Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Probabilidad y Estadística
Apuntes de Clase Semana 05

APUNTES DE CLASE

21 - 25 de noviembre de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

> TEOREMA DE BAYES

Fue propuesto por Thomas Bayes, quién encontro una importante relación entre probabilidades condicionales.

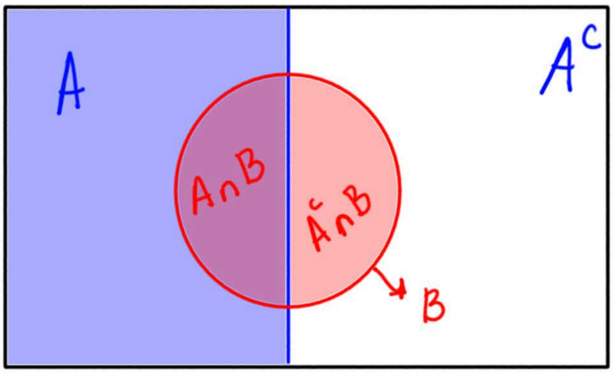
Thomas Bayes (1702 - 1762)

Matemático ingles y ministro presbiteriano (reverendo).

El teorema de Bayes usa probabilidades condicionales para ajustar calculos que nos permitan obtener nueva información (nuevas probabilidades condicionales). relevante de un experimento estadístico.

>> Caso particular:

Analicemos primero un caso particular que considera un evento B que puede ser particionado por medio de otro evento A y su complemento (A^c), (es decir, dos eventos mutuam. excluyentes).



A^C: Todo lo que no es A.

$P(B|A)$: Prob. de que resulte B, dado que pasó A.

$P(B|A^c)$: prob. de B dado A^c

Teorema de Bayes:

Sean dos eventos A y B en un espacio muestral y con probabilidades distintas de 0 y 1. Y sea A^c el complemento de A. Entonces se cumple:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}}$$

Ejemplo: Un geólogo ha analizado datos sismicos y formaciones geológicas en las inmediaciones de un sitio propuesto para exploración de petróleo.

Basado en esta información el geólogo reporta que hay una probabilidad del 65% de que haya petróleo.

La compañía inicia entonces una fase de exploración y excavación. Durante esta fase se toman unas muestras del núcleo del pozo las cuales son analizadas por el geólogo. Estas muestras tienen una historia de predecir acertadamente la existencia de petróleo de 85% de las veces. Sin embargo, el 6% de las veces la muestras predicen petróleo cuando no lo hay.

Usar la información de las muestras para revisar la probabilidad original del geólogo de que habra petróleo. Ahora que las muestras predicen que hay petróleo, ¿cuál es la probabilidad de que haya petróleo?

Identifiquemos los eventos:

A: Hay petróleo en el pozo.

A^c: No hay petróleo en el pozo

B: las muestras indican que hay petróleo.

Prababilidades:

Probabilidada a priori $P(A) = 0,65$ → prob. de que haya petróleo antes de analizar las muestras.

$P(A^c) = 1 - P(A) = 0,35$ → prob. de que no haya petróleo

Prob. adicionales: $P(B|A) = 0,85$ → prob. de que las muestras predigan que hay petróleo, cuando SI hay.

$P(B|A^c) = 0,06$ → prob. de que las muestras predigan que hay petróleo, cuando NO hay.

Probabilidad a posteriori $P(A|B) = ?$ → Prob. de que haya petróleo, dado que las muestran predicen que hay.

Usaremos el teorema de Bayes para calcular la "nueva" probabilidad de que haya petróleo, sabiendo que las muestras predicen que SI hay.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$$

$$= \frac{0,85 * 0,65}{0,85 * 0,65 + 0,06 * 0,35}$$

$$= \frac{0,5525}{0,5525 + 0,021} = \frac{0,5525}{0,5735} =$$

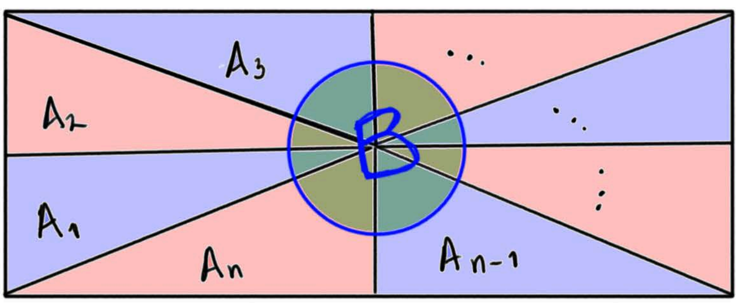
$$P(A|B) \approx 0,96 = 96\%$$

La probabilidad de que el pozo tenga petróleo dado que las muestras lo predicen es del 96%.

Forma generalizada del teorema de Bayes:

Si $A_1, A_2, \dots A_n$, son eventos incompatibles (excluyentes) y si la unión de estos eventos genera todo el espacio muestral, entonces si se tiene un evento B podemos calcular lo siguiente.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}$$



Ejemplo: En una empresa el 20% de los empleados son ingenieros y el 20% economistas. El 75% de los ingenieros ocupa un puesto como directivo. y el 50% de los economistas también. Mientras que solo el 20% de los No ingenieros y No econosmistas ocupa un puesto directivo.

¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Prob. A priori:

A_1: Ingeniero
A_2: economisto
A_3: No ingeniero No economista
B: Directivo

$P(A_1) = 20\% = 0{,}2$

$P(A_2) = 20\% = 0{,}2$

$P(A_3) = 1 - 0{,}2 - 0{,}2 = 0{,}6$

Otras probabilidades:

$P(B|A_1) = 0{,}75$ → Prob. de ser directivo dado que es ingeniero

$P(B|A_2) = 0{,}5$ → Prob de ser directivo dado que es economista

$P(B|A_3) = 0{,}2$ → Prob. de ser directivo dado que no es ingeniero ni economista

Prob. a posteriori:

- Probabilidad de que sea ingeniero dado que es directivo.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\,P(A_1)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\,P(A_3)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{0{,}75 * 0{,}2}{0{,}75 * 0{,}2 + 0{,}5 * 0{,}2 + 0{,}2 * 0{,}6}$$

$$P(A_1|B) = \frac{0{,}15}{0{,}37} = 0{,}405405$$

$$P(A_1|B) \approx 0{,}41$$

Tarea:
- Calcular la probabilidad de que el directivo sea economista $[P(A_2|B)]$.
- Calcular $P(A_3|B)$, que no sea ingeniero ni economista, dado q' es directivo

Ejemplo 3: La prob. de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es de 0,1. La probabilidad de que ésta se accione dado que ocurrió un accidente es de 0,97 y la prob. de que se active si no ha ocurrido ningún accidente es de 0,02

En el supuesto de que haya funcionado la alarma. ¿Cuál es la probabilidad de que haya ocurrido un accidente?

Eventos:

A: Ocurrio un accidente.

A^c: No ocurrio un accidente

B: La alarma se activa.

Probabilidades a priori: $P(A) = 0{,}1$

$$P(A^c) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Prob. Adicionales:

$$P(B|A) = 0{,}97$$

$$P(B|A^c) = 0{,}02$$

Prob. a posteriori:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{0{,}97 * 0{,}1}{0{,}97 * 0{,}1 + 0{,}02 * 0{,}9}$$

$$P(A|B) = \frac{0{,}097}{0{,}097 + 0{,}018}$$

$$P(A|B) = \frac{0{,}097}{0{,}115} = 0{,}843478$$

$$P(A|B) \approx 0{,}843$$

Tarea: $P(A^c|B) = 1 - 0{,}843 = 0{,}157$ → Verificar usando el teorema de Bayes.

35. El equipo de béisbol de los Gatos Salvajes de Ludlow, un equipo de las ligas menores de la organización de los Indios de Cleveland, juega 70% de sus partidos por la noche y 30% de día. El equipo gana 50% de los juegos nocturnos y 90% de los diurnos. De acuerdo con el periódico de hoy, ganaron el día de ayer. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se haya jugado de noche?

A: Juega en la noche

A^c: juegar en el día

B: Gana el partido

Prob. a priori: $P(A) = 70\% = 0{,}7$

$P(A^c) = 30\% = 0{,}3$

Prob. adicionales: $P(B|A) = 50\% = 0{,}5$

$P(B|A^c) = 90\% = 0{,}9$.

¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?

$$P(B) = P(AB) + P(A^cB)$$

$$= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

$$= 0{,}5 * 0{,}7 + 0{,}9 * 0{,}3$$

$$= 0{,}35 + 0{,}27 = 0{,}62 = 62\%$$

Prob. a posteriori:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{0{,}5 * 0{,}7}{0{,}62}$$

$$= \frac{0{,}35}{0{,}62} = 0{,}5645 \approx 56{,}5\%$$

$$P(A^c|B) = 1 - 0{,}5645 = 0{,}4355 = 43{,}6\%$$