\frac{1}{K} \int \frac{dw}{w^{1/2}} = \pm x + K_2$$

$$\frac{1}{k} \int w^{-1/2}\,dw = \pm x + K_2$$

$$\frac{1}{k} \frac{w^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \pm x + K_2$$

$$\frac{2w^{1/2}}{k} = \pm x + K_2$$

$$w^{1/2} = \pm \frac{xk}{2} + \frac{K_2 \cdot k}{2}$$

$\frac{k}{2} = A$

$$(ky-1)^{1/2} = \pm \frac{xk}{2} + \frac{K_2 \cdot k}{2}$$

$\frac{K_2 \cdot k}{2} = B$

$$ky - 1 = (\pm Ax + B)^2 \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{(\pm Ax + B)^2 + 1}{k}}$$

Ejemplo 3: Resolver: $y'' + y = 0$

Variable ausente: x

Reducción de orden: $y' = V \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = V$

$y'' = v' \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dv}{dx}$

Reemplazamos en la ED:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}V$$

$$v' + y = 0$$

$$\frac{dv}{dy}v + y = 0 \rightarrow \text{separable}$$

$$v\frac{dv}{dy} = -y$$

$$v\,dv = -y\,dy$$

Integramos a ambos lados:

$$\int v\,dv = \int -y\,dy \rightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_2$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_2 \qquad 2C_2 = C_1^2$$

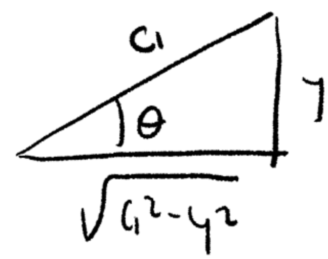
$$v^2 = -y^2 + C_1^2$$

$$v = \pm\sqrt{-y^2 + C_1^2} \qquad v = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm\, dx$$ → Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm \int dx$$



$$\frac{1}{C_1}\int \frac{C_1\, dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm x + C \qquad \sin\theta = \frac{y}{C_1}$$

$$C_1 \cos\theta\, d\theta = dy$$

$$\cancel{\frac{1}{C_1}}\int \frac{\cancel{C_1}\,\cancel{\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{\cos\theta}} = \pm x + C \qquad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\int d\theta = \pm x + C$$

$$\int d\theta = \pm x + C$$

$$\sin\theta = \frac{y}{c_1}$$

$$\theta = \pm x + C$$

$$\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin^{-1}\left(\frac{y}{c_1}\right)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{c_1}\right) = \pm x + C$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{c_1}\right)$$

$$\frac{y}{c_1} = \sin(\pm x + C)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= c_1 \sin(\pm x + C) \\ y(x) &= c_1 [\sin x \cos C \pm \cos x \sin C] \end{aligned}}$$

Si la variable ausente es y simplemente reduzca el orden con $y' = v$

Si la variable ausente es x, reduzca el orden con $y' = v$ y haga $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} v$