Diferenciación numérica

Dada la función $f(x) = cot(10x)$, encuentre $f'(0.175)$ usando las representaciones de diferencias finitas hacia adelante, atrás y central, con $h = 0.075$.

$$f(x) = \cot(10x)$$

$$f'(x) = -\frac{10}{sen^2(10x)}$$

Evaluando

$$f'(0.175) = -\frac{10}{sen^2\big(10(0.175)\big)} = -10722.70$$

Para h= 0.075 se puede usar la función para determinar

xi-1	-0.825	-485.67
xi	0.175	-10722.70
xi+1	1.175	-241.14

Calculando hacia delante

$$f'(x) = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}$$

$$f'(x) = \frac{-241.14 + 10722.70}{0{,}075} = 139754.13$$

Calculando hacia atrás

$$f'(x) = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}$$

$$f'(x) = \frac{-10722.70 + 485.67}{0.075} = -136493.73$$

Calculando central

$$f'(x) = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h}$$

$$f'(x) = \frac{-241.14 + 485.67}{2(0{,}075)} = 1630.2$$

Integración numérica

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi/2}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx$$

a) Regla del trapecio simple y compuesta

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{90}{6} = 15$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi/2}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{6}(f(0)+2f(15)+2f(30)+2f(45)+2f(60)+f(75))+f(90)$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi/2}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{6}(1+2*0.79+2*0.66+2*0.58+2*0.52+0.51+0.5)$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi/2}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = 1.185$$

b) Regla de Simpson1/3 simple y compuesta

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{90}{6} = 15$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{3}(f(0)+4f(15)+2f(30)+4f(45)+2f(60)+4f(75))+f(90)$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{3}(1+4*0.79+2*0.66+4*0.58+2*0.52+4*0.51+0.5)$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = 3.793*(1/3) = 1.26$$

c) Regla de Simpson3/8 simple y compuesta

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{3}(f(0)+4f(15)+2f(30)+4f(45)+2f(60)+4f(75))+f(90)$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = \frac{1}{3}(1+4*0.79+2*0.66+4*0.58+2*0.52+4*0.51+0.5)$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}dx = 3.793*(3/8) = 1.42$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$x'(t) = \cos(x), x(0) = 2\pi$$

La integral de la anterior ecuación será el valor de la función original

$$x(t) = sen(x)$$

a) Método de Euler
Evaluando la condición inicial x=1

$$x'(t) = \cos(x) = 360°$$

Evaluando la ecuación con el método de Euler

$$x = 1 + 0.1 = 1.1$$
$$x(1.1) = 1 + 3.72(1.1) = 5.092$$

Evaluando para la función original

$$x(t) = sen(x) = 0$$

Realizando el cálculo hasta 5h

método de EULER		
x	y	y´
360	-2,4503E-16	1
360,1	0,001745328	0,99999848
360,2	0,003490651	0,99999391
360,3	0,005235964	0,99998629
360,4	0,00698126	0,99997563
360,5	0,008726535	0,99996192
360,6	0,010471784	0,99994517
360,7	0,012217001	0,99992537
360,8	0,01396218	0,99990252
360,9	0,015707317	0,99987663
361	0,017452406	0,9998477
361,1	0,019197442	0,99981571
361,2	0,02094242	0,99978068
361,3	0,022687334	0,99974261
361,4	0,024432178	0,99970149
361,5	0,026176948	0,99965732
361,6	0,027921639	0,99961012
361,7	0,029666244	0,99955986
361,8	0,031410759	0,99950656
361,9	0,033155178	0,99945022
362	0,034899497	0,99939083

362,1	0,036643709	0,99932839
362,2	0,038387809	0,99926292
362,3	0,040131793	0,9991944
362,4	0,041875654	0,99912283
362,5	0,043619387	0,99904822
362,6	0,045362988	0,99897057
362,7	0,047106451	0,99888987
362,8	0,04884977	0,99880614
362,9	0,05059294	0,99871936
363	0,052335956	0,99862953
363,1	0,054078813	0,99853667
363,2	0,055821505	0,99844076
363,3	0,057564027	0,99834182
363,4	0,059306374	0,99823983
363,5	0,06104854	0,9981348
363,6	0,06279052	0,99802673
363,7	0,064532308	0,99791562
363,8	0,0662739	0,99780147
363,9	0,068015291	0,99768428
364	0,069756474	0,99756405

b) Método de Runge – Kutta de orden 2

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$
$$k_1 = f(x, y)$$
$$k_2 = (x + \frac{3h}{4}, y + \frac{3}{4}k_1 h)$$

Resolviendo con x=1

$$k_1 = \cos(x) = 1$$
$$k_2 = \left(x + \frac{3h}{4}, y + \frac{3}{4}k_1 h\right) = \cos(x + 3/4(0.1)) = 0.99$$

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h = 0.0993$$

método RK segundo orden			
x	k1	k2	y
360	1	0,99718882	0,099812588
360,1	0,99999848	0,99705652	0,099803717
360,2	0,99999391	0,99692119	0,099794543
360,3	0,99998629	0,99678282	0,099785064

360,4	0,99997563	0,99664141	0,099775282
360,5	0,99996192	0,99649697	0,099765196
360,6	0,99994517	0,99634949	0,099754805
360,7	0,99992537	0,99619898	0,099744111
360,8	0,99990252	0,99604543	0,099733113
360,9	0,99987663	0,99588885	0,099721811
361	0,9998477	0,99572924	0,099710206
361,1	0,99981571	0,99556659	0,099698296
361,2	0,99978068	0,99540091	0,099686083
361,3	0,99974261	0,9952322	0,099673567
361,4	0,99970149	0,99506045	0,099660746
361,5	0,99965732	0,99488568	0,099647623
361,6	0,99961012	0,99470787	0,099634195
361,7	0,99955986	0,99452703	0,099620464
361,8	0,99950656	0,99434317	0,09960643
361,9	0,99945022	0,99415627	0,099592092
362	0,99939083	0,99396635	0,099577451
362,1	0,99932839	0,9937734	0,099562506
362,2	0,99926292	0,99357742	0,099547259
362,3	0,9991944	0,99337841	0,099531707
362,4	0,99912283	0,99317638	0,099515853
362,5	0,99904822	0,99297133	0,099499696
362,6	0,99897057	0,99276325	0,099483235
362,7	0,99888987	0,99255214	0,099466472
362,8	0,99880614	0,99233801	0,099449405
362,9	0,99871936	0,99212086	0,099432036
363	0,99862953	0,99190069	0,099414364
363,1	0,99853667	0,99167749	0,099396389
363,2	0,99844076	0,99145128	0,099378111
363,3	0,99834182	0,99122204	0,09935953
363,4	0,99823983	0,99098978	0,099340647
363,5	0,9981348	0,99075451	0,099321461
363,6	0,99802673	0,99051622	0,099301972
363,7	0,99791562	0,99027491	0,099282181
363,8	0,99780147	0,99003058	0,099262088
363,9	0,99768428	0,98978324	0,099241692
364	0,99756405	0,98953288	0,099220994

c) Método de Runge – Kutta de orden 4

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = (x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_3 = (x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_4 = (x + h, y + k_2 h)$$

Resolviendo con x=1

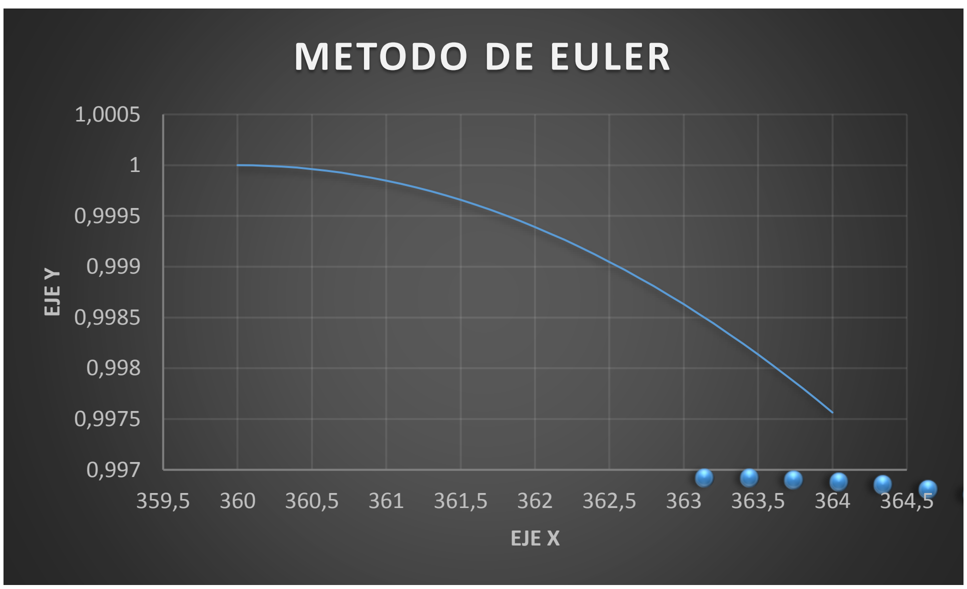
$$k_1 = \cos(x) = 1$$
$$k_2 = \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}k_1 h\right) = \cos(x + 0.5(0.1)) = 0.99$$
$$k_3 = \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}k_2 h\right) = 0.99$$
$$k_4 = (x + h, y + k_2 h) = \cos(x + 0.1) = 0.99$$

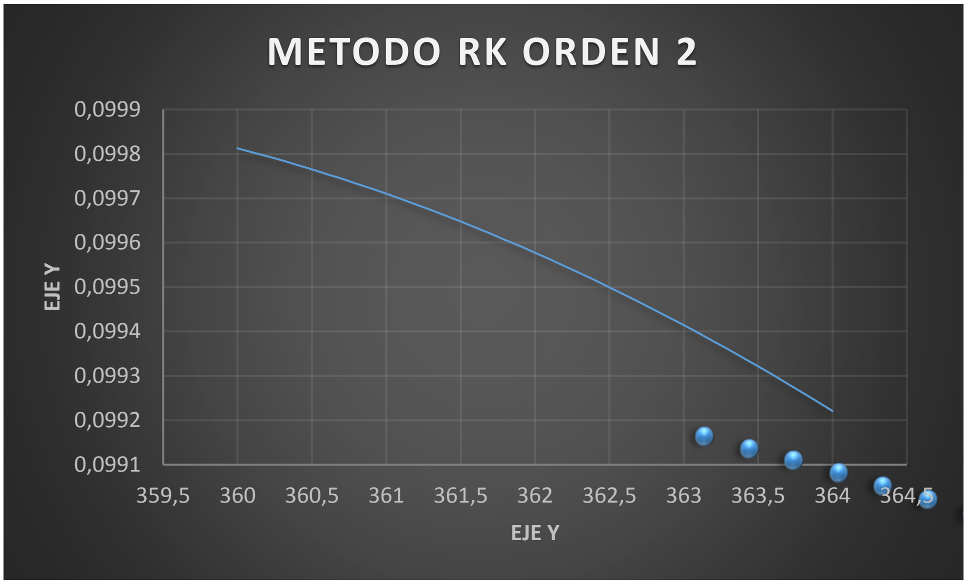
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h = 0.82$$

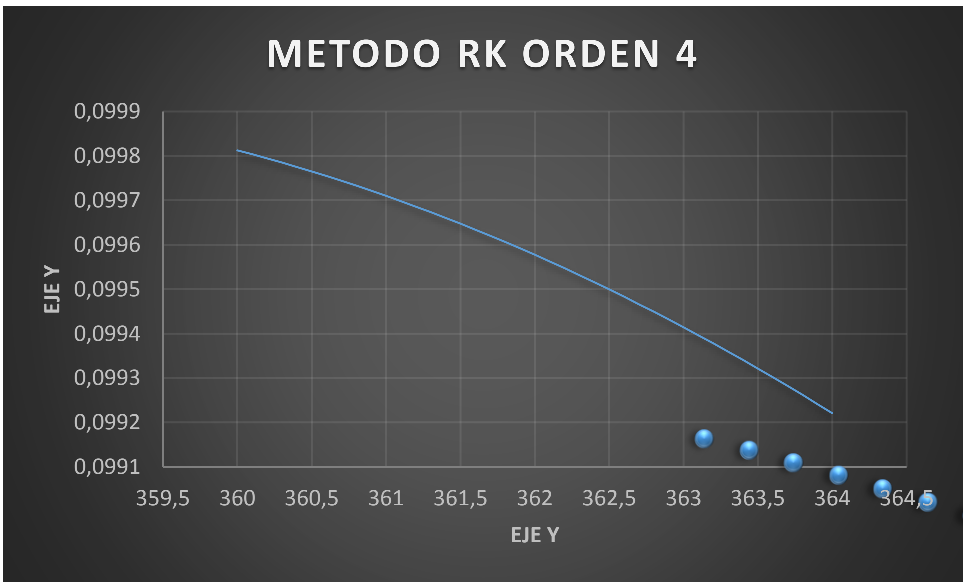
método RK cuarto orden					
x	k1	k2	k3	k4	y
360	1	0,99875026	0,99875026	0,99500417	0,09983342
360,1	0,99999848	0,99866151	0,99866151	0,99482841	0,09982455
360,2	0,99999391	0,99856972	0,99856972	0,99464962	0,09981537
360,3	0,99998629	0,99847488	0,99847488	0,9944678	0,09980589
360,4	0,99997563	0,998377	0,998377	0,99428295	0,09979611
360,5	0,99996192	0,99827609	0,99827609	0,99409508	0,09978602
360,6	0,99994517	0,99817213	0,99817213	0,99390417	0,09977563
360,7	0,99992537	0,99806513	0,99806513	0,99371024	0,09976494
360,8	0,99990252	0,99795509	0,99795509	0,99351328	0,09975394
360,9	0,99987663	0,99784201	0,99784201	0,9933133	0,09974263
361	0,9998477	0,99772589	0,99772589	0,99311029	0,09973103
361,1	0,99981571	0,99760673	0,99760673	0,99290425	0,09971911
361,2	0,99978068	0,99748453	0,99748453	0,99269519	0,0997069
361,3	0,99974261	0,9973593	0,9973593	0,99248311	0,09969438
361,4	0,99970149	0,99723102	0,99723102	0,992268	0,09968156
361,5	0,99965732	0,99709971	0,99709971	0,99204987	0,09966843
361,6	0,99961012	0,99696536	0,99696536	0,99182872	0,099655
361,7	0,99955986	0,99682798	0,99682798	0,99160454	0,09964127
361,8	0,99950656	0,99668755	0,99668755	0,99137735	0,09962724
361,9	0,99945022	0,9965441	0,9965441	0,99114713	0,0996129
362	0,99939083	0,9963976	0,9963976	0,9909139	0,09959825
362,1	0,99932839	0,99624807	0,99624807	0,99067765	0,09958331
362,2	0,99926292	0,99609551	0,99609551	0,99043838	0,09956806
362,3	0,9991944	0,99593991	0,99593991	0,99019609	0,0995525

362,4	0,99912283	0,99578128	0,99578128	0,98995079	0,09953665
362,5	0,99904822	0,99561961	0,99561961	0,98970247	0,09952049
362,6	0,99897057	0,99545491	0,99545491	0,98945114	0,09950402
362,7	0,99888987	0,99528718	0,99528718	0,98919679	0,09948726
362,8	0,99880614	0,99511642	0,99511642	0,98893943	0,09947019
362,9	0,99871936	0,99494262	0,99494262	0,98867905	0,09945282
363	0,99862953	0,9947658	0,9947658	0,98841567	0,09943514
363,1	0,99853667	0,99458595	0,99458595	0,98814927	0,09941716
363,2	0,99844076	0,99440306	0,99440306	0,98787987	0,09939888
363,3	0,99834182	0,99421715	0,99421715	0,98760745	0,0993803
363,4	0,99823983	0,9940282	0,9940282	0,98733203	0,09936141
363,5	0,9981348	0,99383623	0,99383623	0,9870536	0,09934222
363,6	0,99802673	0,99364124	0,99364124	0,98677216	0,09932273
363,7	0,99791562	0,99344321	0,99344321	0,98648772	0,09930294
363,8	0,99780147	0,99324216	0,99324216	0,98620027	0,09928284
363,9	0,99768428	0,99303809	0,99303809	0,98590981	0,09926244
364	0,99756405	0,99283098	0,99283098	0,98561636	0,09924174

Con $h = 0.1$. Realice los cálculos hasta $5h$







De acuerdo a los datos obtenidos se observa que con el método de Runge – Kutta el valor de la función es más exacto que el visto en el método de Euler, se observa en la gráfica que el valor hallado representa una función rampa y son similares para los tres métodos.

Si aumenta el tamaño de h para el método de Runge – Kutta, se observa que se aproxima al valor real de esa función

Si disminuye el tamaño de h, para los tres métodos, el valor hallado sería más alejado que el real

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOCUMENTOS IMPRESOS

- Duran Rondón, Jorge Eliecer. (2011). Algebra Trigonometría y geometría analítica. (UNAD). Bogotá. D.C.

- Chapra, S., & Canale, R. (2016). Métodos numéricos para ingenieros. 5a. ed. McGraw-Hill Interamericana

- Chaves, C.I (n.d). Métodos numéricos (UNAD)

DOCUMENTOS WEB

- Rodriguez, Manuel. (MAELEC 8.9). (2017) Canal de YouTube de Producciones MAELEC 8.9. Recuperado de https://www.youtube.com/user/maelec89

- Rodriguez, Manuel. (2013). Blog de Producciones MAELEC 8.9. Recuperado de http://maelec89.blogspot.com