Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Алексеев Андрей Владимирович
Группа:	РК6-51Б
Тип задания:	Домашнее задание
Тема:	Задача 1.8

Студент	____________ подпись, дата	Алексеев А.В. Фамилия, И.О.
Преподаватель	____________ подпись, дата	____________ Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Задача 1.8

Задание

Пусть $f(x)$ – некоторая неизвестная функция одного аргумента, заданная на отрезке $[x_1; x_2]$. Известны значения $f(x)$ и её первой производной $f'(x)$ в двух узлах:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2;$$

$$f(x_i) = y_i', \quad i = 1, 2;$$

$$x_1 < x_2; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Задав конкретные значения x_i, y_i, y_i' произвольно:

1) вывести полиномиальную зависимость $H(x)$, интерполирующую $f(x)$, удовлетворяющую условиям выше, а также представить график $H(x)$;

2) предложить некоторую неполиномиальную зависимость $G(x)$, которая также будет интерполировать $f(x)$ и удовлетворять условиям выше; представить график $G(x)$.

1 Решение

Вывод полиномиальной зависимости

Зададим конкретные значения x_i, y_i, y_i', где $i = 1, 2$:

$$x_1 = 5, x_2 = 9;$$

$$y_1 = 9, y_2 = 17;$$

$$y_1' = 3, y_2' = -2;$$

Определено два интерполяционных узла, следовательно $n = 2$.

Согласно теореме о многочлене Эрмита, единственным многочленом наименьшей степени, согласующимся с условиями выше, является многочлен Эрмита степени (максимум) $2n - 1$, заданный выражением:

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\hat{h}_i(x) \tag{1}$$

где $h_i(x)$ и $\hat{h}_i(x)$ заданы как

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x), \tag{2}$$

$$\hat{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x), \tag{3}$$

где l_i - базисные полиномы Лагранжа $n - 1$ степени:

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{4}$$

Произведем подстановку (2) и (3) в (1). Получим следующее выражение, с учетом $n = 2$:

$$H_3(x) = f(x_1)[1 - 2(x - x_1)l_1'(x_1)]l_1^2(x) + f(x_2)[1 - 2(x - x_2)l_2'(x_2)]l_2^2(x) + \\ f'(x_1)(x - x_1)l_1^2(x) + f'(x_2)(x - x_2)l_2^2(x) \tag{5}$$

Определим базисные полиномы Лагранжа 1-ой степени:

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 9}{-4} \tag{6}$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 5}{4} \tag{7}$$

Значения первых производных базисных полиномов Лагранжа в интерполяционных узлах:

$$l_1'(x_1) = -\frac{1}{4} \tag{8}$$

$$l_2'(x_2) = \frac{1}{4} \tag{9}$$

Произведём подстановку (6), (7), (8), (9) и числовых значений в (5). Получим:

$$H_3(x) = 9[1 - 2(x - 5)\frac{1}{5 - 9}]\left(\frac{x - 9}{5 - 9}\right)^2 + 17[1 - 2(x - 9)\frac{1}{9 - 5}]\left(\frac{x - 5}{9 - 5}\right)^2 \\ +3(x - 5)\left(\frac{x - 9}{5 - 9}\right)^2 - 2(x - 9)\left(\frac{x - 5}{9 - 5}\right)^2 = \tag{10}$$

Упростим выражение (9), раскрыв скобки, получим:

$$H_3(x) = \frac{-3x^3 + 53x^2 - 257x + 479}{16} \tag{11}$$

Выполним проверку:

$$H_3(x_1) = \frac{-3x_1^3 + 53x_1^2 - 257x_1 + 479}{16} = \frac{-3 \cdot 5^3 + 53 \cdot 5^2 - 257 \cdot 5 + 479}{16} = 9$$

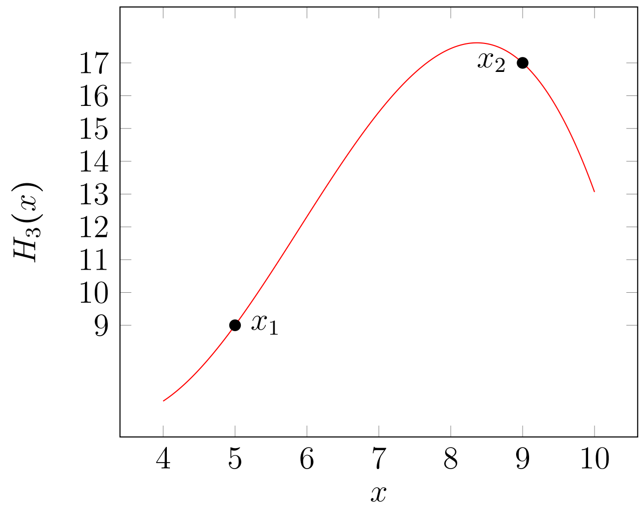
$$H_3(x_2) = \frac{-3x_2^3 + 53x_2^2 - 257x_2 + 479}{16} = \frac{-3 \cdot 9^3 + 53 \cdot 9^2 - 257 \cdot 9 + 479}{16} = 17$$

$$H_3'(x_1) = \frac{-9x_1^2 + 106x_1 - 257}{16} = \frac{-9 \cdot 5^2 + 106 \cdot 5 - 257}{16} = 3$$

$$H_3'(x_2) = \frac{-9x_2^2 + 106x_2 - 257}{16} = \frac{-9 \cdot 9^2 + 106 \cdot 9 - 257}{16} = -2$$

Выведенная полиномиальная зависимость (Рис.1) удовлетворяет условиям задачи.

Рис. 1. График функции $H_3(x)$

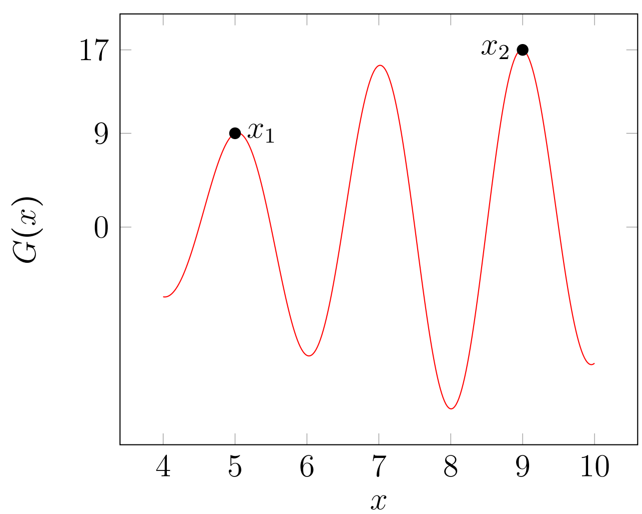


Предложение неполиномиальной зависимости

В качестве неполиномиальной зависимости (Рис.2), удовлетворяющей условиям задачи и интерполирующей функцию $f(x)$, можно предложить следующее выражение:

$$G(x) = \frac{-3x^3 + 53x^2 - 257x + 479}{16} \cdot (-\cos(\pi x)) \tag{12}$$

Рис. 2. График функции $G(x)$



2 Ответ

1. $H_3(x) = \frac{-3x^3+53x^2-257x+479}{16}$

2. $G(x) = \frac{-3x^3+53x^2-257x+479}{16} \cdot (-\cos(\pi x))$