Чемлёва Анастасия
РК6-51Б

Задача 1.9 по вычислительной математике

Пусть $f(x)$ - некоторая неизвестная функция одного аргумента, заданная на отрезке $[x_1; x_2]$. Известны значения $f(x)$ и её первой производной $f'(x)$ в двух узлах:

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$f'(x_i) = y'_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$x_1 < x_2; \qquad x_1, x_2 \in R.$$

Задав конкретные значения x_i, y_i, y'_i произвольно:

1. представить вид кривой Безье второго порядка $B_2(x)$, построенной на базе заданных опорных узлов;
2. представить график $B_2(x)$.

Решение

Кривая Безье второго порядка называется квадратичной и задаётся тремя опорными точками - P_0 (начало), P_1 (вспомогательная точка, определяющая изгиб кривой) и P_2 (конец):

$$B(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2, \qquad t \in [0; 1]$$

Проверим, что точки P_0 и P_2 являются началом и концом соответственно:

$$B(0) = (1-0)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot 0 \cdot (1-0) \cdot P_1 + 0^2 \cdot P_2 = P_0$$

$$B(1) = (1-1)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot 1 \cdot (1-1) \cdot P_1 + 1^2 \cdot P_2 = P_2$$

Докажем, что касательные в крайних точках P_0 и P_2 пересекутся в точке P_1. Для этого:

- перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 = \\ &= (1 - 2 \cdot t + t^2) \cdot P_0 + (2 \cdot t - 2 \cdot t^2) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 = \\ &= P_0 + 2 \cdot (P_1 - P_0) \cdot t + (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2) \cdot t^2 \end{aligned}$$

- возьмём первую производную:

$$B'(t) = 2 \cdot (P_1 - P_0) + 2 \cdot (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2) \cdot t$$

- представим отрезки P_0P_1 и P_1P_2 как касательные в точках P_0 и P_2 соответственно:

$$\begin{cases} B'(0) = 2 \cdot (P_1 - P_0) \\ B'(1) = 2 \cdot (P_1 - P_0) + 2 \cdot (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'(0) = 2 \cdot (P_1 - P_0) \\ B'(1) = 2 \cdot (P_2 - P_1) \end{cases}$$

Отсюда следует, что касательные действительно пересекутся в общей точке P_1. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Запишем уравнения касательных в точках P_0 и P_2:

$$\begin{cases} y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) \\ y = f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y_1 + f'(x_1) \cdot (x - x_1) \\ y = y_2 + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \end{cases}$$

Произвольно зададим конкретные значения для точек $P_0(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ и производных в них:

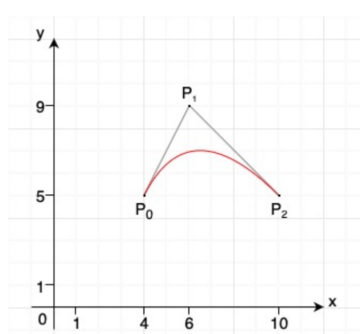
$$P_0(x_1; y_1) \to P_0(4; 5), \qquad f'(x_1) = 2$$

$$P_2(x_2; y_2) \to P_2(10; 5), \qquad f'(x_2) = -1$$

После подстановки имеем:

$$\begin{cases} y = 5 + 2 \cdot (x - 4) \\ y = 5 - 1 \cdot (x - 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow P_1(6; 9)$$

Полученный результат представим на рисунке:



При построении графика использовался алгоритм де Кастельжо:

- отмечаем опорные точки P_0, P_1 и P_2 и строим отрезки P_0P_1 и P_1P_2
- в цикле параметром t «пробегаем» значения от 0 до 1 с выбранным шагом $\Delta t = 0.25$ и на каждом из отрезков отмечаем точку, находящуюся на расстоянии, пропорциональном t, от его начала
- соединим получившиеся точки