FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 08

APUNTES DE CLASE

12 − 16 de diciembre de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA.

Consideremos una situación donde se realizan ensayos relacionados a tomar una muestra de una población. En ese caso podemos considerar 2 tipos de muestreo:

1. Muestreo con reemplazo: significa que la muestra tomada retorna a la población después del ensayo.

2. Muestreo sin reemplazo: significa que la muestra no retorna a la población después del ensayo.

Según cada tipo de muestreo se pueden usar distintas distribuciones.

- Si el muestreo es con reemplazo las probabilidades de que se de o no un evento permanecen constantes en cada ensayo y es posible describir el comportamiento de los ensayos usanda la <u>D. Binomial</u>.

- Si el muestreo se hace sin reemplazo y la población es muy grande, será posible considerar que la población es infinita y por tanto la probabilidad en cada ensayo podra considerarse constante. En ese caso también es posible usar la <u>D. Binomial</u>

- Si el muestre se hace sin reemplazo y la población es pequeño, esta se considerara como una población finita y la probabilidad no permanecerá constante de un ensayo a otro, por lo cual, NO se podra usar la D. Binomial. En estos casos se debe hacer uso de la <u>DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA</u>

> Probabilidad de la D. Hipergeométrica.

La distribución Hipergeométrica describe entonces la probabilidad de obtener x exitos de los S exitos que tiene la población para una muestra de n elementos tomados de la población.

La probabilidad sera:

$$\boxed{P(x) = \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

Donde:
- N: tamaño de la poblacion
- S: número de exitos en la población
- n: tamaño de la muestra
- x: número de exitos en la muestra.

> Propiedades de un experimento hipergeométrico.

1. De una población de N elementos se seleccionan n elementos SIN REEMPLAZO
2. Hay S elementos que se clasifican como exito en la población y $N-S$ fracasos.
3. $\boxed{\mu = \frac{nS}{N}}$ → media $\qquad \boxed{\sigma^2 = \frac{nS}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{N-S}{N}}$ → Varianza.

Ejemplo: La empresa Ramo produce un producto llamado Gansito. Los lotes con 40 de estos artículos se consideran no aceptables si contienen 3 o más artículos defectuosos cada uno.

Para validar cada lote se seleccionan 5 artículos al azar y si se encuentra un artículo defectuoso, se rechaza el lote.

¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra se encuentre un artículo defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?

$N=40$ $\qquad n=5$

$S=3$ $\qquad x=1$

$$P(1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}}=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}$$

$$=\frac{\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{37!}{4!\,33!}}{\frac{40!}{5!\,35!}}=\frac{3!\,.\,37!\,.\,5!\,.\,35!}{2!\,4!\,.\,33!\,40!}$$

$$=\frac{\cancel{3!}^{3}}{\cancel{2!}}\;\frac{\cancel{5!}^{5}}{\cancel{4!}}\;\frac{37!}{40!}\;\frac{35!}{33!}=3.5\cdot\frac{1}{40.39.38}\cdot\frac{35.34}{1}$$

$$=\frac{3.\cancel{5}.35.34}{\underset{8}{\cancel{40}}.39.38}=\frac{3\cdot 35.\overset{17}{\cancel{34}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cdot 39\cdot 38}=\frac{3.35.17}{4.\underset{13}{\cancel{39}}\cdot 38}=\frac{35.17}{4.13.38}$$

$P(1)=0{,}3011\approx 30{,}11\,\%$

·Calculo de la media y la varianza:

$$\mu=n\cdot\frac{S}{N}=5*\frac{3}{40}=\frac{3}{8}=0{,}375$$

$$\sigma^2=n.\frac{S}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{N-S}{N}=\cancel{5}\cdot\frac{\cancel{3}}{\underset{8}{\cancel{40}}}\cdot\frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{13}{\cancel{39}}}\cdot\frac{37}{\underset{8}{\cancel{40}}}=\frac{7.37}{8.8.13}$$

$\sigma^2=0{,}3113$

$\sigma=\sqrt{0{,}3113}=0{,}5579.$

Ejemplo 2: 10 refrigeradores de cierto tipo han sido devueltos a un distribuidor debido a la presencia de ruido cuando el refrigerador está funcionando. Supongamos que 4 de estos 10 refrigeradores tienen compresores defectuosos y los otros 6 tienen problemas más leves. Si se examinan 5 de los 10 refrigeradores y se define la variable aleatoria x como el número de refrigeradores con compresor defectuoso entre los 5 examinados. Calcular:

a) La probabilidad de que no todos tengan fallos leves

b) La probabilidad de que máximo 4 compresores sean defectuosos

$N = 10 \qquad n = 5 \qquad S = 4$

a) El evento "todos tengan fallos leves" es equivalente a decir que ninguno tenga compresor defectuoso, esto es, $x=0$. Cuya probabilidad sera $P(0)$. Por otro lado, la negación de este sera el evento "No todos tengan fallos leves" y su probabilidad sera $1-P(0)$.

$$P(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{10-4}{5-0}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} \cdot \frac{6!}{\cancel{5!}\,1!}}{\frac{10!}{\cancel{5!}\,5!}} = \frac{6!\cdot 5!}{10!} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{1}{\cancel{8}}\cdot 7}$$

$$P(0) = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{1}{42} = 0{,}0238 = 2{,}38\%$$

$$P(1 \leq x \leq 4) = 1 - P(0) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42} \approx 0{,}9762 = 97{,}62\%$$

b) $P(x \leq 4)$

$\hookrightarrow F(4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$

Esta suma incluye todos los posibles resultados ya que $S = 4$ total de compresores defectuosos en la población.

Por tanto, esa suma debe ser 1

$$P(x \leq 4) = F(4) = 1$$