
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Continuación del problema anterior

$$\left[3(K/\rho)v - g\left(3(K/\rho)t\right) - r_0\right]dt + \left[3(K/\rho)t + r_0\right]dv = 0$$

$$M(t,v) = 3(K/\rho)v - g(3(K/\rho)t) - r_0$$

$$N(t,v) = 3(K/\rho)t + r_0$$

Método de solución:

1) $$\frac{\partial M}{\partial v} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{3K}{\rho} = \frac{3K}{\rho} \rightarrow \text{Es ED exacta.}$$

2) $$\frac{\partial f(t,v)}{\partial t} = M(t,v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3(K/\rho)v - 3gt(K/\rho) + r_0$$

Integrando esta ecuación:

$$\int \partial f = \int \left[3(K/\rho)v - 3gt(K/\rho) + r_0\right]dt$$

$$\int df = \int \left[\frac{3K}{\rho} V - \frac{3gKt}{\rho} + r_0 \right] dt$$

$$f(t,V) = \int \frac{3K}{\rho} V\, dt - \int \frac{3gK}{\rho} t\, dt + \int r_0\, dt$$

$$f(t,V) = \frac{3KV}{\rho} t - \frac{3gK}{\rho} \frac{t^2}{2} + r_0 t + g(V)$$

4) Derivo $f(t,V)$ con respecto a V y reconozco que $\frac{\partial f}{\partial V} = N(t,V)$

$$\frac{\partial f(t,V)}{\partial V} = \frac{3Kt}{\rho} + \frac{\partial g}{\partial V}$$

$$N(t,V) = \frac{3Kt}{\rho} + \frac{\partial g}{\partial V}$$

$$\cancel{\frac{3Kt}{\rho}} + r_0 = \cancel{\frac{3Kt}{\rho}} + \frac{\partial g}{\partial V}$$

$$\frac{\partial g}{\partial V} = r_0$$

$$\frac{\partial g}{\partial V} = r_0$$

Integrando esta última ecuación:

$$\int \partial g = \int r_0 \, dV$$

$$g(v) = r_0 V$$

reemplazo en la función $f(t, v)$:

$$f(t,v) = \frac{3KV}{\rho} t - \frac{3gK}{\rho} \frac{t^2}{2} + r_0 t + r_0 V$$

$$\frac{3Kt}{\rho} V - \frac{3gK}{2\rho} t^2 + r_0 t + r_0 V = C$$

$$\frac{3Kt}{\rho} V + r_0 V = \frac{3gK}{2\rho} t^2 - r_0 t + C$$

$$V \left(\frac{3Kt}{\rho} + r_0 \right) = \frac{3gK}{2\rho} t^2 - r_0 t + C$$

$$V\left(\frac{3Kt}{\rho}+r_0\right)=\frac{3Kg}{2\rho}t^2-r_0t+C$$

$$\boxed{V(t)=\frac{(3Kg/2\rho)t^2-r_0t+C}{\frac{3Kt}{\rho}+r_0}}$$

Cual sería la solución si la gota cae del reposo:

$$\frac{dV}{dt}+\frac{3(K/\rho)}{3(K/\rho)+r_0}V=g \qquad V(0)=0$$

$$V(\cancel{0})^{\to 0}=\frac{(3Kg/\cancel{2\rho})^{\to 0}\,0^2-\cancel{r_0\,0}^{\to 0}+C}{\cancel{\frac{3K0}{\rho}}^{\to 0}+r_0}$$

$$0=\frac{C}{r_0}\quad\rightarrow\quad C=0$$

Solución particular cuando $V(0)=0$

$$\boxed{V(t)=\frac{(3Kg/2\rho)t^2-r_0t}{\frac{3Kt}{\rho}+r_0}}$$

Ecuaciones Diferenciales Exactas Homogéneas:

Una ecuación f es homogénea si se puede escribir de la forma $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x,y)$ para cualquier número α.

Ejemplo: $f(x,y) = x^4 + y^4$

$$f(tx, ty) = (tx)^4 + (ty)^4$$

$$= t^4 x^4 + t^4 y^4$$

$$= t^4 (x^4 + y^4)$$

$$\boxed{f(tx, ty) = t^4 f(x,y)} \rightarrow \text{Ecuación homogénea}$$

$f(x,y)$ es homogénea de grado 4

Una función no homogénea es por ejemplo

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + 1$$

$$= t^2 x^2 + t^2 y^2 + 1$$

$$f(tx,ty) = t^2 (x^2+y^2) + 1$$

$\downarrow$

no homogénea

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Se dice que es homogénea si ambas funciones:

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas y del mismo grado.

Nota: En este caso homogéneo no significa lo mismo que en las ecuaciones diferenciales lineales. Recordemos que una ED de primer orden es homogénea sí: $a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$

$$M(tx,ty) = t^{\alpha} M(x,y) \quad y \quad N(tx,ty) = t^{\alpha} N(x,y)$$

Si son homogéneas deben cumplir además que son del mismo grado.

Ejemplo: Sea la Ecuación diferencial:

$$(x^2+y^2)\,dx + (x^2-xy)\,dy = 0$$

Revisemos si es exacta:

$$M(x,y) = x^2+y^2 \qquad ; \quad N(x,y) = x^2-xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2y \stackrel{?}{=} 2x - y \rightarrow \text{No es exacta}$$

Revisemos si es homogénea:

$M(x,y) = x^2+y^2$	$N(x,y) = x^2 - xy$
$M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2$	$N(tx,ty) = (tx)^2 - (tx)(ty)$
$= t^2x^2 + t^2y^2$	$= t^2x^2 - t^2xy$
$= t^2(x^2+y^2)$	$= t^2(x^2-xy)$
$M(tx,ty) = t^2\, M(x,y)$	$N(tx,ty) = t^2\, N(x,y)$

Es una ED homogénea pues sus funciones M y N son homogéneas y del mismo grado 2.

Método de solución:

1) Haciendo la sustitución $y = ux \rightarrow dy = u\,dx + x\,du$

2) Reemplazo en la ED:

$$(x^2+y^2)\,dx + (x^2-xy)\,dy = 0$$

$$(x^2+u^2x^2)\,dx + (x^2 - x\,ux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^2+u^2x^2)\,dx + (x^2 - x^2u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^2+u^2x^2)\,dx + x^2(1-u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^2+u^2x^2)\,dx + x^2(1-u)\,u\,dx + x^2(1-u)\,x\,du = 0$$

$$x^2\,dx + \cancel{u^2x^2\,dx} + x^2u\,dx \cancel{-x^2u^2\,dx} + x^3\,du - x^3u\,du = 0$$

$$x^2\,dx + x^2u\,dx + x^3\,du - x^3u\,du = 0$$

$$x^2(1+u)\,dx + x^3(1-u)\,du = 0$$

3) $$x^3(1-u)\,du = -x^2(1+u)\,dx$$

Solucionar por cualquiera de los métodos conocidos SV, EL, EE

$x^3(1-u)\,du = -x^2(1+u)\,dx$ Solucionar por SV

$$\frac{1-u}{1+u}\,du = \frac{-x^2}{x^3}\,dx$$

Integro a ambos lados

$$\int \frac{1-u}{1+u}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+u}\,du - \int \frac{u}{1+u}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|1+u| - \underbrace{\int \frac{u}{1+u}\,du}_{1} = -\ln|x| + C$$

1. Vamos a utilizar división de polinomios

$$\begin{array}{r|l} u & u+1 \\ \cline{2-2} -u-1 & 1 \\ \hline 0\ -1 & \end{array}$$

$u = (u+1)(1) - 1$

$u = u+1 - 1$

$$\int \frac{u}{1+u}\,du = \int \frac{u+1-1}{u+1}\,du$$

$$= \int \frac{u+1}{u+1}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$\int \frac{u}{1+u}\,du = u - \ln|1+u|$$

$$\ln|1+u| - \left(u - \ln|1+u|\right) = -\ln|x| + C$$

$$\ln|1+u| - u + \ln|1+u| = -\ln|x| + C$$

$y = ux$

$$2\ln|1+u| - u = -\ln|x| + C$$

$\frac{y}{x} = u$

$$2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} = -\ln|x| + C$$

$$2\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| - \frac{y}{x} = -\ln|x| + C$$

$$2\ln|x+y| - \cancel{2\ln|x|} - \frac{y}{x} = -\cancel{\ln|x|} + \ln C_1$$

$$\ln\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] - \ln C_1 = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] - \ln c_1 = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left[\frac{(x+y)^2}{x c_1}\right] = \frac{y}{x}$$

$$e^{\ln\left[\frac{(x+y)^2}{x c_1}\right]} = e^{y/x}$$

$$\frac{(x+y)^2}{x c_1} = e^{y/x}$$

$$\boxed{(x+y)^2 = x c_1 e^{y/x}}$$

→ Solución a la ED.

FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
SANJOSÉ
INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA

FIN DE
GRABACIÓN