
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Introducción a las Ecuaciones diferenciales:

Ecuación diferencial: Es una ecuación donde se involucran las derivadas de una o varias variables con respecto a una o varias variables

Ejemplo: Segunda ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad ; \quad \underbrace{F}_{\text{fuerza}} = \underbrace{m}_{\text{masa}}\, a \rightarrow \text{aceleración}$$

Si suponemos que la masa es constante:

$$\boxed{F\left(x, t, dx, d^2x\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

↓

Ecuación diferencial que me describe las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

$a = \frac{dv}{dt}$ → cambio de velocidad con respecto al tiempo

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v = \frac{dx}{dt}$ → Cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Parámetros $\begin{cases} m: \text{masa} \\ F: \text{fuerza} \end{cases}$

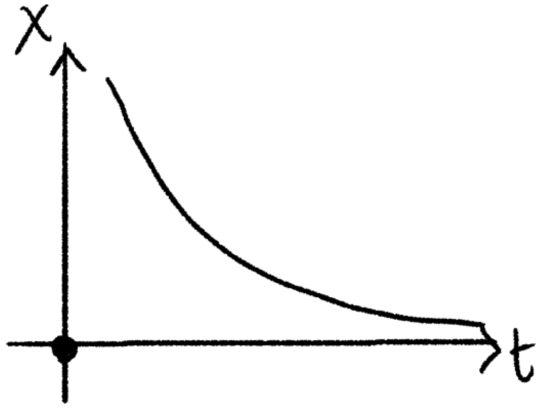
Variables $\begin{cases} x: \text{Posición (dependiente)} \\ t: \text{tiempo (independiente)} \end{cases}$

Que obtengo cuando soluciono una Ecuación Diferencial (ED):

Obtengo una función de la variable dependiente con respecto a la variable independiente.

Para nuestro ejemplo la solución es una función que relaciona la distancia con respecto al tiempo, y esa función describe el movimiento del cuerpo que se estaba analizando

$x(t)$



Clasificación de Ecuaciones diferenciales:

Clasificación por tipo

Clasificación por orden

Clasificación por linealidad

Clasificación por tipo: Si una ecuación diferencial contiene derivadas de variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente, entonces la ED se conoce como una ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Una ecuación diferencial que involucra derivadas de variables dependientes con respecto a varias variables independientes se conoce como ecuación diferencial parcial (EDP):

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dx} = 0$$

Clasificación por orden: El orden de una ecuación diferencial es el "exponente" de la mayor derivada en la ecuación:

Ejemplo

$$* \quad \underbrace{\frac{d^2 y}{dx^2}}_{\substack{\text{segunda}\\ \text{derivada}}} + 3\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\substack{\text{primera}\\ \text{derivada}}}^{4} = 0$$

orden

grado 4

EDO de segundo orden

$$* \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + 5\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^5 + \frac{dx}{dt} = x + 3$$

EDO de tercer orden

Una notación distinta para las ED:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$ → notación primada

↓ notacion de Leibniz

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y^{(4)}$$

Clasificación por linealidad:

Sea $F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ una ecuación diferencial, se dice que es lineal si F, es lineal en $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO es lineal cuando las derivadas de la ecuación solo tienen un factor que depende de la variable independiente, y que las derivadas no estén elevadas a ninguna potencia, tampoco existen funciones especiales de la variable dependiente. En términos generales:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Ejemplo: $$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

* $4xy' + 1 = 0 \rightarrow$ EDO lineal de primer orden.

* $2x^2y'' + y' + 4y = 0 \rightarrow$ EDO lineal de segundo orden.

* $3x^2y'' + \sin y = 5 \rightarrow$ EDO No-lineal de segundo orden.

Solución de una Ecuación diferencial:

Es una función f definida en un intervalo I, la cual al sustituirla en la ecuación diferencial me lleva a una identidad

Ejemplo: Verificación de una solución:

Supongamos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \qquad (1)$$

y supongamos la solución: $y = \frac{x^4}{16}$ (2)

Comprobar que (2) es solución de (1)

Solución: Reemplace (2) en (1):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{16}\right) = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2}$$

$$\frac{4x^3}{16} = x\,\frac{x^2}{4} \rightarrow \boxed{\frac{x^3}{4} = \frac{x^3}{4}}$$

La solución propuesta es válida para la ecuación diferencial

Verificación de Soluciones:

Verifiquemos que la relación $x^2 + y^2 = 25$

Satisface la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Dos formas de solucionar: Tome la solución y derive:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 = 25\right)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \cancelto{0}{\frac{d}{dx}(25)}$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$

Sesión de Ejercicios: Clasificar las ED:

* $x^4 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{dy}{dx} - 5y = \cos x$ EDO lineal de tercer orden

* $(2-y)y' + 2y = e^x$ EDO no-lineal de primer orden

* $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 + y = 0$ EDO no-lineal de cuarto orden.

* $y \frac{dy}{dx} + y = \ln x$ EDO no-lineal de primer orden.

* $yy' + 5y = y\cos x$ EDO no-lineal de primer orden

* $2x^2y'' + y' + 5\ln x = 0$ EDO lineal de segundo orden.

Segunda forma: Despeje y de la solución y reemplace en la EN:

$$x^2+y^2=25 \rightarrow y^2=25-x^2$$

$$y=\sqrt{25-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{25-x^2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left((25-x^2)^{1/2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}(25-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$-\frac{x}{(25-x^2)^{1/2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \rightarrow \boxed{\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}}$$


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN