APUNTES DE CLASE

4 – 8 de abril de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

ECUACION DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n}$$

con n cualquier número real, se conoce como EC. de BERNOULLI.

> Caso $n=0$

La ecuación queda de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^0$$

es decir:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)} \rightarrow \text{E.D. Lineal}$$

> Caso $n=1$:

La ecuación resultante es:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y$$

que podemos escribir como

$$\frac{dy}{dx} + [p(x) - q(x)]\,y = 0$$

haciendo $p(x) - q(x) = \tilde{p}(x)$ y $\tilde{q}(x) = 0$, tenemos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \tilde{p}(x)\,y = \tilde{q}(x)} \rightarrow \text{E.D. lineal.}$$

Con estos dos resultado se tiene que para $n=0$ y $n=1$ la ecuación de Bernoulli se vuelve una ecuación lineal.

Veamos ahora que pasa con $n \neq 0$ y $n \neq 1$.

> Caso $n \neq 0$ y $n \neq 1$

En este caso la ecuación es:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Esta ED. puede convertirse en una ecuación lineal al hacer la sustitución:

- $$\boxed{u = y^{1-n}}$$

- $$\frac{du}{dx} = \frac{dy^{1-n}}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Equivalente a:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{du}{dx}}$$

Con lo que la ecuación quedará como:

$$\frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{du}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Multiplicando por $(1-n)y^{-n}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n}p(x)y = (1-n)y^{-n}q(x)y^n$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x)y^{n-n}$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)} \rightarrow \text{ED. lineal.}$$

Haciendo $\tilde{p}(x) = (1-n)p(x)$ y $\tilde{q}(x) = (1-n)q(x)$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{du}{dx} + \tilde{p}(x)u = \tilde{q}(x)} \rightarrow \text{ED lineal.}$$

Ejemplo: Resuelva la E.D. $x\frac{dx}{dy}+y=x^2y^2$

Dividimos toda la ecuación entre x para obtener la forma estandar.

$$\frac{1}{x}x\frac{dx}{dy}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

Hacemos la sustitución $u=y^{1-2}=$

$$u=y^{-1}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{du}{dx}=-1\,y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-y^{-2}}\frac{du}{dx}=-y^2\frac{du}{dx}$$

Poniendo esta sustitución en la ecuación en su forma estandar tenemos:

$$-y^2\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

Dividimos todo entre $-y^2$ y se obtiene:

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{-y^2}\frac{1}{x}y=\frac{x}{-y^2}y^2$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\frac{1}{y}=-x \longrightarrow \text{Recordamos que } u=1/y$$

$$\boxed{\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-x} \longrightarrow \text{ED lineal forma estandar:}$$

Resolvemos como se hace para una ED. lineal de 1er orden; para eso encontramos el factor integrante:

$$\tilde{p}(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int\tilde{p}(x)\,dx}=e^{\int(-1/x)dx}=e^{-\ln(x)}=e^{\ln(x^{-1})}$$

$$\mu(x)=-1/x$$

Multiplicanda la ecuación diferencial por $\mu(x)$ obtenemos

$$\mu(x)\frac{du}{dx}-\frac{\mu(x)}{x}u=-\mu(x)x$$

La cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\, u\right) = -x\,\mu(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right) = -x\,\frac{1}{x} = -1$$

Integrando se obtiene:

$$\frac{1}{x}u = \int -1\,dx + C_1$$

$$\frac{u}{x} = -x + c$$

$$u = -x^2 + cx$$

Finalmente devolvemos la sustitución $u = 1/y$

$$\frac{1}{y} = -x^2 + cx$$

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

> Otra sustitución para convertir una E.D. en separable:

Considere una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By)$$

Esta ecuación puede volverse una E.D. separable usando la sustitución

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ u = Ax + By \\ \bullet\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{B}\left(\dfrac{du}{dx} - A\right) \end{array}}$$

Relación de derivadas

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(Ax + By)$$

$$\frac{du}{dx} = A + B\frac{dy}{dx}$$

$$B\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - A$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right)$$

Con lo cual se tiene la siguiente ED:

$$\frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right) = f(u)$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = Bf(u) + A}$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación: $\frac{dy}{dx} = (-2x+y)^2 - 7$

En esta ecuación vemos que si tenemos la función

$$f(u) = u^2 - 7$$

y la evaluamos en $u = -2x+y$, la E.D. puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = f(-2x+y).$$

Luego podemos plantear la sustitución:

- $u = -2x + y$

$$\frac{du}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} + 2 = \frac{dy}{dx}$$

Con lo cual la ecuación en términos de u queda escrita como:

$$\frac{du}{dx} + 2 = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 - 9$$

Usando la separación de variables se tiene:

$$\frac{du}{u^2-9} = dx$$

Integramos ambos lados y tenemos:

$$\int \frac{du}{u^2-9} = \int dx + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-9} = x + C$$

Para realizar la integral $\int \frac{1}{u^2-9}\,du$ usaremos una técnica conocidad como fracciones parciales:

1) factoricemos $u^2-9 = (u-3)(u+3)$

2) Propongamos que:

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

3) Hallar A y B para que se cumpla la igualdad:

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A(u+3) + B(u-3)}{(u-3)(u+3)}$$

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{Au + 3A + Bu - 3B}{(u-3)(u+3)}$$

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{(A+B)u + (3A-3B)1}{(u-3)(u+3)}$$

Comparando los numeradores en cada lado se tiene

$$1 = (3A-3B)1$$
$$0 = A+B$$

De donde se obtiene $A = -B \rightarrow B = -A$

$$1 = 3A - 3(-A)$$
$$1 = 6A$$
$$A = 1/6 \longrightarrow B = -1/6$$

Con lo cual se obtiene:

$$\frac{1}{u^2-9} = \frac{1}{(u+3)(u-3)} = \frac{1/6}{u-3} + \frac{-1/6}{u+3} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right]$$

Luego:

$$\int \frac{1}{u^2-9}\,du = \frac{1}{6}\left[\int \frac{1}{u-3}\,du - \int \frac{1}{u+3}\,du\right] = \frac{1}{6}\left[\ln(u-3) - \ln(u+3)\right]$$

Con esto la solución a nuestra E.D. será:

$$\frac{1}{6}\left[\ln(u-3) - \ln(u+3)\right] = x + c$$

$$\ln(u-3) - \ln(u+3) = 6x + 6c$$

$$\ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right) = 6x + 6c$$

$$\frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c} = e^{6c}\, e^{6x}$$

Reemplazando $u = -2x + y$ tenemos

$$\frac{-2x + y - 3}{-2x + y + 3} = A\, e^{6x} \longrightarrow A = e^{6c}$$

$$-2x + y - 3 = A\, e^{6x}(-2x + y + 3)$$

$$y = 2x + 3 + Ae^{6x}(-2x + 3) + Aye^{6x}$$

$$y - Aye^{6} = 2x + 3 - 2Axe^{6x} + 3Ae^{6x}$$

$$y\,(1 - Ae^{6}) = 2x(1 - Ae^{6x}) + 3(1 + Ae^{6x})$$

$$y = \frac{2x\,(1 - Ae^{6x}) + 3\,(1 + Ae^{6x})}{1 - Ae^{6x}}$$

$$y = 2x + 3\,\frac{1 + Ae^{6x}}{1 - Ae^{6x}}$$