
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Repaso de Cálculo Integral:

Teorema fundamental del Cálculo:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ entonces la función $g(x)$ definida como:

$$g(x) = \int f(x)\, dx$$

dx: diferencial de x

Integral

es también continua en $[a,b]$ y derivable en ese intervalo, por lo tanto $\boxed{\frac{dg}{dx} = f(x)}$

función — Primitiva (antiderivada o integral)

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[rr, "\text{Integrando}"] & & g(x) \arrow[ll, bend left, "\text{derivando}"] \end{tikzcd}$$

"La integral es el proceso inverso de la derivada"

Propiedades de la integral:

Constante

$$* \quad \int a\,dx = ax + C$$

$f(x) = a \Rightarrow$ constante

dx: es el diferencial de la variable x, me indica con respecto a quién debo integrar

para comprobar el resultado de una integral, tomo el resultado, lo derivo y me debe dar la función que se integró

$$\begin{aligned} g(x) &= ax + C \\ g'(x) &= a \end{aligned}$$

Integrar ↑ ↓ derivar

Ejemplo:

$$\int dx = x + C$$

comprobemos que el resultado de la integral es correcto:

derivo la función que hallé:

$$\begin{aligned} g(x) &= x + C \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Integro ↑ ↓ derivo

correcto !! ☺

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

Suma o resta de funciones

* $$\int [g(x) \pm h(x)]\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$$

Constante por función

* $$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$ donde a es una constante

Recordemos entonces que una integral indefinida me dice que:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{función}}\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{antiderivada o primitiva}} + C \qquad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

"Primer método de integración"

Integral de funciones como potencias:

$$f(x) = x \rightarrow \int f(x)\,dx$$

$$= \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+C\right) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + 0$$

$$= x$$

$$\int x\,dx \underset{\text{Integrar}}{\overset{\text{derivando}}{=}} \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^1\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{donde } n \neq -1}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln|x| + C$$

Tabla de derivadas e integrales:

derivada	función	Integral
$c\,f'(x)$	$c\,f(x)$	$c\int f(x)dx$
$f'(x) \pm g'(x)$	$f(x) \pm g(x)$	$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\frac{d}{dx}(k) = 0$	$k = cte$	$\int k\,dx = kx + C$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$x^n \quad n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	e^x	$\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{d}{d}(\sec^2 x) = 2\sec^2 x \tan x$	$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

Derivada	función	Integral
$\frac{d}{dx}(\csc^2 x) = -2\csc^2 x \cot x$	$\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
	$\frac{1}{x^2+1}$	$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$
	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

Método de solución por sustitución:

Si $u = g(x)$ es una función derivable y $f(x)$ es una función continua entonces:

$$\int \underbrace{f(g(x))\, g'(x)}_{\text{Regla de la cadena}} dx = \int f(u)\, du$$

$$\int f(\underline{g(x)})\, \underline{g'(x)\, dx}$$

$$\int f(u) \quad du$$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\, dx$

Ejemplo: Encontrar $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$

$U = x^4+2$

$du = 4x^3\,dx$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

$$= \int \cancel{x^3} \cos(u) \frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin u + C\right]$$

$$\boxed{\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C'}$$

Integración por partes: $\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\overbrace{f(x)}^{U}\overbrace{g(x)}^{V} - \int \underbrace{f'(x)}_{du}\,\underbrace{g(x)}_{V}\,dx = \int \underbrace{f(x)}_{U}\,\underbrace{g'(x)\,d\cancel{x}}_{dv}$$

Otra forma: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$U \rightarrow dV$, $dV \rightarrow V$, $V \rightarrow du$

Un · día Ví = Una · Vaca - Vestida · de Uniforme

I	L	A	T	E
nversa	ogaritmica	lgebraica	rigonom...	exponencial

quien debería ser u en orden

Ejemplo Encontrar $\int x \sin x \, dx$

$u = x$

$du = dx$

$dv = \sin x \, dx$

$\int dv = \int \sin x \, dx$

$v = -\cos x$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\boxed{\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C}$$

Sesión de Ejercicios:

1) Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

$u = 2x+1$

$du = 2\,dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$$\int \sqrt{u}\, \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du \rightarrow \frac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2} + C$$

$$\frac{\frac{u^{3/2}}{1}}{\frac{3}{2}} \downarrow \frac{2u^{3/2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$\boxed{\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + C}$$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

$u = 1-4x^2$

$du = -8x\,dx$

$-\frac{du}{8x} = dx$

$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}}\left(\frac{-du}{8\cancel{x}}\right)$

$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$

$= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$

$2u^{1/2} = \frac{\frac{u^{1/2}}{1}}{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{8}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \rightarrow -\frac{2}{8}u^{1/2} + C$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}(1-4x^2)^{1/2} + C}$$

3) $\int \tan x\,dx$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$-\frac{du}{\sin x} = dx$

$\int \frac{\cancel{\sin x}}{u}\left(-\frac{du}{\cancel{\sin x}}\right)$

$$= -\int \frac{1}{u}\, du \qquad\qquad \ln x^b = b\ln x$$

$$= -\ln u + C$$

$$= \ln u^{-1} + C$$

$$= \ln(\cos x)^{-1} + C \rightarrow \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) + C$$

$$= \ln(\sec x) + C$$

$$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln(\sec x) + C}$$

$$\int \ln x\, dx =$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$

$$= x\ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C$$


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN