Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas
Ecuaciones Diferenciales
Ejercicios Semana 02

Ejercicios Integración

28 de febrero – 4 de marzo de 2022

- Estas notas de clase son las realizadas en los encuentros sincrónicos.
- Cada vez que se realice un nuevo encuentro el documento se irá retroalimentando.
- Si encuentran algún error por favor háganmelo saber para ir mejorando el documento.
- En algunos casos el documento tendrá información extra que sirva como complemento.

Profesor: Erik Petrovish Navarro Barón

> Solución de Ejercicios de Integración.

1] $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ → Método de sustitución.

Hacemos la sustitución $u = 2x+1$, con lo cual el diferencial que obtenemos es:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+1) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \longrightarrow du = 2\,dx \rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

Por propiedades de las potencias $\sqrt{u} = u^{1/2}$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3}u^{3/2}$$

Finalmente volvemos a la variable original:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}u^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}}$$

2] $\int \ln(x)\,dx$ → Método de integración por partes.

Escogemos
$u = \ln(x)$
$dv = dx$

Con esto debemos hallar du y v, así:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$v = \int dv = \int dx = 1x = x$$

Por tanto, tenemos:

$u = \ln(x)$ $\qquad du = \frac{dx}{x}$

$v = x$ $\qquad dv = dx$

Con esto la integral queda expresada como

$$\int \ln(x)\,dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du = x\ln(x) - \underbrace{\int \cancel{x}\,\frac{dx}{\cancel{x}}}_{\int dx = x} = \boxed{x\ln(x) - x}$$

3) $\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx \rightarrow$ Propiedad de la suma:

Como tenemos una suma de funciones, separamos la integral en la suma de dos integrales:

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx = \int 10x^4\, dx - \int 2\sec^2 x\, dx$$

Las constantes 10 y 2 pueden salir de las integrales:

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx = 10 \int x^4 dx - 2 \int \sec^2 x\, dx$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \qquad \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx = 10\, \frac{x^5}{5} - 2\tan x = \boxed{2x^5 - 2\tan x}$$

4) $\int t^2 e^t\, dt \longrightarrow$ Integración por partes (dos veces)

Hacemos: $u = t^2$, $dv = e^t dt$ $\xrightarrow{\text{Luego:}}$ $du/dt = \frac{dt^2}{dt} = 2t \rightarrow du = 2t\,dt$

$v = \int dv = \int e^t dt = e^t$

Con lo que nos queda:

$$\int t^2 e^t dt = \int u\,dv = u.v - \int v\,du = t^2 e^t - \int e^t \cdot 2t\,dt$$

$$= t^2 e^t - 2\int t e^t\, dt$$

Ahora solo nos queda evaluar $\int t e^t dt$ para lo cual se hace una vez más partes; en esta ocasión escogemos: $u = t$ $dv = e^t dt$

Con lo cual: $\frac{du}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1 \rightarrow du = dt$

$v = \int e^t dt = e^t$

Esto nos da: $\int t e^t dt = \int u\,dv = uv - \int v\,du = te^t - \int e^t dt$

$= te^t - e^t$

Finalmente: $\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2(te^t - e^t) = \boxed{t^2 e^t - 2te^t + 2e^t}$