Домашнее задание

Задача №1.3

Моторин Данил РК6-56Б

1. Условие задачи

Требуется найти интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}, x_3 = \frac{9}{10} \tag{1}$$

для функции $f(x) = \sqrt{1+x}$

2. Решение задачи

Интерполяция – приближение, при котором требуется, чтобы $f(x;c)$ проходила через заданные узлы $(x_i, f(x_i))$, называемыми интерполяционными, внутри отрезка $x \in [a;b]$.
Найдём значение функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ в каждой известной нам точке из набора (1):

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sqrt{2} \approx 1,4142 \\ f(x_2) &= \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1,2649 \\ f(x_3) &= \sqrt{\frac{19}{10}} \approx 1,3784 \end{aligned} \tag{2}$$

Далее используем формулу нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

Запишем формулу (3) для нашего случая с 3 узлами:

$$L_2(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{4}$$

Подставим значения (1) и (2) в формулу (4):

$$L_2(x) = 1,4142 \cdot \frac{(x-0,6)(x-0,9)}{(1-0,6)(1-0,9)} + 1,2649 \cdot \frac{(x-1)(x-0,9)}{(0,6-1)(0,6-0,9)} + 1,3784 \cdot \frac{(x-1)(x-0,6)}{(0,9-1)(0,9-0,6)}$$

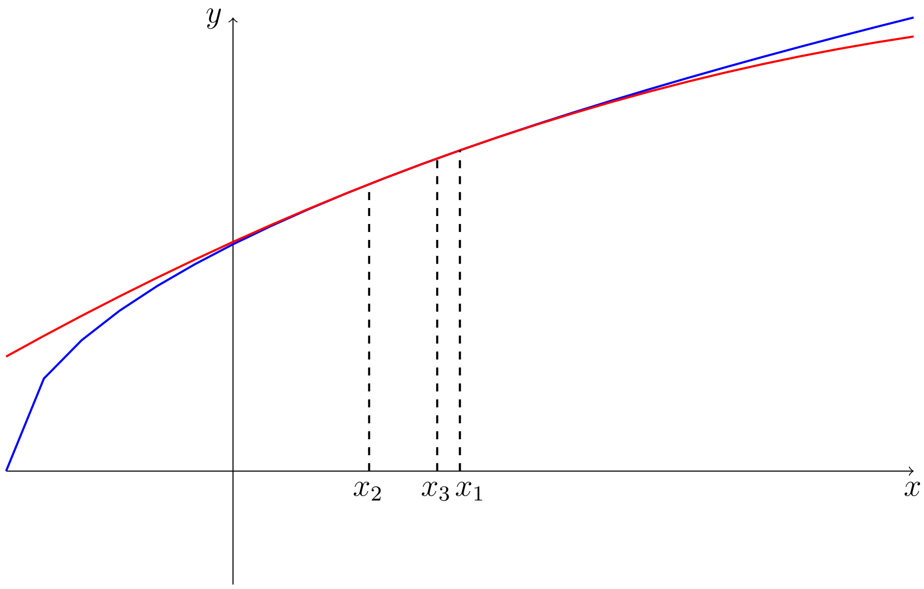
Раскроем скобки:

$$L_2(x) = 1,4142(25x^2 - 37,5x + 13,5) + 1,2649(8,33x^2 - 15,83 + 7,5) - 1,3784(33,33x^2 - 53,33x + 20) =$$

$$= -0,0509x^2 + 0,4546x + 1,0105$$

3. Ответ

Искомый интерполяционный многочлен Лагранжа: $L_2(x) = -0,0509x^2 + 0,4546x + 1,0105$



Красным обозначен интерполяционный полином Лагранжа.

Синим на графике обозначена исходная функция.