Семинар 1. Задача 7.

Дурнев П.А., РК6-56Б

19 сентября 2023 г.

1 Условие задачи

Для интерполяционных узлов $x_1, ..., x_n \in [a; b]$ и $f(x) \in C^1[a; b]$ многочлен Эрмита, согласующийся с $f(x_i)$ и $f'(x_i), i = 1, ..., n$ имеет следующий вид:

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\hat{h}_i(x),$$

где $h_i(x)$ и $\hat{h}_i(x)$ заданы как

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x),$$
$$\hat{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x),$$

где l_i - базисные полинома Лагранжа $n - 1$ степени. Требуется найти выражение для многочлена Эрмита, проходящего через узлы $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, для функции $f(x) = e^{2x}$.

2 Решение задачи

Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Найдем значения $f(x)$ и $f'(x)$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = e \tag{1}$$
$$f'(x_1) = 2, \quad f'(x_2) = 2e \tag{2}$$

Рассмотрим l_i - базисный многочлен Лагранжа $(n-1)$-й степени. Он имеет вид:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

Рассчитаем (3) для точек $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = 1 - 2x \tag{4}$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 2x \tag{5}$$

Теперь рассчитаем $l_i'(x)$ для точек x_1 и x_2:

$$l_1'(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{0 - \frac{1}{2}} = -2 \tag{6}$$

$$l_2'(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} = 2 \tag{7}$$

Используя значения, полученные в (4) - (7), вычислим $h_i(x)$ и $\hat{h_i}(x)$:

$$h_1(x) = \left[1 - 2(x - x_1)\frac{1}{x_1 - x_2}\right]\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 = [1 + 4x](1 - 2x)^2 \tag{8}$$

$$h_2(x) = \left[1 - 2(x - x_2)\frac{1}{x_2 - x_1}\right]\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = 4[3 - 4x]x^2 \tag{9}$$

$$\hat{h_1}(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 = x(1 - 2x)^2 \tag{10}$$

$$\hat{h_2}(x) = (x - x_2)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = 4(x - \frac{1}{2})x^2 \tag{11}$$

Подставим (8) - (11) в уравенение многочлена Эрмита:

$$\begin{aligned}
H_{2n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\hat{h}_i(x) = \\
&= f(x_1)h_1(x) + f(x_2)h_2(x) + f'(x_1)\hat{h_1}(x) + f'(x_2)\hat{h_2}(x) = \\
&= (1 + 4x)(1 - 2x)^2 + 4e(3 - 4x)x^2 + 2x(1 - 2x)^2 + 8e(x - \frac{1}{2})x^2 = \\
&= (1 + 6x)(1 - 4x + 4x^2) + (12ex^2 - 16ex^3) + (8ex^3 - 4ex^2) = \\
&= 8(3 - e)x^3 + 4(2e - 5)x^2 + 2x + 1
\end{aligned} \tag{12}$$

В качестве проверки найдем значения интерполяционного многочлена (12) в точках x_1 и x_2:

$$H_{2n-1}(x_1) = 8(3-e)x_1^3 + 4(2e-5)x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

$$H_{2n-1}(x_2) = 8(3-e)x_2^3 + 4(2e-5)x_2^2 + 2x_2 + 1 = (3-e) + (2e-5) + 1 + 1 = e$$

Теперь найдем значения производной от (12) в точках x_1 и x_2:

$$H'_{2n-1}(x_1) = 24(3-e)x_1^2 + 8(2e-5)x_1 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$H'_{2n-1}(x_2) = 24(3-e)x_2^2 + 8(2e-5)x_2 + 2 = 6(3-e) + 4(2e-5) + 2 = 2e$$

Таким образом, интерполяционный многочлен был найден правильно, т.к. значения его и его производной, полученные в точках x_1 и x_2, совпадают с (1) и (2).

Итоговые графики полученной функции H_{2n-1} и заданной функции $f(x)$, а также их производных представлены на рис.1 и рис.2.

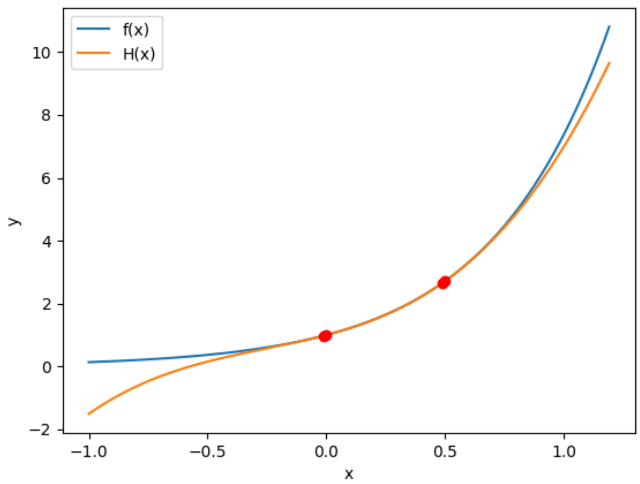

Рис.1 - графики функций $f(x)$ и ее интерполяционного полинома Эрмита H_{2n-1}

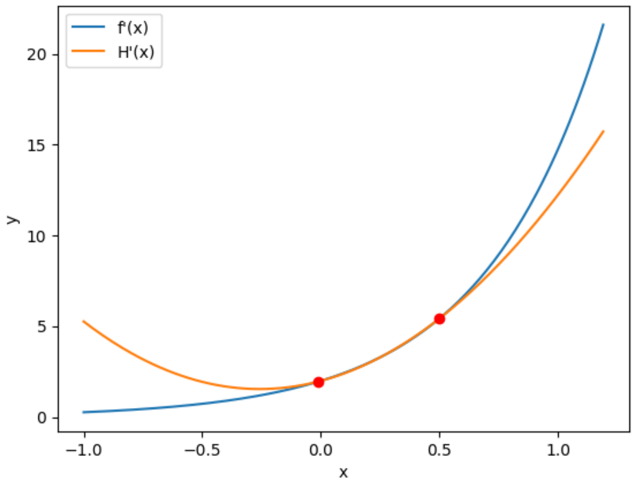

Рис.2 - графики производных функций $f(x)$
и ее интерполяционного полинома Эрмита H_{2n-1}

3 Ответ

Таким образом, выражение для многочлена Эрмита, проходящего через узлы $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, для функции $f(x) = e^{2x}$ имеет следующий вид:

$$H_{2n-1} = 8(3 - e)x^3 + 4(2e - 5)x^2 + 2x + 1$$