Seminar№1 Task№2

Tigran Mzykyan RK6-54B

1 Задание

Требуется:

1) построить интерполяционный многочлен, проходящий через узлы (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ с помощью метода неопредленных коэффицентов, тогда как (x_i, y_i) можно задать произвольно так, чтобы $x_1 < x_2 < x_3$;

2) построить интерполяционный многочлен, проходящий через те же узлы, как многочлен Лагранжа и сравнить его с многочленом, полученным в пункте 1.

2 Решение

2.1 Интерполяционный многочлен с помощью метода неопределенных коэффициентов

Для построения интерполяционного многочлена с помощью метода неопределенных коэффициентов через узлы (x_i, y_i), где $i = 1, 2, 3$ и $x_1 < x_2 < x_3$, мы используем следующий многочлен:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 - неопредлденные коэффициенты.

Для определения значений этих коэффициентов, подставим в уравнение значения узлов (x_i, y_i):

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_1) + a_2(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) + a_3(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) + a_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)(x_2 - x_3) \\ y_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + a_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_3) \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 \\ y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1) \\ y_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$$

Выберем три точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, так чтобы выполнялось условие $x_1 < x_2 < x_3$. Пусть это будут точки (1,2) (2,3) (3,5).

Подставим точки в систему и решим ее.

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_0 + a_1 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Подставим искомые коэффиценты и точки в уравнение (1) получим:

$$P(x) = 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

2.2 Интерполяционный многочлен Лангранжа

Интерполиционный многочлен Лангранжа выглядит следущий образом:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x),$$

А базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Тогда для нашего случая интерполиционный многочлен Лангранжа выглядит следущий образом:

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) \quad (2)$$

а базисные полиномы опредяются как:

$$\begin{cases} l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{2} \\ l_2(x) = -(x-x_1)(x-x_3) \\ l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_1)}{2} \end{cases}$$

Подставим точки (1,2) (2,3) (3,5) и базисные полиномы в (2).
Получим:

$$L(x) = (x-2)(x-3) - 3(x-1)(x-3) + 5\frac{(x-1)(x-2)}{2} = 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

Получаем, что $L(x) = P(x)$