INICIO GRABACIÓN

SANJOSÉ

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

SEMANA 3

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES – MÉTODO GRÁFICO

Ing. GEORGE ANDERSON MOJICA SERRANO

INGENIERO INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS

SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

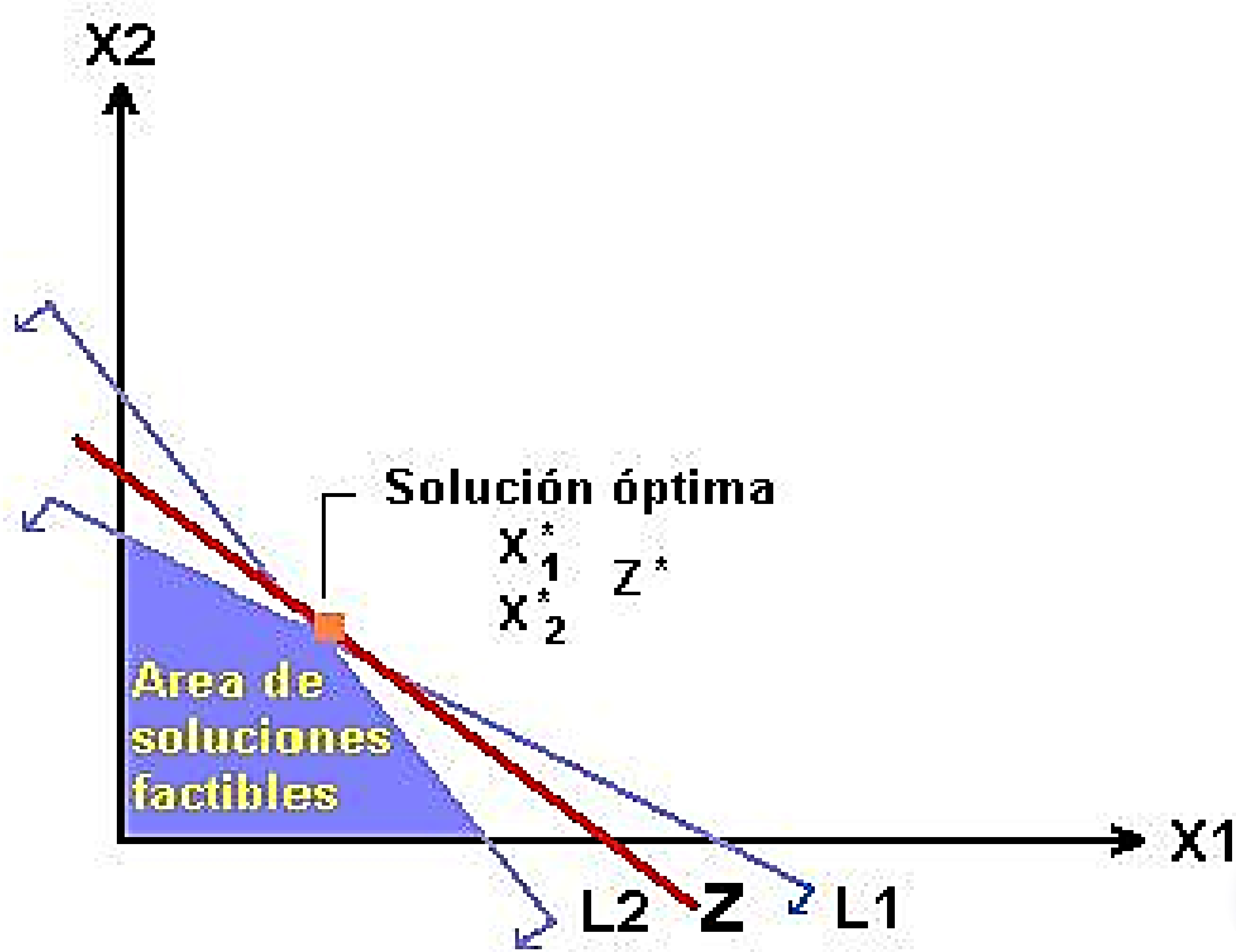
INDICE

SANJOSÉ

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

PROGRAMACIÓN LINEAL / MÉTODO GRÁFICO

MÉTODO GRÁFICO



Bibliografía: https://inveoperaciones.files.wordpress.com/2012/05/io-23.jpg

MÉTODO GRÁFICO (II)

Las fases del procedimiento de resolución de problemas mediante el método Gráfico son las siguientes:

1.Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas en el que cada variable de decisión esté representada por un eje.

2.Establecer una escala de medida para cada uno de los ejes adecuada a su variable asociada.

3.Dibujar en el sistema de coordenadas las restricciones del problema, incluyendo las de no negatividad (que serán los propios ejes). Notar que una inecuación define una región que será el semiplano limitado por la línea recta que se tiene al considerar la restricción como una igualdad, mientras que si una ecuación define una región que es la propia línea recta.

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

MÉTODO GRÁFICO (III)

4. La intersección de todas las regiones determina la región factible o espacio de soluciones (que es un conjunto convexo). Si esta región es no vacía, se continuará con el paso siguiente. En caso contrario, no existe ningún punto que satisfaga simultáneamente todas las restricciones, por lo que el problema no tendrá solución, denominándose no factible.

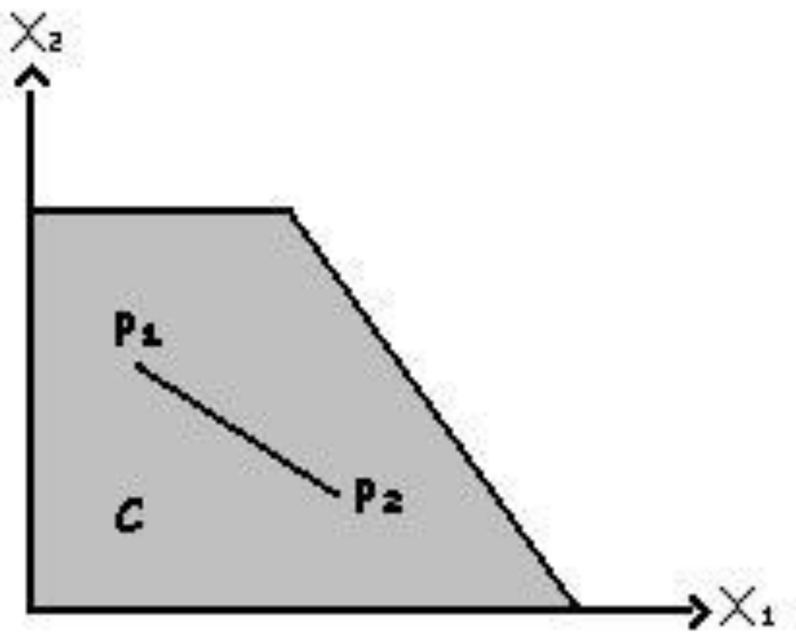
5. Determinar los puntos extremos o vértices del polígono o poliedro que forma la región factible. Estos puntos serán los candidatos para la solución óptima.

6. Evaluar la función objetivo en todos los vértices y aquél (o aquellos) que maximicen (o minimicen) el valor resultante determinaran la solución óptima del problema.

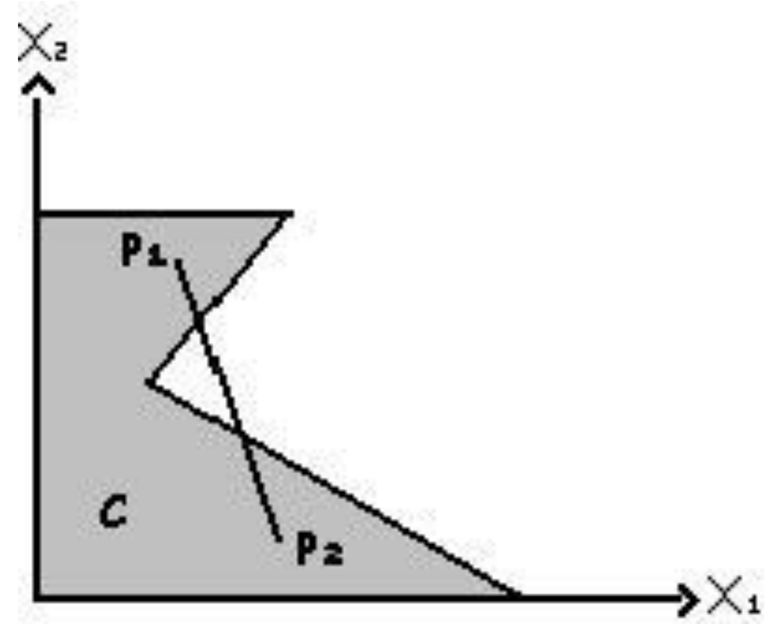
Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

CONJUNTO CONVEXO

Un conjunto C es un conjunto convexo si el segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos de C se encuentra completamente en C.



Conjunto Convexo



Conjunto No Convexo

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

PROBLEMA DE UNICA SOLUCIÓN

Maximice $Z = 2X_1 + X_2$

Bajo las siguientes restricciones:

$$2X_1 - X_2 \leq 8$$
$$X_1 - X_2 \leq 3$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 14$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 24$$

Xj0 ; j = 1, 2

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

PROBLEMA DE UNICA SOLUCIÓN

Cálculos analíticos para graficar el sistema de inecuaciones lineales, incluyendo la condición de no negatividad ($Xj>0$; $j = 1, 2$), que nos indica que solamente trabajaremos en el primer cuadrante del plano cartesiano, cuadrante en donde X_1 y X_2 son positivas.

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	4° Restricción	Función Objetivo
$2X_1 - X_2 \leq 8$	$X_1 - X_2 \leq 3$	$X_1 + 2X_2 \leq 14$	$X_1 + 4X_2 \leq 24$	$Z = 2X_1 + X_2$
$2X_1 - X_2 = 8$	$X_1 - X_2 = 3$	$X_1 + 2X_2 = 14$	$X_1 + 4X_2 = 24$	$2X_1 + X_2 = 2$
$X_1 = 0$; $X_2 = 0$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$
$X_2 = -8$; $X_1 = 4$	$X_2 = -3$; $X_1 = 3$	$X_2 = 7$; $X_1 = 14$	$X_2 = 6$; $X_1 = 24$	$X_2 = 2$; $X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 24$	
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

RESTRICCIONES

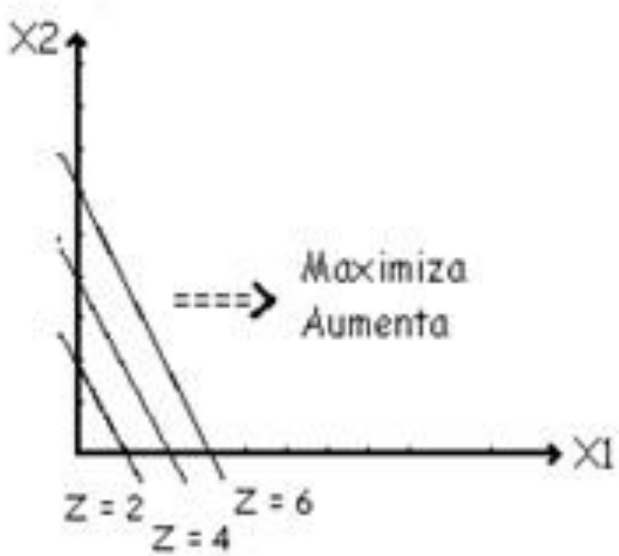
Fíjese que para cada inecuación, primero suponemos que es una igualdad y luego tabulamos dos puntos fáciles de calcular, como lo son las intersecciones de la recta con los ejes cartesianos abscisa y ordenada, esto siempre que el término independiente (Lado derecho de la inecuación) sea diferente de cero, es decir siempre y cuando la recta no pase por el origen de coordenadas P(0,0).

A continuación con un punto de prueba cualquiera $P(X_1\ ,\ X_2)$, (Asegúrese que se encuentre al lado derecho ó izquierdo de la recta, NO sobre ella, es decir, el punto de prueba NO puede pertenecer a la recta), Aquí, como ya sabemos que la recta no pasa por el origen de coordenadas (Término independiente diferente de cero), usamos como punto de prueba P(0,0), es decir $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ que nos facilita los cálculos cuando lo remplacemos en la inecuación y observamos si la hace una verdad ó una falsedad; Averiguar esto nos permite conocer si el área solución de la inecuación está al lado derecho ó izquierdo

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

FUNCIÓN OBJETIVO

La función objetivo $Z = 2X_1 + X_2$ expresada como $2X_1 + X_2 = Z$ tiene la estructura de una línea recta, solo que no conocemos su término independiente. Graficando ésta ecuación con diferentes valores para Z, observamos que la función objetivo, representa una familia de rectas paralelas, que al aumentar el valor de Z la recta se desplaza hacia el lado derecho, por lo que concluimos que Z aumenta cuando la recta se desplaza paralelamente hacia la derecha, esto se cumple siempre que la ecuación de la función objetiva tenga pendiente negativa, es decir inclinada al lado izquierdo.

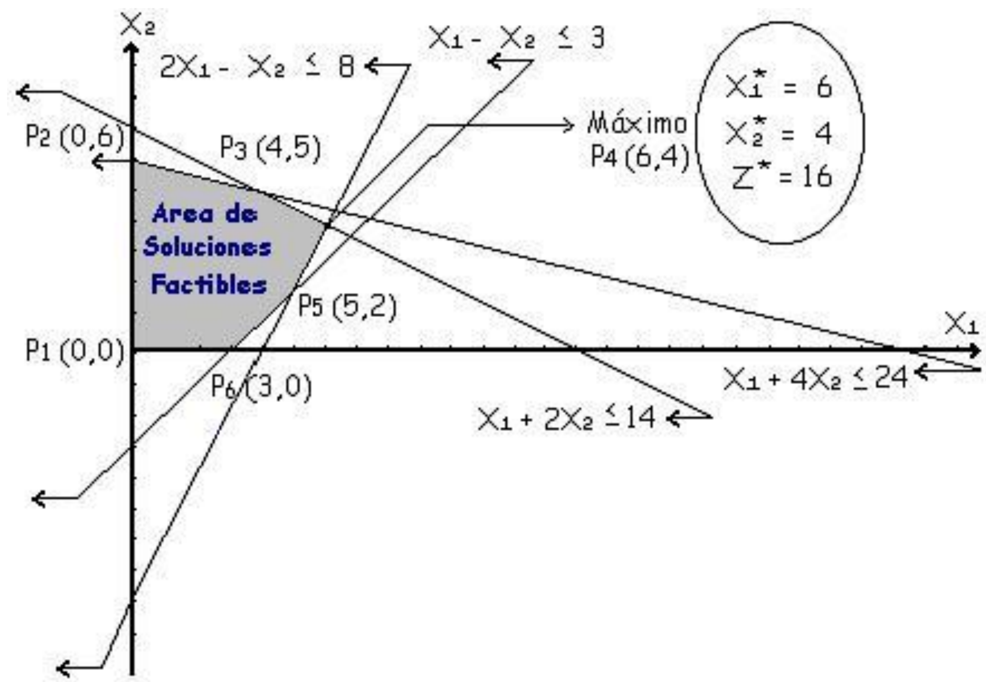


$2X_1 + X_2 = 2$		$2X_1 + X_2 = 4$		$2X_1 + X_2 = 6$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 2$	$X_1 = 1$	$X_2 = 4$	$X_1 = 2$	$X_2 = 6$	$X_1 = 3$

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

RESUMEN DEL EJERCICIO

Aquí se le ha dado a Z el valor arbitrario de 2, ya que solo necesitamos graficar una de las rectas que pertenece a la familia de rectas paralelas, para facilitar la tabulación de la función objetivo, se recomienda dar el valor arbitrario de Z como un múltiplo de los coeficientes de las variables, que se consigue fácilmente, multiplicando el coeficiente de X_1 por el coeficiente de X_2 . Es conveniente fijarse en los valores de las coordenadas para graficar la función objetivo observando que sean parecidos en magnitud a los hallados para graficar las restricciones (Observe que puede dar el valor adecuado a Z), esto hará que la gráfica quede convenientemente presentada para el análisis.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

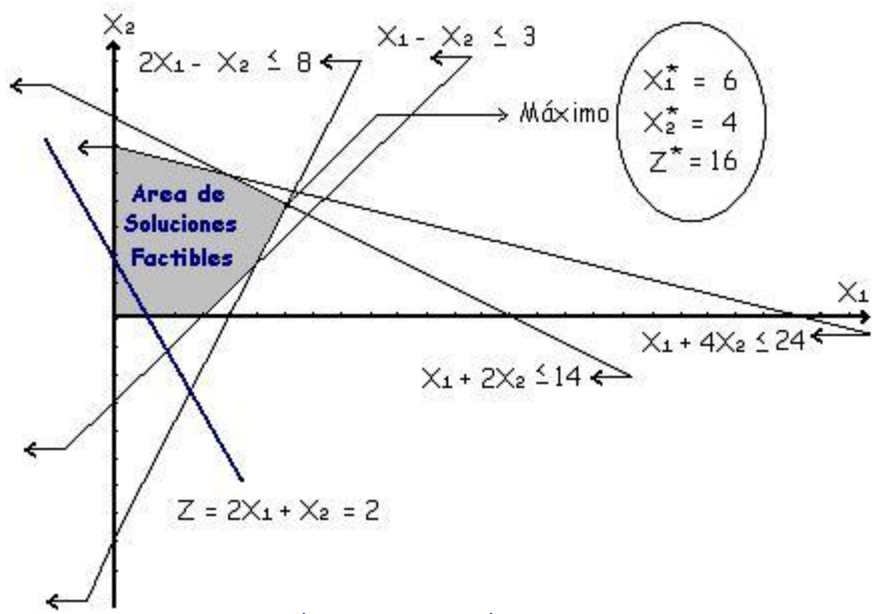
RESUMEN DEL EJERCICIO

El valor de la función objetivo en cada una de las esquinas del área de soluciones factible es:

$$
\begin{aligned}
Z_{(0,0)} &= 2(0) + 0 = 0 \\
Z_{(0,6)} &= 2(0) + 6 = 6 \\
Z_{(4,5)} &= 2(4) + 5 = 13 \\
Z_{(6,4)} &= 2(6) + 4 = 16 \\
Z_{(5,2)} &= 2(5) + 2 = 12 \\
Z_{(3,0)} &= 2(3) + 0 = 6
\end{aligned}
$$

➡ La función objetivo se maximiza cuando $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$

Segundo procedimiento: Usando la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

EJEMPLO:

La fábrica de Hilados y Tejidos «SALAZAR» requiere fabricar dos tejidos de calidad diferente T y T’; se dispone de 500 Kg de hilo a, 300 Kg de hilo b y 108 Kg de hilo c. Para obtener un metro de T diariamente se necesitan 125 gr de a, 150 gr de b y 72 gr de c; para producir un metro de T’ por día se necesitan 200 gr de a, 100 gr de b y 27 gr de c. El T se vende a $4000 el metro y el T’ se vende a $5000 el metro. Si se debe obtener el máximo beneficio, ¿Cuántos metros de T y T’ se deben fabricar?

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

MODELAMIENTO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

Variables

XT: Cantidad de metros diarios de tejido tipo T a fabricar
XT’: Cantidad de metros diarios de tejido tipo T’ a fabricar

Restricciones

$0{,}12XT + 0{,}2XT' \leq 500$ Hilo “a”
$0{,}15XT + 0{,}1XT' \leq 300$ Hilo “b”
$0{,}072XT + 0{,}027XT' \leq 108$ Hilo “c”

Las restricciones de no negatividad no son necesarias en este ejemplo dado que se trata de un ejercicio de maximización, cuando el ejercicio sea de minimización lo más recomendado es incluirlas.

Función objetivo

$ZMAX = 4000XT + 5000XT'$

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

PASO 1: GRAFICAR LAS RESTRICCIONES

XT = x
XT' = y

Igualamos las restricciones,

$$0{,}12X + 0{,}2y = 500$$
$$0{,}15X + 0{,}1y = 300$$
$$0{,}072X + 0{,}027y = 108$$

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

GRAFICAR LAS RESTRICCIONES (II)

Acto seguido iniciamos con la ***primera restricción***, hallamos las primeras dos coordenadas. Para hallar las coordenadas regularmente llevamos una de las variables a cero, para de esta manera despejar más fácilmente la segunda.

Por ejemplo, para un x = 0

0,12(0) + 0,2y = 500

0,2y = 500

500/0,2 = y

2500 = y

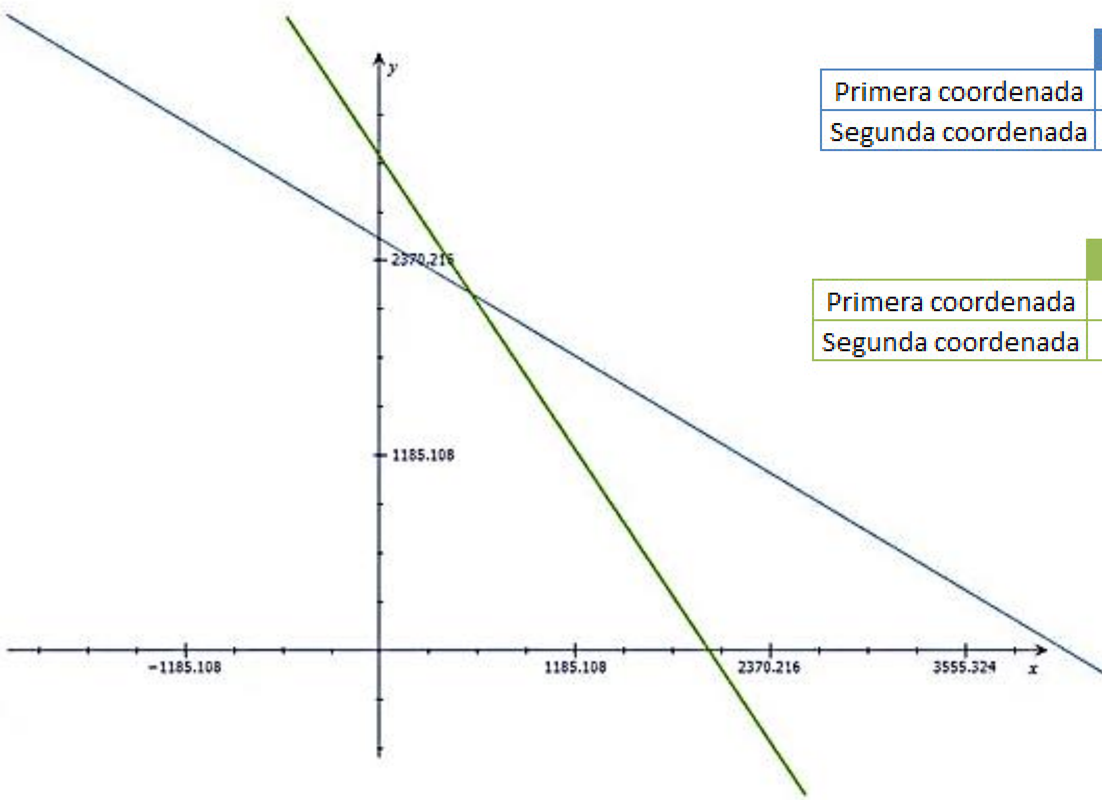
y para un y = 0

0,12x + 0,2(0) = 500

0,12x = 500

x = 500/0,12

x = 4167



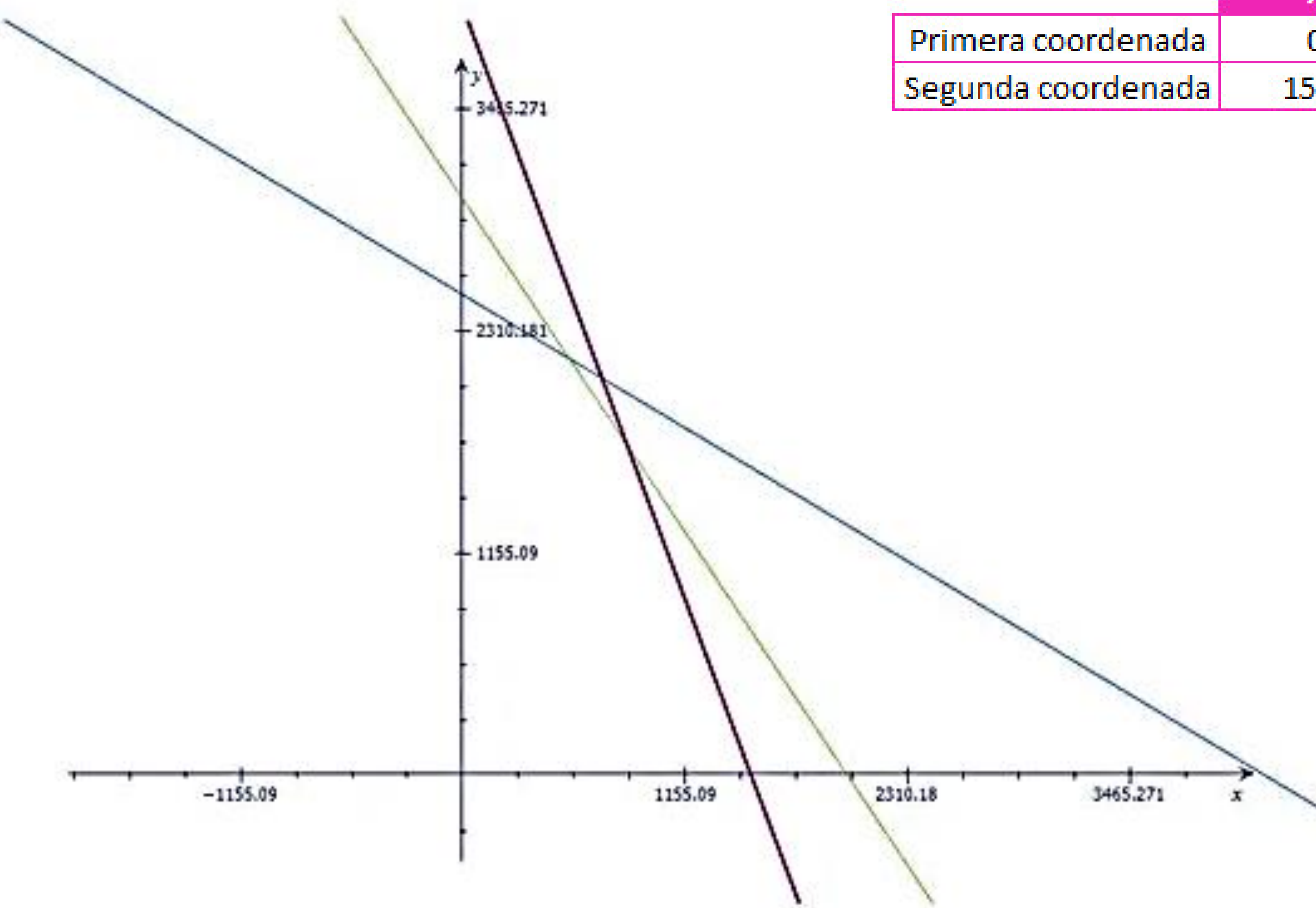
	x	y
Primera coordenada	0	2500
Segunda coordenada	4167	0

	x	y
Primera coordenada	0	3000
Segunda coordenada	2000	0

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

GRAFICAR LAS RESTRICCIONES (III)

asamos a la tercera restricción

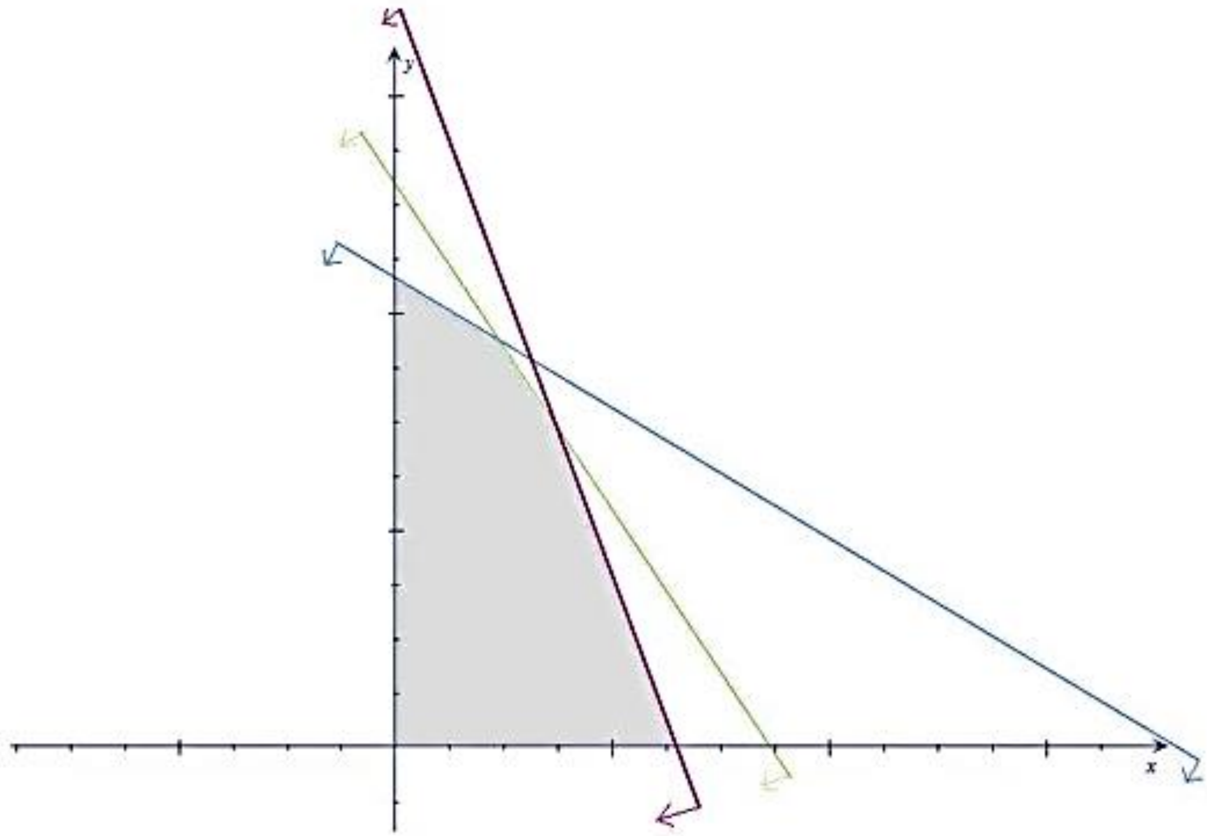


	x	y
Primera coordenada	0	4000
Segunda coordenada	1500	0

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

GRAFICAR LAS RESTRICCIONES (IV)

En el siguiente gráfico se muestra el ***polígono solución de color gris***, en este conjunto es donde cada coordenada cumple con todas las restricciones, las cuales se caracterizan por ser restricciones de menor o igual y esta característica se representa con una flecha hacía abajo.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

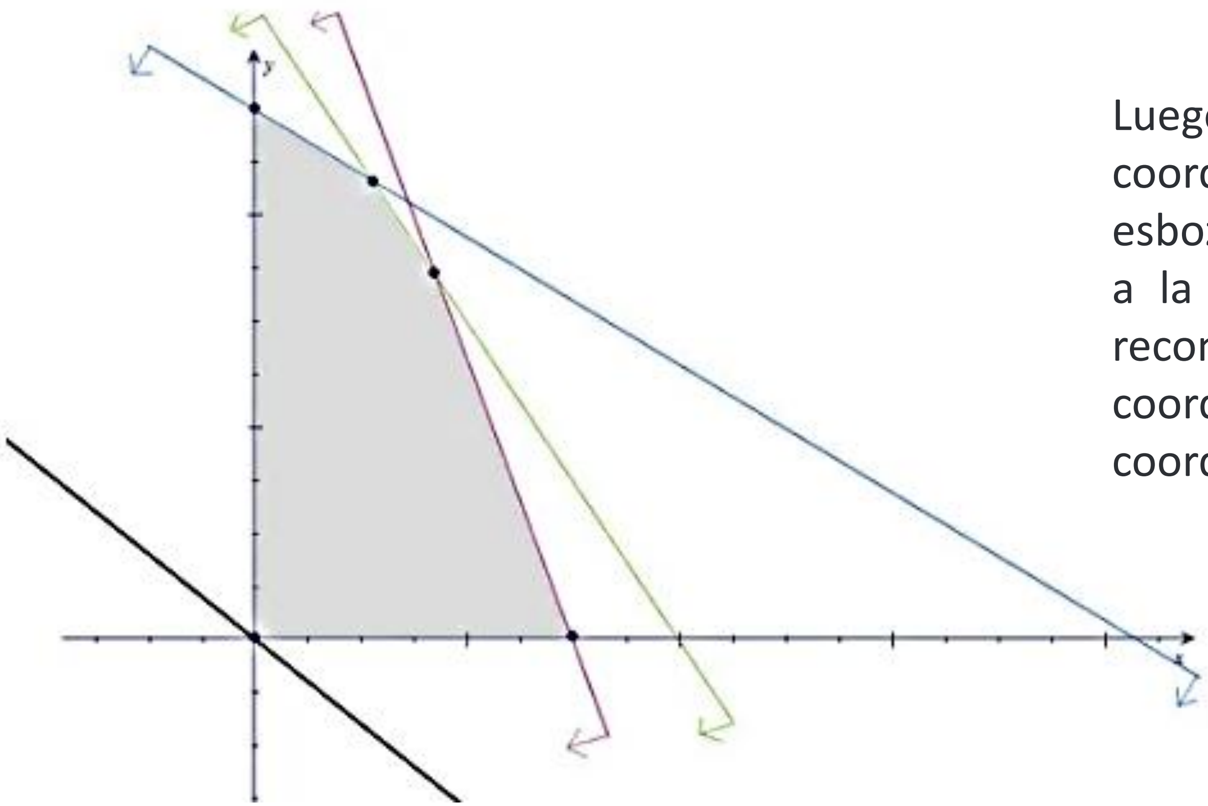
FUNCIÓN OBJETIVO

	x	y
Primera coordenada	1875	-1500
Segunda coordenada	625	-500
tercera coordenada	0	0
cuarta coordenada	-625	500
quinta coordenada	-1875	1500

ZMAX = 4000x + 5000y

luego igualamos a 0.

4000x + 5000y = 0

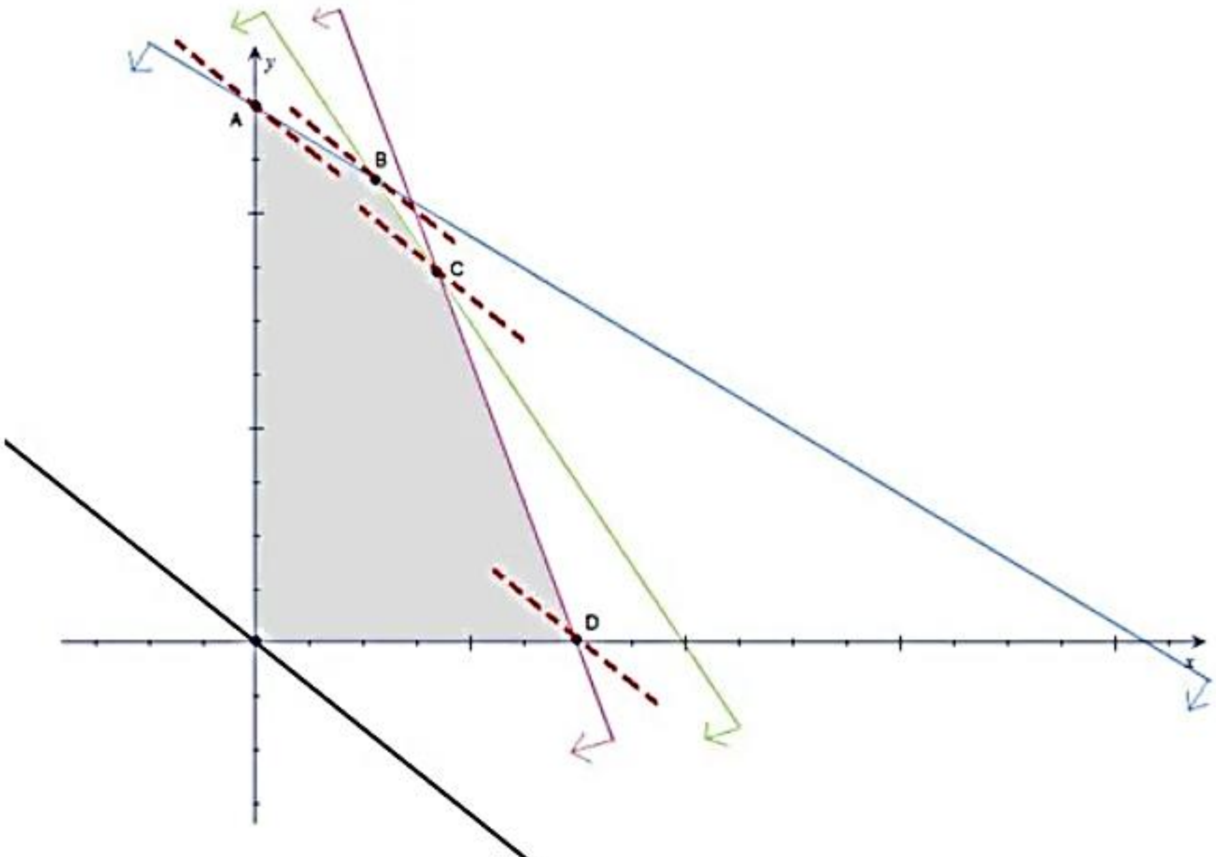


Luego tabulamos para obtener las coordenadas necesarias para esbozar la gráfica correspondientes a la ecuación (en esta ocasión es recomendable más de dos coordenadas, incluyendo la coordenada *(x = 0, y = 0).*

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

INTERPRETACIÓN

Una vez se ha esbozado la función objetivo (línea negra) sacamos replicas paralelas a esta que se encuentren con cada vértice, y ***solo en el caso en que la línea imaginaria paralela a la función objetivo no corte el polígono solución se ha encontrado la solución óptima***. En otras palabras trasladamos la función objetivo por todo el polígono conservando su forma paralela con la original, la detenemos en los vértices y evaluamos si esta corta o no el conjunto solución.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

HALLAR EL VALOR DE LAS VARIABLES

- Método por sustitución
- Método por igualación
- Método por reducción o Eliminación
- Método por eliminación Gauss
- Método por eliminación Gauss – Jordán
- Método por determinantes

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

RESOLVER SSTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuación 1 $\quad 0,12x + 0,2y = 500$

Ecuación 2 $\quad 0,15x + 0,1y = 300$ multiplicamos por (-2)

Ecuación 3 (2*(-2)) $\quad -0,30x - 0,2y = -600$

Sumamos 1 y 3 $\quad -0,18x = -100$

Despejamos «x» $\quad x = -100 / (-0,18)$

x = 555,55

luego reemplazamos x = 555,55 en cualquiera de las dos ecuaciones originales con el objetivo de despejar «y».

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

RESOLVER SSTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuación 1 $0{,}12x + 0{,}2y = 500$

Reemplazamos «x» $0{,}12(555{,}55) + 0{,}2y = 500$

Despejamos «y» $66{,}666 + 0{,}2y = 500$

$0{,}2y = 500 – 66{,}666$

$0{,}2y = 433{,}334$

$y = 433{,}334 / 0{,}2$

$y = 2166{,}67$

De esta forma hemos obtenido los valores para ***«x»*** y ***«y»***.

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

REEMPLAZANDO X T Y XT’ EN LA F.O

Recordemos que *x* y *y* fueron los nombres que recibieron las variables originales XT y XT’

x = XT

y = XT’

XT = 555,55

XT’ = 2166,67

y la contribución obtenida (reemplazando las variables en la función objetivo) es de:

Zmax = 4000XT + 5000XT’

Zmax = 4000(555,55) + 5000(2166,67)

Zmax = 13.055.550

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

CONCLUSIÓN

Ahora podemos cotejar los resultados con los obtenidos mediante resolución por ***Solver – Excel***, sin embargo recuerden que el método de búsqueda de la solución óptima en el método gráfico que utilizamos es el geométrico y que existe una posibilidad mucho más compleja pero igualmente efectiva, este es el método de iteración por vértice, y que consiste en hallar todas las coordenadas de los vértices y luego en cada coordenada se evalúa la función objetivo, (cada coordenada nos proporciona un valor en «x» y otro en «y», luego reemplazamos estos valores en la función objetivo «4000x + 5000y = ?» y luego evaluamos los resultados seleccionando la mayor cantidad).

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

VARIANTES EN EL MÉTODO GRÁFICO

Como en la mayoría de los casos, el ejemplo con el que aquí se explicó el método gráfico es el ideal, es decir un ejercicio de conjunto acotado con solución óptima única, sin embargo existen una variedad de problemas diferentes a los ideales y que vale la pena analizar:

Solución óptima múltiple

Solución óptima no acotada

Solución infactible

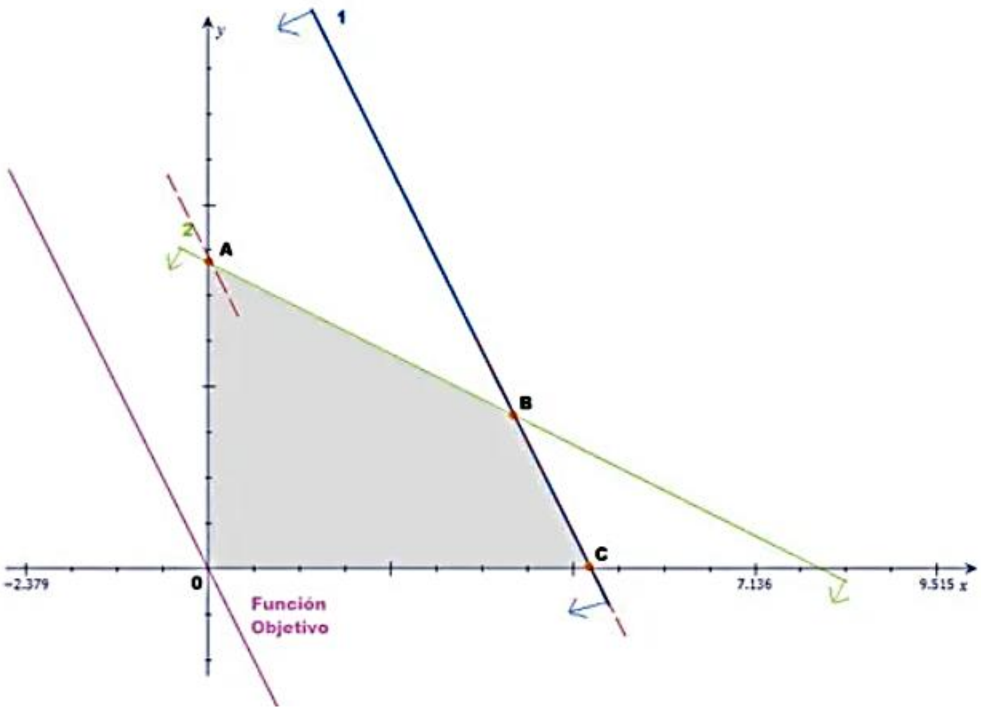
Restricciones redundantes o sobrantes

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

SOLUCIÓN OPTIMA MULTIPLE

Una de las variantes que puede presentar un ejercicio de ***programación lineal*** consiste en la cantidad de soluciones óptimas halladas, ya que gran cantidad de modelos presenta más de una solución óptima, es decir una solución en la cual la función objetivo es exactamente igual en una combinación cuantitativa de variables diferente.

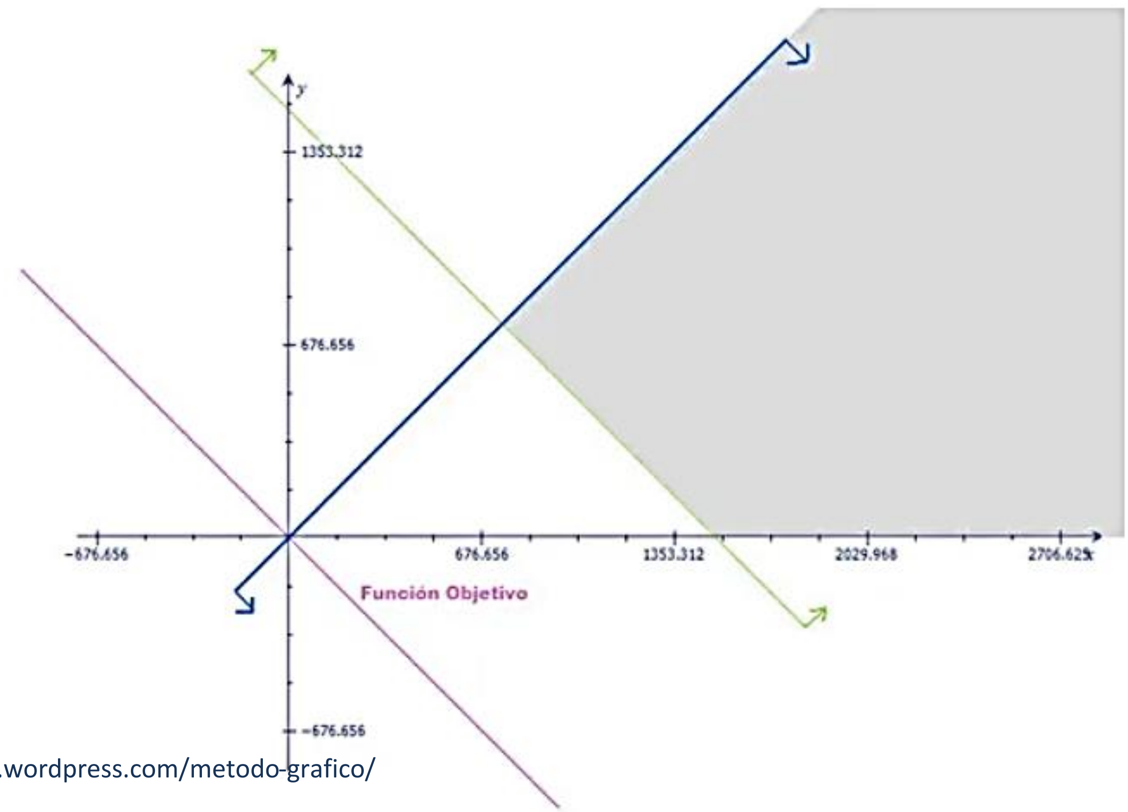
Estos problemas deben de afrontarse de tal manera que prime el análisis de sensibilidad, es decir una vez encontradas múltiples soluciones iguales se debe proceder al comportamiento del consumo de los recursos y restricciones, evidentemente prevaleciendo el concepto de productividad de los recursos más limitados y costosos.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

SOLUCIÓN ÓPTIMA NO ACOTADA

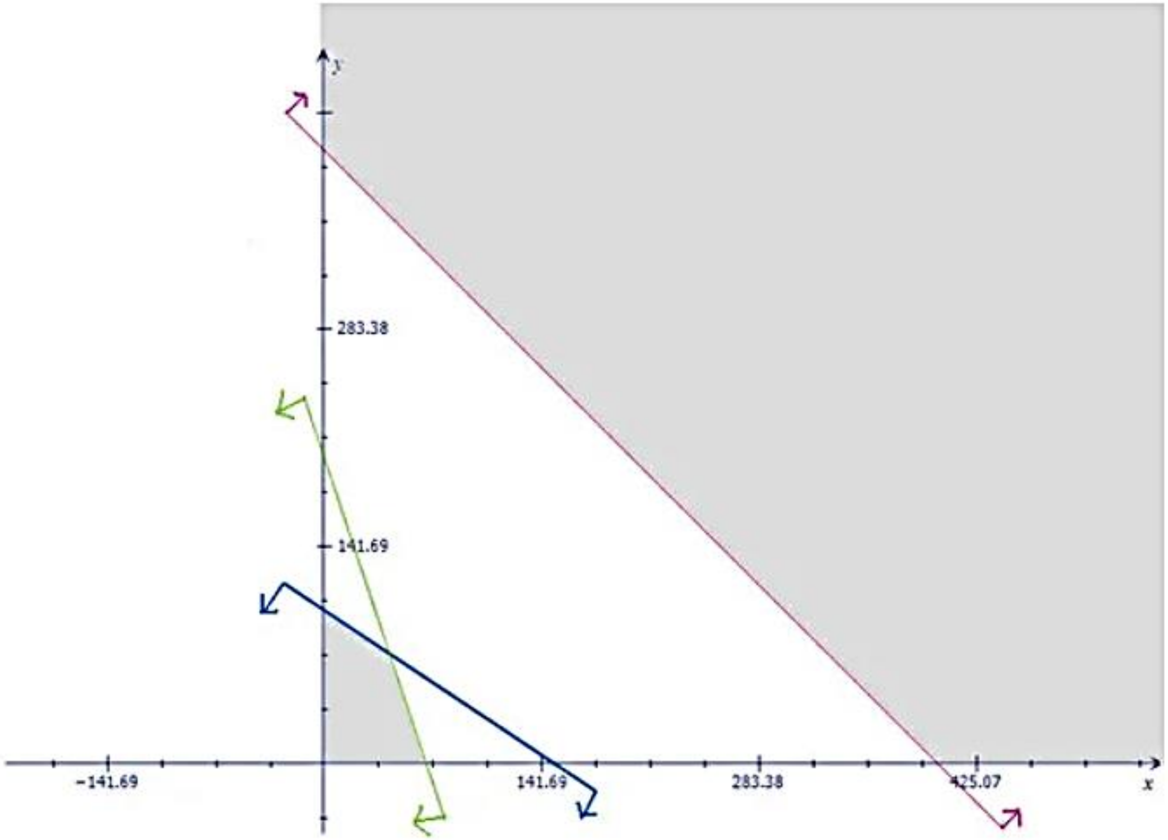
Otra de las variantes que presentan los modelos de programación lineal corresponde a los modelos de solución óptima no acotada, es decir problemas con infinitas soluciones óptimas. Hay que reconocer que en la vida real gran parte de estos problemas se deben a un mal planteamiento de las restricciones, sin embargo es común que este tipo de problemas sean evaluados en la vida académica.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

SOLUCIÓN INFACTIBLE

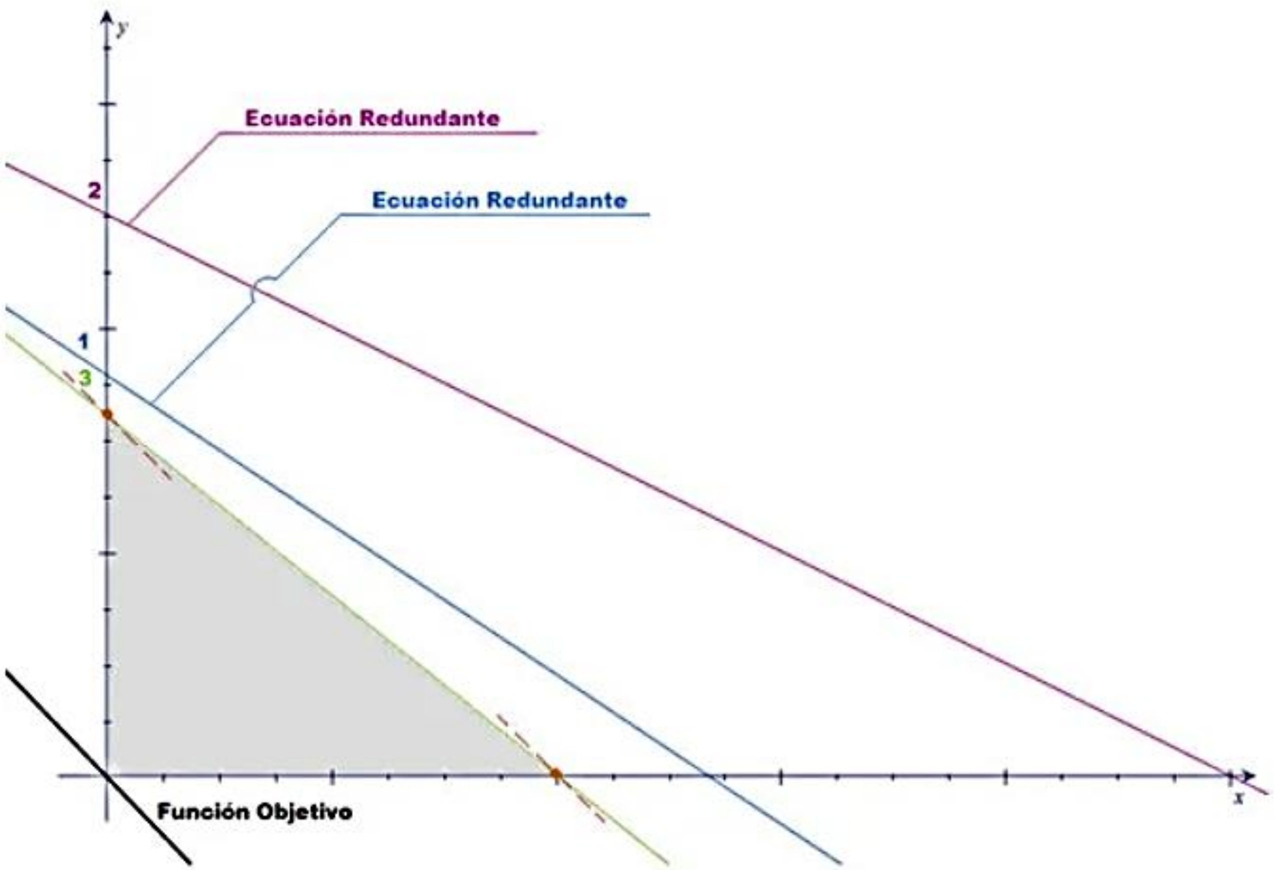
El caso de la solución infactible es más típico de lo pensado, y corresponde a los casos en los cuales no existen soluciones que cumplen con todas las restricciones. Es muy común ver este fenómeno producto de inviables proporciones de oferta y demanda.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

RESTRICCIONES REDUNDANTES O SOBRANTES

Existen en los ***modelos de programación lineal*** un tipo de restricciones que no juegan rol alguno en la determinación del conjunto solución (de igual manera en la solución óptima), lo que lleva a deducir que estas son redundantes.



Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

CONCLUSIÓN

Ahora podemos cotejar los resultados con los obtenidos mediante resolución por ***Solver – Excel***, sin embargo recuerden que el método de búsqueda de la solución óptima en el método gráfico que utilizamos es el geométrico y que existe una posibilidad mucho más compleja pero igualmente efectiva, este es el método de iteración por vértice, y que consiste en hallar todas las coordenadas de los vértices y luego en cada coordenada se evalúa la función objetivo, (cada coordenada nos proporciona un valor en «x» y otro en «y», luego reemplazamos estos valores en la función objetivo «4000x + 5000y = ?» y luego evaluamos los resultados seleccionando la mayor cantidad).

Bibliografía. https://inveoperaciones.wordpress.com/metodo-grafico/

INICIO RECESO

FIN DE RECESO


SANJOSÉ
FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
FIN DE
GRABACIÓN

INICIO RECURSO MULTIMEDIA

Para acceder a este video diríjase a la etiqueta de material de apoyo