APUNTES DE CLASE

21 – 25 de marzo de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Consideremos la ecuación: $f(x,y) = C$

El diferencial de la función $f(x,y)$ es:

$$d(f(x,y)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot dy$$

$$d(f(x,y)) = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$$

Es decir que si miramos el diferencial de la ecuación inicial tendremos

$$d(f(x,y)) = d(c)$$

$$\boxed{M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0}$$

Son este tipo de ecuaciones que estaremos interesados en resolver.

Ejemplo:

- $f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$$d(f(x,y)) = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} dy = 0$$

$$2x\, dx + 2y\, dy = 0$$

$$x\, dx + y\, dy = 0$$

tambien puede ser escrita como $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

- $f(x,y) = xy = 2.$

$$d(f(x,y)) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xy)}{\partial y} dy = 0$$

$$y\, dx + x\, dy = 0$$

tambien puede ser escrita como: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

> **Definición:** Una E.D. de la forma $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ puede ser escrita

Como:

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$$

Esta ecuación sera una ecuación exacta si el lado izquierdo de la ecuación proviene de la diferencial de una función $f(x,y)$.

En dicho caso se cumple que:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$ → Criterio para saber si la E.D. es exacta.

Ejemplos:

① $x\,dx + y\,dy = 0$

$M(x,y) = x$ $\qquad$ $N(x,y) = y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

② $y\,dx + x\,dy = 0$

$M(x,y) = y$ $\qquad$ $N(x,y) = x$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

③ $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$

$M(x,y) = x^2y^3$ $\qquad$ $N(x,y) = x^3y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

> Método de solución:

① Verificar que es una ecuación Exacta:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

se cumple: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$?

② Si se cumple entoces existira una función $f(x,y)$ que cumpla:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

Que podemos integrar respecto a x

constante de integración (constante respecto a "x")

$$f(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

③ Derivamos a $f(x,y)$ respecto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right] + \frac{\partial}{\partial y} g(y)$$

Recordemos que $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ por lo cual:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right] + \frac{\partial}{\partial y} g(y) = N(x,y)$$

Con lo cual: $\dfrac{\partial}{\partial y} g(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right]$

④ Ahora integramos respecto a y esta última expresión para obtener $g(y)$

$$g(y) = \int N(x,y)\,dy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right] dy$$

⑤ Finalmente expresamos

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

Luego, la solución implícita será: $f(x,y) = C$

$$\int M(x,y)\,dx + g(y) = C$$

Ejemplo: Resolver la E.D.: $2xy\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$

① $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$?

$M = 2xy$ $\qquad\qquad$ $N = x^2-1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

② $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2xy \longrightarrow$

Integramos: $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$

$= \int 2xy\,dx + g(y)$

$f(x,y) = yx^2 + g(y)$

$$\int 2xy\,dx = 2y\int x\,dx = 2y\frac{x^2}{2} = yx^2$$

③ Derivamos respecto a y:

- $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = N(x,y) = x^2-1$
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) + \frac{\partial}{\partial y} g(y) = x^2 + \frac{d}{dy} g(y)$

Luego $\quad x^2-1 = x^2 + \frac{d}{dy} g(y) \Rightarrow \frac{d\,g(y)}{dy} = -1$

④ Integramos respecto a y:

$g(y) = \int \frac{d}{dy} g(y)\,dy = \int (-1)\,dy = -\int dy = -y$

$g(y) = -y$

⑤ Finalmente: $f(x,y) = yx^2 + g(y) = yx^2 - y$

$\boxed{f(x,y) = y(x^2-1)}$

Solución implícita de la ecuación diferencial: $\boxed{y(x^2-1) = C}$

Solución explicita: $\boxed{y = \frac{C}{x^2-1}}$

Ejemplo: Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos(xy) - e^{2y}}{2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y}$

$$\left[2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right] dy = \left[y\cos(xy) - e^{2y}\right] dx$$

$$\left[2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right] dy + \left[e^{2y} - y\cos(xy)\right] dx = 0$$

1. $M(x,y) = e^{2y} - y\cos(xy)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right) = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)$$

$N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} - \left(\cos(xy) - yx\sin(xy)\right) = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \text{la E.D. es exacta!}$$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$

Integrando se tiene

$$f(x,y) = \int M(x,y)\, dx + g(y)$$

$$= \int \left(e^{2y} - y\cos(xy)\right) dx + g(y)$$

$$= xe^{2y} - \sin(xy) + g(y)$$

$$\int\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx = e^{2y}\int dx - y\int \cos(yx)\, dx$$

$$= e^{2y}x - y\left(\frac{\sin(yx)}{y}\right)$$

$$= xe^{2y} - \sin(xy)$$

3. Derivar respecto a "y":

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{2y} - \sin(xy) + g(y)\right)$$

$$= x\,2e^{2y} - x\cos(xy) + \frac{d\,g(y)}{dy}$$

$$\cancel{2xe^{2y}} - \cancel{x\cos(xy)} + 2y = \cancel{2xe^{2y}} - \cancel{x\cos(xy)} + \frac{d\,g(y)}{dy}$$

$$2y = \frac{dg}{dy}$$

④ Integramos $g'(y)$ respecto a y

$$g(y) = \int \frac{\partial g}{\partial y}\, dy = \int 2y\, dy = 2\int y\, dy = 2\frac{y^2}{2} = y^2$$

⑤ $f(x,y) = x e^{2y} - \sin(xy) + g(y)$

$$f(x,y) = x e^{2y} - \sin(xy) + y^2$$

La solución implícita será: $f(x,y) = C$

es decir $\quad x e^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C$