APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Solución Homogénea y Particular:

Sea la Ecuación Diferencial:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

donde: $a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) = L(D)$

es un operador diferencial

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$$y' - 2y = 0$$

La misma ED se puede escribir como:

$D = \frac{d}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$Dy - 2y = 0$$

$$(D-2)y = 0$$

Ejemplo 2: $$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = \ln x$$

$$D^3y + 4xD^2y + 3Dy + 5y = \ln x$$

$$\underbrace{(D^3 + 4xD^2 + 3D + 5)}_{\text{operador diferencial}}y = \ln x$$

Ejemplo 3: $$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x\frac{dy}{dx} + 4xy = e^x$$

Escribirlo en forma de operador diferencial

$$5xD^4y + 3x^2D^3y + \sin x\, Dy + 4xy = e^x$$

$$\underbrace{(5xD^4 + 3x^2D^3 + \sin x \cdot D + 4x)}_{\text{Operador diferencial}}y = e^x$$

Una Ecuación Diferencial de orden superior homogénea y lineal es aquella que no tiene término independiente:

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

Una ED No-homogénea es aquella que sí tiene término independiente:

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

Si yo quiero solucionar una ED de segundo orden lineal No-homogenea debo primero encontrar la solución homogénea y luego hallar la solución particular (se hace utilizando el término independiente $g(x)$)

Ejemplo 1: Escribir la parte homogénea de la siguiente ED:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = \ln x$$

Su forma homogénea es:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Escrita en términos de un operador diferencial:

$$(D^3 + 4xD^2 + 3D + 5)y = 0$$

Ejemplo 2: Escribir la parte homogénea de la siguiente ecuación diferencial:

$$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x\frac{dy}{dx} + 4xy + e^x = 0$$

Su forma homogénea es:

$$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

$$5x\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

Escrita en términos de un operador diferencial

$$(5xD^4 + 3x^2D^2 + \sin x\, D + 4x)y = 0$$

Solución de una Ecuación Diferencial de segundo orden con coeficientes constantes:

Van a haber 3 casos:

* Raíces reales no repetidas

* Raíces reales repetidas

* Raíces imaginarias

Raíces reales no repetidas:

Ejemplo 1: Sea la ED: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ escribirla como un operador diferencial:

$(D^2 - 3D + 2)y = 0$ Supongamos que la solución es $y(x) = e^{mx}$ donde m es cualquier número

nuestro objetivo es encontrar los valores de m:

Apliquemos la solución supuesta en la ED:

$(D^2 - 3D + 2)e^{mx} = 0$ $\qquad De^{mx} = me^{mx}$

$m^2 e^{mx} - 3me^{mx} + 2e^{mx} = 0$ $\qquad D^2(e^{mx}) = m^2 e^{mx}$

$(m^2 - 3m + 2)e^{mx} = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$ → es un trinomio cuadrado vamos a factorizar:

$(m-1)(m-2) = 0$

$m_1 = 1$; $m_2 = 2$ → son las raíces de la ecuación.

La solución de la ED es entonces:

$$y(x) = e^{mx} \qquad m_1 = 1 \;, \quad m_2 = 2$$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}}$$ → Solución homogénea (solución complementaria)

Ejemplo 2: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Escribir en forma de un operador Diferencial:

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)\, y = 0 \qquad y(x) = e^{mx}$$

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)\, e^{mx} = 0 \qquad De^{mx} = me^{mx}$$

$$m^3 e^{mx} - 6m^2 e^{mx} + 11 m e^{mx} - 6 e^{mx} = 0 \qquad D^2 e^{mx} = m^2 e^{mx}$$

$$(m^3 - 6m^2 + 11m - 6)\, e^{mx} = 0 \qquad D^3 e^{mx} = m^3 e^{mx}$$

$$(m^3 - 6m^2 + 11m - 6) = 0$$

$$(m-3)(m-2)(m-1) = 0$$

$m_1 = 3$; $m_2 = 2$; $m_3 = 1$

$y(x) = e^{mx}$

$m_1 = 3$

$m_2 = 2$

$m_3 = 1$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}}$$

$\Downarrow$

Solución homogénea

Resumen de Soluciones de ED de orden superior lineales

Ecuaciones Diferenciales de orden superior Lineales $a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$	
Ecuaciones Homogéneas $g(x)=0$	Ecuaciones no Homogéneas $g(x) \neq 0$
• Reducción de orden para ED de segundo orden ✓✓ • Coeficientes Constantes: * Raíces reales no repetidas ✓✓ * Raíces repetidas * Raíces complejas Solución Homogénea	La solución general será: Solución homogénea más la solución particular. • Coeficientes indeterminados • Variación de parámetros

Raices Reales Repetidas:

Ejemplo 1: Supongamos la siguiente ED:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

Supongamos solución $y(x) = e^{mx}$

$$(m^2 - 6m + 9) = 0$$

$$(m-3)(m-3) = 0$$

$m_1 = 3$ y $m_2 = 3$

Raices repetidas