



INICIO
GRABACIÓN



SANJOSÉ

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

SEMANA 5

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES – MÉTODO SIMPLEX PRIMERA PARTE

Ing. GEORGE ANDERSON MOJICA SERRANO

INGENIERO INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS





INDICE

- 1 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
- 2 MÉTODO SIMPLEX
GENERALIDADES
MODELO TABLAS
- 3 EJERCICIOS
- 4 CONCLUSIONES



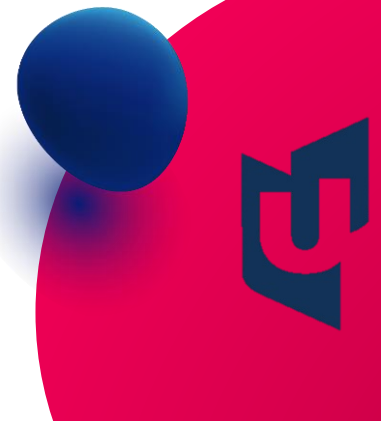
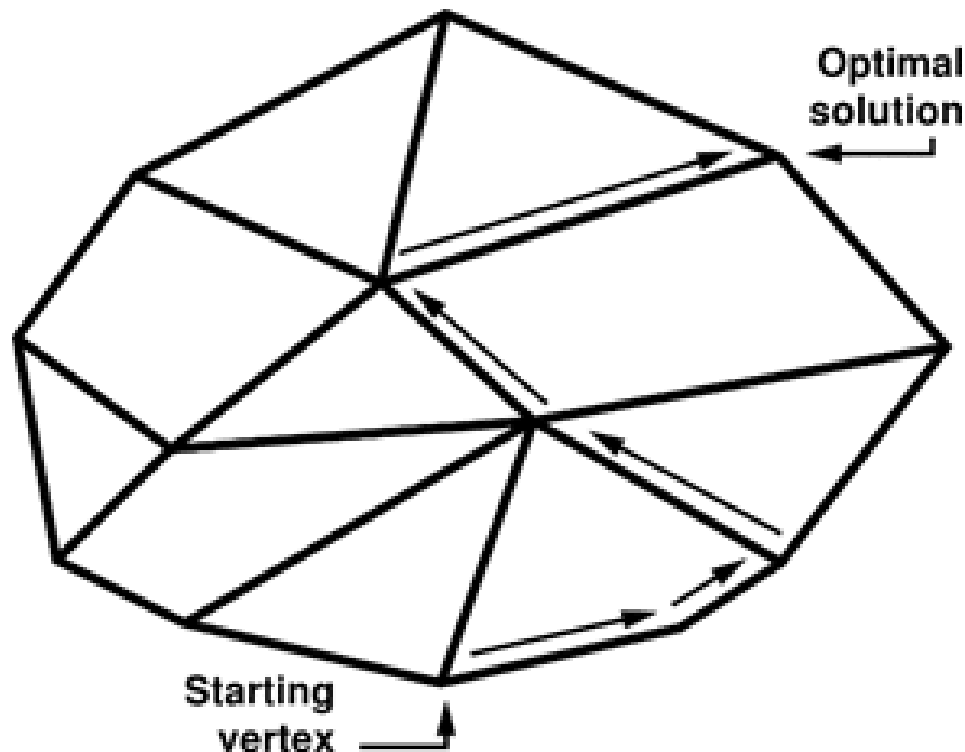
SAN JOSÉ

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

MÉTODO SIMPLEX

MÉTODO SIMPLEX

El **Método Simplex** es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. La razón matemática de esta mejora radica en que el método consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya (según el contexto de la función objetivo, sea maximizar o minimizar). Dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito, en la medida en que se pueda satisfacer el conjunto de restricciones, siempre se hallará como mínimo una solución óptima.





TEORÍA DE MATRICES

La importancia de la teoría de matrices en el **Método Simplex** es fundamental, dado que el algoritmo se basa en dicha teoría para la resolución de sus problemas. De tal manera que veremos previamente, *en qué consiste una matriz identidad*.

¿QUÉ ES UNA MATRIZ IDENTIDAD?

Una matriz puede definirse como una ordenación rectangular de elementos, (o listado finito de elementos), los cuales pueden ser números reales o complejos, dispuestos en forma de filas y de columnas.

La matriz idéntica o identidad es una matriz cuadrada (que posee el mismo número tanto de columnas como de filas) de orden n que tiene todos los elementos diagonales iguales a uno (1) y todos los demás componentes iguales a cero (0), se denomina matriz idéntica o identidad de orden n , y se denota por:

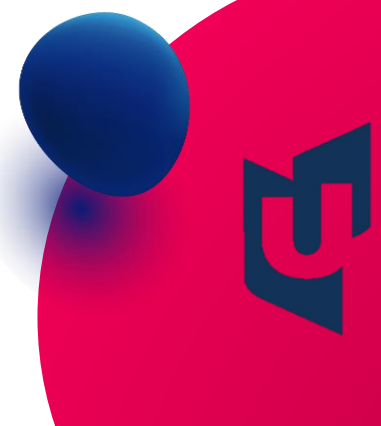
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$
$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

CONSIDERACIONES IMPORTANTES AL UTILIZAR EL MÉTODO SIMPLEX

Variables de holgura y exceso:

El Método Simplex trabaja basándose en ecuaciones y las restricciones iniciales que se modelan mediante programación lineal no lo son, para ello hay que convertir estas inecuaciones en ecuaciones utilizando unas variables denominadas de holgura y exceso relacionadas con el recurso al cual hace referencia la restricción y que en el tabulado final representa el «*Slack or surplus*» al que hacen referencia los famosos programas de resolución de investigación de operaciones, estas variables adquieren un gran valor en el análisis de sensibilidad y juegan un rol fundamental en la creación de la matriz identidad, base del Simplex.

Estas variables suelen estar representadas por la letra «S», se suman (del lado izquierdo de la restricción) si la restricción es de signo « \leq » y se restan (del lado izquierdo de la restricción) si la restricción es de signo « \geq ».



Por ejemplo.



Inecuaciones modeladas mediante programación lineal

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \leq 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 + \boxed{1S_1 + 0S_2 + 0S_3} = 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 + \boxed{0S_1 + 1S_2 + 0S_3} = 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + \boxed{0S_1 + 0S_2 + 1S_3} = 800$$

Matriz Identidad

Inecuaciones modeladas mediante programación lineal

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \geq 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 \geq 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 - 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0S_1 - 1S_2 + 0S_3 = 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 - 1S_3 = 800$$





Una consideración importante consiste en que el sistema de restricciones debe ser restrictivo, y esto significa solo una cosa: El lado derecho de las restricciones no puede contener variables, solo un número mayor o igual a 0.

En el caso en que, por ejemplo, tengamos la siguiente restricción:

$$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 \leq -24$$

Procederemos, primero a convertir la desigualdad en igualdad añadiendo una variable de holgura:

$$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 1S_1 = -24$$

Segundo, a multiplicar ambos lados de la igualdad por (-1), de tal manera que el lado derecho cumpla con la condición: positivos mayores o iguales a 0.

$$-2X_1 - 1X_2 - 1X_3 - 2X_4 - 1S_1 = 24$$

De esta manera lograríamos estandarizar esta restricción para nuestro algoritmo Simplex.



VARIABLE ARTIFICIAL / MÉTODO DE LA «M»



Una variable artificial es un ***truco matemático*** para convertir inecuaciones « \geq » en ecuaciones, o cuando aparecen igualdades en el problema original, la característica principal de estas variables es que no deben formar parte de la solución, dado que no representan recursos. El objetivo fundamental de estas variables es la formación de la matriz identidad.

Estas variables se representa por la letra «A», siempre se suman a las restricciones, su coeficiente es M (por esto se le denomina Método de la M grande, donde M significa un número demasiado grande muy poco atractivo para la función objetivo), y el signo en la función objetivo va en contra del sentido de la misma, es decir, en problemas de Maximización su signo es menos (-) y en problemas de Minimización su signo es (+), repetimos con el objetivo de que su valor en la solución sea cero (0).



VARIABLES NO NEGATIVAS



Todas las variables del método Simplex deben cumplir con la condición de no negatividad. Cuando existe alguna variable del modelo que no tiene restricción de *no-negatividad*, se debe reemplazar por la diferencia de dos variables positivas.

Por lo tanto en el modelo donde aparezca esta variable , se debe cambiar por:

Sea X_i una variable sin restricción de no-negatividad (puede ser mayor, igual o menor que cero), se debe cambiar por:

$(X_{i(+)} - X_{i(-)})$ donde $X_{i(+)} \geq 0$ y $X_{i(-)} \geq 0$

Este tipo de variables son poco comunes, y se utilizan mucho en la programación por metas.



MÉTODO SIMPLEX PASO A PASO

Lo primero que diremos es que la resolución de un problema mediante Método Simplex manual carece de sentido práctico, y solo se utiliza hoy por hoy con fines académicos. Dicho de otro modo, para que el estudiante reconozca el funcionamiento del algoritmo.



El problema



La empresa el SAMÁN Ltda. Dedicada a la fabricación de muebles, ha ampliado su producción en dos líneas más. Por lo tanto actualmente fabrica mesas, sillas, camas y bibliotecas. Cada mesa requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, y 2 piezas cuadradas de 4 pines. Cada silla requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines y 2 piezas cuadradas de 4 pines, cada cama requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines, 1 cuadrada de 4 pines y 2 bases trapezoidales de 2 pines y finalmente cada biblioteca requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, 2 bases trapezoidales de 2 pines y 4 piezas rectangulares de 2 pines. Cada mesa cuesta producirla \$10000 y se vende en \$ 30000, cada silla cuesta producirla \$ 8000 y se vende en \$ 28000, cada cama cuesta producirla \$ 20000 y se vende en \$ 40000, cada biblioteca cuesta producirla \$ 40000 y se vende en \$ 60000. El objetivo de la fábrica es maximizar las utilidades.

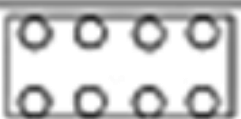





EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES (II)



La empresa el SAMÁN Ltda. Dedicada a la fabricación de muebles, ha ampliado su producción en dos líneas más. Por lo tanto actualmente fabrica mesas, sillas, camas y bibliotecas. Cada mesa requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, y 2 piezas cuadradas de 4 pines. Cada silla requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines y 2 piezas cuadradas de 4 pines, cada cama requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines, 1 cuadrada de 4 pines y 2 bases trapezoidales de 2 pines y finalmente cada biblioteca requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, 2 bases trapezoidales de 2 pines y 4 piezas rectangulares de 2 pines. Cada mesa cuesta producirla \$10000 y se vende en \$ 30000, cada silla cuesta producirla \$ 8000 y se vende en \$ 28000, cada cama cuesta producirla \$ 20000 y se vende en \$ 40000, cada biblioteca cuesta producirla \$ 40000 y se vende en \$ 60000. El objetivo de la fábrica es maximizar las utilidades.

REQUERIMIENTO DE PIEZAS POR PRODUCTO

				
Mesas	2	2	0	0
Sillas	1	2	0	0
Camas	1	1	2	0
Bibliotecas	2	0	2	4
Inventario	24	20	20	16



PASO 1: MODELACIÓN MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL



Variables:

- X_1 = Cantidad de mesas a producir (unidades)
- X_2 = Cantidad de sillas a producir (unidades)
- X_3 = Cantidad de camas a producir (unidades)
- X_4 = Cantidad de bibliotecas a producir (unidades)

Restricciones:

$$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 \leq 24$$

$$2X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 20$$

$$2X_3 + 2X_4 \leq 20$$

$$4X_4 \leq 16$$

Función Objetivo:

$$Z_{\text{MAX}} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$$



PASO 2: ESTANDARIZAR EL MODELO (I)



Este paso consiste en cumplir las consideraciones del modelo para que se ajuste al método Simplex:

- Convertir inecuaciones en ecuaciones
- Pasar, de ser necesario, el lado derecho de las restricciones a números positivos.
- Verificar que todas nuestras variables sean de naturaleza no-negativa.
Convertir las inecuaciones en igualdades (Variables de Holgura y Exceso)

En este paso el objetivo es asignar a cada recurso una variable de Holgura, dado que todas las restricciones son « \leq ».



PASO 2: ESTANDARIZAR EL MODELO (II)



$$\begin{aligned}2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 24 \\2X_1 + 2X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 20 \\0X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4 &= 20 \\0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 4X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 &= 16\end{aligned}$$

En cuyo caso:

S_1 = Cantidad de piezas rectangulares de 8 pines que no se utilizarán (holgura)

S_2 = Cantidad de piezas cuadradas de 4 pines que no se utilizarán (holgura)

S_3 = Cantidad de bases trapezoidales que no se utilizarán (holgura)

S_4 = Cantidad de piezas rectangulares de 2 pines que no se utilizarán (holgura)

La función objetivo no sufre variaciones, dado que es un problema de maximización (más adelante veremos qué pasaría si se tratara de un problema de minimización).

$$Z_{\text{MAX}} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$$



PASO 3: DEFINIR LA SOLUCIÓN BÁSICA INICIAL

El Método Simplex parte de una solución básica inicial para realizar todas sus iteraciones, esta solución básica inicial se forma con las variables cuyo coeficiente es 1 en la matriz identidad.

$$1S_1 = 24$$

$$1S_2 = 20$$

$$1S_3 = 20$$

$$1S_4 = 16$$

Esto en términos de solución significaría que todos los recursos permanecerían ociosos, y suena lógico, por lo menos suena como un buen punto de partida: *inicialmente no se usa ningún recurso*.



LA TABLA SIMPLEX



El Método Simplex se hace un poco más sencillo (y esto es mucho decir si estamos abordando una resolución manual), mediante el uso de tabulados simplex.

Variable Solución = Todo parte de definir las variables que harán parte de la solución. En esta columna se consigna la solución básica inicial, y a partir de esta en cada iteración se van incluyendo las variables que formarán parte de la solución final.

Solución: (segundo término)= En esta fila se consigna el segundo término de la solución, es decir, el coeficiente de las variables de la columna **variable solución**, lo más adecuado es que estas se consignent de manera ordenada, tal cual como se escribieron en la definición de restricciones.

	C_j									
C_b	Variable Solución	Solución								
	Z_j									
	$C_j - Z_j$									



Cb = En esta columna se consigna el valor que tiene la variable que se encuentra a su derecha «**Variable solución**» en la función objetivo.

Cj = Dado que en cada columna se registra una variable (título de la columna), la fila «Cj» hace referencia al coeficiente que tiene cada una de ellas en la función objetivo en la función objetivo.

Zj = En esta fila se consigna la contribución total, es decir la suma de los productos entre el término de cada columna y Cb.

Cj – Zj = En esta fila se realiza la diferencia entre la fila Cj y la fila Zj, su significado es un «*Shadow price*», es decir, la utilidad que se deja de recibir por cada unidad de la variable correspondiente que no forme parte de la solución. Y representa también el precio dual de las restricciones representadas por las variables de holgura y exceso.

	Cj									
Cb	Variable Solución	Solución								
	Zj									
	Cj - Zj									



Tabulado con la solución inicial:

C_j			20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
C_b	Variable Solución	Solución	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$			20000	20000	20000	20000	0	0	0	0





Variable Solución	Solución
S1	24
S2	20
S3	20
S4	16

$$1S_1 = 24$$

$$1S_2 = 20$$

$$1S_3 = 20$$

$$1S_4 = 16$$

Solución básica inicial

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Matriz identidad

Cb	Variable Solución
0	S1
0	S2
0	S3
0	S4

Coeficiente de las variables junto a la Función Objetivo

20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
-------	-------	-------	-------	---	---	---	---

Función Objetivo

$$Z_{MAX} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$$

2	1	1	2	1	0	0	0
2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	2	2	0	0	1	0
0	0	0	4	0	0	0	1

Restricciones en orden de la formulación

Nota: La base del Simplex es el orden y la organización de la informa .



PASO 4: REALIZAR LAS ITERACIONES NECESARIAS



Ya lo dijimos, el Método Simplex es un algoritmo iterativo, y por ende, los criterios para pasar de una iteración a otra son definitivos.

Recordemos algo: El Método Simplex consiste en realizar intentos o recorridos mientras el modelo va de un vértice del poliedro objetivo a otro. Cada recorrido de un vértice a otro estará representado por un tabulado de Simplex o iteración.

¿Qué es lo que pasa en cada iteración? Básicamente una variable entra a la solución inicial, por ende, una variable sale de la solución inicial, y al final de la iteración nos preguntamos si hemos hallado o no la solución óptima.





El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Evaluar que variable entrará y cual saldrá de la solución óptima:

	Maximizar	Minimizar
Variable que entra	La más positiva de los $C_j - Z_j$	La más negativa de los $C_j - Z_j$
Variable que sale	Siendo b los valores bajo la celda solución y a el valor correspondiente a la intersección entre b y la variable que entra. La menos positiva de los b/a .	Siendo b los valores bajo la celda solución y a el valor correspondiente a la intersección entre b y la variable que entra. La más positiva de los b/a .

En nuestro caso de ejemplo, todos los $C_j - Z_j$ son iguales a 20000, por lo tanto, la decisión debe tomarse de forma arbitraria, es decir, puede elegirse cualquiera como variable de entrada. Elegiremos la variable **X4** ¿Por qué? Porque sí, lo estamos haciendo de forma arbitraria para romper el empate.



Dado que **X4** es la variable de entrada, los valores que se encuentran en su columna pasarán a ser **A**. Y **B** siempre será la columna solución. Veamos:

	<i>Cj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variable Solución</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
	<i>Zj</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	<i>Cj-Zj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0



	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>Primera iteración</i>
<i>Fila</i>	<i>Solución</i>	<i>X4</i>	<i>B/A</i>
1	24	2	12
2	20	0	
3	20	2	10
4	16	4	4

Columna
Solución

Columna
Variable
Entrante

El menor "B/A" es 4, por lo tanto, la fila que sale será la fila #4

S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---



PASO 4: REALIZAR LAS ITERACIONES NECESARIAS (II)



En el caso de la columna temporal **A** cuando el valor es igual o menor que **0** no se considera para el cálculo de **B/A**. Por ejemplo, en la *fila #2* el valor de **A** era igual a **0**, por lo tanto, no se considera para el cálculo de **B/A**.

Dado lo anterior, la elección de la fila saliente se da de acuerdo al menor valor de la columna temporal **B/A**, es decir, entre los valores **12 – 10 – 4**. (Tal como observamos en la imagen anterior). Así entonces, la variable que sale será **S4**.

2. El hecho de que una variable distinta forme parte de las variables solución implica una serie de cambios en el tabulado Simplex, cambios que se explicarán a continuación.

El valor de la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale, se denomina **α** (*minúscula*). Veamos en este caso cuál es el **α** .



PASO 4: REALIZAR LAS ITERACIONES NECESARIAS (II)



		C_j	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
C_b	Variable Solución	Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S_2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S_3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S_4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

A continuación, todos los valores de la fila de salida se dividen por α .

S_4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
									α
									4
X_4	16/4	0/4	0/4	0/4	4/4	0/4	0/4	0/4	1/4
X_4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25





Como resultado tendremos los valores correspondientes a la nueva fila, en este caso la fila **X4**.

		<i>Cj</i>	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variab le</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1									
0	S2									
0	S3									
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>		0	0	0	0	0	0	0	0
	<i>Cj-Zj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

•Lo siguiente corresponde a registrar los nuevos valores de cada fila.

Recordemos que el valor de ***a*** depende de la intersección de la columna entrante y cada fila. En este caso vamos a registrar los nuevos valores de la *fila # 1*, correspondiente a la variable **S1**. Por lo tanto ***a*** será equivalente a **2**. Veamos:

	<i>A</i>
<i>Fila</i>	<i>X4</i>
1	2
2	0
3	2
4	4

Uno de los pasos más confusos en Simplex es el que se detallará a continuación, sin embargo, es cuestión de prestar suma atención al procedimiento.



La fila de la nueva variable entrante:

X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
----	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Deberá multiplicarse por el valor de $-a$ (Recordemos que el valor de a para la *fila #1* es 2). Es decir, $-a$ es igual a -2 . Como resultado tendremos una fila temporal, podemos denominarla – si así lo queremos – por la iteración y la fila, es decir, estamos en la primera iteración, y abordando la fila #1. Su nombre será *fila temporal I1-f1*.

Fila de la variable entrante

X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
----	---	---	---	---	---	---	---	---	------

$-a$

-2

Fila temporal I1 - f1 (FT11)

FT11	$4*(-2)$	$0*(-2)$	$0*(-2)$	$0*(-2)$	$1*(-2)$	$0*(-2)$	$0*(-2)$	$0*(-2)$	$0,25*(-2)$
FT11	-8	0	0	0	-2	0	0	0	-0,5



Estos valores, deben sumarse con los valores de la *fila 1* que se encontraba en la tabla anterior (**S1**). Veamos:



Anterior	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
Temporal	FT11	-8	0	0	0	-2	0	0	0	-0,5
Nueva	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0,5

Como resultado tendremos los valores correspondientes a la fila1 de la primera iteración, en este caso la fila **S1**.

		<i>Cj</i>	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variable</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0,5
0	S2									
0	S3									
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>		0	0	0	0	0	0	0	0
	<i>Cj-Zj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

En el caso de la fila 2, recordemos que el valor de a corresponde a 0 . Así que los valores pasan tal cual como se encontraban en la tabla anterior.



A	
Fila	$X4$
1	2
2	0
3	2
4	4

		C_j	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
C_b	Variable	Solución	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$
0	$S1$	16	2	1	1	0	1	0	0	-0,5
0	$S2$	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	$S3$									
20000	$X4$	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0



Veamos qué pasa con la tercera fila:



A	
Fila	X4
1	2
2	0
3	2
4	4

Fila de la variable entrante

X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
----	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Fila temporal l1 - f3 (FT13)

FT13	$4 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$1 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$0 \cdot (-2)$	$0,25 \cdot (-2)$
FT13	-8	0	0	0	-2	0	0	0	-0,5

-a

-2

Anterior

S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---

Temporal

FT13	-8	0	0	0	-2	0	0	0	-0,5
------	----	---	---	---	----	---	---	---	------

Nueva

S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0,5
----	----	---	---	---	---	---	---	---	------

+

=



Veamos como queda la tabla:

		<i>Cj</i>	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variab le</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0,5
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0,5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	<i>Cj-Zj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

Una vez registrados los valores de toda la tabla, podemos calcular el valor de *Zj* y *Cj – Zj*.

<i>Fila</i>	<i>Cb</i>	<i>Solución</i>	<i>Cb * Solución</i>
1	0	16	0
2	0	20	0
3	0	12	0
4	20000	4	80000
<i>Zj</i>			80000

Sumatoria



Esta misma operación se efectúa para toda la tabla; es decir, cada columna deberá multiplicarse por **Cb**. Es recomendable utilizar otra tabla para registrar dichos valores. Al final, deberá sumar los valores de cada columna y totalizarlos en **Zj**. A esa tabla le llamaremos: *Tabla de productos de Cb*:



		Cj	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variab le	Solución	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	S2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	S3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20000	X4	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Zj	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Cj-Zj		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

El objetivo de esta tabla anterior es determinar los valores de **Zj** (*Sumatoria de columnas*) y **Cj-Zj** (*Diferencia entre la fila Cj y la fila Zj*), si ya los tenemos, podemos regresar a nuestra tabla de variables:



		C_j	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
C_b	Variab le	Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0,5
0	S_2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S_3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0,5
20000	X_4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	Z_j	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	$C_j - Z_j$		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

De esta manera se culmina la primera iteración, este paso se repetirá cuantas veces sea necesario y solo se dará por terminado el método según los siguientes criterios.

MAXIMIZAR

Cuando todos los $C_j - Z_j$
sean ≤ 0

MINIMIZAR

Cuando todos los $C_j - Z_j$
sean ≥ 0



- Continuamos con las iteraciones para lo cual tenemos que repetir los pasos anteriores.

		<i>Cj</i>	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variab le</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1	10	2	1	0	0	1	0	-0,5	-0,25
0	S2	14	2	2	0	0	0	1	-0,5	0,25
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0,5	-0,25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	200000	0	0	20000	20000	0	0	10000	0
	<i>CJ-Zj</i>		20000	20000	0	0	0	0	-10000	0

		<i>Cj</i>	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variab le</i>	<i>Solución</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>S4</i>
0	S1	3	1	0	0	0	1	-0,5	-0,25	-0,375
20000	X2	7	1	1	0	0	0	0,5	-0,25	0,125
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0,5	-0,25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	340000	20000	20000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	<i>CJ-Zj</i>		0	0	0	0	0	-10000	-5000	-2500



Veamos como queda la tabla:

En esta última iteración podemos observar que se cumple con la consigna $C_j - Z_j \leq 0$, para ejercicios cuya función objetivo sea «Maximizar», por ende hemos llegado a la respuesta óptima.

$$X_2 = 7$$

$$X_3 = 6$$

$$X_4 = 4$$

$S_1 = 3$ (Cantidad de piezas rectangulares de 8 pines sin utilizar =3)

Función Objetivo: \$ 340000

Sin embargo una vez finalizado el Método Simplex se debe observar una matriz identidad en el rectángulo determinado por las variables de decisión (líneas punteadas), el hecho de que en este caso no se muestre la matriz identidad significa que existe una solución óptima alterna.





		C_j	20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
C_b	Variab le	Solución	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	3	1	0	0	0	1	-0,5	-0,25	-0,375
20000	X_2	7	1	1	0	0	0	0,5	-0,25	0,125
20000	X_3	6	0	0	1	0	0	0	0,5	-0,25
20000	X_4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	Z_j	340000	20000	20000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	-10000	-5000	-2500

La manera de llegar a la otra solución consiste en alterar el orden en que cada una de las variables entró a la solución básica, recordemos que el proceso fue decidido al azar debido a la igualdad en el $C_j - Z_j$ del tabulado inicial. Aquí les presentamos una de las maneras de llegar a la otra solución.



	<i>Cj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variable Solución</i>	<i>Solución</i>	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4
0	S1	6	1	0	0,5	0	1	-0,5	0	-0,5
20000	X2	10	1	1	0,5	0	0	0,5	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0,5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	<i>280000</i>	<i>20000</i>	<i>20000</i>	<i>10000</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>10000</i>	<i>0</i>	<i>5000</i>
	<i>Cj - Zj</i>		<i>0</i>	<i>0</i>	<i>10000</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>-10000</i>	<i>0</i>	<i>-5000</i>

	<i>Cj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variable Solución</i>	<i>Solución</i>	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4
20000	X1	6	1	0	0,5	0	1	-0,5	0	-0,5
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0,5
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0,5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	<i>280000</i>	<i>0</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>20000</i>	<i>-20000</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>15000</i>
	<i>Cj - Zj</i>		<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>20000</i>	<i>-20000</i>	<i>0</i>	<i>-15000</i>

	<i>Cj</i>		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
<i>Cb</i>	<i>Variable Solución</i>	<i>Solución</i>	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4
20000	X1	3	1	0	0,5	0	1	-0,5	0	-0,5
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0,5
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0,5	-0,25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0,25
	<i>Zj</i>	<i>340000</i>	<i>20000</i>	<i>20000</i>	<i>30000</i>	<i>20000</i>	<i>0</i>	<i>10000</i>	<i>10000</i>	<i>0</i>
	<i>Cj - Zj</i>		<i>0</i>	<i>0</i>	<i>-10000</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>-10000</i>	<i>-10000</i>	<i>0</i>



Podemos observar como existe una solución óptima alternativa en la cual la combinación de variables es distinta y existe un menor consumo de recursos, dado que el hecho de que se encuentre la variable «S1» en la solución óptima con un coeficiente de «3» significa que se presenta una holgura de 3 unidades del recurso (pieza rectangular de 8 pines).

$X_1 = 3$ (Cantidad de mesas a producir = 3)

$X_2 = 4$ (Cantidad de sillas a producir = 4)

$X_3 = 6$ (Cantidad de camas a producir = 6)

$X_4 = 4$ (Cantidad de bibliotecas a producir = 4)

Con una utilidad de: \$ 340000



PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN CON EL MÉTODO SIMPLEX



Para resolver problemas de minimización mediante el algoritmo simplex existen dos procedimientos que se emplean con regularidad.

- El primero, que a mi juicio es el más recomendable se basa en un artificio aplicable al algoritmo fundamentado en la lógica matemática que dicta que «*para cualquier función $f(x)$, todo punto que minimice a $f(x)$ maximizará también a $-f(x)$* ». Por lo tanto el procedimiento a aplicar es multiplicar por el factor negativo (-1) a toda la función objetivo.

$$Z_{\text{MIN}} = X1 - 3X2$$

se reescribe

$$(-Z)_{\text{MAX}} = -X1 + 3X2$$





A continuación se resuelve el algoritmo como un problema de maximización.

- El segundo procedimiento, el cual pretende conservar la minimización consiste en aplicar los criterios de decisión que hemos esbozado con anterioridad, en los casos de la variable que entra, que sale y el caso en el que la solución óptima es encontrada. Aquí recordamos los procedimientos según el criterio dado el caso «minimizar».

Minimizar	
Variable que entra	La más negativa de los $(C_j - Z_j)$
Variable que sale	Siendo " b " los valores bajo la celda solución y " a " el valor correspondiente a la intersección entre " b " y la variable que entra. La más positiva de los " b/a ".
Solución Óptima	Cuando todos los $(C_j - Z_j)$ sean ≥ 0 .



INICIO RECESO



FIN DE RECESO





**FIN DE
GRABACIÓN**



INICIO RECURSO MULTIMEDIA

Para acceder a este video diríjase a la etiqueta de material de apoyo