Задача 1.11
Доказать, что для того, чтобы для $\forall f(x) \in C[a,b]$, и любого набора узлов $\{x_i : i \in [0..n], x_i \in [a,b]\}$ таких, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, существовал и был единственным обобщённый интерполяционный многочлен

$$\tau(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы система функций $\varphi_i(x)$, $i = [0..n]$ являлась системой Чебышёва на $[a,b]$ [3]. $\square$

Возьмём следующие интерполяционные условия:

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \tau_i(x_j) = \tau(x_j); \; j = 0, 1, \dots, n.$$

Интерполяционные условия представляют собой СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов c_i; $i = 0 \dots n$. Данная система имеет решение при любых правых частях тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля, т.е.:

$$D = \begin{vmatrix} \tau_0(x_0) & \dots & \tau_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_0(x_n) & \dots & \tau_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Чтобы доказать необходимость допустим противное: $D \neq 0$ при любых наборах попарно неравных узлов на $[a;b]$, а система функций $\{\tau_i(x)\}_{i=0}^{n}$ **не** является системой Чебышёва на этом отрезке.

Тогда существует нетривиальный обобщенный многочлен

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \tau_i(x)$$

который обращается в нуль на $[a;b]$ более чем в n точках. Возьмём $n+1$ из этих точек в качестве узлов x_j: $j = 0, 1 \dots, n$, из чего следует что:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \tau_i(x_j) = 0; \; j = 0 \dots n$$

Это означает, что столбцы определителя линейнозависимы и $D = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность: Допустим что система $\{\tau_i(x)\}_{i=0}^{n}$ является системой Чебышёва на $[a,b]$, а $D = 0$ при некотором наборе попарно неравных узлов x_j: $j = 0, \dots, n$ на этом отрезке. Следовательно столбцы определителя линейно зависимы, что значит что нетривиальный обобщенный многочлен обращается в нуль на $[a,b]$ более, чем в n точках, т.е. система не является системой Чебышёва.