1.14. Дан дискретный набор данных в m-мерном пространстве $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$, где $x_i \in \mathbb{R}^m$, $x_i = \left(x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i\right)^T$, $y_i = f(x_i)$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Необходимо записать модифицированную формулу интерполяционного полинома Лагранжа L_p над данными векторами.

Пусть $x_i \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right\}$ и $y_i \in \{0, 1, 1\}$. С помощью интерполяционного полинома Лагранжа, построенного на этих данных, определите значение функции в точке $z = \binom{1}{1}$. Как изменится значение в этой точке, если в предложенные наборы добавить элементы $x_i = \binom{2}{2}$, $y_i = -4\sqrt{10}$.

Решение задачи 1.14: Модифицированная формула интерполяционного полинома Лагранжа в m-мерном пространстве выглядит следующим образом:

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\|z - x_j\|}{\|x_i - x_j\|}, \qquad (1)$$

где $\|a\|$ – евклидова норма вектора a, z – точка, в которой необходимо найти значение функции.

Для исходного набора дискретных данных формула (2) примет вид:

$$L_p(z) = y_1 \cdot \frac{\|z - x_2\|}{\|x_1 - x_2\|} \cdot \frac{\|z - x_3\|}{\|x_1 - x_3\|} + y_2 \cdot \frac{\|z - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|} \cdot \frac{\|z - x_3\|}{\|x_2 - x_3\|} + y_3 \cdot \frac{\|z - x_1\|}{\|x_3 - x_1\|} \cdot \frac{\|z - x_2\|}{\|x_3 - x_2\|}, (2)$$

где $x_1 = \binom{0}{0}$, $x_2 = \binom{0}{1}$, $x_3 = \binom{1}{0}$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $z = \binom{1}{1}$.

Учитывая функцию для определения нормы:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3)$$

Выберем параметр $p = 2$, поскольку для данной задачи мы вычисляем евклидову норму. Вычислим нормы, представленные в формуле (2) при помощи формулы (3):

$\|z - x_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\|z - x_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\|z - x_3\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

$\|x_1 - x_2\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$\|x_1 - x_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

$\|x_2 - x_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

$\|x_2 - x_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\|x_3 - x_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\|x_3 - x_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Тогда, подставив полученные значения в формулу (2), получим:

$$L_p(z) = 0 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

При добавлении в исходные наборы новых элементов $x_4 = \binom{2}{2}$, $y_4 = -4\sqrt{10}$ формула (3) преобразуется следующим образом:

$$L_p(z) = y_1 \cdot \frac{\|z - x_2\|}{\|x_1 - x_2\|} \cdot \frac{\|z - x_3\|}{\|x_1 - x_3\|} \cdot \frac{\|z - x_4\|}{\|x_1 - x_4\|} + y_2 \cdot \frac{\|z - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|} \cdot \frac{\|z - x_3\|}{\|x_2 - x_3\|} \cdot \frac{\|z - x_4\|}{\|x_2 - x_4\|} +$$

$$+ y_3 \cdot \frac{\|z - x_1\|}{\|x_3 - x_1\|} \cdot \frac{\|z - x_2\|}{\|x_3 - x_2\|} \cdot \frac{\|z - x_4\|}{\|x_3 - x_4\|} + y_4 \cdot \frac{\|z - x_1\|}{\|x_4 - x_1\|} \cdot \frac{\|z - x_2\|}{\|x_4 - x_2\|} \cdot \frac{\|z - x_3\|}{\|x_4 - x_3\|} \qquad (4)$$

Вычислим новые нормы, полученные в формуле (4):

$\|z - x_4\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|x_1 - x_4\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\|x_2 - x_4\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\|x_3 - x_4\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\|x_4 - x_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\|x_4 - x_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\|x_4 - x_3\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Тогда, подставив полученные значения в формулу (4), получим:

$$L_p(z) = 0 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} -$$

$$-4\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0$$

Ответ: 2; 0.