
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Ecuaciones lineales:

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

es una ecuación diferencial lineal en la variable dependiente y

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ son funciones que dependen de x

Vamos a tratar de escribir la ED anterior de una forma más práctica. Tratáremos de dejar libre la derivada de y con respecto a x:

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{g(x)}{a_1(x)}}_{f(x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)}$$ → forma estandar de una ED lineal

Nota: Revisar si la ED es separable.

Ejemplos de ED lineales:

1) $$\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

voy a multiplicar cada término por $2x$

$$\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}\frac{dy}{dx} + 2xy = (2x)0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + 2xy = 0}$$

ED lineal escrita en forma estandar

2) $$\frac{dy}{dx} + y\cos x = y\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x - y\ln x = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + y(\cos x - \ln x) = 0}$$

3) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + y = x}$

Miremos si podemos solucionar las anteriores 3 ED:

1) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ → Será separable?

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$ → es separable

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx$$

$$\ln|y| = -\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + C_1$$

$$\boxed{y = Ce^{-x^2}}$$

$$\ln|y| = -x^2 + C_1$$

↑

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+C_1} \rightarrow y = e^{-x^2}e^{C_1}$$

2) $$\frac{dy}{dx} + y(\cos x - \ln x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y(\cos x - \ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x - \cos x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{y} = (\ln x - \cos x)\,dx} \rightarrow \text{Es separable}$$

3) $$\frac{dy}{dx} + y = x \rightarrow \text{no es separable.}$$

Método para solucionar ecuaciones diferenciales lineales:

Sea $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)$ una ED lineal

* Encontrar el factor integrante:

$$\underset{\text{mu}}{\mu(x)} = e^{\int p(x)\,dx}$$

* Multiplico en cada término de la ED lineal por el factor integrante:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x)$$

$$\underbrace{e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y}_{\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]} = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

* Integrando a ambos lados obtengo:

$$\int \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]dx = \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx$$

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx$$

Solución general de la ED lineal. ←

$$\boxed{y = \frac{\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx + C}{e^{\int P(x)dx}}}$$

Resumen:

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

i) Recuerde poner la ecuación lineal en la forma estándar

ii) Identifique de la identidad de la forma estándar $P(x)$ y después determine el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$. No se necesita utilizar una constante para evaluar la integral indefinida $\int P(x)dx$

iii) Multiplique la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y y:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

iv) Integre ambos lados de esta última ecuación y resuelva para y.

Ejemplo: $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$ Encontrar la solución

dividiendo la ED por x para obtener la forma estandar

$$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{4y}{x} = \frac{x^6e^x}{x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x}$$ → forma estandar.

Encontrando el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} \rightarrow \mu(x) = e^{-4\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\mu(x) = e^{-4\int \frac{dx}{x}}$$

$$= e^{-4\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x^{-4}|}$$

$\boxed{\mu(x) = x^{-4}}$ → factor integrante.

Multiplico por el factor integrante la forma estandar de la ED lineal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} - \mu(x)\frac{4}{x}y = \mu(x)x^5 e^x$$

$$\frac{1}{x^4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5}y = \frac{1}{x^4}x^5 e^x$$

$$\frac{1}{x^4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5}y = xe^x$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^{x}$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] dx = \int x e^{x}\, dx$$

$$x^{-4}y = \underbrace{\int xe^{x}dx}_{\text{Integrando por partes}}$$

ILATE

$$x^{-4}y = xe^{x} - \int e^{x} dx$$

$u = x$

$du = dx$

$dv = e^{x}$

$v = e^{x}$

$$x^{-4}y = xe^{x} - e^{x} + C$$

$$\frac{1}{x^{4}}y = xe^{x} - e^{x} + C$$

$$\boxed{y = x^{5}e^{x} - x^{4}e^{x} + x^{4}C}$$

Solución general de la ecuación diferencial.

Mezclas: Cuando se generan mezclas de fluidos y se relacionan las razones de cambio de entrada y de salida de estos fluidos en un tanque pueden aparecer ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en dichos sistemas.

Si tenemos 2 mezclas de agua con sal (salmuera) podemos hallar la razón de cambio de la mezcla como

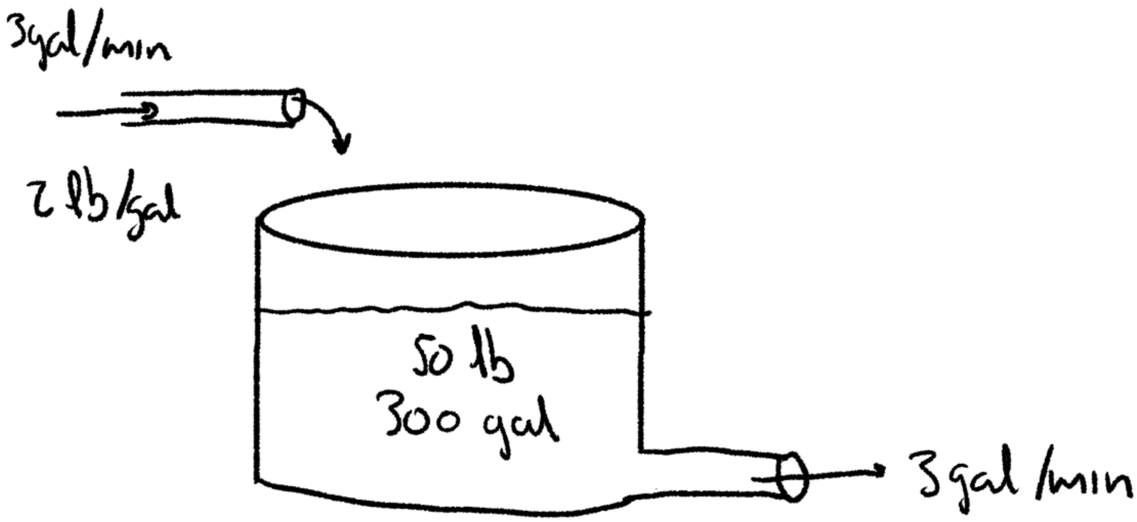
$$\frac{dA}{dt} = \left(\begin{array}{c}\text{razón de entrada de}\\ \text{sal}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{razón de salida}\\ \text{de sal}\end{array}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = R_{entra} - R_{sale}$$

A: Concentración de sal.

Supongamos que tenemos un tanque inicialmente con 300 galones de salmuera. Se bombea una solución a una velocidad de 3gal/min e ingresa a la solución original, y sale la solución mezclada a una razón de 3 gal/min

La concentración de la solución entrante es de 2 lb/gal. Si hay 50 lb de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿cuánta sal habrá en el tanque después de un periodo largo?



$$\frac{dA}{dt} = R_{entra} - R_{sale}$$

A: Concentración de sal.

R_{entra}: Cantidad de sal que entra por unidad de tiempo

R_{sale}: Cantidad de sal que sale por unidad de tiempo

$$R_{entra} = 2\,\frac{lb}{\cancel{gal}} \cdot 3\,\frac{\cancel{gal}}{min} \rightarrow R_{entra} = 6\,\frac{lb}{min}$$

$$R_{sale} = 3\frac{\cancel{gal}}{min} \cdot \frac{A}{300}\frac{lb}{\cancel{gal}}$$

$$R_{sale} = \frac{3A}{300}\frac{lb}{min}$$

$$R_{sale} = \frac{A}{100}\frac{lb}{min}$$

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 6}$$

→ Ecuación diferencial lineal en forma estandar.

Condición inicial: Cuando $t = 0$

$$A(0) = 50\ lb$$

Hallando el factor integrante: $p(t) = \frac{1}{100}$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{t}{100}}$$

Multiplicando el factor integrante por la ED:

$$e^{t/100}\frac{dA}{dt}+e^{t/100}\frac{1}{100}A=e^{t/100}\cdot 6$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/100}A\right]=e^{t/100}\cdot 6$$

Integrando a ambos lados

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{t/100}A\right]dt=\int 6e^{t/100}\,dt$$

$$e^{t/100}A=6\int e^{t/100}\,dt$$

$u=\frac{t}{100}$

$$Ae^{t/100}=6\int e^{u}\,100\,du$$

$du=\frac{dt}{100}$

$100\,du=dt$

$$Ae^{t/100}=600\int e^{u}\,du$$

$$Ae^{t/100}=600e^{t/100}+C$$

$$Ae^{t/100} = 600e^{t/100} + C$$

$$A = \frac{600\cancel{e^{t/100}}}{\cancel{e^{t/100}}} + \frac{C}{e^{t/100}}$$

$$\boxed{A(t) = 600 + Ce^{-t/100}}$$

→ solución general.

Debemos encontrar el valor de C con la condición inicial : $t=0 \rightarrow A(0)=50$

$$A(0) = 600 + Ce^{-0/100}$$

$$50 = 600 + C$$

$$50 - 600 = C \rightarrow C = -550$$

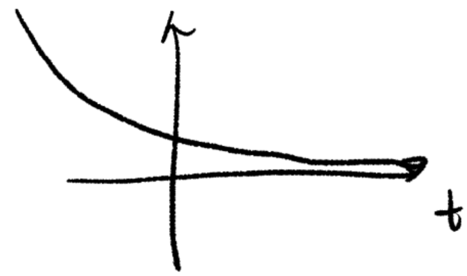
La solución general toma la forma particular:

$$\boxed{A(t) = 600 - 550e^{-t/100}}$$

→ solución particular del problema.

En un tiempo muy largo cuánta concentración de sal habrá?

cuando $t \to \infty$



$$A = 600 - 550e^{-\infty/100}$$

$\boxed{A = 600}$ → Cuando el tiempo es muy largo la concentración de sal es de 600 lb

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
SANJOSÉ
INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

FIN DE
GRABACIÓN