APUNTES DE CLASE

14 – 18 de marzo de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

> ECUACIONES LINEALES DE 1er ORDEN

Una ecuación lineal de primer orden puede ser escrita como:

$$a_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)\, y(x) = g(x)$$

Podemos dividir ambos lados de la ecuación entre $a_1(x)$ para escribirla en la forma ESTANDAR.

$$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\boxed{\frac{dy(x)}{dx} + p(x)\, y(x) = f(x)} \rightarrow$$ Forma estandar de la E.D. lineal de orden 1.

Ejemplos de ecuaciones lineales

1) $\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

$$2x\left(\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \longrightarrow$$ forma estandar

2) $\frac{dy}{dx} + y\cos(x) = y\ln(x)$

$$\frac{dy}{dx} + y\cos(x) - y\ln(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\cos(x) - \ln(x)\right) y = 0 \longrightarrow$$ Forma estandar

3) $\frac{dy}{dx} + y = x$

$\searrow$ forma estandar.

¿Cómo solucionar las E.D. de los ejemplos?

1) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

Usando separación de variables tenemos:

① $\frac{dy}{dx} = -2xy$ → ② $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -2x$ → ③ $\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2x\,dx$

④ $\ln(y) = -\frac{2x^2}{2} + c$ ⟶ $\ln(y) = -x^2 + c$

⑤ $e^{\ln(y)} = e^{-x^2+c}$ → $y = e^c \cdot e^{-x^2}$

$y(x) = A \cdot e^{-x^2}$

$\boxed{A = e^c}$ → cte

2) $\frac{dy}{dx} + [\cos x - \ln(x)]\,y = 0$

① $\frac{dy}{dx} = [\ln(x) - \cos(x)]\,y$ → ② $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x) - \cos(x)$

③ $\int \frac{1}{y}\,dy = \int [\ln(x) - \cos(x)]\,dx$ → ④ $\ln(y) = x\ln(x) - x - \sin(x)$

↳ Ejercicio: terminar de despejar y.

3) $\frac{dy}{dx} + y = x$ → No separable.

Método para solucionar E.D. lineales de orden 1:

1) Escribir la ecuación en la forma estandar.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)$$

2) Encontrar el factor integrante: $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$ → factor Integrante

3) Multiplicar la E.D. por el factor integrante:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)\,y = \mu(x)\,f(x)$$

4) Reorganizar la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\, y\right) = \mu(x)\, f(x)$$

5) Integrar a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\mu(x)\, y\right) dx = \int \mu(x)\, f(x)\, dx$$

$$\mu(x) \cdot y = \int \mu(x)\, f(x)\, dx$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \int \mu(x)\, f(x)\, dx}$$

Ejemplo: Resuelva la ED. $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$

① Dividimos entre x toda la E.D. para que quede en su forma estandar:

$$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = \frac{x^6}{x}e^x \longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x} \rightarrow \text{ED lineal estandar}$$

② Hallar $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\int \frac{1}{x}dx} = e^{-4\ln(x)} = e^{\ln(x^{-4})} = x^{-4} \longrightarrow \text{factor Integrante}$$

③ Multiplicamos toda la E.D. por $\mu(x)$:

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}y = x^{-4}x^5 e^x \longrightarrow \boxed{x^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5}y = xe^x}$$

④ Usamos la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y \xrightarrow{\text{la E.D. queda escrita como:}} \boxed{\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = xe^x}$$

⑤ Integramos ambos lados

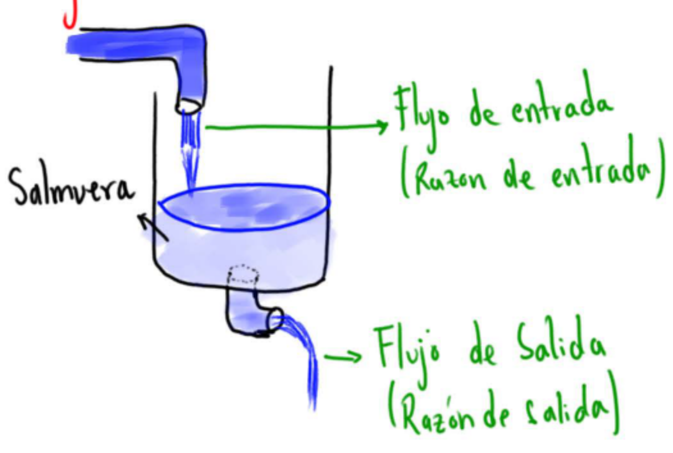
$$\int \frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) dx = \int xe^x\, dx$$

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C$$

$$y = \frac{1}{x^{-4}}\left(xe^x - e^x + C\right)$$

$$\longrightarrow y(x) = x^4\left(xe^x - e^x + C\right) ✓$$

Ejercicio: Mezclas



Al mezclar dos soluciones salinas distintas surge una E.D. de primer orden, que determina la concentración de sal en la mezcla.

Supongamos que tenemos un tanque con $V_0 = 300\,gal$ de salmuera y $M_0 = 50\,lb$ de sal disueltas.

Una segunda mezcla de salmuera es introducida a una velocidad $v_e = 3\,\frac{gal}{min}$ y con una concentración de $C_e = 2\,lb/gal$. ¿Cuánta sal habrá en el tanque después de un periodo largo de tiempo? (la velocidad de entrada es igual a la de salida)

Definamos A como la cantidad de Sal en el tanque

El cambio de la cantidad de sal sera proporcional a la diferencia de sal que entra y que sale del tanque:

$$\frac{dA}{dt} = R_e - R_s$$

R_e: Razón de entrada de sal.

R_s: Razón de salida de sal.

$$R_e = C_e\, v_e = 2\frac{lb}{gal} \cdot \frac{3gal}{min} = 6\frac{lb}{min}$$

$$R_s = \frac{A}{300gal} \cdot v_s = \frac{A}{300\,gal} \cdot 3\frac{gal}{min} = \frac{A}{100}\ {}^{1}/_{min}$$

Con lo que nos queda la E.D.

$$\frac{dA}{dt} = 6\frac{lb}{min} - \frac{A}{100}\ {}^{1}/_{min}.$$

Llevemos la ecuación a su forma estandar

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 6$$

Hallemos el factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{t/100}$$

Multiplicando la E.D. por $\mu(t)$:

$$e^{t/100} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100} e^{t/100} A = 6 e^{t/100}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/100} A \right) = 6 e^{t/100}$$

Integrando obtenemos:

$$e^{t/100} A = \int 6 e^{t/100} dt = 6 \frac{e^{t/100}}{1/100} + C$$

$$A = e^{-t/100} \left[600 e^{t/100} + C \right]$$

$$A(t) = 600 + C e^{-t/100}$$

Para determinar C usamos las condiciones iniciales

$$A(0) = M_0 = 50 lb \longrightarrow$$ cantidad inicial de sal en el tanque.

Evaluando nuestra solución en $t=0$ tenemos:

$$A(0) = 600 + C e^{-0/100} = 600 + C$$

Por lo tanto,

$$600 + C = 50 lb \rightarrow C = 50 lb - 600 lb$$

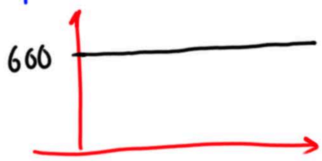
$$C = -550 lb$$

Con lo que nos queda finalmente que:

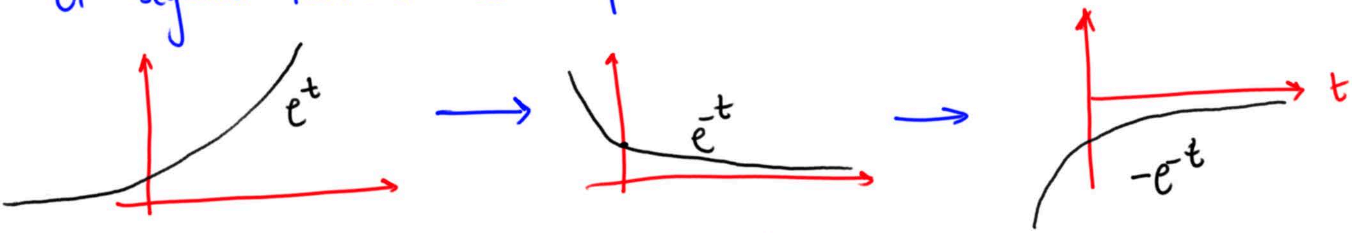
$$A(t) = \left[600 - 550 e^{-t/100} \right] lb$$

Analicemos la solución obtenida: $A(t) = 600 - 550\, e^{-t/100}$

- El primer termino es cte $= 600\,Lb$



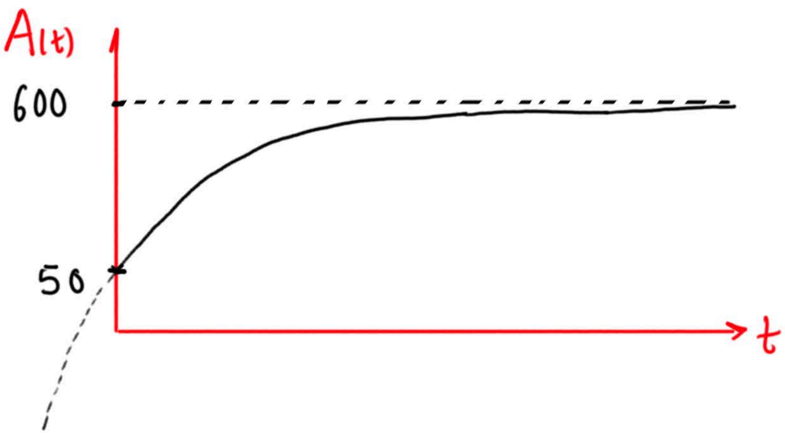
- El segundo termino es exponencial



en infinito (tiempos muy grandes) tiende a 0

En general la solución completa es

$$A(t) = 600\,lb - 550\,lb\, e^{-t/100}$$



$$A(t=0) = 50\,lb$$

$$A(t\to\infty) = 600 - 550\, e^{-\infty/100}$$

$$= 600 - 550\, e^{-\infty}$$

$$= 600 - 550 \cdot 0$$

$$A(t) = 600\,lb.$$

$\downarrow$

Cantidad de sal después de mucho tiempo.

La concentración despues de mucho tiempo será

$$\frac{A(t\to\infty)}{300\,gal} = \frac{600\,lb}{300\,gal} = 2\,\frac{lb}{gal.} = C_e \rightarrow \text{concentración de la mezcla de entrada.}$$

Ejercicios: E.D. lineales de Orden 1.

1. $\frac{dy}{dx} = 5y$

2. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

3. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

4. $y' + x^2 y = x^2$

5. $x^2 y' + xy = 1$

6. $xy' - y = x^2 \sin(x)$

7. $xy' + 4y = x^3 - x$

8. $x^2 y' + x(x+2)y = e^x$

*9. $y\,dx - 4(x + y^6)\,dy = 0$

10. $\cos(x)\,y' + \operatorname{sen}(x)\,y = 1$

* resuelva para $x(y)$, tome a "y" como la variable independiente y a x como la variable dependiente