FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR SANJOSÉ
Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Ecuaciones Diferenciales
Apuntes de clase - Semana 08

APUNTES DE CLASE

28 de marzo – 1 de abril de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una función $f(x,y)$ sera una función homogénea si cumple que:

$$\boxed{f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x,y)} \rightarrow \text{función homogénea}$$

Donde, la constante α indica el grado de la función.

Ejemplo: $f(x,y) = x^3 + y^3$

$$\rightarrow f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3$$
$$= t^3x^3 + t^3y^3$$
$$= t^3 (x^3 + y^3)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

Homogénea
(grado 3)

$f(x,y) = x^2 + y$

$$\rightarrow f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)$$
$$= t^2x^2 + ty$$
$$= t \underbrace{(tx^2 + y)}_{tx^2 + y \neq f(x,y)}$$

No homogénea

Una función homogénea puede ser escrita como:

$$f(x,y) = x^{\alpha} f(1, y/x) = x^{\alpha} f(1,u) \quad ; \quad u = y/x$$

Ejemplo: $f(x,y) = x^3 + y^3 \longrightarrow$ Homogénea de grado 3

$$f(x,y) = x^3 f(1,u) = x^3 (1^3 + u^3)$$

Reemplazamos $u = y/x$:

$$f(x,y) = x^3 (1 + y^3/x^3) = x^3 + x^3\, y^3/x^3$$
$$= x^3 + y^3 \checkmark$$

Ecuación homogénea:

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Se dice que es un E.D. homogénea si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplo: $(x^2+y^2)\,dx + (x^2-xy)\,dy = 0$

Miremos si es E.D. exacta:

$M(x,y) = x^2+y^2$ $\qquad$ $N(x,y) = x^2-xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ $\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x-y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow \text{NO es exacta.}$$

Miremos si es homogénea:

- $M(tx,ty) = (tx)^2+(ty)^2 = t^2x^2+t^2y^2 = t^2(x^2+y^2)$

  $M(tx,ty) = t^2\,M(x,y) \longrightarrow$ M es homogénea de grado 2.

- $N(tx,ty) = (tx)^2-(tx)(ty) = t^2x^2 - t^2xy = t^2(x^2-xy)$

  $N(tx,ty) = t^2\,N(x,y) \longrightarrow$ N es homogénea de grado 2.

$(x^2+y^2)\,dx + (x^2-xy)\,dy = 0$ es una E.D. homogénea porque M y N son homogéneas de grado 2.

Método de solución:

1) Comprobar que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas.

2) Escribir la ecuación como

$$x^{\alpha} M(1,u)\, dx + x^{\alpha} N(1,u)\, dy = 0$$

3) Realizar la sustitución $y/x = u \longleftrightarrow y = ux$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}\cdot u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

$$dy = dx \cdot u + x\, du$$

4) Reescribir la ecuación usando este diferencial, para que todo quede en terminos de u (variable depen.) y x (variable indep.)

$$x^{\alpha} M(1,u)\, dx + x^{\alpha} N(1,u)\left[u\, dx + x\, du\right] = 0$$

4) Reorganizar la E.D. para que quede como una E.D. separable.

$$\left[x^{\alpha} M(1,u) + x^{\alpha} N(1,u)\, u\right] dx + x^{\alpha+1} N(1,u)\, du = 0$$

$$x^{\alpha}\left[M(1,u) + u N(1,u)\right] dx + x^{\alpha+1} N(1,u)\, du = 0$$

$$x^{\alpha+1} N(1,u)\, du = -x^{\alpha}\left[M(1,u) + u N(1,u)\right] dx$$

$$\frac{N(1,u)\, du}{M(1,u) + u N(1,u)} = -\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$\frac{N(1,u)}{M(1,u) + u N(1,u)}\, du = -\frac{1}{x}\, dx$$

5) Integrar la ecuación separable obtenida.

$$\int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u N(1,u)}\, du = -\int \frac{1}{x}\, dx + C$$

Ejemplo: Resuelva $(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$

① Probar que $M(x,y) = x^2+y^2$ y $N(x,y) = x^2-xy$ son homogénea del mismo grado.

$\rightarrow M(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 M(x,y)$ ✓

$\rightarrow N(tx,ty) = t^2x^2 - tx\,ty = t^2(x^2-xy) = t^2 N(x,y)$ ✓

② Escribir la ecuación como:

$$x^2\left(1+y^2/x^2\right)dx + x^2\left(1-y/x\right)dy = 0$$

$$x^2(1+u^2)\,dx + x^2(1-u)\,dy = 0$$

③ Cambio de variable: $y = ux$

$dy = u\,dx + x\,du$

Reemplazando en la ecuación:

$$x^2(1+u^2)dx + x^2(1-u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

④ Reorganizar: $x^2[(1+u^2) + (1-u)u]dx + x^2(1-u)x\,du = 0$

$$x^3(1-u)\,du = -x^2(1+\cancel{u^2}+u-\cancel{u^2})\,dx$$

$$\frac{1-u}{1+u}\,du = -\frac{x^2}{x^3}\,dx$$

⑤ Integrar: $\displaystyle\int \frac{1}{1+u}du - \int\frac{u}{1+u}du = -\int\frac{1}{x}dx + C$

$$\ln(1+u) - \underbrace{\int\frac{u}{1+u}du}_{} = -\ln(x) + C$$

Para integrar dividamos:

$$\begin{array}{r|l} u & u+1 \\ \cline{2-2} -(u+1) & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \rightarrow \frac{u}{u+1} = 1 - \frac{1}{1+u}$$

Luego $\displaystyle\int\frac{u}{1+u}du = \int 1\,du - \int\frac{1}{1+u}du = u - \ln(1+u)$

$$\ln(1+u) - [u - \ln(1+u)] = -\ln(x) + C$$

Sumando se obtiene

$$2\ln(1+u) - u = -\ln(x) + C$$

$$2\ln(1+y/x) - y/x + \ln(x) = C$$

$$2\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) - y/x + \ln(x) = C$$

$$\ln\left(\frac{(x+y)^2}{x^2}\right) + \ln(x) - \frac{y}{x} = C$$

$$\ln\left(\frac{(x+y)^2 \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right) = C + y/x$$

$$\frac{(x+y)^2}{x} = e^c e^{y/x}$$

$A = e^c$

$$\boxed{(x+y)^2 = A x e^{y/x}}$$ → Solución Implícita.

Ejemplo $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$

1) Verificar que es homogénea:

- $M(x,y) = x - y$

  $M(tx,ty) = tx - ty = t(x-y) = t\,M(x,y)$

- $N(x,y) = x$

  $N(tx,ty) = tx = t\,N(x,y)$

M y N funciones homogéneas de grado 1

2) $x(1-y/x)\,dx - x\,dy = 0$

$x(1-u)\,dx - x\,dy = 0$

3) Sustitución $y = ux$

$dy = u\,dx + x\,du$

$$x(1-u)\,dx - x(u\,dx + x\,du) = 0$$

4) Reorganizar en una E.D. separable

$$x(1-u)dx + x u dx + x^2 du = 0$$

$$x(1-\cancel{u}+\cancel{u})dx + x^2 du = 0$$

$$x^2 du = -x \, dx$$

$$dy = -\frac{x}{x^2} dx$$

$$du = -\frac{1}{x} dx$$

5) Integrar: $\int du = -\int \frac{1}{x} dx + C$

$$u = -\ln(x) + C$$

Devolvemos la sustitución: $(u = y/x)$

$$y/x = -\ln(x) + c$$

$$\boxed{y = -x\ln(x) + cx}$$ → solución explícita

Ejercicios:

Resuelva la E.D.

1) $(x+y)dx + x\,dy = 0$

2) $(y^2+yx)dx - x^2 dy = 0$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$

5) $-y\,dx + (x+\sqrt{xy})dy = 0$

Problemas con valores iniciales

1) $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$; $y(1) = 0$

2) $y\,dx + x(\ln(x) - \ln(y) - 1)dy = 0$; $y(1) = e$