
INICIO
GRABACIÓN

APUNTES DE CLASE

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Muchas gracias por la colaboración de todos ustedes!!
Profesor: Diego Felipe Muñoz Arboleda

Problemas de valor inicial: En la solución de problemas reales que involucran ecuaciones diferenciales, los PVI son aquellos donde la solución de la ED está sujeta a una condición inicial lo que me permite obtener una solución particular.

Una subclasificación de las ecuaciones diferenciales:
Una EDO en la que la variable independiente no aparece explícitamente se conoce como ecuación diferencial autónoma.

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = 1+y^2}_{\text{autónoma porque } x \text{ no aparece explícitamente}} \quad ; \quad \underbrace{\frac{dy}{dx} = -3xy}_{\text{no autónoma.}}$$

Primer método de solución de EDO:

Variables separables: Como su nombre lo indica es un método que se puede utilizar cuando en la EDO puedo despejar la variable dependiente y su diferencial a un lado de la ecuación y la variable independiente y su diferencial al otro lado de la ecuación.

Este método sirve para ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden separar.

Una EDO de primer orden que se puede escribir como:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)}$$

Se conoce como ecuación diferencial separable.

Ejemplos: Comprobemos si las siguientes ED se pueden separar:

* $$\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x} e^{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{h(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$\downarrow$

Ecuación Diferencial de primer orden separable

* $$\underbrace{\frac{dx}{dt} = x + \sin t}$$

EDO de primer orden NO - separable

Método de solución:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx \qquad \frac{1}{h(y)} = P(y)$$

$$P(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Integrando a ambos lados de la ecuación:

$$\int P(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$P(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

$$\boxed{P(y) = G(x) + C}$$ → Solución de la ED de primer orden separable

Esta solución puede ser implícita o puede despejarse y en términos de x (en caso de que sea posible)

Ejemplo: Sea la ED: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1+x}$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$h(y) = y$

$g(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Ecuación diferencial separada. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

Integrando para encontrar la solución:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\boxed{\ln|y| = \ln|1+x| + C_1}$$ → Solución implícita

Despejando y de la ecuación:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|1+x| + C_1}$$

$$y = e^{\ln|1+x|} e^{C_1}$$

$$\boxed{y = C(1+x)}$$ → Solución explícita de la EDO

Esta es una familia de soluciones para la ED dada pues cada valor que tome C es una solución particular.

Modelamiento de sistemas mediante Ecuaciones Diferenciales de primer orden separables:

Crecimiento de Bacterias:

Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1$ h se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

Solución: Vamos a hallar $P(t)$

Condiciones iniciales:

Cuando $t=0$ $\quad P(0)=P_0 \quad ; \quad t=1 \rightarrow P(1)=\frac{3}{2}P_0$

$$\underbrace{\frac{dP}{dt} \propto P}_{\text{proporcionalidad}} \rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt}=KP} \rightarrow \text{Ecuación Diferencial.}$$

donde K es una constante de proporcionalidad

Utilizando el método de variables separables:

$$\frac{dP}{dt} = kP \rightarrow \frac{dP}{P} = k\,dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = k\int dt$$

$$\ln|P| = kt + C_1$$

introduciendo la exponencial a ambos lados de la ED:

$$e^{\ln|P|} = e^{kt + C_1}$$

$$P(t) = e^{kt} e^{C_1}$$

$$\boxed{P(t) = C e^{kt}}$$ → Solución de la Ecuación diferencial.

Utilizando las condiciones iniciales para encontrar una solución particular (encontrar los valores de C y k):

$t=0 \to P(0)=P_0$; $t=1 \to P(1)=\frac{3}{2}P_0$

$P(t)=ce^{kt}$ $\to$ $P(t)=P_0e^{kt}$

$P(0)=ce^{k\cdot 0}$ $P(1)=P_0e^{k}$

$P_0=ce^{0}$ $\frac{3}{2}\cancel{P_0}=\cancel{P_0}e^{k}$

$\boxed{P_0=c}$

$\frac{3}{2}=e^{k} \to \ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln e^{k}$

$k=\ln\left(\frac{3}{2}\right) \to k\approx 0{,}405$

Entonces la solución particular para nuestras condiciones iniciales dadas es:

$\boxed{P(t)=P_0e^{0{,}405t}}$ → Solución particular de la ED

Cual es el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias

$3\cancel{P_0}=\cancel{P_0}e^{0{,}405t} \to 3=e^{0{,}405t}$

$$3 = e^{0,405t} \rightarrow \ln 3 = \ln e^{0,405t}$$

$$\ln 3 = 0,405t$$

$$\frac{\ln 3}{0,405} = t \rightarrow \boxed{t = 2,71\,h}$$

R/: Se necesitan 2,71 horas aprox para que la cantidad de bacterias se triplique.

Receta para resolver problemas:

1) Leer bien el problema
2) Identificar los parámetros que da el problema, las variables y lo que pide solucionar
3) Hacer un dibujo que sirva para comprender el problema
4) Identifico la ecuación que sirve para resolver el problema.
5) Solucionar el problema.


SANJOSÉ
FIN DE
GRABACIÓN