
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Ecuación de Bernoulli:

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

donde n es cualquier número real. Si $n=0$ o $n=1$ entonces se tendrá una ecuación diferencial lineal. Para $n \neq 0$, $n \neq 1$, la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce la anterior ED a una forma lineal.

Ejemplo: Resolver la Ecuación Diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$$

Dividiendo todo por x:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Con $n=2$ tenemos que $u = y^{1-n} \rightarrow u = y^{1-2}$

$$u = y^{-1} \quad y = u^{-1}$$

$$u = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u^{-1}) = -u^{-2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x y^2 \qquad y = u^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx}$$

$$-u^{-2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u^{-1} = x u^{-2}$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{xu} = \frac{x}{u^2}$$

multiplicando todo por $-u^2$

$$-\frac{(-\cancel{u^2})}{\cancel{u^2}} \frac{du}{dx} + \frac{(-u^{\cancel{2}})}{x\cancel{u}} = \frac{(-\cancel{u^2})x}{\cancel{u^2}}$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -x} \rightarrow \text{ED lineal}$$

Factor integrante:

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\int -\frac{1}{x} dx}$$

$$\mu(x) = e^{-\ln x} \rightarrow \mu(x) = e^{\ln(x^{-1})}$$

$$\mu(x) = e^{\ln x^{-1}}$$

$$\mu(x) = x^{-1} \rightarrow \boxed{\mu(x) = \frac{1}{x}} \rightarrow \text{factor integrante}$$

Multiplicar el factor el integrante en la ED lineal:

$$\underbrace{\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u}_{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right]} = -1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right] = -1$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right] = \int - dx$$

$$\frac{1}{x}u = -x + C$$

$$u = -x^2 + Cx \qquad u = y^{-1}$$

$$y^{-1} = -x^2 + Cx$$

$$\frac{1}{y} = -x^2 + Cx \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx}}$$

Reducción a separación de variables:

Una Ecuación Diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

Siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución $U = Ax + By + C$

Ejemplo 2: $\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7 \quad ; \quad y(0) = 0$

Haciendo la sustitución $U = -2x + y$

$$\frac{dU}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dU}{dx}$$

Reemplazar $\frac{dU}{dx}$ en la ED.

$$2 + \frac{dU}{dx} = U^2 - 7$$

$$\frac{dU}{dx} = U^2 - 9 \rightarrow dU = (U^2 - 9)\,dx$$

$$\frac{dU}{U^2 - 9} = dx$$

$$\frac{du}{u^2-9} = dx$$

$$\int \frac{du}{u^2-9} = \int dx$$

$$\int \frac{du}{(u-3)(u+3)} = x + C$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A(u+3) + B(u-3)}{(u-3)(u+3)}$$

$$1 = Au + 3A + Bu - 3B$$

$$1 = u(A+B) + 3A - 3B$$

$A+B=0$ $\qquad$ $3A-3B=1$

$A=-B$ $\qquad$ $3(-B)-3B=1$ $\qquad$ $-6B=1 \rightarrow B=-\frac{1}{6}$

$B = -\frac{1}{6} \rightarrow A = -B \rightarrow A = -\left(-\frac{1}{6}\right)$

$A = \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

$$= \frac{1}{6(u-3)} - \frac{1}{6(u+3)}$$

Entonces la integral es:

$$\int \frac{du}{(u-3)(u+3)} = \int \left[\frac{1}{6(u-3)} - \frac{1}{6(u+3)} \right] du$$

$$= \int \frac{du}{6(u-3)} - \int \frac{du}{6(u+3)}$$

$$\int \frac{du}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{6} \ln|u-3| - \frac{1}{6} \ln|u+3|$$

Volviendo a la integral original

$$\int \frac{du}{(u-3)(u+3)} = x + C$$

$$\frac{1}{6}\ln|u-3| - \frac{1}{6}\ln|u+3| = x + C$$

$$\frac{1}{6}\left[\ln|u-3| - \ln|u+3|\right] = x + C$$

$$\ln|u-3| - \ln|u+3| = 6x + C_1$$

$$\ln\left[\frac{u-3}{u+3}\right] = 6x + C_1$$

$$e^{\ln\left[\frac{u-3}{u+3}\right]} = e^{6x+C_1}$$

$$\frac{u-3}{u+3} = C_2 e^{6x}$$

$$u-3 = C_2 e^{6x}(u+3)$$

$$u-3 = C_2 e^{6x} u + 3C_2 e^{6x}$$

$$u - C_2 e^{6x} u = 3C_2 e^{6x} + 3$$

$$u\left[1 - C_2 e^{6x}\right] = 3\left[C_2 e^{6x} + 1\right]$$

$$u = \frac{3\left[C_2 e^{6x} + 1\right]}{1 - C_2 e^{6x}}$$

$$U = \frac{3\left[C_2 e^{6x} + 1\right]}{1 - C_2 e^{6x}} \qquad U = -2x + y$$

$$-2x + y = \frac{3\left[C_2 e^{6x} + 1\right]}{1 - C_2 e^{6x}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3\left[C_2 e^{6x} + 1\right]}{1 - C_2 e^{6x}} + 2x} \qquad y(0) = 0$$

Solución de la ED

$$y(0) = \frac{3\left[C_2 e^{6\cdot 0} + 1\right]}{1 - C_2 e^{6\cdot 0}} + \cancel{2\cdot 0}^{\,0}$$

$$0 = \frac{3\left[C_2 + 1\right]}{1 - C_2} \rightarrow 0 = 3\left[C_2 + 1\right]$$

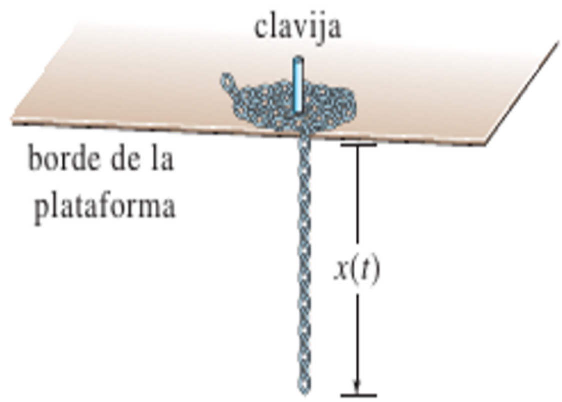
$$0 = 3C_2 + 3$$

$$-3 = 3C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = -1}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3\left[-e^{6x} + 1\right]}{1 + e^{6x}} + 2x}$$ → Solución particular.

Ejercicio : Cadena Cayendo:

Cadena cayendo Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal, y la parte restante de la cadena cuelga sobre el borde de la plataforma. Vea la figura 2.4.2. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa 2 lb/pie y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t = 0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la cadena sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t > 0$, entonces $v = dx/dt$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las fuerzas de resistencia se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona a v con x está dado por



$t=0 \qquad x(0) = 3 \text{ pies}$

$$V_f^2 = V_0^2 + 2g(x_f - x_i)$$

$$\frac{V_f^2 - V_0^2}{2} = g\,(x_f - x_i)$$

$$\frac{v^2}{2} = g x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{v^2}{2}\right) = gx$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{v^2}{2}\right) = 32x$$

$$\frac{v^2}{2} + x\frac{\cancel{2}v}{\cancel{2}}\frac{dv}{dx} = gx$$

$$v^2 + 2vx\frac{dv}{dx} = 32x$$

$g = 32$

$$xv\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{2} = gX \rightarrow \boxed{xv\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{2} = 32X}$$

$$xv\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{2} = 32x \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Dividiendo todo entre xv:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x\cancel{v}}\,\frac{v^{\cancel{2}}}{2} = \frac{32\cancel{x}}{\cancel{x}v}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2x}v = \frac{32}{v}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2x}v = 32v^{-1} \qquad n=-1$$

Haciendo $u = v^{1-n}$ $\rightarrow$ $u = v^{1-(-1)}$

$$u = v^2$$

$$u^{1/2} = v$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}u^{-1/2}\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2u^{1/2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{2u^{1/2}}\frac{du}{dx} + \frac{1}{2x}u^{1/2} = 32u^{-1/2}$$

$$\frac{1}{2u^{1/2}}\frac{du}{dx} + \frac{1}{2x}u^{1/2} = \frac{32}{u^{1/2}}$$

Multiplicando por $2u^{1/2}$

$$\frac{\cancel{2u^{1/2}}}{\cancel{2u^{1/2}}}\frac{du}{dx} + \frac{\cancel{2}u^{1/2}u^{1/2}}{\cancel{2}x} = 2\cancel{u^{1/2}}\frac{32}{\cancel{u^{1/2}}}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 64 \quad \rightarrow \text{ED Lineal} \quad P(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} \rightarrow \mu(x) = e^{\ln|x|} \rightarrow \mu(x) = x$$

multiplicando por el factor integrante la ED

$$\underbrace{x\frac{du}{dx} + u}_{\frac{d}{dx}[xu]} = 64x$$

$$\frac{d}{dx}[xu] = 64x$$

Integrando: $xu = \frac{64x^2}{2} + C \rightarrow u = 32x + \frac{C}{x}$

$$v^2 = 32x + \frac{C}{x}$$

$$\boxed{v = \sqrt{3x + \frac{C}{x}}}$$


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN