FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 10

# APUNTES DE CLASE

16 - 20 de enero de 2023

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

# RESUMEN DISTRIBUCIÓN DISCRETA VS CONTINUA

| | Discreta | Continua |
|---|---|---|
| Probabilidad en un intervalo | $P(x_a \le x \le x_b) = \sum_{x_i = x_a}^{x_b} P(x)$ | $P(x_a \le x \le x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx$ |
| Media o valor esperado | $\mu = \sum_{x} x P(x)$ | $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ |
| Varianza | $\sigma^2 = \sum_{x} (x-\mu)^2 P(x)$ | $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$ |

## Distribución normal y valores estadísticos de una variable.

Cuando se tiene una serie de datos el calculo del promedio y la desviación estandar se hace mediantes las siguientes formulas.

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \longrightarrow \text{si los datos se repiten se puede usar} \longrightarrow \mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i f_i}{N}$$

Donde, $x_i \rightarrow$ cada uno de los datos

$N \rightarrow$ total de datos

$f_i \rightarrow$ frecuencia de cada dato (veces que se repite).

La varianza se calcula como:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\mu)^2}{N} \longrightarrow \text{con datos repetidos} \longrightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2 f_i}{N}$$

**Ejemplo:** Sean los datos: 1, 2,2, 3,3, 4,4,4,4, 5,5,5,5,5, 6,6,6,6, 7,7,7, 8, 9.

Hallar la media y la desviación estandar:

Para calcular esto organicemos los valores en la siguiente tabla

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i f_i$ | $x_i-\mu$ | $(x_i-\mu)^2$ | $(x_i-\mu)^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | -3,96 | | |
| 2 | 2 | 4 | -2,96 | | |
| 3 | 2 | 6 | -1,96 | | |
| 4 | 4 | 16 | -0,96 | | |
| 5 | 5 | 25 | 0,04 | | |
| 6 | 4 | 24 | 1,04 | | |
| 7 | 3 | 21 | 2,04 | | |
| 8 | 1 | 8 | 3,04 | | |
| 9 | 1 | 9 | 4,04 | | |
| $\sum$: | 23 | 114 | | | |

$$\mu = \frac{114}{23} = 4{,}96$$

# Distribución Normal Estandar

Las distribuciones normales pueden variar entre ellas dependiendo de 2 parámetros: la media $\mu$ la cual está localizada en cualquier parte del eje x y la desviación estandar $\sigma$ que determina la forma de la campana, si es más dispersa (ancha) o menos dispersa (picuda).

Estas diferencias entre distribuciones normales generan dificultades cuando tratamos de calcular el área bajo la curva en un intervalo específico, y por tanto, se genera dificultad para calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en ese intervalo.

Para evitar estos inconvenientes podemos utilizar una formula para calcular la cantidad z de desviaciones estandar que se encuentran entre el valor de x y la media ($\mu$) de una distribución normal con desviación estandar $\sigma$.

A esto se le conoce como el puntaje z:

Cantidad de desviaciones estandar entre el valor de x y la media. $\leftarrow z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow$ $\dfrac{\text{Diferencia entre el valor de } x \text{ y la media}}{\text{Desviación Estandar}}$

Esto permite convertir cualquier distribución normal con media ($\mu$) y desviación estanda ($\sigma$) en una distribución normal ESTANDAR:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \longrightarrow F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

función de densidad normal

función de densidad normal estandarizada!

Ejemplo 1: Una pizzeria específica que el promedio de la cantidad de queso en una pizza grande debe ser de 8 onzas y la desviación estandar debe ser de 0,5 onzas. Un inspector escoge una pizza grande aleatoria y se da cuenta que ésta está hecha con 6,9 onzas de queso. Asuma que la cantidad de queso en una pizza grande sigue una Dist. normal. Si la cantidad de queso está por debajo de la media por más de 3 desviaciones estandar, la pizzeria podria cerrar. ¿A cuántas desviaciones estandar esta 6,9 oz de la media?

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow \quad x = 6{,}9 \quad \mu = 8{,}0 \quad \sigma = 0{,}5$$

$$z = \frac{6{,}9-8{,}0}{0{,}5} = \frac{-1{,}1}{0{,}5} = -2{,}2 \longrightarrow$$ Negativo indica que 6,9 esta por debajo de la media.

Como $z = -2{,}2 > -3{,}0$ la pizzeria no tendrá que cerrar.

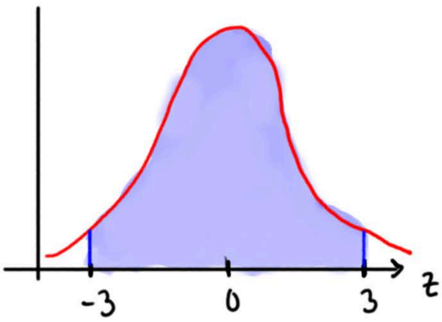
**Ejemplo 2:** Si $x$ es una variable aleatoria distribuida normalmente, hallar la probabilidad de que su valor X esté entre 3 desviaciones estandar por debajo de la media y 3 desviaciones estandar por encima de la media

$$P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) \rightarrow \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \qquad z_i = \frac{x_i-\mu}{\sigma} \; ; \; z_f = \frac{x_f-\mu}{\sigma}$$

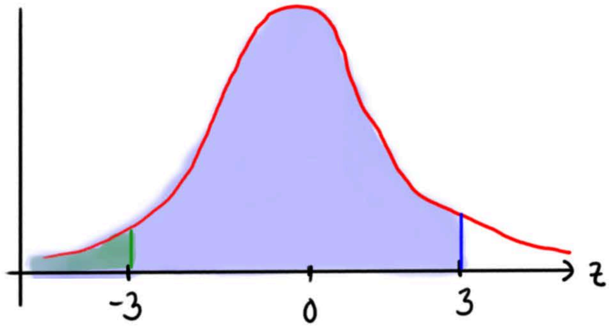
$$z_i = \frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{-3\sigma}{\sigma} = -3$$

$$z_f = \frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma} = \frac{3\sigma}{\sigma} = 3$$

$$P(-3 \leq z \leq 3) = P(z \leq 3) - P(z \leq -3)$$




=




$$P(-3 \leq z \leq 3) = 0{,}9987 - 0{,}0013$$

$$= 0{,}9974$$

**Ejemplo 3:** En Popayan se estima que la temperatura máxima del mes de junio sigue una distribución normal con media de 23° y desviación estandar de 5°. Calcular el número de días del mes en las que se espera alcanzar en 21° y 27°.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \qquad z_i = \frac{21^\circ - 23^\circ}{5^\circ} = -\frac{2^\circ}{5^\circ} = -0{,}4$$

$$z_f = \frac{27^\circ - 23^\circ}{5^\circ} = \frac{4^\circ}{5^\circ} = 0{,}8$$

$$P(21^\circ \leq x \leq 27^\circ) = P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8)$$

$$P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8) = P(z \leq 0{,}8) - P(z \leq -0{,}4)$$

$$= 0{,}7881 - 0{,}3446$$

$P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8) = 0{,}4435 \longrightarrow$ Probabilidad de que un día de junio tenga temperatura máxima entre 21° y 27°

Para calcular el total de días de junio con estás temperaturas máximas multiplicamos:

$$\# \text{ Total de Días } * P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8)$$

Junio tiene 30 dias luego

$$30 \times 0{,}4435 = 13{,}3050 \approx 13 \text{ días}$$

Aproximadamente 13 días de junio tendrán entre 21° y 27° de temperatura máxima.