Вычислительная математика

Журавлева Екатерина РК6-51Б

Задача 1.2 Требуется:

1. построить интерполяционный многочлен, проходящий через узлы (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ с помощью метода неопределенных коэффициентов, тогда как (x, y) задать произвольно так, чтобы $x_1 < x_2 < x_3$;

2. построить интерполяционный многочлен, проходящий через те же узлы, как многочлен Лагранжа, и сравнить его с многочленом, полученным в пункте 1.

Решение: Возьмем произвольные узлы $(1; 0), (2; 6), (3; 4)$. Аппроксимирующая функция $\tilde{f}(x)$ будет иметь вид:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$$

Рассмотрим в качестве базисных функций многочлены:

$$\phi_i(x) = x^{i-1}$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Решим СЛАУ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -28$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -14$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 18$$

$$c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -4$$

Тогда интерполяционный многочлен примет вид:

$$\tilde{f}(x) = -4x^2 + 18x - 14$$

Для тех же узлов $(1;0),(2;6),(3;4)$ найдем интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$\tilde{f}(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} =$$
$$= 0 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} - 6 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 4 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} =$$
$$= 2(x-1)(x-2) - 6(x-1)(x-3)$$

$$\tilde{f}(x) = -4x^2 + 18x - 14$$

Таким образом, интерполяционный многочлен, полученный методом неопределенных коэффициентов, совпал с интерполяционным многочленом Лагранжа.