
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Ecuaciones Diferenciales Exactas:

Estamos interesadxs en resolver ecuaciones diferenciales del siguiente tipo:

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0} \quad (1)$$

dx: diferencial de x

dy: diferencial de y

La ecuac (1) puede provenir de una EDO como la (2)

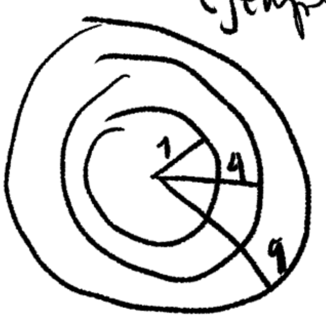
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}} \quad (2)$$

$$N(x,y)\,dy = -M(x,y)\,dx$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Una ecuación diferencial como la (1) proviene de una función $f(x,y) = C$

Ejemplo:



$f(x,y) = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 9$

Comprobación para saber si una ED como la (1) es exacta. Entonces tenemos

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

para saber si la anterior ED es exacta debo revisar que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

∂: derivada parcial: Me indica con respecto a quien derivo dejando como constante las otras variables.

Método de solución:

Dada la ED: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

1) Comprobamos que es exacta: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

2) Si lo anterior se cumple: Escribimos una ecuación que relaciona la solución de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

aquí $f(x,y)$ es la solución

3) Entonces debemos integrar esta función para encontrar $f(x,y)$

$$\partial f = M(x,y)\,\partial x$$

$$\int \partial f = \int M(x,y)\,\partial x$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x$$

Cuando tengo una función de 2 variables al integrarla indefinidamente con respecto a una variable el resultado me arroja una función de las 2 variables más una función de la variable que no se integró

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

Nota: $g(y)$ es la "constante" de integración

4) Ahora derivo $f(x,y)$ con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx + g(y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y)$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

$$\frac{dg}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

Integrando la anterior ecuación con respecto a y:

$$\frac{dg}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

$$\int dg = \int N(x,y)\,dy - \int \cancel{\frac{\partial}{\partial y}}\left[\int M(x,y)\,dx\right]\cancel{dy}$$

$$g(y) = \int N(x,y)\,dy - \int M(x,y)\,dx$$

Reemplazo en la función solución $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ED:

$$2xy\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$$

$M(x,y) = 2xy$ $\qquad\qquad$ $N(x,y) = x^2 - 1$

Comprobar si es exacta: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$M(x,y) = 2xy \qquad N(x,y) = x^2 - 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2x = 2x$$

La ecuación diferencial es exacta !!

2) Escribo: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

3) Integro a ambos lados para encontrar $f(x,y)$

$$\partial f = 2xy \, \partial x$$

$$\int \partial f = \int 2xy \, \partial x$$

$$f(x,y) = 2y \int x \, dx$$

$$= \cancel{2}y \, \frac{x^2}{\cancel{2}} + g(y)$$

$$f(x,y) = yx^2 + g(y)$$

4) derivo con respecto a y la función $f(x,y)$

y reconozco que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx^2 + g(y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) + g'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

$$x^2 - 1 = x^2 + g'(y)$$

$$x^2 - 1 - x^2 = g'(y) \rightarrow -1 = g'(y)$$

$$\frac{dg}{dy} = -1$$

5) Integro la anterior ecuación para encontrar $g(y)$ y reemplazo en $f(x,y)$

$$\frac{dg}{dy} = -1 \rightarrow dg = -dy$$

$$\int dg = \int -dy$$

$$\boxed{g(y) = -y}$$

Reemplazo en $f(x,y)$

$$f(x,y) = yx^2 - y \Rightarrow \boxed{yx^2 - y = C}$$

$\Downarrow$

Solución de la ED

Ejemplo 2: Sea la ED:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y\cos(xy) - e^{2y})}{2xe^y - x\cos(xy) + 2y}$$

$$(2xe^y - x\cos(xy) + 2y)\,dy = (y\cos(xy) - e^{2y})\,dx$$

$$-(y\cos(xy) - e^{2y})\,dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)\,dy = 0$$

$$(e^{2y} - y\cos(xy))\,dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)\,dy = 0$$

$$\underbrace{\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \left(\cos(xy) + y\left(-\sin(xy)x\right)\right)$$

$$= 2e^{2y} - \left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right)$$

$$= 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} - \left(\cos(xy) + x\left(-\sin(xy)y\right)\right)$$

$$= 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ → La ED es exacta.

Entonces escribimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos(xy)$$

Integrando:

$$\int \partial f = \int \left(e^{2y} - y\cos(xy)\right) dx$$

$$f(x,y) = \int e^{2y}\,dx - \int y\cos(xy)\,dx$$

$$= e^{2y}x - y\int \cos(xy)\,dx$$

$$= e^{2y}x - \cancel{y}\int \cos u \,\frac{du}{\cancel{y}}$$

$u = xy$

$du = dx\, y$

$\frac{du}{y} = dx$

$$f(x,y) = e^{2y}x - \sin(xy) + g(y)$$

Derivo con respecto a y y reconozco que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\,e^{2y} - x\cos(xy) + g'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + g'(y)$$

$$\cancel{2xe^{2y}} - \cancel{x\cos(xy)} + 2y = \cancel{2xe^{2y}} - \cancel{x\cos(xy)} + g'(y)$$

$$g'(y) = 2y \qquad 2y = g'(y)$$

Integrando a ambos lados

$$\frac{dg}{dy} = 2y$$

$$\int dg = \int 2y\, dy$$

$$g(y) = \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}} \rightarrow g(y) = y^2$$

reemplazando $g(y)$ en $f(x,y)$ obtengo:

$$f(x,y) = xe^{2y} - \sin(xy) + y^2$$

$$\boxed{xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C}$$

Evaporación de una gota de lluvia Cuando cae una gota de lluvia, ésta se evapora mientras conserva su forma esférica. Si se hacen suposiciones adicionales de que la rapidez a la que se evapora la gota de lluvia es proporcional a su área superficial y que se desprecia la resistencia del aire, entonces un modelo para la velocidad $v(t)$ de la gota de lluvia es

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{3(k/\rho)t + r_0} v = g$$

Aquí ρ es la densidad del agua, r_0 es el radio de la gota de lluvia en $t = 0$, $k < 0$ es la constante de proporcionalidad y la dirección hacia abajo se considera positiva.

a) Determine $v(t)$ si la gota de lluvia cae a partir del reposo.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3(k/\rho)}{3(k/\rho)t + r_0} v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g\,(3(k/\rho)t + r_0)}{3(k/\rho)t + r_0} - \frac{3(k/\rho)v}{3(k/\rho)t + r_0}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g\,(3(k/\rho)t + r_0) - 3(k/\rho)v}{3(k/\rho)t + r_0}$$

$$\left(3(\kappa/\rho)t+r_0\right)dv=\left[g\left(3(\kappa/\rho)t+r_0\right)-3(\kappa/\rho)v\right]dt$$

$$-\left[g(3(\kappa/\rho)t+r_0-3(\kappa/\rho)v\right]dt+\left[3(\kappa/\rho)t+r_0\right]dv=0$$

$$\left[3(\kappa/\rho)v-g(3(\kappa/\rho)t-r_0\right]dt+\left[3(\kappa/\rho)t+r_0\right]dv=0$$

$$M(t,v)=3(\kappa/\rho)v-g(3(\kappa/\rho)t-r_0$$

$$N(t,v)=3(\kappa/\rho)t+r_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial v}\overset{?}{=}\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{3\kappa}{\rho}=\frac{3\kappa}{\rho}\rightarrow$$ Es una ecuación exacta !!


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN