Ядрихинская В.Е.
РК6-53Б

Задание 1 по вычислительной математике

Требуется вывести формулу определителя Вандермонда:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Решение

Вычтем из каждого столбца, кроме последнего, предыдущий столбец, умноженный на x_1:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & {x_1}^{n-1} & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & {x_2}^{n-1} & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & {x_n}^{n-1} & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & x_1 - 1 \cdot x_1 & \dots & {x_1}^{n-1} - {x_1}^{n-2} \cdot x_1 \\ 1 & x_2 - 1 \cdot x_1 & \dots & {x_2}^{n-1} - {x_2}^{n-2} \cdot x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 \cdot x_1 & \dots & {x_n}^{n-1} - {x_n}^{n-2} \cdot x_1 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & \dots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Разложим определитель по первой строке:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Вынесем из каждой строки общий множитель:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \ldots (x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & {x_2}^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & {x_3}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n 1 & \dots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & {x_2}^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & {x_3}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Заметим, что получившийся определитель — это исходный определитель без первой строки и последнего столбца. Значит, можем с определителем в (3) проделать аналогичные операции:

$$\prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \cdot \prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2) \cdot \ldots \cdot \prod_{j=n}^{n}(a_j - a_{n-1}) = \prod_{1 \le i < j \le n}(a_j - a_1). \tag{4}$$