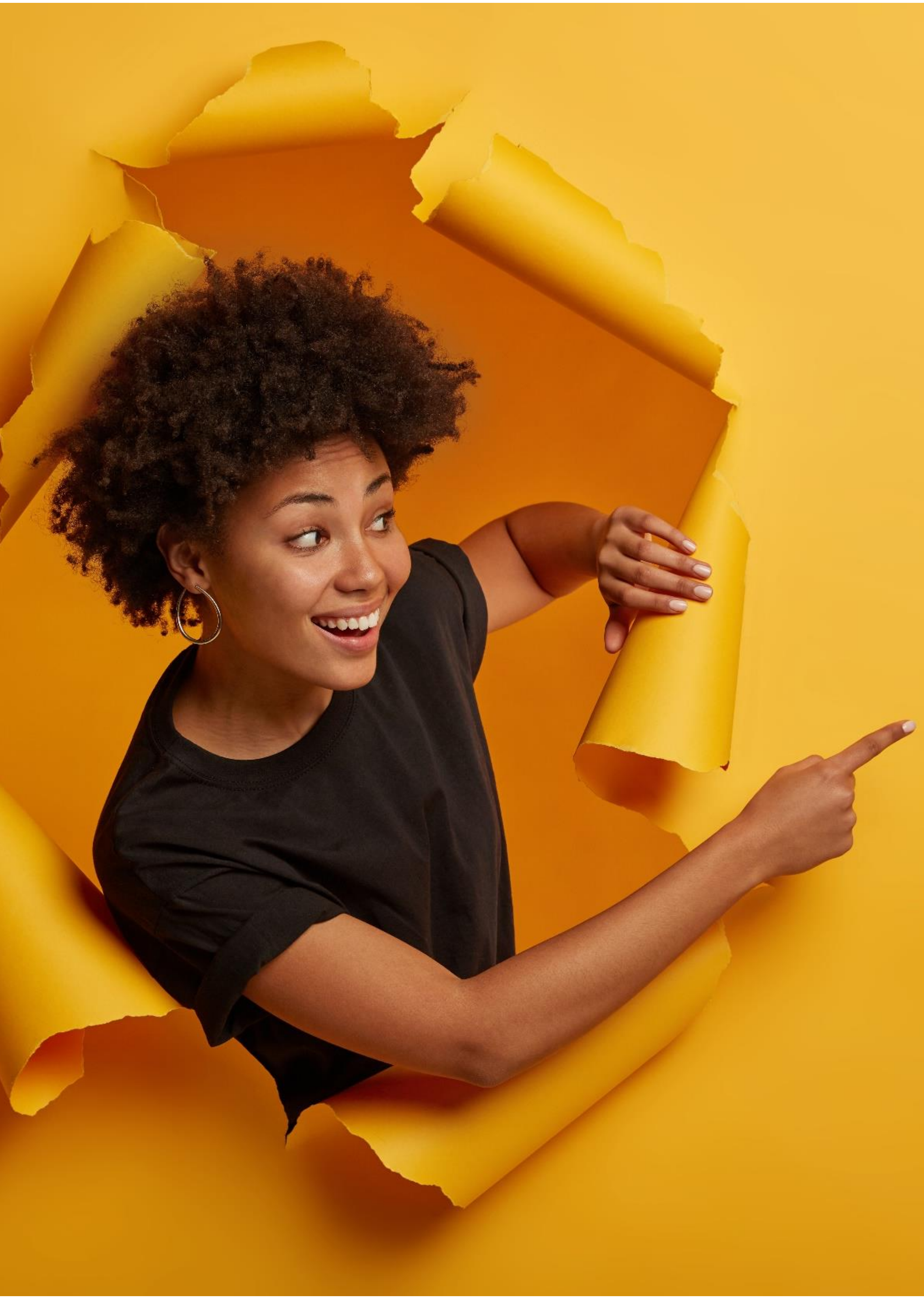


INICIO
GRABACIÓN

SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

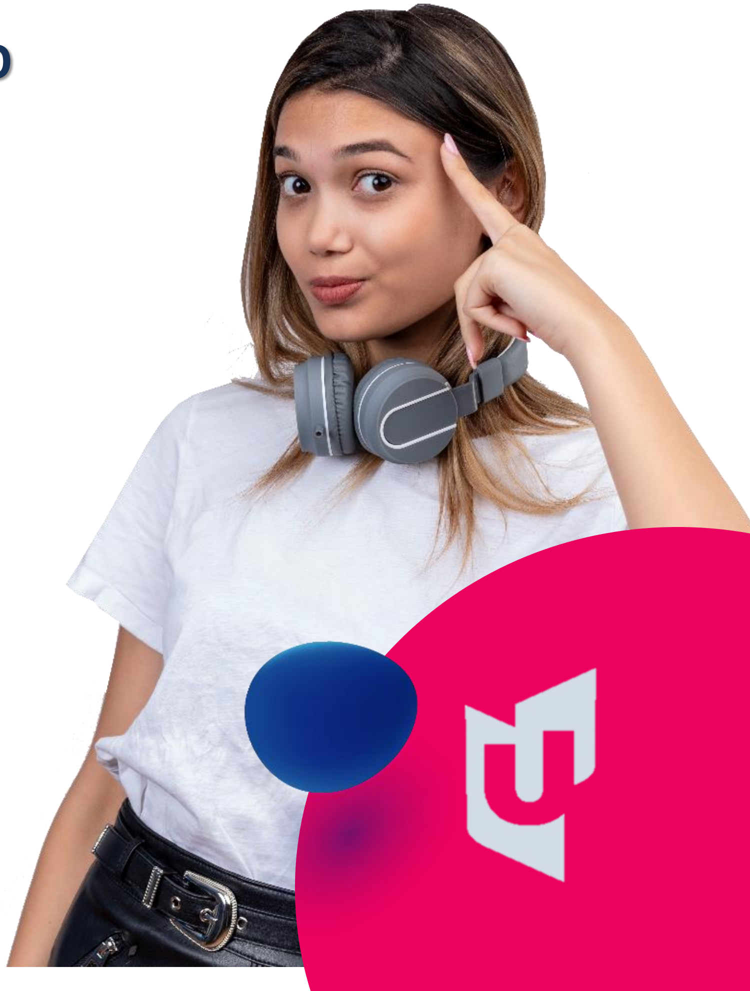
SEMANA 9

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES – DUALIDAD Y PRIMALIDAD

Ing. GEORGE ANDERSON MOJICA SERRANO

INGENIERO INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS



SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

INDICE

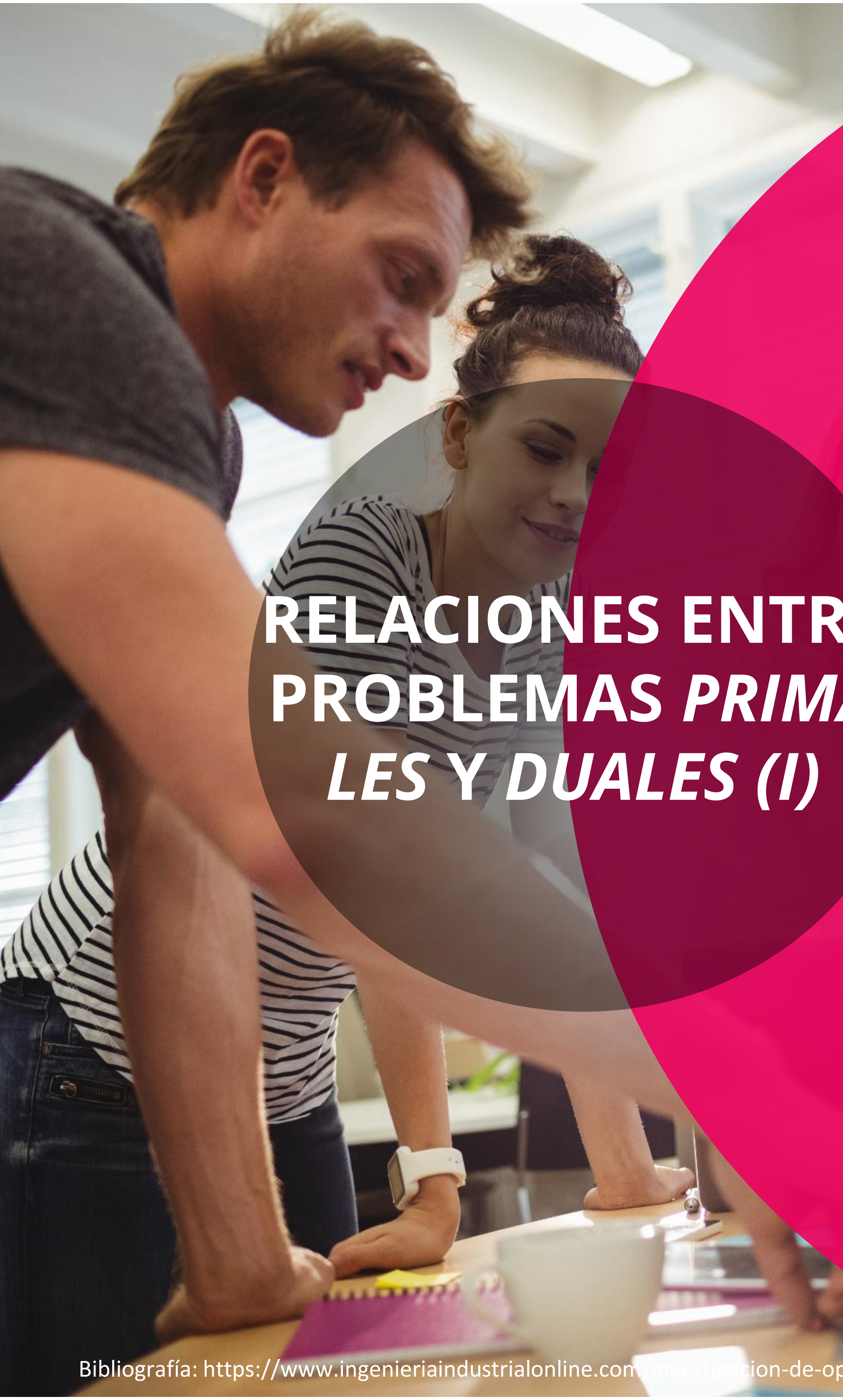
SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

DUALIDAD Y PRIMALIDAD

DUALIDAD Y PRIMALIDAD

Los problemas primales y duales se encuentran ligados por una serie de relaciones, saber la existencia de estas puede ser considerado de gran utilidad para la resolución de problemas que parecen no factibles, o que no pueden ser resueltos mediante un método en particular.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/



RELACIONES ENTRE PROBLEMAS *PRIMALES Y DUALES (I)*

•El número de variables que presenta el problema dual se ve determinado por el número de restricciones que presenta el problema primal.

•El número de restricciones que presenta el problema dual se ve determinado por el número de variables que presenta el problema primal.

•Los coeficientes de la función objetivo en el problema dual corresponden a los términos independientes de las restricciones (RHS), que se ubican del otro lado de las variables.

•Los términos independientes de las restricciones (RHS) en el problema dual corresponden a los coeficientes de la función objetivo en el problema primal.

•La matriz que determina los coeficientes técnicos de cada variable en cada restricción corresponde a la transpuesta de la matriz de coeficientes técnicos del problema primal.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

RELACIONES ENTRE PROBLEMAS *PRIMALES* Y *DUALES (II)*

El sentido de las igualdades y desigualdades se comporta según la tabla de ***Tucker***, presentada a continuación.

	Primal	Dual
Función Objetivo	Maximización	Minimización
Restricciones	<=	>=
	>=	<=
	=	><
Variables	>=	>=
	<=	<=
	><	=

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

IMPORTANCIA DE LA DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

La resolución de los problemas duales respecto a los primales se justifica dada la facilidad que se presenta dados problemas donde el número de restricciones supere al número de variables. Además de tener gran aplicación en el análisis económico del problema.

Otra de las ventajas que presenta, es que dado a que el número de restricciones y variables entre problema dual y primal es inverso, se pueden ***resolver gráficamente*** problemas que presenten dos restricciones sin importar el número de variables.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DUAL, PASO A PASO

El siguiente problema a resolver es hasta el momento el modelo más completo de los resueltos en los módulos anteriores, dado que trataremos de resolver un problema primal y su dual mediante ***Método Simplex*** utilizando variables de holgura, exceso y artificiales; además resolveremos el primal utilizando Simplex maximizando y el dual minimizando.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

EJEMPLO:

Dado el siguiente modelo primal:

Función objetivo

$$Z_{MAX} = 40X1 + 18X2$$

Restricciones

$$16X1 + 2X2 \leq 700$$
$$6X1 + 3X2 \leq 612$$
$$X1 \leq 80$$
$$X2 \leq 120$$

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

SOLUCIÓN:

	Cj		40	18	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	S1	S2	S3	S4
0	S1	700	16	2	1	0	0	0
0	S2	612	6	3	0	1	0	0
0	S3	80	1	0	0	0	1	0
0	S4	120	0	1	0	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj		40	18	0	0	0	0

	Cj		40	18	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	S1	S2	S3	S4
40	X1	43.75	1	0.125	0.0625	0	0	0
0	S2	349.5	0	2.25	-0.375	1	0	0
0	S3	36.25	0	-0.125	-0.0625	0	1	0
0	S4	120	0	1	0	0	0	1
	Zj	1750	40	5	0	0	0	0
	Cj - Zj		0	13	0	0	0	0

	Cj		40	18	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	S1	S2	S3	S4
40	X1	28.75	1	0	0.0625	0	0	-0.125
0	S2	79.5	0	0	-0.375	1	0	-2.25
0	S3	51.25	0	0	-0.0625	0	1	0.125
18	X2	120	0	1	0	0	0	1
	Zj	3310	40	18	2.5	0	0	13
	Cj - Zj		0	0	-2.5	0	0	-13

Cuya respuesta es:

X1 = 28,75

X2 = 120

S1 = 79.5

S3 = 51.25

Función objetivo

F.O = 3310

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Procedemos a resolver el problema dual

PASO 1: DEFINIMOS EL PROBLEMA DUAL

	Variables	RHS
Restricción 1	16X1 + 2X2	≤ 700
Restricción 2	6X1 + 3X2	≤ 612
Restricción 3	X1	≤ 80
Restricción 4	X2	≤ 120

El número de variables en el modelo dual está determinado por el número de restricciones del modelo primal, cada variable en el modelo dual ahora representa una restricción.

$$Z_{MIN} = 700\Lambda 1 + 612\Lambda 2 + 80\Lambda 3 + 120\Lambda 4$$

Los coeficientes de la función objetivo en el modelo dual corresponden a los terminos independientes (RHS) de cada restricción.

$$Z_{MAX} = 40X1 + 18X2$$

El criterio de la función objetivo primal es Zmax, por ende en el modelo dual esta cambia a Zmin.

El número de restricciones en el modelo dual está determinado por el número de variables del modelo primal

$$\begin{bmatrix} 16X1 & + & 2X2 \\ 6X1 & + & 3X2 \\ 1X1 & + & 0X2 \\ 0X1 & + & 1X2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq 700 \\ \leq 612 \\ \leq 80 \\ \leq 120 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16\Lambda 1 & + 6\Lambda 2 & + \Lambda 3 & + 0\Lambda 4 \\ 2\Lambda 1 & + 3\Lambda 2 & + 0\Lambda 3 & + 1\Lambda 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq= \boxed{40} \\ \geq \boxed{18} \end{matrix}$$

Los terminos RHS en el modelo dual corresponden a los coeficientes de la función objetivo en el modelo primal

El orden de los coeficientes de las variables en las restricciones del modelo dual se encuentran determinado por la transpuesta de la matriz en que se ordenaban en el modelo primal

Los signos de las restricciones cambian

Este paso se lleva a cabo teniendo en cuenta las relaciones que se expusieron en la definición de la dualidad. Ahora las variables en el dual las representaremos por «ʌ» y corresponden a cada restricción.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

El modelo queda de la siguiente forma:

$$Z_{MIN} = 700\Lambda1 + 612\Lambda2 + 80\Lambda3 + 120\Lambda4$$

$$16\Lambda1 + 6\Lambda2 + \Lambda3 \geq 40$$

$$2\Lambda1 + 3\Lambda2 + \Lambda4 \geq 18$$

$$\Lambda1;\Lambda4 \geq 0$$

Ahora preparamos el modelo para ser resuelto mediante ***Método Simplex***, utilizaremos el procedimiento en el cual la función objetivo es multiplicada por (-1) y resolveremos el modelo mediante maximización.

$$Z_{MIN} = 700\Lambda1 + 612\Lambda2 + 80\Lambda3 + 120\Lambda4$$

Lo que es igual

$$\mathbf{(-Z)_{MAX} = -700\Lambda1 - 612\Lambda2 - 80\Lambda3 - 120\Lambda4}$$

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Ahora dado que los signos de las inecuaciones son mayor o igual procedemos a volverlas ecuaciones agregando variables de exceso, recordemos que en este caso las variables de exceso se restan del lado izquierdo de la igualdad, por ende.

16ʎ1 + 6ʎ2 + ʎ3 + 0ʎ4 – 1S1 + 0S2 = 40

2ʎ1 + 3ʎ2 + 0ʎ3 + ʎ4 + 0S1 – 1S2 = 18

ʎ1;ʎ4 ≥ 0

Recordemos que el **Método Simplex** solo es posible por la formación de la matriz identidad, sin embargo en una matriz identidad no pueden ir coeficientes negativos, el cual es el caso, por ende recurriremos al artificio denominado ***«Método de la M grande»*** utilizando variables artificiales, las cuales siempre se suman.

16ʎ1 + 6ʎ2 + ʎ3 + 0ʎ4 – 1S1 + 0S2 + 1A1 + 0A2 ≥ 40

2ʎ1 + 3ʎ2 + 0ʎ3 + ʎ4 + 0S1 – 1S2 + 0A1 + 1A2 ≥ 18

ʎ1;ʎ4 ≥ 0

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Ahora si observamos la matriz identidad formada por las variables artificiales, nuestra función objetivo es la siguiente (varía dada la incorporación de las nuevas variables).

$$(-Z)_{MAX} = -700\Lambda1 - 612\Lambda2 - 80\Lambda3 - 120\Lambda4 + 0S1 + 0S2 - MA1 - MA2$$

Recordemos que el coeficiente de las variables de holgura y exceso es 0, además que los coeficientes de las variables artificiales es M, donde M corresponde a un número grande poco atractivo cuyo signo en la función objetivo depende del criterio de la misma, dado que la función es maximizar el signo es negativo. Dado que utilizaremos el Método Simplex y no un software para la resolución del modelo es necesario que M adquiera valor, en este caso será «-10000» un número bastante grande en el problema.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Las iteraciones que utiliza el ***Método Simplex*** son las siguientes:

	Cj		-700	-612	-80	-120	0	0	-10000	-10000
Cb	Variable Solucion	Solucion	λ1	λ2	λ3	λ4	S1	S2	A1	A2
-10000	A1	40	16	6	1	0	-1	0	1	0
-10000	A2	18	2	3	0	1	0	-1	0	1
	Zj	-580000	-180000	-90000	-10000	-10000	10000	10000	-10000	-10000
	Cj - Zj		179300	89388	9920	9880	-10000	-10000	0	0

	Cj		-700	-612	-80	-120	0	0	-10000	-10000
Cb	Variable Solucion	Solucion	λ1	λ2	λ3	λ4	S1	S2	A1	A2
-700	λ1	2.5	1	0.375	0.0625	0	-0.0625	0	0.0625	0
-10000	A2	13	0	2.25	-0.125	1	0.125	-1	-0.125	1
	Zj	-131750	-700	-22762.5	1206.25	-10000	-1206.25	10000	1206.25	-10000
	Cj - Zj		0	22150.5	-1286.25	9880	1206.25	-10000	-11206.25	0

	Cj		-700	-612	-80	-120	0	0	-10000	-10000
Cb	Variable Solucion	Solucion	λ1	λ2	λ3	λ4	S1	S2	A1	A2
-700	λ1	0.33333	1	0	0.08	-0.17	-0.08	0.17	0.08	-0.17
-612	λ2	5.77778	0	1	-0.06	0.44	0.06	-0.44	-0.06	0.44
	Zj	-3769.33333	-700	-612	-24.33	-155.33	24.33	155.33	-24.33	-155.33
	Cj - Zj		0	0	-55.67	35.33	-24.33	-155.33	-9975.67	-9844.67

	Cj		-700	-612	-80	-120	0	0	-10000	-10000
Cb	Variable Solucion	Solucion	λ1	λ2	λ3	λ4	S1	S2	A1	A2
-700	λ1	2.50000	1	0.375	0.0625	0	-0.0625	0	0.0625	0
-120	λ4	13.00000	0	2.250	-0.125	1	0.125	-1	-0.125	1
	Zj	-3310.00000	-700	-532.5	-28.75	-120	28.75	120	-28.75	-120
	Cj - Zj		0	-79.5	-51.25	0	-28.75	-120	-9971.25	-9880

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Podemos observar que todos los Cj – Zj son menores o iguales a 0, por ende hemos llegado a la solución óptima del problema, sin embargo recordemos que la función objetivo fue alterada en su signo al principio, por ende se hace necesario regresarle su signo original a Zj y a la fila Cj – Zj.

$$(-Z)\ max = -3310 \quad * \quad (-1)$$

$$Z\ max = 3310$$

Podemos cotejar con la función objetivo del modelo primal y encontraremos que hallamos el mismo resultado.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Ahora se hace necesario interpretar los resultados de la tabla dual respecto al modelo primal, y esta interpretación se realiza siguiendo los siguientes principios.

	Primal	Dual
	X_j	λ_i
Variables de decisión	Nivel de actividad de la variable "j"	Valor implicito, Precio sombra (Shadow Price) o costo marginal del recurso "i", en otras palabras es el ingreso que se deja de recibir por no contar por cada unidad del recurso "i"
Cj	Utilidad unitaria de la actividad "j"	Costo unitario del recurso
Z	Utilidad total	Valor total implícito de los recursos

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

La interpretación del tabulado final del modelo dual es la siguiente:

Utilidad total , recordemos que su valor es positivo

Precio sombra, utilidad que se recibiría por cada unidad del recurso adicional.

	Cj		-700	-612	-80	-120	0	0	-10000	-10000
Cb	Variable Solucion	Solucion	ʎ1	ʎ2	ʎ3	ʎ4	S1	S2	A1	A2
-700	ʎ1	2.50000	1	0.375	0.0625	0	-0.0625	0	0.0625	0
-120	ʎ4	13.00000	0	2.250	-0.125	1	0.125	-1	-0.125	1
	Zj	3310.00000	-700	-532.5	-28.75	-120	28.75	120	-28.75	-120
	Cj - Zj		0	-79.5	-51.25	0	-28.75	-120	-9971.25	-9880

Sobrante u Holgura de cada recurso. recordemos que su valor es positivo

Cantidad de recursos consumidos, recordemos que su valor es positivo.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

TEOREMAS DE LA DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

•Si el modelo primal o dual tiene solución óptima finita entonces su respectivo dual o primal tendrán solución óptima finita.

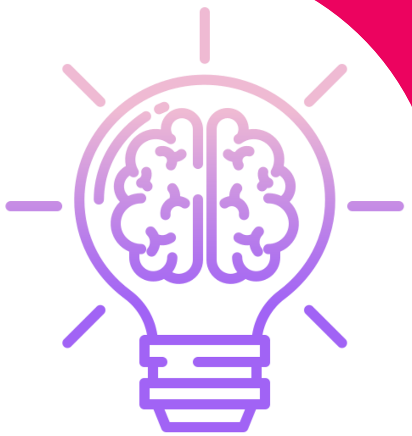
•Si el modelo primal o dual tiene solución óptima no acotada, entonces su respectivo dual o primal no tendrán solución, será un modelo infactible.

•Si el modelo primal o dual no tiene solución entonces su respectivo dual o primal no tendrán solución.

•Sea «A» un modelo primal cuyo modelo dual es «B», el modelo dual de «B» es igual a «A», es decir *«El modelo dual de un dual es un modelo primal»*.

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Método Simplex primal



sea, el modelo de programacion lineal:

Función objetivo

Maximizar Z = 75 USD x 1 + 80 USD x 2 + 77 USD

Sujeto a:

Producir acero con recubrimiento mediante cementación	$21\ x\_1 + 23\ x\_2 + 24\ x\_3 \leq 5100$
Producir acero con recubrimiento mediante nitruración	$9\ x\_1 + 11\ x\_2 + 10\ x\_3 \leq 1900$
Producir acero con recubrimiento mediante cianuración	$18x\_1 + 18\ x\_2 + 16\ x\_3 \leq 3600$
	$X1, X2, X3 \geq 0$

Sea la forma estándar de modelo de programación lineal por el método simplex primal

Maximizar Z - 75 USD x 1 - 80 USD x 2 - 77 USD = 0

$$21\ x\_1 + 23\ x\_2 + 24\ x\_3 + s\_1 \leq 5100$$
$$9\ x\_1 + 11\ x\_2 + 10\ x\_3 + s\_2 \leq 1900$$
$$19x\_1 + 18\ x\_2 + 16\ x\_3 + s\_3 \leq 3600$$

$$X1, X2, X3, S1, S2, S3 \geq 0$$

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Aplicando el metodo simplex primal al problema primal de mazimization :

tablas iniciales

		Variable sin vasica					
Variables basicas	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3
z	1	-75	-80	-77	0	0	0
s_1	0	21	23	24	1	0	0
s_2	0	9	11	10	0	1	0
s_3	0	19	18	dieciséis	0	0	1

valores mas negativos	-75	-80	-77	0	0	0
		VE				

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Restricción 1

Variables basicas	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3
				Variable sin vasica			
	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3
z	1	-9.54545455	0	-4.27272727	0	7.27272727	0
s_1	0	2.18181818	0	3.09090909	1	-2.09090909	0
s_2	0	0.81818182	1	0.90909091	0	0.09090909	0
X2	0	4.27272727	0	-0.36363636	0	-1.63636364	1
valores mas negativos		-9.54545455	0	-4.27272727	0	7.27272727	0
				VE			

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

restricción 2

Variables basicas			Variable sin vasica				
	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3
z	1	0	11.6666667	6.33333333	0	8.33333333	0
X1	0	0	-2.66666667	0.66666667	1	-2.33333333	0
s_2	0	1	1.22222222	1.11111111	0	0.11111111	0
X2	0	0	-5.22222222	-5.11111111	0	-2.11111111	1

s_1

s_1

¿Qué cantidad de acero con recubrimiento de cada tipo, debe producir

Para maximizar las utilidades la empresa debe producir : 667 unidades en la Producir hacer recubrimiento mediante cementación y 211 unidades debe producir acero con recubrimiento nitruración, para reducir su utilidad a -411

Interpretar los resultados de la solución del modelo de programación

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

Razon mas pequeña

solucion		
0		
[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	

solucion		
[illegible]		
[illegible]	[illegible]	
172.727273	[illegible]	contra
[illegible]	$550	

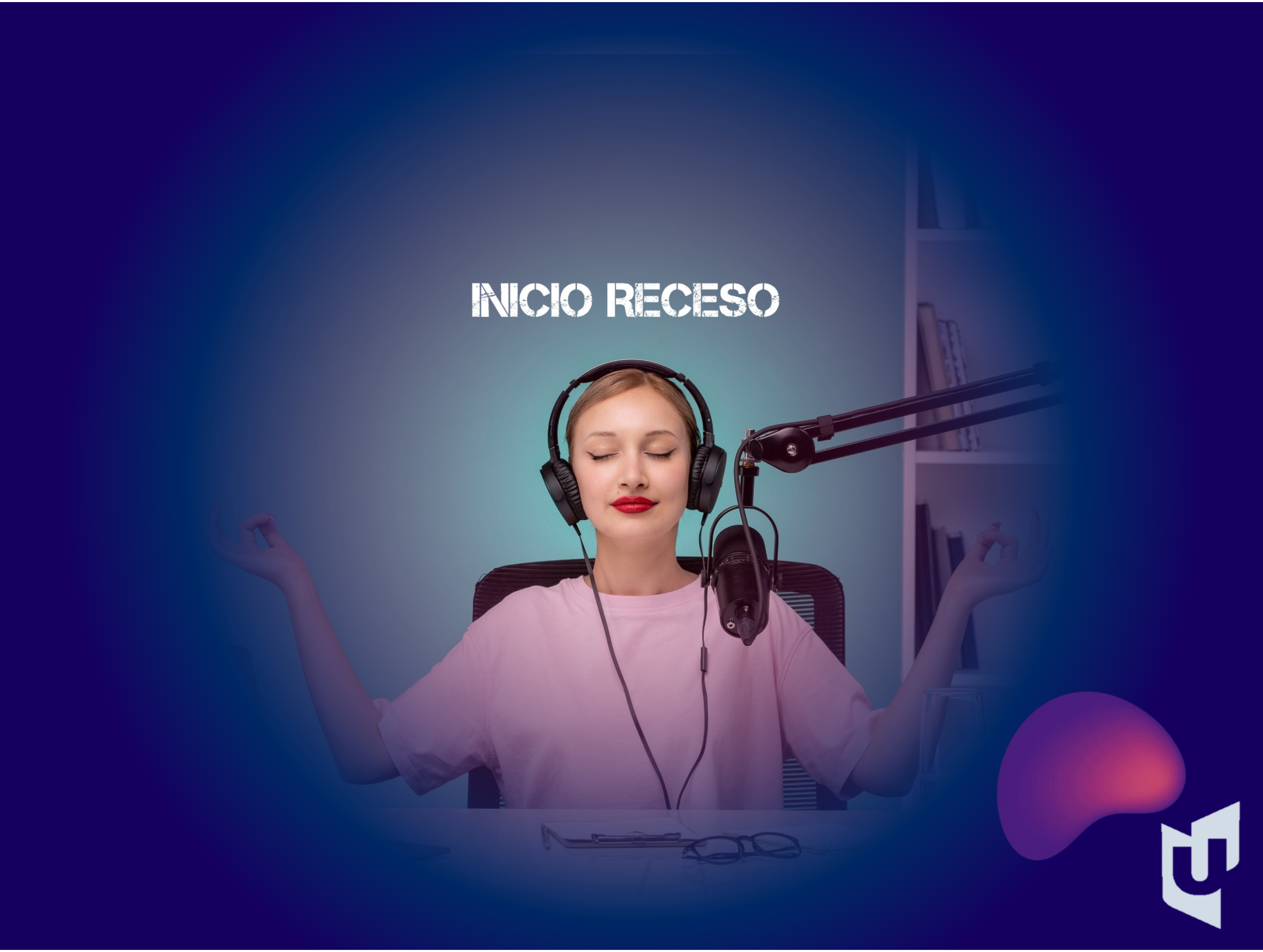
[illegible]

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/

solucion optima

solución	
15833.3333	
666.666667	Producir acero con recubrimiento mediante cementación
211.111111	Producir acero con recubrimiento mediante nitruración
-411.111111	Producir acero con recubrimiento mediante cianuración

Bibliografía: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/dualidad-en-programacion-lineal/


INICIO RECESO


FIN DE RECESO


SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
FIN DE
GRABACIÓN

INICIO RECURSO MULTIMEDIA

Para acceder a este video diríjase a la etiqueta de material de apoyo