## Задание

Требуется вывести две формулы для аппроксимации значения интеграла

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

используя линейную и квадратичную интерполяции.

## Решение

Для подынтегрального выражения $e^{-t^2}dt$, имеющего вид $f(t)dt$, найдём значения $f(t)$ в узлах $t_0 = 0, t_1 = \frac{x}{2}, t_2 = x$. Подставив поочерёдно значения $t_i$, получим соответствующие им значения $f_i$, где $f_0 = 1, f_1 = e^{-\frac{x^2}{4}}, f_2 = e^{-x^2}$.

Линейная интерполяция $\tilde{f}(t) = f(t_0) + \frac{f(t_2)-f(t_0)}{t_2-t_0}(t - t_0) = 1 + \frac{e^{-x^2}-1}{x-0}t = 1 + \frac{e^{-x^2}-1}{x}t$

Квадратичная интерполяция $\hat{f}(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}f(t_0) + \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}f(t_1) + \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}f(t_2) = \frac{(t-\frac{t}{2})(t-x)}{(0-\frac{x}{2})(0-x)} + \frac{t(t-x)}{(\frac{x}{2}-0)(\frac{x}{2}-x)}e^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{(t-0)(t-\frac{x}{2})}{(x-0)(x-\frac{x}{2})}e^{-x^2} = \frac{2(t-\frac{x}{2})(t-x)}{x^2} - \frac{4t(t-x)}{x^2}e^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{2t(t-\frac{x}{2})}{x^2}e^{-x^2}$

Подставим поочереди выведенные формулы в подынтегральную функцию $f(t)$ и решим получившийся интеграл.
Для формулы линейной интерполяции получим:
$\int\limits_0^x \frac{\left(e^{-x^2}-1\right)}{x}t + 1 \, \mathrm{d}t = \frac{x}{2\,e^{x^2}} + \frac{x}{2}$
Для формулы квадратичной интерполяции получим:
$\int\limits_0^x \frac{2\left(t-\frac{x}{2}\right)(t-x)}{x^2} - \frac{4\,t\,(t-x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} + \frac{2\,t\left(t-\frac{x}{2}\right)e^{-x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\left(x\,e^{\frac{x^2}{4}}+4\,x\right)e^{x^2}}{6\,e^{\frac{5\,x^2}{4}}} + \frac{x}{6\,e^{x^2}}$

Подставим выведенные формулы в итоговую функцию I(x) и получим две окончательные формулы для аппроксимации интеграла.
$\tilde{I}(x) = \frac{x(1+e^{-x^2})}{\sqrt{\pi}}$
$\hat{I}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{\left(x\,e^{\frac{x^2}{4}}+4\,x\right)e^{x^2}}{6\,e^{\frac{5\,x^2}{4}}} + \frac{x}{6\,e^{x^2}})$