
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

11 – 15 de abril de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR:

Ecuacion Lineales:

Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n se puede escribir como:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

En la parte restante del curso nos dedicaremos al estudio de este tipo de ecuaciones.

Recordemos también que un problema de valores iniciales tendra asociado a su E.D un total de n condiciones iniciales:

$$y(x_0) = \lambda_0 \,,\quad y'(x_0) = \lambda_1 \,,\ \dots \,,\ y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_{n-1}$$

Condiciones Iniciales.

> Problemas con valores en la frontera.

Existe otro tipo de condiciones adicionales, que son conocidas como condiciones de frontera. En este caso además de la ED. de orden n se tendrá un conjunto de n condiciones sobre la variable dependiente o sobre sus derivadas en los puntos $x = x_0$ y $x = x_f$.

Ejemplo: Una ecuación de orden 2 de la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

puede tener la condiciones:

1) $y(x_0) = \lambda_1 \qquad y(x_f) = \lambda_2$

ó

2) $y'(x_0) = \mu_1 \qquad y'(x_f) = \mu_2$

NOTA: La solución a un problema de valores iniciales o a un problema con valores en la frontera es UNICA.

> Principio de superposición:

Si se tiene una ecuación lineal de orden n homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y(x) = 0$$

tendra n familias de soluciones: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Una superposición de estás soluciones:

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \dots + C_n\, y_n(x)$$

será también una solución a la E.D.

> MÉTODOS DE SOLUCIÓN DIRECTOS O SENCILLOS:

>> Ecuaciones inmediatamente integrables:

Este método es util cuando puedo integrar directamente la E.D. esto es cuando la ecuación tiene la forma

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f(x)}$$

Ejemplo: Resolver $y^{(4)} = x$, con condiciones iniciales

$$y(0)=0\ ,\quad y'(0)=1\ ,\quad y''(0)=0 \quad y \quad y'''(0)=0$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = x$$

Integrando se tiene: $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = \displaystyle\int x\, dx$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Repetimos el proceso: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) = \dfrac{x^2}{2} + C_1$

Integrando se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{2.3} + C_1 x + C_2$$

Una vez mas integramos y se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \int\left(\frac{x^3}{2.3} + C_1 x + C_2\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{2.3.4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Una integración más permitirá encontrar y:

$$y(x) = \int\left(\frac{x^4}{2.3.4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)dx$$

$$y(x) = \frac{x^5}{2.3.4.5} + C_1\frac{x^3}{2.3} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Finalmente se deben usar las condiciones iniciales para determinar C_1, C_2, C_3 y C_4. Para esto escribamos lo obtenido hasta ahora:

$$y'''(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y''(x) = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$y'(x) = \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y(x) = \frac{x^5}{120} + C_1\frac{x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Con las condiciones iniciales tenemos

$$y(0) = 0 = \cancel{\frac{0^5}{120}} + \cancel{C_1\frac{0^3}{6}} + \cancel{\frac{C_2 0^2}{2}} + \cancel{C_3 0} + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$y'(0) = 1 = \cancel{0^4/24} + \cancel{C_1 0^2/2} + \cancel{C_2 0} + C_3 \Rightarrow C_3 = 1$$

$$y''(0)=0=\cancel{\frac{0^3}{6}}+\cancel{C_1 0}+C_2 \Longrightarrow C_2=0$$

$$y'''(0)=0=\cancel{\frac{0^2}{2}}+C_1 \Longrightarrow C_1=0$$

Con lo cual la solución queda como

$$y(x)=\frac{x^5}{120}+\cancel{C_1}\frac{x^3}{6}+\cancel{C_2}\frac{x^2}{2}+\cancel{C_3}^{\,1}x+\cancel{C_4}$$

$$\boxed{y(x)=\frac{x^5}{120}+x}$$

>> Ecuaciones con variables ausentes.

Cuando en la ecuación una de las variables y ó x están ausentes en la ecuación, es posible hacer sustituciones que reduzcan el orden de la ecuación

>>> Cuándo y está ausente:

Se reduce el orden de la ecuación haciendo el cambio de variable $y'=v$.

Ejemplo: $xy''+y'=4x$

Vemos que la variable y no está en la ecuación, luego podemos hacer la redución usando la sustitución

$$y'=v$$

Lo cual también conduce a:

$$y''=(y')'=v'$$

Con esto la ecuación se convierte en:

$$xv'+v=4x \longrightarrow \text{E.D. lineal de Orden 1}$$

La cuál se soluciona usando la técnica de solución para E.D. lineales de Orden 1, para eso se pone en la forma estandar $v'+\frac{v}{x}=4$

Calculamos el factor integrante.

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln(x)} = x$$

Con lo cual obtenemos.

$$\frac{d}{dx}(\mu v) = 4\mu(x)$$

$$\frac{d}{dx}(xv) = 4x$$

Integrando tendremos: $xv = \int 4x\,dx + C_1$

$$xv = 4\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$v = 2x + \frac{C_1}{x}$$

Finalmente, recordamos que $v = y'$, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{C_1}{x}$$

Con lo cual: $y = \int \left(2x + \frac{C_1}{x}\right) dx + C_2$

$$\boxed{y = x^2 + C_1 \ln(x) + C_2}$$

>> Cuando x es la variable ausente

En este caso se puede hacer la redución mediante el cambio de variable:

$$y' = \frac{dy}{dx} = v$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} v$$

Ejemplo: $y'' + y = 0$

En este caso se tiene que no aparece la variable x luego hacemos $y' = v$

Con lo cual se tiene:

$$v' + y = 0$$

Adicionalmente, cambiamos la variable independiente x por y:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$v' = \frac{dv}{dy} \cdot v$$

Con lo que se obtiene la ecuación

$$\boxed{v\frac{dv}{dy} + y = 0}$$

Variable dependiente v

variable indep. y.

E.D. de Orden 1

Es una ecuación separable luego podemos hacer:

$$v\,dv + y\,dy = 0$$

$$v\,dv = -y\,dy$$

$$\int v\,dv = -\int y\,dy + C_1$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

$$v^2 = -y^2 + 2C_1$$

llamemos $2C_1 = k_1^2$

$$v = \sqrt{k_1^2 - y^2}$$

Con lo cual obtenemos la variable v en términos de y, ahora debemos recordar que $v = \frac{dy}{dx}$, con lo cual se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{k_1^2 - y^2}$$

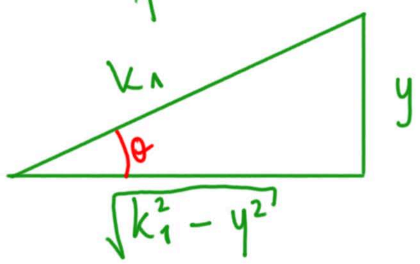
$$\frac{dy}{\sqrt{k_1^2 - y^2}} = dx$$

Integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{k_1^2 - y^2}} = \int dx + C_2.$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{k_1^2 - y^2}} = x + C_2$$

Para hacer la integral en y se debe hacer una sustitución trigonometrica, para lo que se debe proponer el siguiente triángulo.



Podemos relacionar el ángulo θ del triángulo con sus lados tenemos $\sin\theta = \frac{y}{k_1}$

Por lo cual hacemos la sustitución:

$$y = k_1 \sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = k_1 \cos\theta \rightarrow dy = k_1 \cos\theta \, d\theta$$

y la integral se vuelve:

$$\int \frac{k_1 \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{k_1^2 - (k_1 \sin\theta)^2}} = \int \frac{k_1 \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{k_1^2 (1 - \sin^2\theta)}} = \int \frac{\cancel{k_1} \cos\theta \, d\theta}{\cancel{k_1} \sqrt{\cos^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta$$

Esto resulta con

$$\int \frac{dy}{\sqrt{k_1^2 - y^2}} = \int d\theta = \theta = \arcsin(y/k_1)$$

$\sin\theta = y/k_1$

$\theta = \arcsin(y/k_1)$

Con el resultado de dicha integral se tiene:

$$\arcsin\left(\frac{y}{k_1}\right) = x + C_2$$

Las funciones seno y arcoseno son funciones inversas una de la otra, por tanto:

$$\sin\left[\arcsin\left(\frac{y}{k_1}\right)\right] = \frac{y}{k_1}$$

Es decir que si tomamos el sin( ) a toda la ecuación obtenemos

$$\sin\left[\arcsin\left(y/k_1\right)\right] = \sin\left(x + C_2\right)$$

$$\frac{y}{k_1} = \sin\left(x + C_2\right)$$

$$\boxed{y = k_1 \sin\left(x + C_2\right)} \rightarrow \text{Solución}$$

Usando la identidad trigonométrica de suma de ángulos se puede rescribir la solución como

$$y = k_1\left[\sin(x)\cos(C_2) + \sin(C_2)\cos(x)\right]$$

$$y = k_1 \cos(C_2) \sin(x) + k_1 \sin(C_2) \cos(x)$$

Llamemos $k_1 \cos(C_2) = A$ y $k_1 \sin(C_2) = B$

$$\boxed{y = A \sin(x) + B \cos(x)} \rightarrow \text{Solución}$$


FUNDACIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR
SANJOSÉ
INSTITUCIÓN TECNOLÓGICA
FIN DE
GRABACIÓN