FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 07

APUNTES DE CLASE

5 − 9 de diciembre de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

› Distribución Binomial:

» Proceso de Bernoulli

Consideremos un experimento que puede dar lugar a sólo dos posibles resultados mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Un proceso de Bernoulli consiste en:

1) Hacer n ensayos repetidos del experimento.
2) Cada ensayo produce un resultado que puede clasificarse como exito o fracaso.
3) La probabilidad de un exito, que se denota como p, permanece constante de un ensayo a otro.
4) Los ensayos son independientes.

» Distribución binomial:

Indica la probabiliolad de tener X exitos en un proceso de Bernoulli con n ensayos.

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}} \quad ; \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Donde: $\binom{n}{x} = C_n^x = {}_nC_x = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$ ⟶ Simbolo de combinación

$p =$ probabilidad de exito

$q = (1-p)$ probabilidad de fracaso.

Ejemplo: Se realiza un analisis de impurezas en los pozos de agua potable en Bogotá y se concluye que el 30% de pozos tienen impurezas. Para verificar este resultado se decide realizar un analisis con otra prueba de mejor calidad pero más costosa, por lo que solo se realiza en 10 pozos escogidos aleatoriamente. Usemos la distribución binomial para calcular la probabilidad de que exactamente 3 pozos contengan impurezas.

Número de ensayos: $n = 10$

número de exitos: $x = 3$ (pozos con impurezas).

probabilidad de exito: $p = 30\% = 0{,}3$

probabilidad de fracaso: $q = (1-p) = 0{,}7$

Con lo que se tiene:

$$P(3) = \binom{10}{3} (0{,}3)^3 (0{,}7)^{10-3}$$

$$P(3) = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} \, 0{,}3^3 \; 0{,}7^7$$

$$P(3) = 120 * 0{,}027 * 0{,}0823543$$

$$P(3) = 0{,}26682793 \approx 0{,}267 = 26{,}7\%$$

>>Medidas de la distribución binomial:

Media: $\mu = np$

Varianza: $\sigma^2 = npq = np(1-p)$

Desviación Estandar: $\sigma = \sqrt{n.p.q}$

Ejemplo: Para la situación de los pozos. Calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estandar:

$$\mu = np = 10 * 0{,}3 = 3$$

$$\sigma^2 = npq = 10 * 0{,}3 * 0{,}7 = 3 * 0{,}7 = 2{,}1$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}1} = 1{,}449 \approx 1{,}45$$

>> Función de Probabilidad acumulada para la distribución binomial.

$$\boxed{F(x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} P(x) = \sum_{x=0}^{x_0} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$$

Ejemplo: Un examen de Matemáticas consiste en 8 preguntas de selección multiple, cada una con 4 opciones de respuesta de las cuales sólo una es correcta. El examen se pasa con 6 o más preguntas correctas.

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante no pase el examen al responder aleatoriamente? ¿Cuál es el valor esperado y la desviación estandar si todos los estudiantes responden aleatoriamente?

Número de ensayos: $n = 8$

Probabilidad de exito: $p = 1/4 = 0{,}25$.

Probabilidad de fracaso: $q = 1 - p = 0{,}75$.

Número máximo de aciertos para perder el examen:

$$x_0 = 5.$$

$$F(5) = \sum_{x=0}^{5} P(x) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= \sum_{x=0}^{5} \binom{8}{x} 0{,}25^x \cdot 0{,}75^{8-x}$$

$$F(5) = \binom{8}{0} 0{,}25^0 * 0{,}75^8 + \binom{8}{1} 0{,}25^1 * 0{,}75^7 + \binom{8}{2} 0{,}25^2 * 0{,}75^6 + \binom{8}{3} 0{,}25^3 * 0{,}75^5$$

$$+ \binom{8}{4} 0{,}25^4 * 0{,}75^4 + \binom{8}{5} 0{,}25^5 * 0{,}75^3$$

$$F(5) = 1 * 1 * 0{,}1001 + 8 * 0{,}25 * 0{,}1335 + 28 * 0{,}0625 * 0{,}1780 + 56 * 0{,}0156 * 0{,}2373$$

$$+ 70 * 0{,}0039 * 0{,}3164 + 56 * 0{,}0010 * 0{,}4219$$

$$F(5) = 0{,}1001 + 0{,}2670 + 0{,}3115 + 0{,}2076 + 0{,}0865 + 0{,}0231$$

$$F(5) = 0{,}9958 \approx 99{,}6\%$$

Media: $\mu = np = 8 * 0{,}25 = 2$

Varianza: $\sigma^2 = npq = 8 * 0{,}25 * 0{,}75 = 2 * 0{,}75 = 1{,}5$

D. Estandar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}2247 \approx 1{,}22$

> DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

La distribución de Poisson describe el número de veces que ocurre un evento durante un intervalo específico. Este intervalo puede ser de tiempo, de volumen, área o distancia.

Ejemplo: 1) Número de fallos de un sistema informatico durante el día
2) Número de devoluciones de piezas recibidas por una empresa al mes
3) Número de accidentes al año
4) Número de bacterias en el aire
5) Número de abulladuras o defectos en una gran lamina metálica

>> Caracteristicas de la D. de Poisson

1) La variable aleatoria es el número de veces que ocurre un evento durante un intervalo continuo específico.
2) La probabilidad de que ocurra el evento es proporcional al tamaño del intervalo.
3) Los intervalos no se superponen y son independientes.

NOTA: La distribución de Poisson es discreta porque su variable aleatoria es discreta (Número de exitos), a pesar de que se usa para intervalos continuos (de tiempo, distancia volumen, area).

>> Ley de eventos improbables:

La forma limite de la distribución binomial cuando la probabilidad de exito es muy bajo y el número de ensayos es muy grande corresponde a la distribución de Poisson.

>> Distribución de Poisson:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

Donde: λ = cantidad media de veces que se da un evento en un intervalo particular.

e = constante de Euler, toma el valor 2,71828

x = Número de veces que se prese

>> Media y varianza de la D. de Poisson

Media: $\mu = \lambda$

Varianza: $\sigma^2 = \lambda$

Ejemplo: El número medio de personas que ingresan diariamente a urgencias en una clínica es de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresen a urgencias máximo 2 personas en un día particular?

$\lambda = 10$

$$F(2) = \sum_{x=0}^{2} P(x) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$= \frac{e^{-10}\,10^{0}}{0!} + \frac{e^{-10} * 10^{1}}{1!} + \frac{e^{-10} * 10^{2}}{2!}$$

$$= e^{-10}\left(\frac{1}{1} + \frac{10}{1} + \frac{100}{2}\right) = e^{-10}\left(1 + 10 + 50\right)$$

$$F(2) = e^{-10} * 61 = 0{,}002769$$

$$F(2) \approx 0{,}28\%$$

¿Cuál es la probabilidad de que en dos días ingresen 18 personas a urgencias?

$\lambda = 2 * 10 = 20$

$$P(18) = \frac{e^{-20} * 20^{18}}{18!} = e^{-20} * 40.944.813,9157$$

$$= 0,08439$$

$P(18) \approx 8,44\%$