FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 06

APUNTES DE CLASE

28 de noviembre - 2 de diciembre de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

DISTRIBUCIONES Y VARIABLES ALEATORIAS

Distribución de probabilidad: lista de todos los resultados posibles y y la probabilidad asociada a cada uno de ellos.

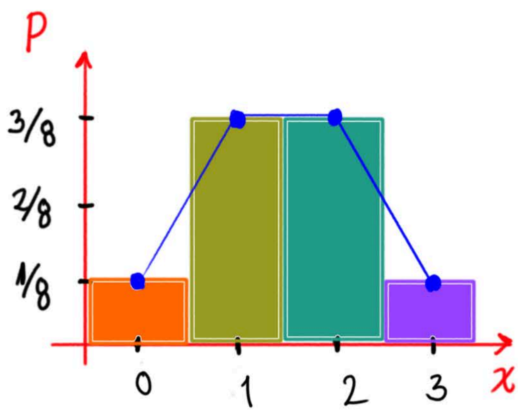
Características de una distribución de probabilidad

1. La probabilidad de un resultado se encuentra entre 0 y 1.
2. Los resultados son eventos mutuamente excluyentes
3. La suma de las probabilidades de todos los eventos es 1

Ejemplo: Número de veces que cae cara en tres lanzamientos de moneda:

A	x	P
SSS	0	1/8
SSC SCS CSS	1	3/8
SCC CSC CCS	2	3/8
CCC	3	1/8

Prob. Total: $8/8 = 1{,}0$



En este ejemplo hemos usado: $x \rightarrow$ cantidad de veces que cae cara

Al graficar la cantidad x se ha puesto como eje horizontal, esta corresponde a una "<u>variable aleatoria</u>"

Variables aleatorias: representa los resultados aleatorios que puede tomar un experimento. Cada valor de la variable aleatoria será un posible resultado y tendra una probabilidad asociada.

Definición: Una variable aleatoria es la cantidad que resulta de un experimento, puede adoptar diferentes valores.

Tipos de variables:

CUALITATIVAS: cuyos resultados no son numéricos.

Ej: color de pelo, Grupo Sanguineo, Musica favorita, preferencia política. profesión.

CUANTITATIVAS: cuyos resultados son valores numéricos.

→ Discretas: adopta valores claramente separados. Se pueden contar. (usualmente son resultado de contar).

Ejemplo: Cantidad de hombres (mujeres), # de veces que voy a cine, votos que recibio un candidato, puntaje de un Examen.

→ Continuas: adopta todos los valores posibles. Entre dos valores distintos siempre hay otros valores posibles. (usualmente resulta de mediciones)

Ejemplos: tiempo en ir de casa a trabajo, presión en llantas, temperatura media mensual, peso de las personas, estatura, altitud de una ciudad, caudal de un rio.

Ejemplos: Qué tipo de variable es:

1) Estado civil?
2) Cantidad de hermanos?
3) Cantidad de empleados de una fabrica?
4) Velocidad de un vehiculo?
5) Peso de un recien nacido?
6) Color de Ojos?
7) Cargos en un empresa?

Es muy importante identificar los tipos de variables ya que cada tipo de VA. se asocia con técnicas matemáticas distintas y con distintos tipos de distribución.

MEDIDAS SOBRE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DISCRETAS

Media o promedio (μ): valor típico que representa la posición central de la distrib. de probabilidad. También recibe el nombre de VALOR ESPERADO. Se trata de un promedio ponderado, en el que los posibles valores de la variable aleatoria se ponderan con sus correspondientes probabilidades:

$$\boxed{\mu = \sum_i x_i P(x_i)}$$

Media o Valor esperado.

Varianza (σ^2): valor típico que representa una medida de la dispersión de un distribución de probabilidad. Indica que tan distante de la media están los valores que puede tomar la V.A.

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)}$$

Varianza.

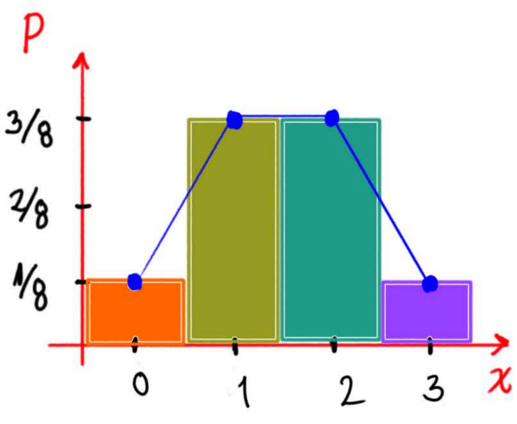
Desviación Estandar (σ): otra medida de la dispersión. Se obtiene tomando la raiz cuadrada de la varianza.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)}}$$

Desviación Estandar.

Ejemplo: calcule la media y la desviación estandar para la distribución de probabilidad asociada a la cantidad de caras al realizar 3 lanzamientos de una moneda.

Distribución de probabilidad



$$\mu = 0 * P(0) + 1 . P(1) + 2P(2) + 3 . P(3)$$
$$\mu = 0 * 1/8 + 1 * 3/8 + 2 * 3/8 + 3 * 1/8$$
$$\mu = 3/8 + 6/8 + 3/8 = 12/8 = 3/2 = \underline{1{,}5}$$
$$\sigma^2 = (0-1{,}5)^2 P(0) + (1-1{,}5)^2 P(1) + (2-1{,}5)^2 P(2) + (3-1{,}5)^2 P(3)$$
$$\sigma^2 = 1{,}5^2 * 1/8 + 0{,}5^2 * 3/8 + 0{,}5^2 * 3/2 + 1{,}5^2 * 1/8$$
$$\sigma^2 = 2{,}25/8 + 0{,}75/8 + 0{,}75/8 + 2{,}25/8 = 6/8 = \underline{0{,}75}$$
$$\sigma = \sqrt{0{,}75} = \underline{0{,}866}$$

Ejemplo: Un vendedor de autos tiene la siguiente distribución de probabilidad asociada a la cantidad de autos que puede vender el sábado.

x: cantidad de autos vendidos.

x	0	1	2	3	4	Total
$P(x)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	1,0.

¿Calcule μ y σ?

Realicemos la siguiente tabla para hallar μ.

x	$P(x)$	$x\,P(x)$
0	0,1	0
1	0,2	0,2
2	0,3	0,6
3	0,3	0,9
4	0,1	0,4
Total =	1,0	2,1

$\longrightarrow \underline{\mu = 2,1}$

Para hallar σ^2 podemos hacer la siguiente tabla:

x	$P(x)$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 P(x)$
0	0,1	-2,1	4,41	0,441
1	0,2	-1,1	1,21	0,242
2	0,3	-0,1	0,01	0,003
3	0,3	0,9	0,81	0,243
4	0,1	1,9	3,61	0,361
			Total:	1,290

$\underline{\sigma^2 = 1,290}$

$\sigma = \sqrt{1,290}$

$\underline{\sigma = 1,136}$

NOTA: Los símbolos μ y σ se usan en poblaciones (total de resultados) y cuando se tienen muestras (una parte de la población) se suelen usar los símbolos $\bar{x}$ y s, para denotar media y desviación estandar, respectivamente.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA.

La funcion de probabilidad acumulada $F(x_0)$ asociada a una distribución de probabilidad $P(x)$ expresa la probabilidad de que x tenga un valor menor o igual a x_0. Es decir

$$\boxed{F(x_0) = P(x \leq x_0)}$$

Ejemplo: En el ejemplo del vendedor de autos, ¿cuál es la probabilidad de vender 3 o menos carros?

x	$P(x)$	$F(x)$
0	0,1	0,1
1	0,2	0,3
2	0,3	0,6
3	0,3	0,9
4	0,1	1,00

$F(3) = 0{,}9$

Probabilidad de vender 0, 1, 2 ó 3 autos.

¿Cuál es la probabilidad de vender 3 o más?

$$1 - F(2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Ejemplo: En un lanzamiento de dados ¿cuál es la probabilidad de sacar un número menor a 5?

x	$P(x)$	$F(x)$
1	1/6	$1/6 = 0{,}16\bar{6}$
2	1/6	$2/6 = 0{,}33\bar{3}$
3	1/6	$3/6 = 0{,}5$
4	1/6	$4/6 = 0{,}66\bar{6}$
5	1/6	$5/6 = 0{,}83\bar{3}$
6	1/6	$6/6 = 1{,}0$

$F(4) = 0{,}6\bar{6} \approx 0{,}67$