

### Задача 1.3 по вычислительной математике

Требуется найти интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{9}{10}$$

для функции  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

**Решение:**

Из материалов лекций нам известно, что интерполяционным многочленом Лагранжа для функции  $f(x)$  и соответствующих узлов интерполяции называется функция вида:

$$\tilde{f}(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1)$$

При  $n = 3$  интерполяционных узлах функция  $\tilde{f}(x)$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = L_2(x) = & f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\ & + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Рассчитаем значения функции при  $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{9}{10}$

$$f(x_1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad (3.1)$$

$$f(x_2) = \sqrt{1 + \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (3.2)$$

$$f(x_3) = \sqrt{1 + \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{19}{10}} = \frac{\sqrt{190}}{10} \quad (3.3)$$

Подставим полученные значения (3.1), (3.2), (3.3) в формулу (2):

$$L_2(x) = \sqrt{2} \frac{(x - \frac{3}{5})(x - \frac{9}{10})}{(1 - \frac{3}{5})(1 - \frac{9}{10})} + \frac{2\sqrt{10}}{5} \frac{(x - 1)(x - \frac{9}{10})}{(\frac{3}{5} - 1)(\frac{3}{5} - \frac{9}{10})} + \frac{\sqrt{190}}{10} \frac{(x - 1)(x - \frac{3}{5})}{(\frac{9}{10} - 1)(\frac{9}{10} - \frac{3}{5})}$$

Раскроем скобки и упростим полученное выражение:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 25\sqrt{2}(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{27}{50}) + \frac{10\sqrt{10}}{3}(x^2 - \frac{19}{10}x + \frac{9}{10}) - \frac{10\sqrt{190}}{3}(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5}) = \\ &= 25\sqrt{2}x^2 - \frac{75\sqrt{2}}{2}x + \frac{27\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{19\sqrt{10}}{3}x + 3\sqrt{10} - \frac{10\sqrt{190}}{3}x^2 + \\ &\quad + \frac{16\sqrt{190}}{3}x - 2\sqrt{190} = (\frac{75\sqrt{2} + 10\sqrt{10} - 10\sqrt{190}}{3})x^2 + \\ &\quad + (\frac{32\sqrt{190} - 225\sqrt{2} - 38\sqrt{10}}{6})x + (\frac{27\sqrt{2} + 6\sqrt{10} - 4\sqrt{190}}{2}) = \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{3}(15 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{95})x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}(32\sqrt{95} - 225 - 38\sqrt{5})x + \frac{\sqrt{2}}{2}(27 + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{95}) \end{aligned}$$

**Ответ:** интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{3}{5}$ ,  $x_3 = \frac{9}{10}$  для функции  $f(x) = \sqrt{1+x}$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{5\sqrt{2}}{3}(15 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{95}) x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}(32\sqrt{95} - 225 - 38\sqrt{5}) x + \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}(27 + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{95}) \end{aligned}$$