Мироненко И. А.
РК6-56Б

Задача 1.1

Требуется:

1. *доказать, что определенный интеграл* $\int\limits_0^1 x^n e^{x-1}\,dx$ *можно представить в виде рекуррентного соотношения*

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \tag{1}$$

и вывести начальное условие I_0.

2. *доказать, что решение для* I_n *имеет следующий вид:*

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n! I_0. \tag{2}$$

3. *используя формулу Стирлинга* $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, *доказать, что рекуррентное соотношение (1) является вычислительно неустойчивым.*

Решение:

Занесем экспоненту под знак дифференциала $\int\limits_0^1 x^n\,d(e^{x-1})$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu, \text{ где } u = x^n,\ dv = d(e^{x-1}),\ du = nx^{n-1}, v = e^{x-1}.$$

Получим:

$$\int\limits_0^1 x^n\,d(e^{x-1}) = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 nx^{n-1}e^{x-1}\,dx ==$$

$$1^n e^{1-1} - 0^n e^{0-1} - \int\limits_0^1 nx^{n-1}e^{x-1}\,dx = 1 - n\int\limits_0^1 x^{n-1}e^{x-1}\,dx.$$

Заметим, что $\int\limits_0^1 x^{n-1}e^{x-1}\,dx = I_{n-1}$. Подставим I_{n-1} в выражение выше, тогда получим $I_n = 1 - nI_{n-1}$, ч. т. д. п1.

Выведем начальное условие $I_0 = \int\limits_0^1 x^0 e^{x-1}\,dx = \int\limits_0^1 e^{x-1}\,dx = e^{x-1}\Big|_0^1 = 1 - \dfrac{1}{e}$.

Для решения п2 воспользуемся полученным рекуррентным соотношением (1).

$$I_n = 1 - nI_{n-1} = 1 - n(1-(n-1)I_{n-2}) = 1 - n + n(n-1)I_{n-2} =$$
$$= 1 - n + n(n-1)(1-(n-2)I_{n-3}) = 1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2)I_{n-3} =$$
$$= 1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2)(1-(n-3)I_{n-4}) =$$
$$= 1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-4}.$$

Уже на данном этапе подстановок видно, что появляются слагаемые с чередующимися знаками, которые составляют сумму $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k\dfrac{n!}{(n-k)!}$ в выражении (2), поскольку $n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, а знак перед данной дробью зависит от четности k.

При дальнейших подстановках количество множителей перед I_{n-k} будет увеличиваться и при $k=n$ перед I_0 образуется $n(n-1)(n-2)...1 = n!$. Знак перед факториалом будет зависеть от четности n, т.к. $k=n$.

Исходя из данных рассуждений и получаем формулу (2).

Используем формулу Стирлинга, представленную в пункте 3. Получим:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\dfrac{n-k}{e}\right)^{n-k}} + (-1)^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n I_0 =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{e^k (n-k)^k n^{n+\frac{1}{2}}}{(n-k)^{n+\frac{1}{2}}} + (-1)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n I_0.$$

Алгоритм вычислительно неустойчивый, если изначально небольшие отклонения входных данных приводят к значительным изменениям результата. В процессе вычисления в результате использования чисел с плавающей точкой могут накапливаться ошибки округлений, в таком случае алгоритм также является вычислительно неустойчивым.

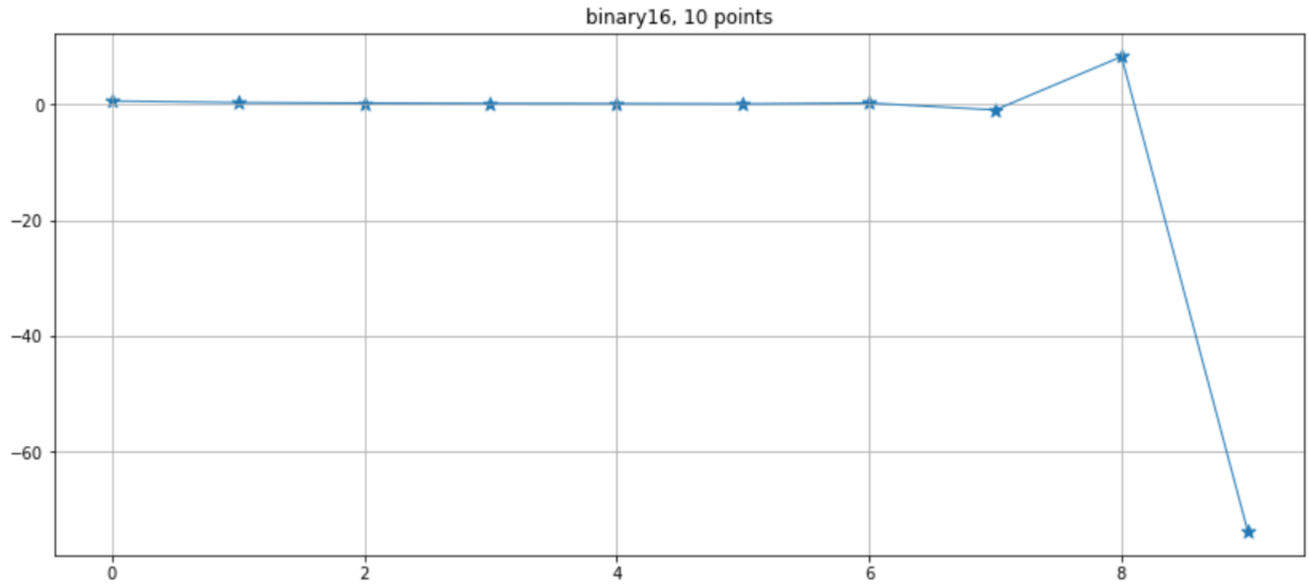
Пусть у нас используется формат чисел с плавающей точкой и 4 значащими цифрами. Пусть $|I_n^* - I_n| =$

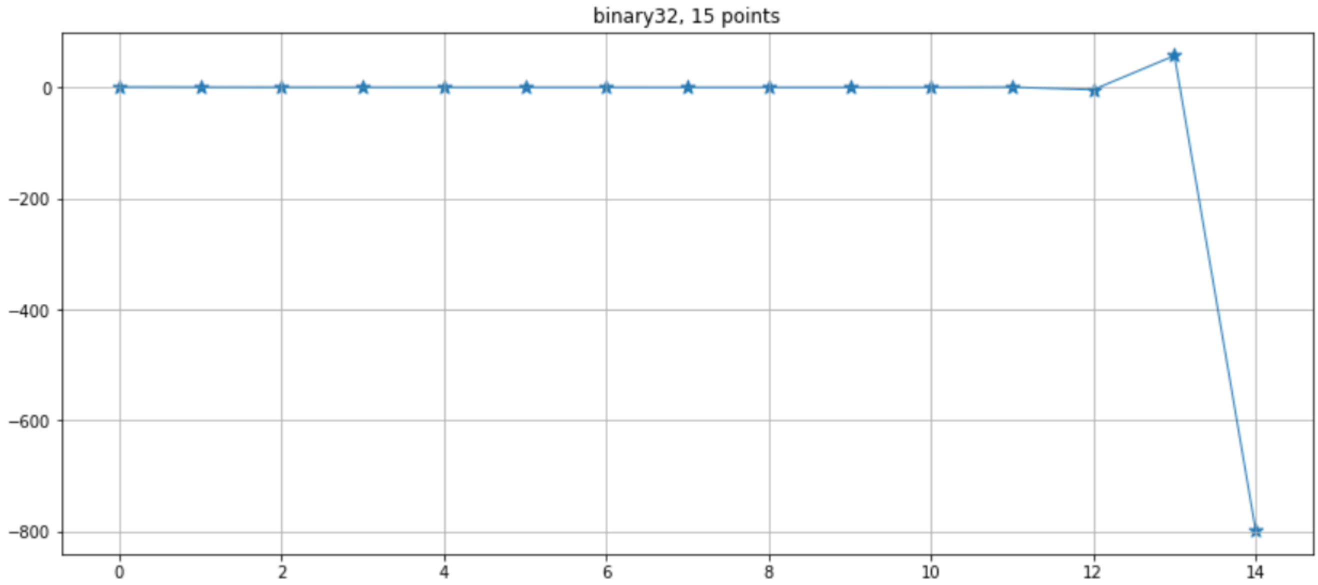
$$= \delta(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = C \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} = C \frac{e^{ln(n^{n+\frac{1}{2}})}}{e^n} = C e^{(n+\frac{1}{2}) ln n - n}, \ C = \sqrt{2\pi}.$$

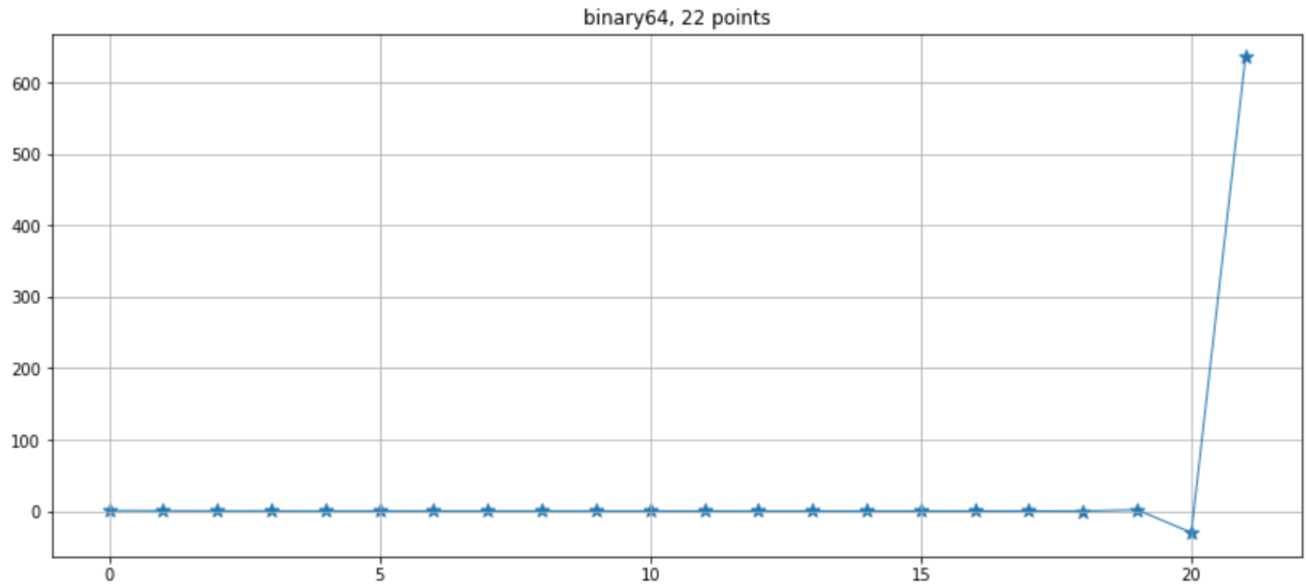
Посмотрим, какой порядок роста имеет $\delta(n), \ n \to \infty$. Сравним данную функцию с Ce^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{(n+\frac{1}{2}) ln n - n}}{e^n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n+\frac{1}{2}) ln n - 2n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (ln n + \frac{ln n}{2n} - 2) n} = e^{\infty} = \infty.$$

Значит $\delta(n), \ n \to \infty$ растет быстрее, чем Ce^n и имеет порядок роста выше экспоненциального при использовании формулы Стирлинга. Такая погрешность, возникающая из-за приближенного вычисления начального условия будет приводить к вычислительной неустойчивости данного алгоритма, что продемонстрировано на графиках ниже.




binary32, 15 points
0
−200
−400
−600
−800
0
2
4
6
8
10
12
14


binary64, 22 points
600
500
400
300
200
100
0
0
5
10
15
20