

D. S. Ivanov, M. D. Koptev, Ya. V. Mashtakov, N. N. Proshunin, S. S. Tkachev, A. I. Fedoseev, M. O. Shachkov, Determination of aerodynamic table disturbances acting on microsatellite control system mock-ups, *Keldysh Institute preprints*, 2017, 014

DOI: 10.20948/prepr-2017-14

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 79.139.215.77

December 17, 2023, 00:49:16





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Иванов Д.С., Коптев М.Д.,  
Маштаков Я.В., Прошунин Н.Н.,  
Ткачев С.С., Федосеев А.И.,  
Шачков М.О.

Определение возмущений,  
действующих на макеты  
малых спутников на  
аэродинамическом столе

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Определение возмущений,  
действующих на макеты малых спутников на аэродинамическом столе / Д.С.Иванов [и др.] //  
Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 14. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-14](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-14)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-14>

**О р д е н а   Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**Д.С. Иванов, М.Д. Коптев,**  
**Я.В. Маштаков, Н.Н. Прошунин, С.С. Ткачев,**  
**А.И. Федосеев, М.О. Шачков**

**Определение возмущений,  
действующих на макеты малых спутников  
на аэродинамическом столе**

**Москва — 2017**

**Иванов Д.С., Коптев М.Д., Маштаков Я.В., Прошунин Н.Н.,  
Ткачев С.С., А.И. Федосеев, Шачков М.О.**

**Определение возмущений, действующих на макеты малых спутников  
на аэродинамическом столе**

В ИПМ им. М.В. Келдыша создан стенд, представляющий собой аэродинамический стол, по которому на воздушной подушке движутся управляемые макеты малых спутников с тремя степенями свободы каждый — одной вращательной и двумя поступательными. Вследствие возмущений со стороны неровностей поверхности стола и аэродинамических сил в воздушном потоке свободное движение макетов не является поступательными и прямолинейным. В настоящей работе решается задача определения возмущений, действующих на движущиеся по аэродинамическому столу макеты.

**Ключевые слова:** малый спутник, система управления движением, аэродинамический стол, возмущения

**Ivanov D.S., Koptev M.D., Mashtakov Y.V., Proshunin N.N., Tkachev S.S.,  
Fedoseev A.I., Shachkov M.O.**

**Determination of Aerodynamic Table Disturbances Acting on Microsatellite Control System Mock-Ups**

A laboratory facility developed in KIAM allows to simulate microsatellite free planar motion due to aerodynamic cushion. Despite of disturbance caused by uneven surface of the table and the aerodynamic forces in the air flow free movement is not a translational straight. The determination of those distortions is presented in the paper.

**Key words:** small satellites, air- table, movement control system, disturbances

Исследование поддержано Министерством образования и науки Российской Федерации (Соглашение № 14.607.21.0144 , уникальный идентификатор ПНИЭР – RFMEFI60716X0144).

## Введение

Для проведения полунатурных испытаний системы управления движением космического аппарата используются наземные стенды, позволяющие имитировать в усеченном виде его орбитальное и угловое движение. В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН совместно с ОАО Спутникс создан стенд КОСМОС (КОмплекС для МОделирования движения Спутников), представляющий собой аэродинамический стол, по которому на воздушной подушке движутся управляемые макеты спутников с тремя степенями свободы: одной вращательной и двумя поступательными. Однако, вследствие возмущений со стороны неровностей поверхности стола и аэродинамических сил в воздушном потоке, свободное движение макетов не является поступательным и прямолинейным. Поэтому возникает задача определения возмущений, действующих на макет на аэродинамическом столе, которые нужно учитывать при построении точных алгоритмов управления движением макетов.

В состав стенда входит аэродинамический стол, промышленный вентилятор с блоком управления и системой трубопроводов, а также макеты системы управления движением спутников. Аэродинамический стол представляет собой плоское металлическое основание с отверстиями, через которые поступает воздух, нагнетаемый промышленным вентилятором по системе воздуховодов. Таким образом создается воздушная подушка между поверхностью стола и дискообразной платформой, на которую устанавливается макет системы управления. Общий вид стенда представлен на рис. 1. Подробное описание стенда представлено в работе [1].



Рис.1. Стенд КОСМОС в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Несмотря на широкое распространение подобных стендов в зарубежных университетах и исследовательских центрах (обзор представлен в работе [1]), исследование возмущений, действующих на аэродинамическом столе, встречается крайне редко в литературе. С одной стороны, это объясняется тем, что алгоритмы управления движением макетов нацелены на парирование этих возмущений, которые остаются неизвестными. Однако такой подход может применяться только в случае малых возмущений по сравнению с управляющим воздействием, но и в этом случае учет возмущений может значительно уменьшить ошибки управления. С другой стороны, на зарубежных стендах воздушная подушка, как правило, создается с помощью установленных на макетах баллонов со сжатым воздухом, и основной причиной возмущений является неровность гладкой поверхности стола. На стенде КОСМОС воздушная подушка создается благодаря перфорированной поверхности, через которую под давлением подается воздух. Вследствие неоднородного потока воздуха через отверстия в столе могут возникать значительные неоднородные аэродинамические силы, действующие на макет и приводящие к отличию его движения от равномерного.

Для измерения гравитационной составляющей возмущения достаточно измерить неровности поверхности стола. Одним из способов является использование инклинометра, с помощью которого с заданным шагом промеряется отклонение локальной нормали к столу от вертикали. Таким образом была получена форма поверхности стола из эпоксидной смолы в Технологическом институте Джорджии [2] (см. рис. 2), разница высот достигает 2,5 мм. По локальному углу наклона нормали стола  $\theta$  можно грубо оценить гравитационное возмущение по формуле  $a \approx g \sin \theta$ , где  $g$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Для рассматриваемого эпоксидного стола максимальное ускорение составило  $a_{\max} = 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ .

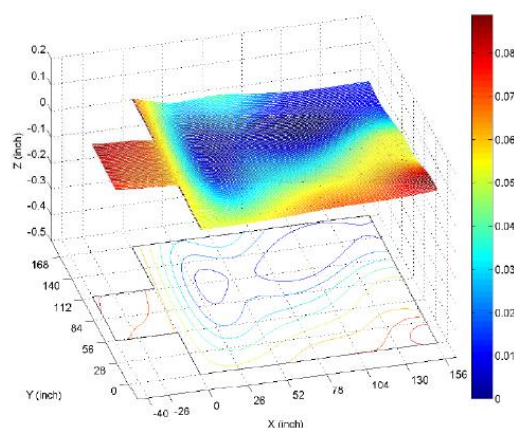
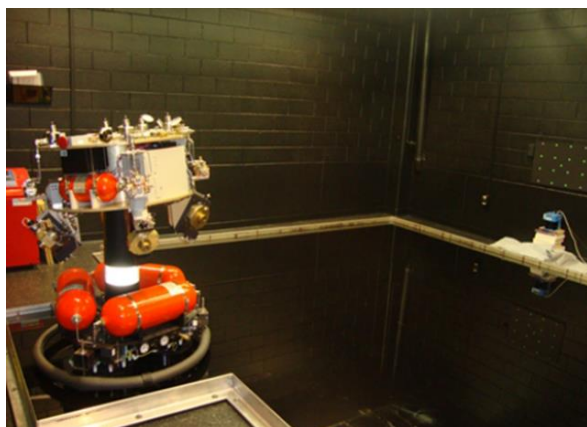


Рис. 2. Стол из эпоксидной смолы и его форма (высота в дюймах) [2]

Другой вариант оценки возмущения – его измерение при неуправляемом движении макета по поверхности стола. В римском университете "La Sapienza" макет PINOCCIO двигается по стеклянному столу (рис. 3). С помощью специ-

альной метки на крышке оценивается ускорение движения макета. Результаты измерения представлены в работе [3], однако, судя по рис. 3а и 3b, ускорения не изменяются вдоль оси у, что оставляет открытым вопрос о методике измерений. Для этого макета максимальное ускорение  $a_{\max} = 0.15 \text{ м/с}^2$ .

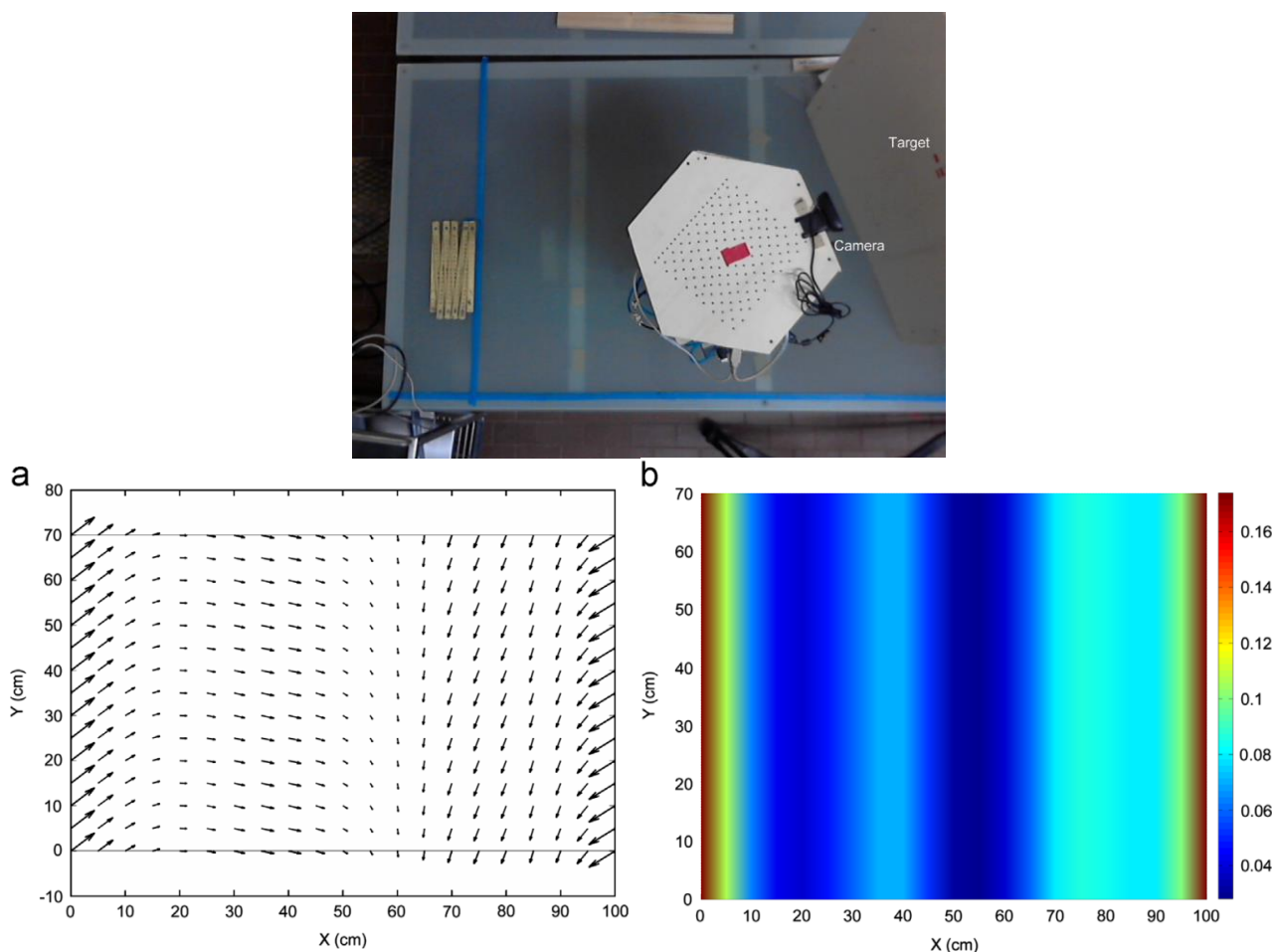


Рис. 3. Макет PINOCCHIO и карта ускорений – направление (а) и величина в  $\text{м/с}^2$  (b) [3]

Целью настоящей работы является разработка методики определения возмущений, действующих на макеты на аэродинамическом столе. Для этого проводится анализ основных факторов, приводящих к ускорениям: неровности поверхности стола и неравномерности истечения воздуха из отверстий в поверхности стола. Далее с помощью определения неуправляемого движения диска по столу определяется распределение ускорений на поверхности стола.

## 1. Определение гравитационных возмущений

При движении по столу в идеальном случае макет не испытывает никаких возмущающих ускорений и моментов. В реальности же это, конечно, не так: из-за неравномерности распределения давления воздуха на поверхности стола, а также вследствие того, что из-за неровностей поверхности стола невозможно обеспечить параллельность нормали к поверхности и направления действия си-



лы тяжести, на макет действуют различные возмущения. Здесь мы подробнее остановимся на влиянии именно гравитации на движение макета.

Выпишем выражение для возмущающего ускорения  $a_d$ , которое приобретет макет под действием гравитации в случае, когда угол между нормалью к поверхности стола  $\mathbf{n}$  и вертикальной осью, вдоль которой направлена сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , равен  $\alpha$  (рис. 4):

$$a_d = g \sin \alpha. \quad (1)$$

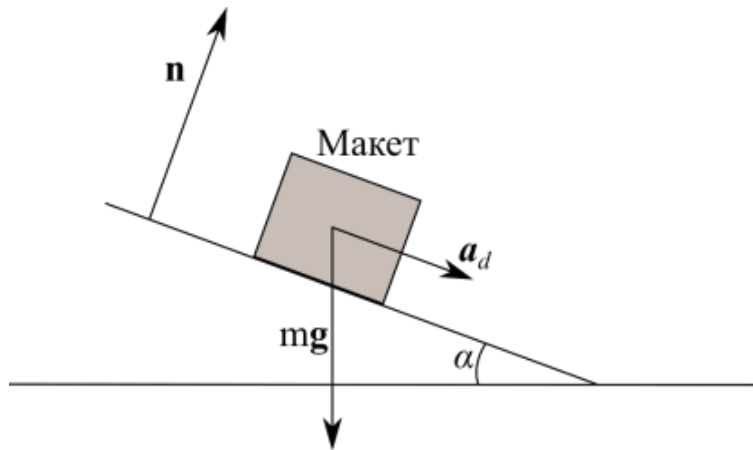


Рис. 4. Возмущающее ускорение силы тяжести

Таким образом, для учета влияния возмущающего ускорения (1) необходимо знать его как функцию нормали к поверхности стола в каждой точке. На практике положение нормали к поверхности может быть определено при помощи уже упомянутого выше инклинометра. В то же время сделать это для каждой точки стола или даже на очень мелкой сетке не представляется возможным. Значит, необходимо разработать способ определения положения нормали к поверхности, который позволил бы определить функцию нормали по существенно меньшему количеству измерений.

Необходимо отметить, что если перепад высот на поверхности стола довольно большой, то возможна ситуация, когда макет, вместо того чтобы «парить» над столом на воздушной подушке, будет задевать стол основанием (рис. 5). Как следствие, возникающее трение скольжения будет также влиять на движение макета. Следовательно, кроме функции нормали к поверхности, необходимо также и знание функции самой поверхности стола.

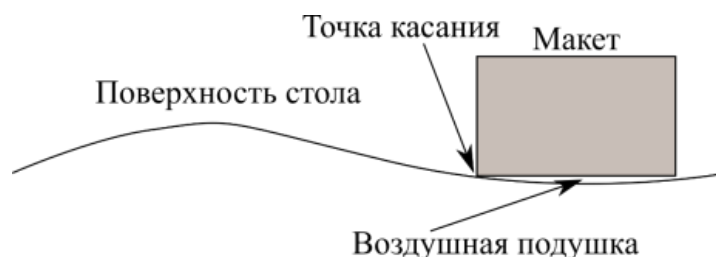


Рис. 5. Трение макета о поверхность стола в случае большого перепада высот



### 1.1. Построение сетки опорных точек

В силу технических ограничений невозможно абсолютно точно определить форму поверхности стола. Однако можно определить положение в пространстве конечного количества точек его поверхности и построить таким образом некоторую сетку опорных точек. В дальнейшем при помощи этой сетки поверхность стола может быть аппроксимирована.

Для построения сетки опорных точек в настоящей работе предлагается использовать специальный набор инструментов, состоящий из достаточно жесткой и гладкой поверочной линейки, а также нескольких щупов различной толщины (рис. 6). Поверочная линейка имеет длину 1 м с допуском неплоскостности 6 мкм. При помощи щупов можно измерить расстояние между линейкой и поверхностью стола и таким образом построить карту поверхности.



Рис. 6. Поверочная линейка и набор щупов

Однако при применении этого подхода возникает ряд трудностей. Во-первых, для обеспечения высокой жесткости линейки она должна быть достаточно короткой, и тогда ее длины не хватает для того, чтобы измерить все точки вдоль поверхности стола. Во-вторых, каждый раз при установке линейки на столе ее наклон в инерциальной системе координат в общем случае получается разный (рис. 7).

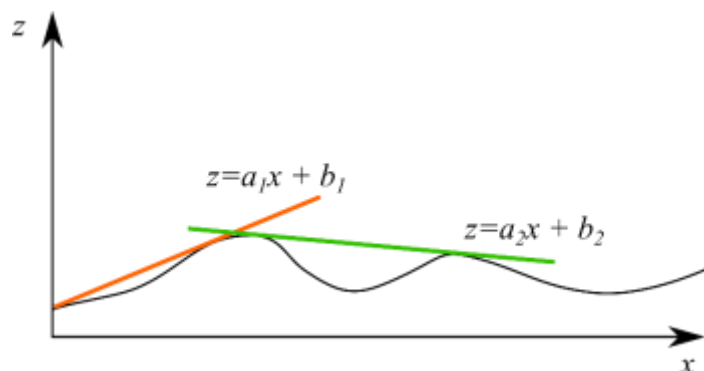


Рис. 7. Изменение наклона линейки в зависимости от места ее приложения

Для решения описанных выше трудностей предлагается использовать следующий подход.

1. Вся поверхность стола размечается прямоугольной сеткой, линии которой параллельны границам стола.

2. В каждом узле этой сетки проводится измерение расстояния между поверхностью стола и линейкой.

3. Так как длина линейки меньше размеров стола, измерения вдоль одной и той же линии проводится путем нескольких серий измерений со сдвигом и с перекрытием, то есть несколько точек в каждой серии измеряется несколько раз. Это позволяет при помощи метода наименьших квадратов определить взаимный наклон разных положений линейки (коэффициенты  $a_1, b_1, a_2, b_2$  на рис. 7) и, таким образом, привести измерения к такому виду, как будто бы они были сделаны при помощи одной длинной линейки.

4. После того как проведены измерения всех линий прямоугольной сетки, а полученные значения для каждой линии приведены к одной линейке, при помощи метода наименьших квадратов вычисляются значения высоты точек поверхности стола в системе координат, базисными векторами которой являются орты границ стола.

Результаты работы этого подхода для стенда КОСМОС представлены на рис. 8. Промеры были сделаны на сетке с шагом 100 мм. Перепады высот на всем столе составляют до 3,5 мм.

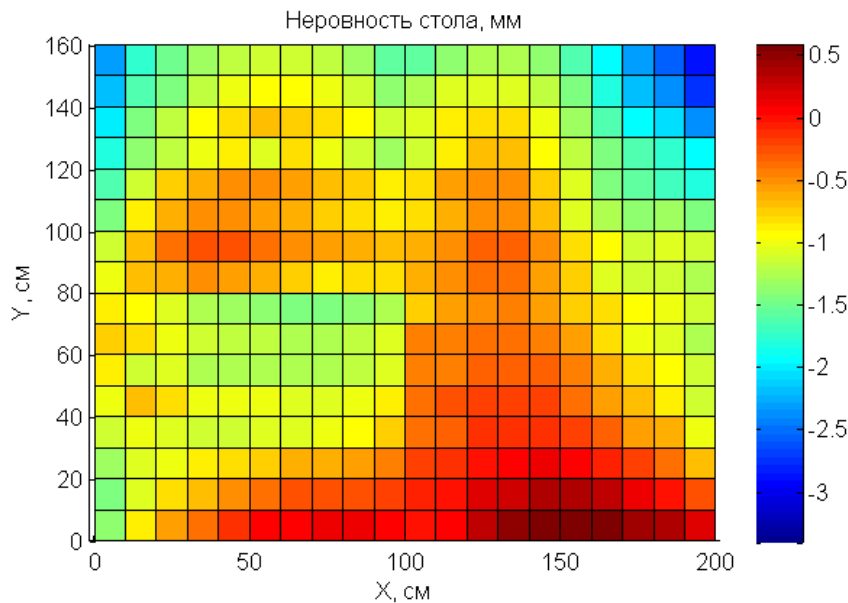


Рис. 8. Результаты измерений высоты точек поверхности стола

Таким образом, при помощи предложенного подхода можно построить сетку опорных точек, которая в дальнейшем может использоваться для описания уже всей поверхности стола при помощи интерполяции.

## 1.2. Нахождение формы поверхности стола

При интерполяции поверхности стола будем предполагать, что известно положение некоторого набора опорных точек поверхности стола в инерциальном пространстве в виде “тройки” чисел  $(x_i, y_j, P(x_i, y_j))$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , где  $(x_i, y_j)$  – координаты, заданные на прямоугольной сетке в некоторой плоскости.

кости, причем  $x_i < x_{i+1}$ ,  $y_j < y_{j+1}$ ,  $P(x_i, y_j)$  – расстояние от рассматриваемой точки до этой плоскости.

Одним из способов описания поверхности являются так называемые бикубические поверхности Кунса. При использовании этого подхода поверхность стола разбивается на несколько прямоугольных частей, которые потом склеиваются таким образом, чтобы функции нормалей и касательных были непрерывными. При этом сами границы представляют собой кубические сплайны Эрмита, записываемые в виде

$$\begin{aligned} P(t) &= f_1(t)P_1 + f_2(t)P_2 + f_3(t)P_1' + f_4(t)P_2', \\ f_1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ f_2(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ f_3(t) &= t^3 - 2t^2 + t, \\ f_4(t) &= t^3 - t^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t \in [0,1]$ ,  $P_1, P_2$  – значение функции высоты границы поверхности в начальной и конечной точке границы соответственно,  $P_1', P_2'$  – значение ее производной в начальной и конечной точке соответственно. С использованием введенных функций (2) бикубическая поверхность Кунса может быть записана в виде

$$P(u, w) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ f_3(u) \\ f_4(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_w(0,0) & P_w(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_w(1,0) & P_w(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uw}(0,0) & P_{uw}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uw}(1,0) & P_{uw}(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(w) \\ f_2(w) \\ f_3(w) \\ f_4(w) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $P(i, j)$  – значение высоты поверхности,  $P_u(i, j), P_w(i, j)$  – значения производных функции высоты поверхности вдоль прямых  $w = \text{const}, u = \text{const}$  соответственно,  $P_{uw}(i, j)$  – значения смешанных производных функции высоты поверхности стола. Как уже отмечалось выше, непосредственно измеренными предполагаются величины  $P(i, j)$ . Значения смешанных производных  $P_{u,w}(i, j)$  полагаются равными нулю, что соответствует случаю поверхности Фергюсона [4].

Рассмотрим более подробно, как задаются значения производных в угловых точках моделируемой поверхности. Как уже упоминалось ранее, предполагаются известными значения высоты стола на некоторой прямоугольной сетке. Пусть направление  $u$  границы стола совпадает с направлением оси  $x$ , а направление  $w$  – с направлением оси  $y$ . Выпишем уравнение, связывающее производную функции высоты границы по безразмерному параметру  $u$  и размерной координате  $x$  на отрезке границы  $([x_i, x_{i+1}], y_j)$ :

$$\frac{dP(x, y)}{dx} = \frac{dP(u, w)}{du} (x_{i+1} - x_i)^{-1}. \quad (4)$$

Это выражение напрямую следует из определения  $u$  как безразмерного параметра, принимающего значения из отрезка  $[0, 1]$  на области определения  $[x_i, x_{i+1}]$ , то есть

$$u = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (5)$$

Аналогичным образом по формулам (4) и (5) задается и связь между  $P_y$  и  $P_w$  на участке границы  $(x_i, [y_j, y_{j+1}])$ :

$$\frac{dP(x, y)}{dy} = \frac{dP(u, w)}{dw} (y_{j+1} - y_j)^{-1}. \quad (6)$$

Следовательно, для задания значений производных, указанных в (3), достаточно указать соответствующие производные функции высоты по размерным параметрам  $x, y$  в опорных точках  $(x_i, y_j)$ . Сделать это можно, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dP(x, y)}{dx} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} &= \begin{cases} \frac{P(x_{i+1}, y_j) - P(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}}, & i = 2, \dots, n-1, \\ 0, & i = 1, n, \end{cases} \\ \frac{dP(x, y)}{dy} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} &= \begin{cases} \frac{P(x_i, y_{j+1}) - P(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}}, & j = 2, \dots, m-1, \\ 0, & j = 1, m. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, с использованием бикубической поверхности Кунса и формул (4)-(7) можно описать форму поверхности стола, а также получить выражения для касательных и нормалей к ней. Поверхность, получившаяся аппроксимацией данных для аэродинамического стола, входящего в испытательный стенд КОСМОС, представлена на рис. 9. По производным сплайнов были оценены гравитационные ускорения. На рис. 10 представлена карта ускорений, действующих на столе – их величина и направление. Максимальные локальные ускорения наблюдаются в середине левой части стола и составляют до  $0.09 \text{ м/с}^2$ . Также из-за резкого перепада высот в этой части стола на 1.5 мм возможно касание диском поверхности, что приведет к трению скольжения (эта ситуация изображена на рис. 5).

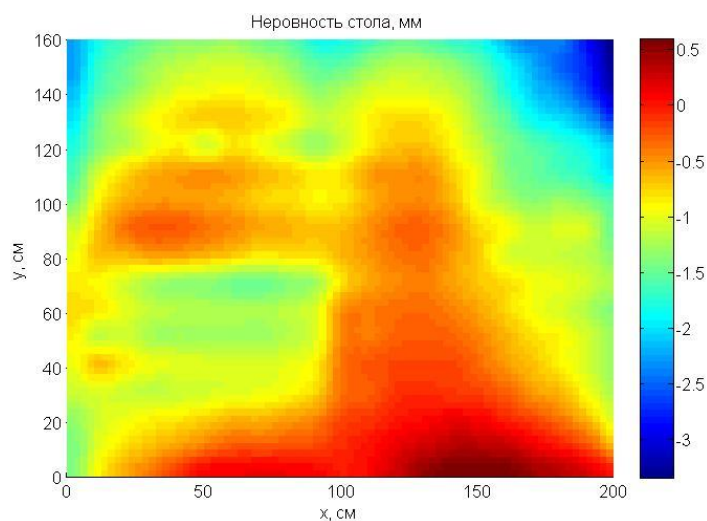


Рис. 9. Поверхность стола, построенная при помощи бикубических поверхностей Кунса

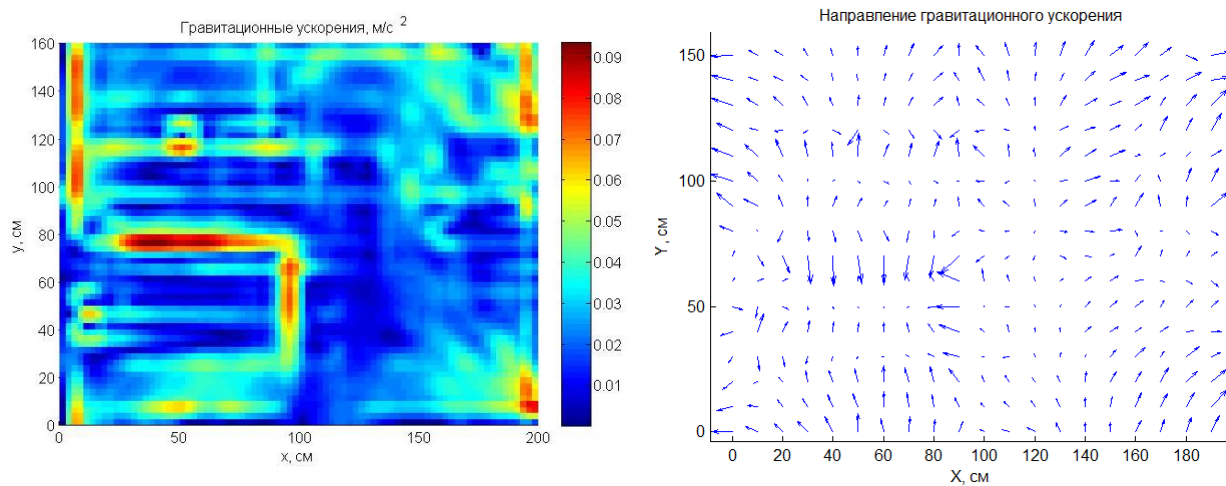


Рис. 10. Гравитационные ускорения на поверхности стола: величина и направление

Следует отметить, что на макет действуют не локальные ускорения, изображенные на рис. 10, а некоторое их усредненное значение, так как макет помещается на диск диаметром 30 см. Используя форму поверхности, заданную сплайнами, можно найти наклон лежащего на ней диска и по наклону оценить его гравитационное ускорение. На рис. 11 представлены гравитационные ускорения диска. Видно, что ускорения диска имеют несколько меньшую величину за счет его линейных размеров, но качественная картина в целом остаётся прежней.

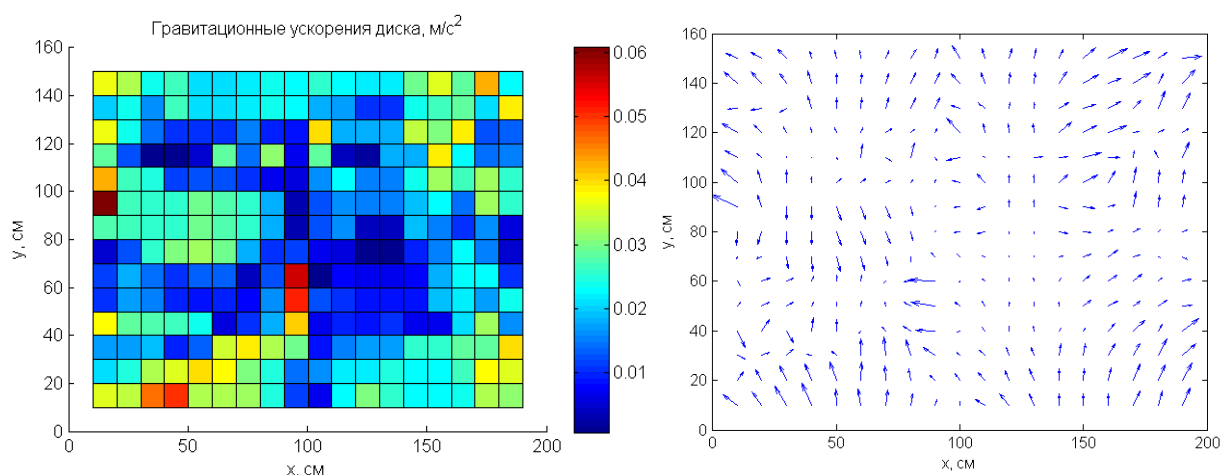


Рис. 11. Гравитационные ускорения диска на поверхности стола: величина и направление

## 2. Аэродинамические возмущения

Для понимания природы аэродинамической составляющей возмущений следует подробнее рассмотреть, как создается воздушная подушка на аэродинамическом столе. Промышленный вентилятор всасывает воздух из воздухопровода и загоняет его по прямоугольному каналу переменного сечения в камеру статического давления в нижней части стола. Далее воздух из камеры истекает на поверхность стола через отверстия диаметром 1 мм и равномерной сеткой с шагом 2 см. Следует отметить, что воздушный поток после промышленного вентилятора становится турбулентным и его завихрения в камере статического давления могут привести к неравномерной скорости истечения воздуха через отверстия на поверхности. Ситуация усугубляется тем, что к поверхности крепятся специальные опоры для предотвращения прогибания и выгибания поверхности стола (рис. 12). Эти опоры и отверстия в них создают дополнительные препятствия для воздушного потока.

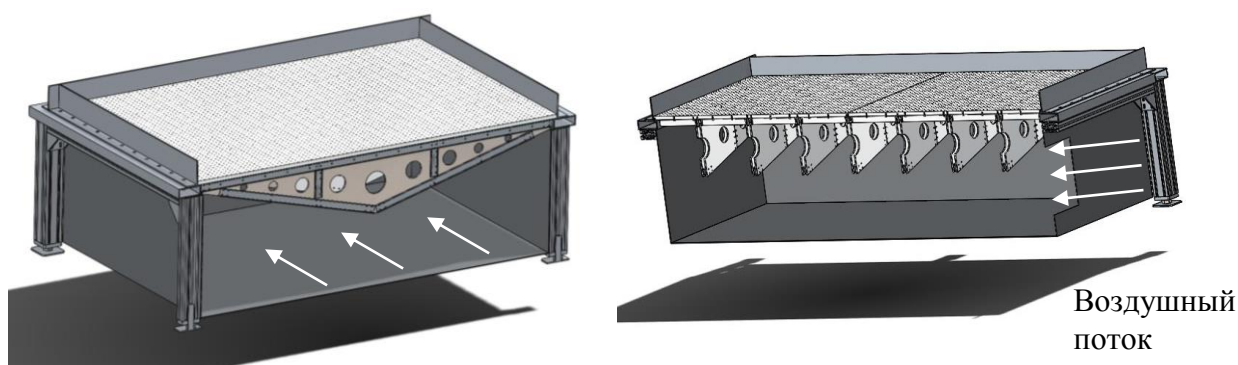


Рис. 12. Поперечный и продольный разрезы аэродинамического стола

Для определения стационарности и равномерности воздушного потока из отверстий были проведены измерения расхода воздуха с использованием крыльчатого анемометра WM-100 с цилиндрическим воздухопроводом, изобра-

женным на рис. 13. Внутри цилиндра находится небольшого размера вентилятор, который начинает вращаться благодаря набегающему воздушному потоку. Частота его вращения пересчитывается в скорость воздушного потока и выводится на циферблате. Так как поток воздуха из одного отверстия на поверхности стола слишком мал, чтобы привести измерительный вентилятор анемометра в движение, цилиндр устанавливался на четыре близлежащих отверстия. Дискретность измерений анемометра составляет 0.05 м/с.



Рис. 13. Крыльчатый анемометр WM-100

Измерения показали, что поток из отверстий стационарен и наблюдается его повторяемость на одних и тех же отверстиях при запуске аэродинамического стола с одной и той же частотой промышленного вентилятора. Однако распределение потока по поверхности стола оказалось крайне неравномерным. На частоте промышленного вентилятора 35 Гц с заданным шагом был измерен поток воздуха, как изображено на рис. 14. Скорость потока на соседних точках в некоторых областях поверхности стола отличалась в несколько раз. Это может быть обусловлено как завихрениями воздушного потока в камере статического давления, так и частичной засоренностью отверстий, например, частичками пыли.



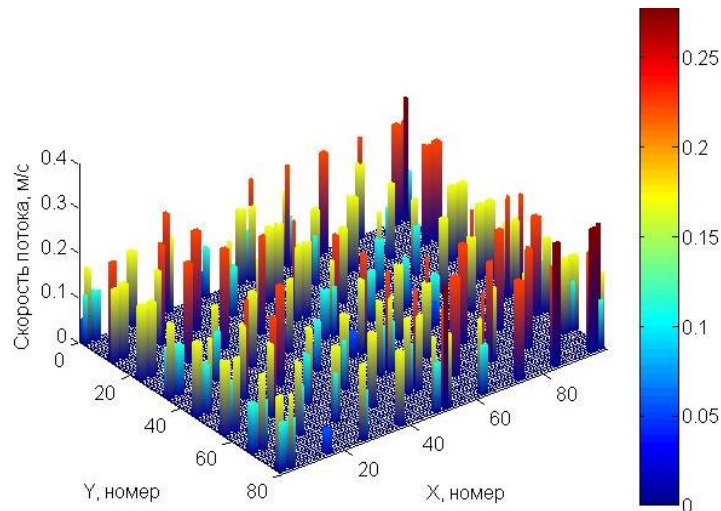


Рис. 14. Распределение скоростей потока воздуха по поверхности стола на частоте вентилятора 35 Гц

Чтобы оценить, насколько меняется поток воздуха при различных частотах промышленного вентилятора, было проведено измерение на небольшом участке в центре стола на частотах 35, 40 и 50 Гц. Из рис. 15 можно увидеть в определенной мере пропорционально изменяющуюся картину при увеличении частоты, однако относительная неравномерность потока сохраняется.

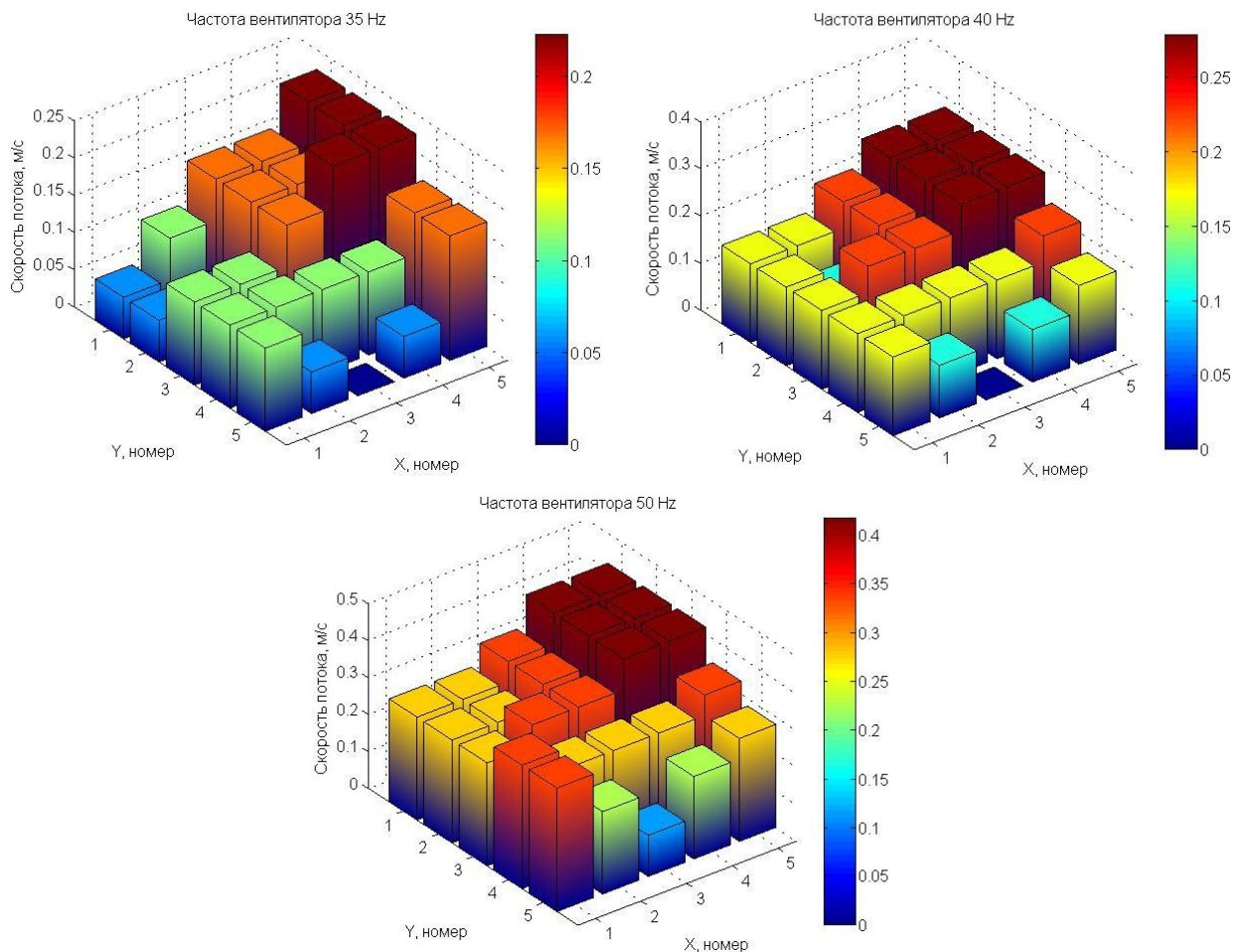


Рис. 15. Распределение скоростей потока воздуха на участке стола 5x5 при различных частотах промышленного вентилятора

Неравномерность потока воздуха из отверстий на поверхности стола приводит к тому, что воздушная прослойка между столом и плоской нижней частью диска является неравномерной, что приводит к наклону нормали диска  $\mathbf{n}$  в ту или иную сторону относительно вертикали  $\mathbf{z}$  на некоторый угол  $\alpha$  (рис. 16). В результате возникает горизонтальная составляющая аэродинамической силы, которая в упрощенном варианте может быть записана в виде

$$F_a = C_a \rho V^2 S \sin \alpha ,$$

где  $C_a$  – аэродинамический коэффициент,  $\rho$  – плотность воздуха,  $V$  – усредненное значение скорости потока,  $S$  – площадь диска.

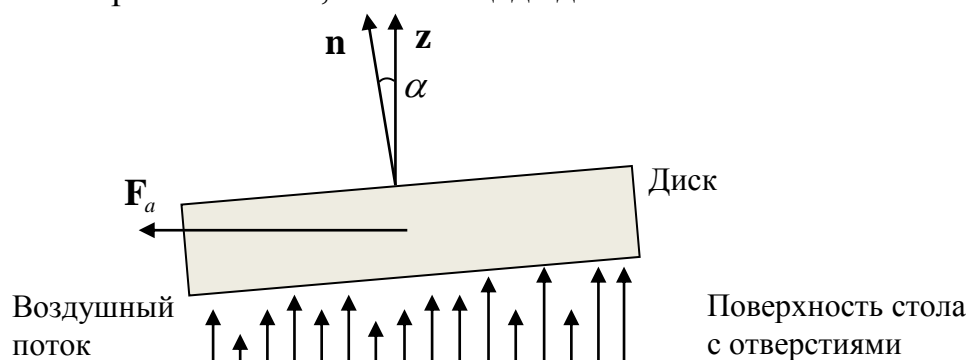


Рис. 16. Схематичное изображение влияния неравномерности потока на движение диска

Ещё одним фактором, влияющим на возникновение наклона диска, является смещение центра масс от центра давления (который соответствует геометрическому центру) диска. Если сам диск может быть выполнен так, что это отличие будет очень малым, то при установке на него макета уже не следует надеяться на близкое положение центра масс к оси симметрии макета, так как распределение массы в приборах макета и их положение могут быть весьма произвольными.

Чтобы рассчитать положение равновесия и угол  $\alpha$ , необходимо записать условие равенства нулю момента аэродинамических сил. Рассмотрим задачу в упрощенном виде. Диск со смещенным центром тяжести находится в равновесном состоянии над столом с двумя отверстиями (см. рис. 17).

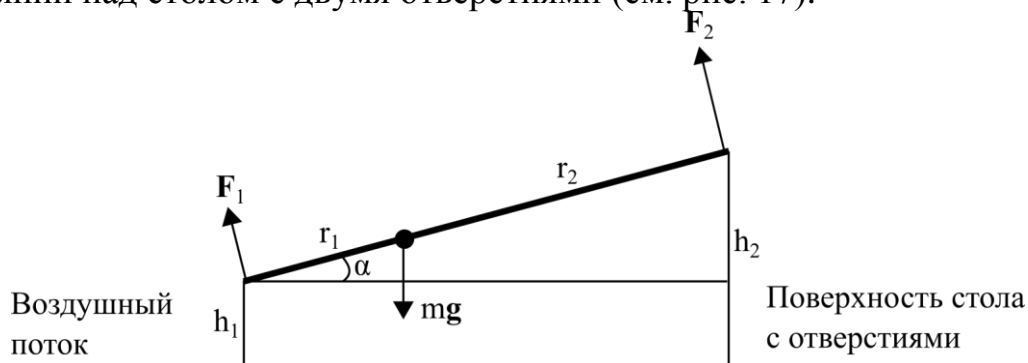


Рис. 17. Упрощенная схема взаимодействия диска с воздушным потоком на столе с двумя отверстиями

Скорость истечения воздуха из отверстий не одинаковая. Примем, что скорость воздуха в струе падает обратно пропорционально расстоянию от отверстия, тогда можно выразить силы, действующие на диск, следующим образом:

$$F_1 = \left( \frac{C}{h_1} \right)^2 f_1, \quad F_2 = \left( \frac{C}{h_2} \right)^2 f_2.$$

Здесь  $C$  – константа, зависящая от параметров стола,  $h_1$  и  $h_2$  – расстояния до краев диска,  $f_1, f_2$  – аэродинамические силы для каждого из отверстий.

Запишем условия равенства сил и моментов, а также соотношение, связывающее расстояния до диска и угол  $\alpha$ :

$$M = -F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0, \quad (F_1 + F_2) \cos \alpha = mg, \quad h_2 = h_1 + (r_1 + r_2) \sin \alpha.$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение

$$\cos \alpha = \sqrt{A^2 + 1} - A,$$

$$A = \frac{f_1 C^2 \left( \sqrt{\frac{f_2 r_2}{f_1 r_1}} - 1 \right)^2}{2mgr_2(r_1 + r_2)}.$$

Это решение соответствует двум конфигурациям системы: горизонтальному положению пластины при  $A = 0$  и наклонному положению пластины при  $\cos \alpha = \sqrt{A^2 + 1} - A$ . Для равновесия требуется выполнение следующего соотношения:

$$f_2 r_2 = f_1 r_1.$$

Следовательно, уже при малейших изменениях в скорости воздушного потока из отверстий  $f_1 \neq f_2$  или смещении центра тяжести  $r_1 \neq r_2$  происходит перекося диска, вызывающий его движение вдоль горизонтальной оси.

Можно задать соотношения между силами воздушного потока и расстояниями от края диска до центра масс следующим образом:

$$\beta = \frac{f_2}{f_1}, \quad \gamma = \frac{r_2}{r_1},$$

тогда решение системы уравнений можно представить в виде:

$$A = \frac{f_1 C^2 (\sqrt{\beta \gamma} - 1)^2 \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right)}{2mgr^2}.$$

На рис.18 представлено значение угла  $\alpha$  для диапазонов  $\beta$  и  $\gamma$  [0,8; 1.2] при остальных параметрах, близких к тем, что наблюдаются для диска на поверхности аэродинамического стола.

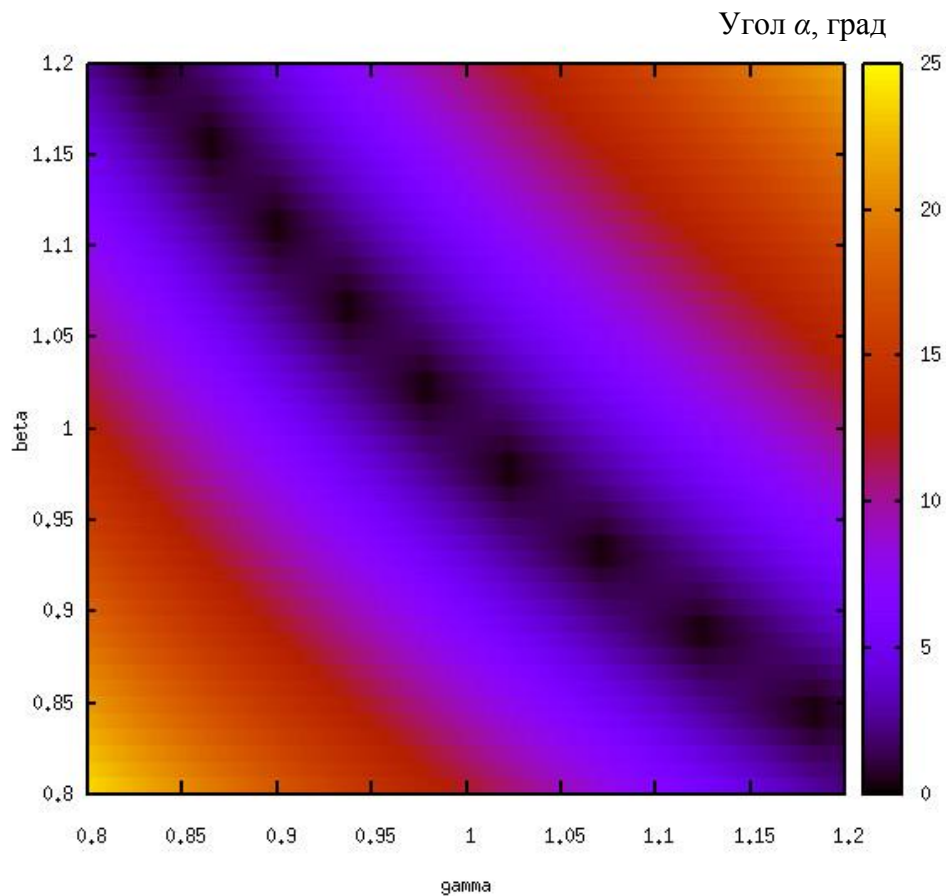


Рис. 18. Значение угла  $\alpha$  в зависимости от соотношений  $\beta$  и  $\gamma$

Наряду с аэродинамической силой на макеты также действует гравитационная составляющая, и в общем случае можно наблюдать лишь результат их суперпозиции. Неровность стола в совокупности с неравномерностью потока воздуха из отверстий в трёхмерном случае приводит к завихрениям воздуха между столом и диском, что влечет возникновение момента, вращающего диск. Оценить величины сил и моментов при известной карте высот стола и потоке через отверстия возможно только с использованием численных газодинамических расчетов, учитывающих не только движение относительно центра масс, но и центра масс.

### 3. Экспериментальная оценка возмущений

Оценим суперпозицию возмущений экспериментальным путём. Так как поток из отверстий является стационарным, т.е. не изменяющимся во времени, но зависящим от расположения на поверхности стола, то можно надеяться, что и возмущения, действующие в некоторой точке стола, будут стационарными для заданной частоты вращения промышленного вентилятора. Если предположения о стационарности окажутся верными, то можно построить карту сил и моментов, действующих на тело на поверхности стола.

Рассмотрим тело с известными массой и тензором инерции, например, диск, на который устанавливается макет. По свободному движению диска на столе можно оценить действующие на него силы и моменты. Для определения движения диска воспользуемся системой измерений, разработанной для стола [5]. На диск помещается метка, похожая на QR-код, а над поверхностью стола – веб-камера (рис. 19). По снимкам визуальной метки определяется положение диска в системе координат, связанной со столом. Далее по этим измерениям оцениваются линейное и угловое ускорения диска, которые можно потом пересчитать в силы и моменты.

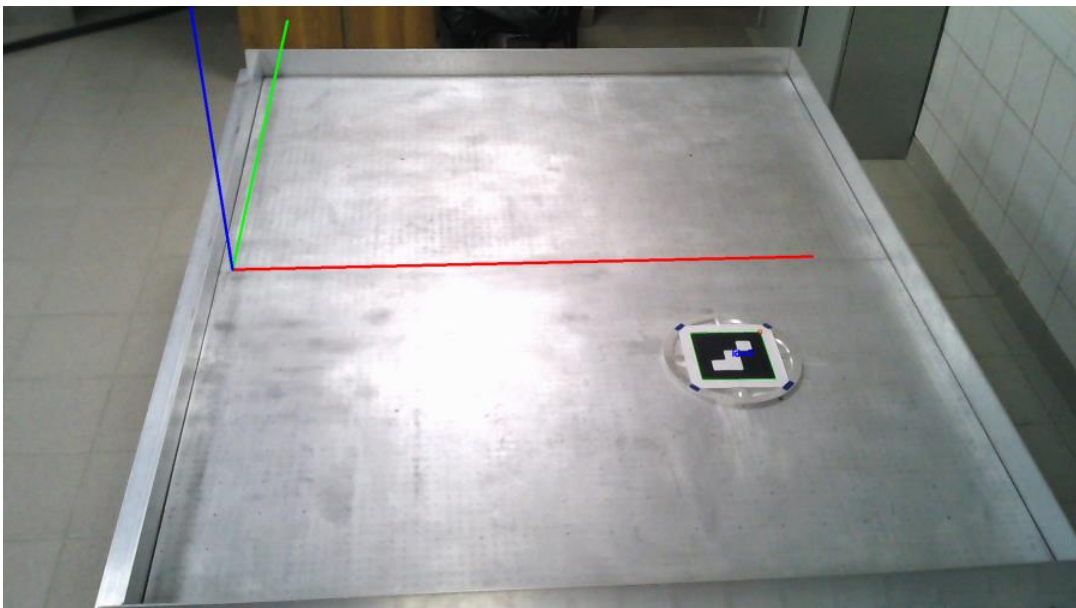


Рис. 19. Снимок веб-камеры диска с меткой на столе и система координат стола

Так как измерения, полученные в результате обработки снимков веб-камеры, зашумлены, то при дифференцировании положения  $x, y$  и угла поворота  $\varphi$  конечно-разностным методом для получения ускорений будут возникать неприемлемые ошибки. Поэтому для оценки возмущений измерения обрабатывались с использованием динамической фильтрации – фильтра Калмана.

Вектор состояния системы состоял из фазовых переменных, линейных и углового положения и скоростей и ускорений:

$$\mathbf{x} = [x, y, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}]^T.$$

Была выбрана модель свободного движения диска

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Матрица динамики при этом имеет вид

$$F = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

где  $0_{3 \times 3}$  и  $E_{3 \times 3}$  – нулевая и единичная матрицы размера  $3 \times 3$  соответственно. Так как измеряются непосредственно положение и угол, то матрица измерений имеет вид

$$H = [E_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3}].$$

Система измерений имеет среднеквадратическую погрешность измерений около  $\sigma_r = 5$  мм по положению и  $\sigma_\varphi = 0.2$  град по углу. Поэтому матрица ошибок измерений имеет вид

$$R = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_r^2, \sigma_\varphi^2).$$

Матрица ошибок модели движения  $Q$  выбиралась исходя из того, чтобы при интегрировании полученных оценок ускорений положение и угол были близки к значениям измерений. Это позволяет надеяться, что полученные оценки ускорений являются адекватными.

### 3.1. Проверка стационарности возмущений

Для проверки предположения о стационарности возмущений были проведены предварительные тесты, которые заключались в определении движения диска при старте движения из одних и тех же точек на столе с нулевой начальной скоростью. Эксперименты показали хорошую повторяемость траекторий движения диска. Их небольшой разброс можно объяснить неидеально одинаковыми начальными условиями и некоторой флуктуацией в скорости воздушного потока. К измерениям траектории был применен фильтр Калмана для оценки возмущающих ускорений, описанный выше. На рис. 20 представлен пример оценки величины и направления возмущающих линейных ускорений при трех запусках диска из одной точки. Как видно, и временная, и пространственная зависимости оцененных ускорений имеют хорошую повторяемость.



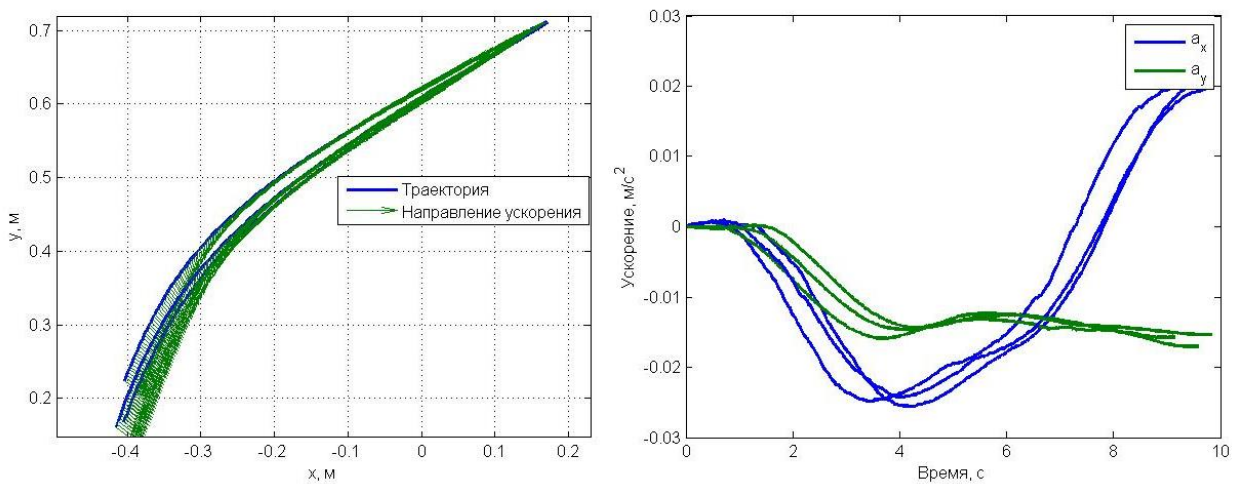


Рис. 20. Пример свободного движения диска из одной точки и оценка направления и величины линейных ускорений

Если же теперь провести тот же эксперимент, но при различных частотах вращения промышленного вентилятора, то получается картина, как, например, на рис. 21. С увеличением частоты вентилятора траектория движения постепенно сдвигается, так как поле ускорений в окрестности точки старта также пропорционально изменяется. На рис. 22 представлен пример оценок линейных и углового ускорения для траекторий, выходящих из этой точки. Видно, что они также плавно изменяются с изменением частоты вентилятора. Но, так как траектория постепенно смещается, то получающиеся ускорения нельзя сравнивать напрямую, ибо они относятся к разным точкам на траектории движения.

Таким образом, можно считать, что предположение о стационарности возмущений вполне оправдано. Это означает, что для тела известной массы и момента инерции (диска) можно составить карту возмущений на аэродинамическом столе.

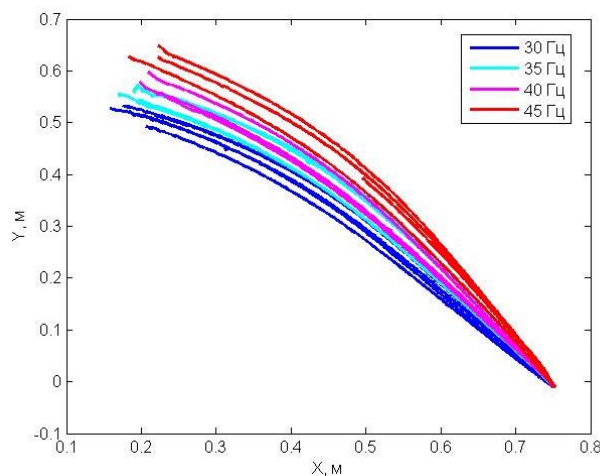


Рис. 21. Пример свободного движения диска из одной точки при различных частотах вентилятора



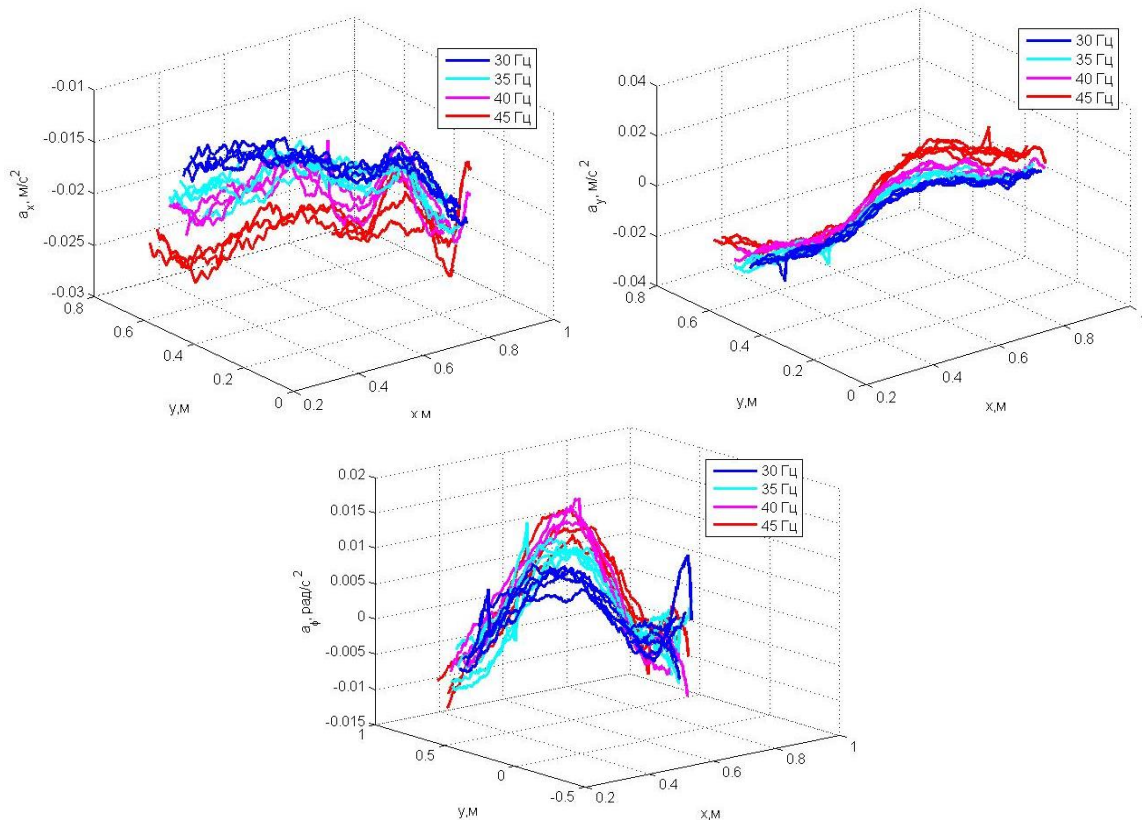


Рис. 22. Оценка линейных и углового ускорения при движении из одной точки с разными частотами вентилятора

### 3.2. Составление карты возмущений

Для нахождения карты возмущений диск запускался из разных начальных положений на столе с нулевой начальной скоростью. Частота промышленного вентилятора – 35 Гц. Диск двигался свободно до удара о борт стола. Отрезки траектории на столе изображены на рис. 23. Из рисунка можно увидеть, что в некоторых областях на столе диск может двигаться свободно достаточно долго, тогда как в других диск почти сразу “сносит” на борт стола.

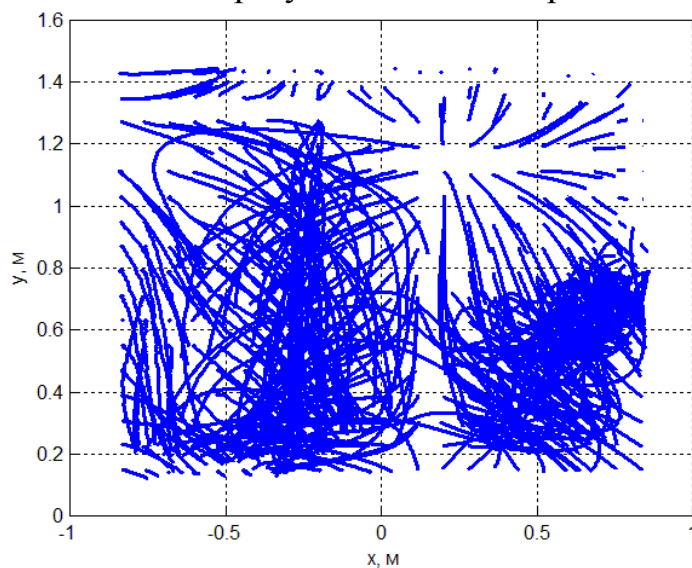


Рис. 23. Траектории неуправляемого движения диска на столе

На свободном участке траектории определялись ускорения с помощью фильтра Калмана, а затем эти данные использовались для нахождения некоторой аппроксимирующей поверхности с помощью метода наименьших квадратов. Поверхность аппроксимировалась с помощью полинома 5-го порядка от переменных  $x$  и  $y$ . На рис. 24-26 представлен вид полиномиальных поверхностей для линейных и углового ускорений, а также гистограммы отклонений измеренных ускорений от найденных поверхностей. Среднеквадратическое отклонение для линейных ускорений составило около  $0.01 \text{ м/с}^2$ , а для угловых ускорений –  $0.01 \text{ рад/с}^2$ .

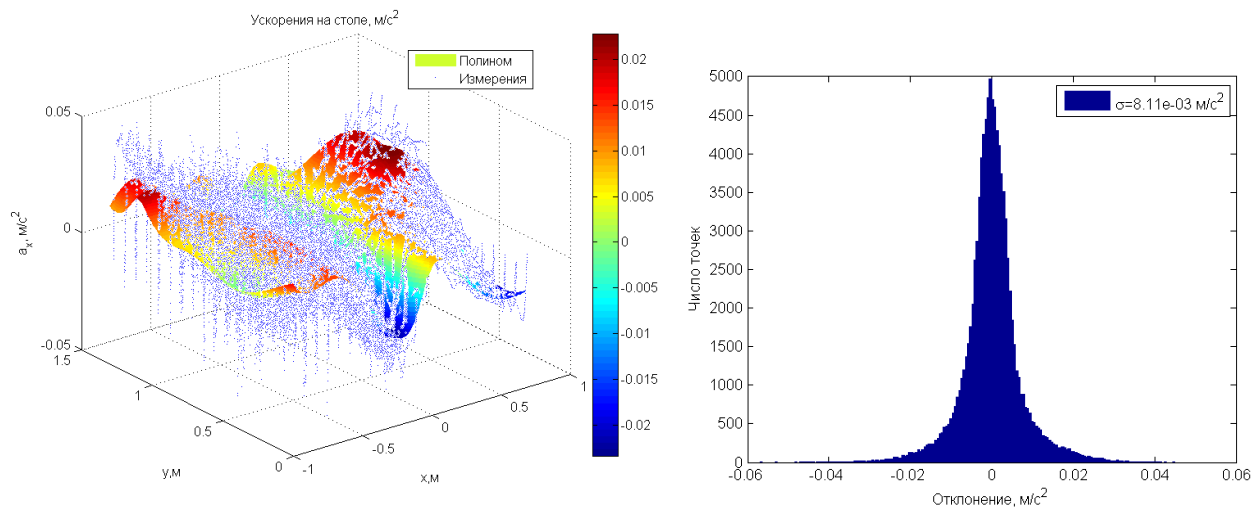


Рис. 24. Полиномиальная поверхность и отклонения от неё для ускорения по оси  $Ox$

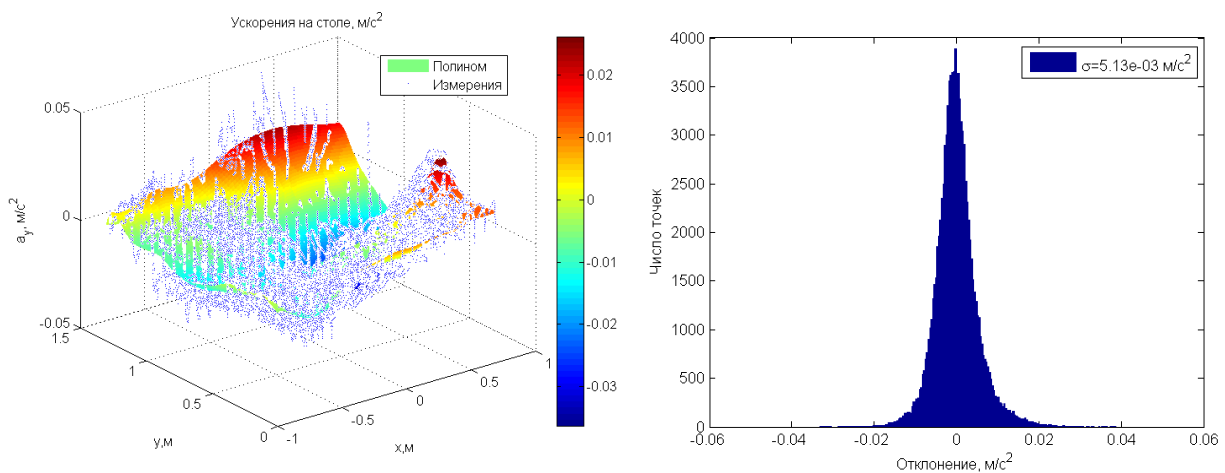


Рис. 25. Полиномиальная поверхность и отклонения от неё для ускорения по оси  $Oy$

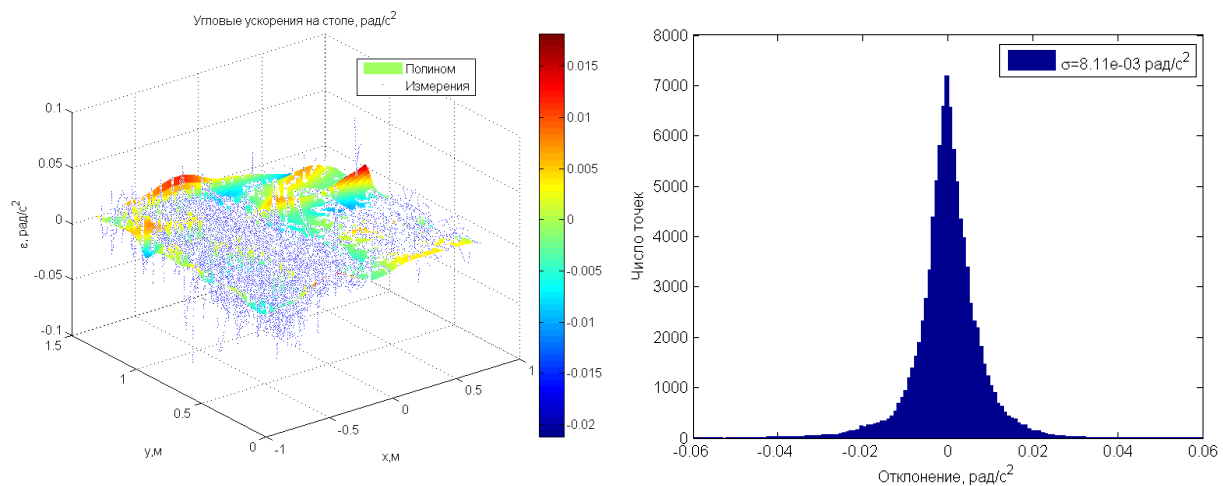


Рис. 26. Полиномиальная поверхность и отклонения от неё для углового ускорения

На полиномиальных поверхностях для компонент линейных ускорений строится карта их величин и направлений, изображенная на рис. 27. На поверхности стола есть несколько положений равновесия, где на диск почти не действуют возмущения, но из них только одно является устойчивым и располагается слева внизу около борта. Если сравнить оценку ускорений на рис. 27 и оценку гравитационных ускорений на рис. 10, то можно увидеть корреляцию в направлении ускорений в некоторых областях стола, однако положение равновесия несколько смещены, что можно объяснить влиянием аэродинамической составляющей, вызванной неравномерностью истечения воздуха из отверстий стола.

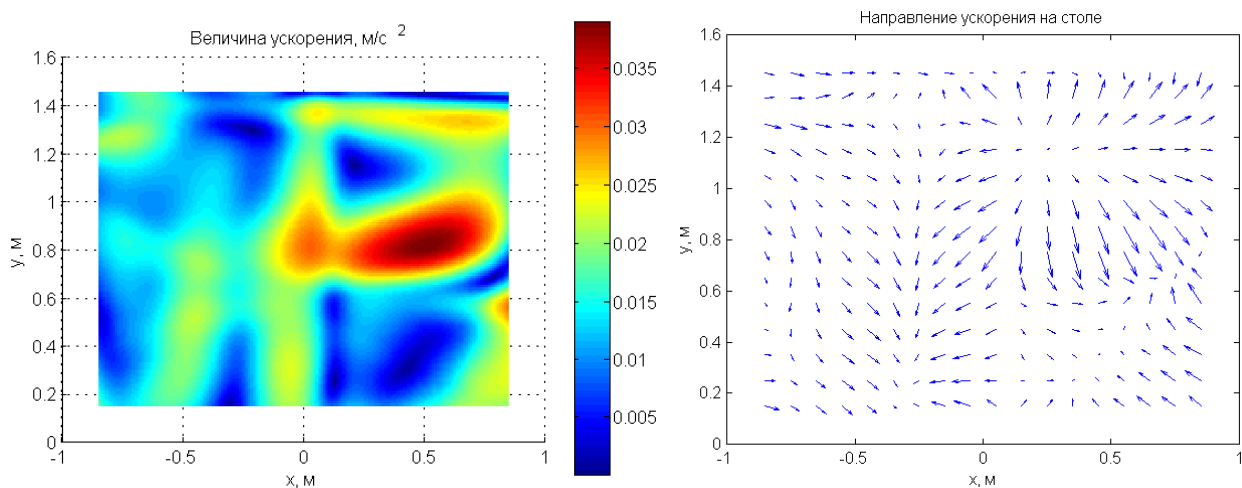


Рис. 27. Величина и направление линейного ускорения

Интересно распределение углового возмущающего ускорения на поверхности стола, изображенное на рис. 28. Наибольший крутящий момент действует на макеты вдоль борта стола. Это можно объяснить тем, что, возможно, выход

дящий из промежутка между столом и диском воздух начинает взаимодействовать со стенкой и отраженный поток создает дополнительный момент силы.

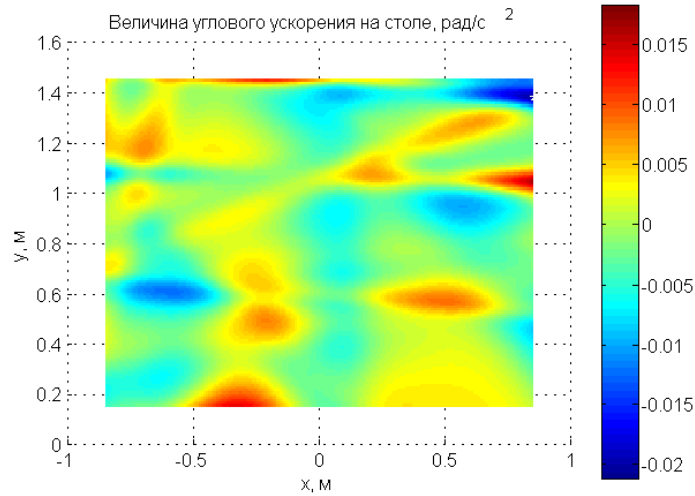


Рис. 28. Величина углового ускорения

Теперь проверим, насколько соответствует карта ускорений (рис. 27 и 28) для конкретных траекторий. Рассмотрим в качестве примера набор конкретных свободных траекторий, изображенных на рис. 29, при движении из одной точки. На этих траекториях действовали ускорения, изображенные на рис. 30а тонкой линией, а ускорения в точках траектории согласно карте изображены на рис. 30а жирной линией. На рис. 30б изображена их разность. Максимальные отклонения достигают значения около 0.015 м/с, однако в основном они находятся в пределах величины 0.01 м/с. Таким образом, карта ускорений адекватно приближает уровень ускорений в конкретных точках траектории диска на столе.

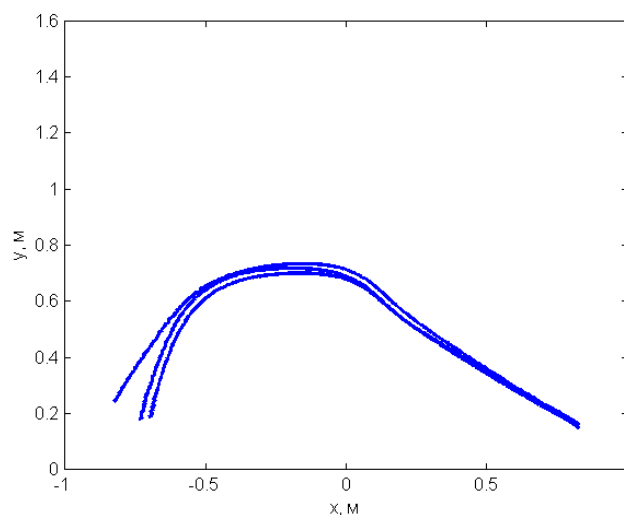


Рис. 29. Контрольные траектории диска на столе

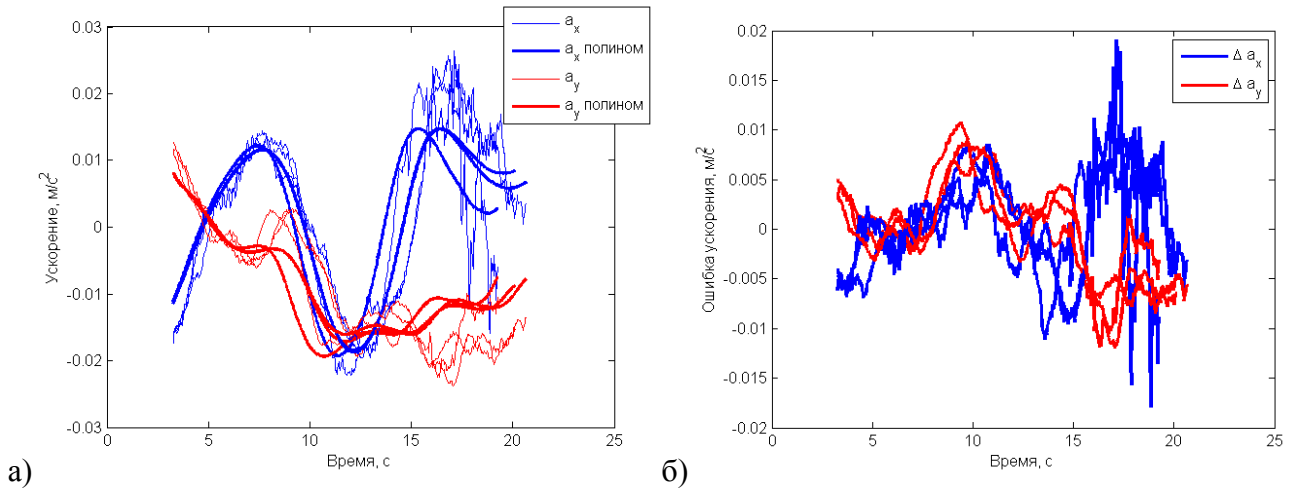


Рис. 30. Ускорения диска по измерениям и по полиномиальной модели (а) и их разность (б)

## 4. Учет возмущений в алгоритмах управления

Рассмотрим, как учет возмущающих ускорений в алгоритмах управления влияет на характеристики движения. В качестве примера возьмем алгоритм ляпуновского управления для поддержания движения вдоль требуемой траектории.

### 4.1. Алгоритм управления

Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} (K_1 \mathbf{e}_r^2 + \mathbf{e}_v^2),$$

где  $\mathbf{e}_r = [\mathbf{q}^T - \mathbf{q}_d^T]^T$  – ошибка траектории,  $\mathbf{q} = [x, y, \varphi]^T$  – обобщенный вектор положения макета,  $\mathbf{q}_d$  – опорная траектория,  $\mathbf{e}_v = [\dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{q}}_d^T]^T$  – ошибка скорости,  $K_1$  – диагональная положительно-определенная матрица размером 3x3, элементы которой положительные. Пусть модель движения макета по столу учитывает только управляющее воздействие:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор управления. Тогда производная кандидат-функции Ляпунова в силу системы

$$\dot{V} = K_1 \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_v \cdot \dot{\mathbf{e}}_v = \mathbf{e}_v \cdot [K_1 \mathbf{e}_r + \dot{\mathbf{e}}_v] = \mathbf{e}_v \cdot [K_1 \mathbf{e}_r + \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{q}}_d].$$

Для выполнения теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости потребуем, чтобы  $\dot{V} \leq 0$  ( $\dot{V} = 0$  только при  $\mathbf{e}_v = 0$ ). Для этого должно выполняться соотношение

$$K_1 \mathbf{e}_r + \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{q}}_d = -K_2 \mathbf{e}_v,$$

где  $K_2$  – диагональная положительно определенная матрица размером 3x3. Отсюда получаем выражение для управляющего воздействия:

$$\mathbf{u} = -K_r \mathbf{e}_r - K_v \mathbf{e}_v + \ddot{\mathbf{q}}_d. \quad (9)$$

Алгоритм управления (9) совпадает с классическим пропорционально-дифференциальным (ПД) регулятором в случае, если для опорной траектории  $\ddot{\mathbf{q}}_d = 0$ . Так как уравнения движения не имеют перекрестных членов, то они разбиваются на систему независимых уравнений вида:

$$\ddot{q} = -k_1 e_r - k_2 e_v, \quad (10)$$

где  $q$  — компонента обобщенного вектора,  $k_1 > 0, k_2 > 0$ . Собственные числа однородной части уравнения (10) определяются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1}}{2}.$$

Для обеспечения апериодического движения можно выбрать коэффициенты так, чтобы выполнялось соотношение:

$$k_1 = \frac{k_2^2}{4}. \quad (11)$$

Чтобы выбрать коэффициенты  $k_1, k_2$ , можно задаться целью обеспечить ненасыщение управляющего воздействия с максимальным абсолютным значением  $u_{\max} > 0$  при заданных возможных отклонениях траектории  $e_r > 0$  и  $e_v > 0$ . Для этого нужно решить относительно  $k_2$  следующее уравнение:

$$-k_1 e_r - k_2 e_v = -u_{\max}. \quad (12)$$

Подставляя соотношение (11) в (12), получим

$$k_2^2 e_r + 4k_2 e_v - 4u_{\max} = 0.$$

Отсюда:

$$k_2 = \frac{-2e_v \pm 2\sqrt{e_v^2 + e_r u_{\max}}}{e_r}.$$

Так как коэффициент  $k_2 > 0$ , тогда нужно выбрать один корень

$$k_2 = \frac{-2e_v + 2\sqrt{e_v^2 + e_r u_{\max}}}{e_r}. \quad (13)$$

Таким образом, можно применить алгоритм управления (9) с коэффициентами, определенными соотношениями (11) и (13).

## 4.2. Моделирование управляемого движения

Проведем численное моделирование управляемого движения макета на поверхности аэродинамического стола. Пусть максимальная тяга, создаваемая вентиляторными двигателями, составляет 2Н, плечо составляет 0.2 м, масса макета 5 кг и момент инерции 1.5 кг·м<sup>2</sup>. Тогда  $u_{\max} = 0.4$  м/с<sup>2</sup> для поступательного движения и 0.5 рад/с<sup>2</sup> для углового движения. Максимальные отклонения траектории от опорной пусть будут равны: по положению — 1 м, по скорости — 0.1 м/с, по углу —  $\pi$  и  $\pi/10$  рад/с — по угловой скорости.

Сначала проведем моделирование для движения с моделью (8), учитывающей влияние только управляющего воздействия. В качестве опорной траектории возьмем неподвижную точку на столе, т.е. целью алгоритма управления яв-

ляется переход из начальной точки в некоторую заданную на столе. Пример траектории управляемого движения макета и отклонения траекторий на столе показан на рис. 31. Траектория представляет собой прямую, оканчивающуюся в требуемом положении, а отклонение траектории экспоненциально сходится к нулю.

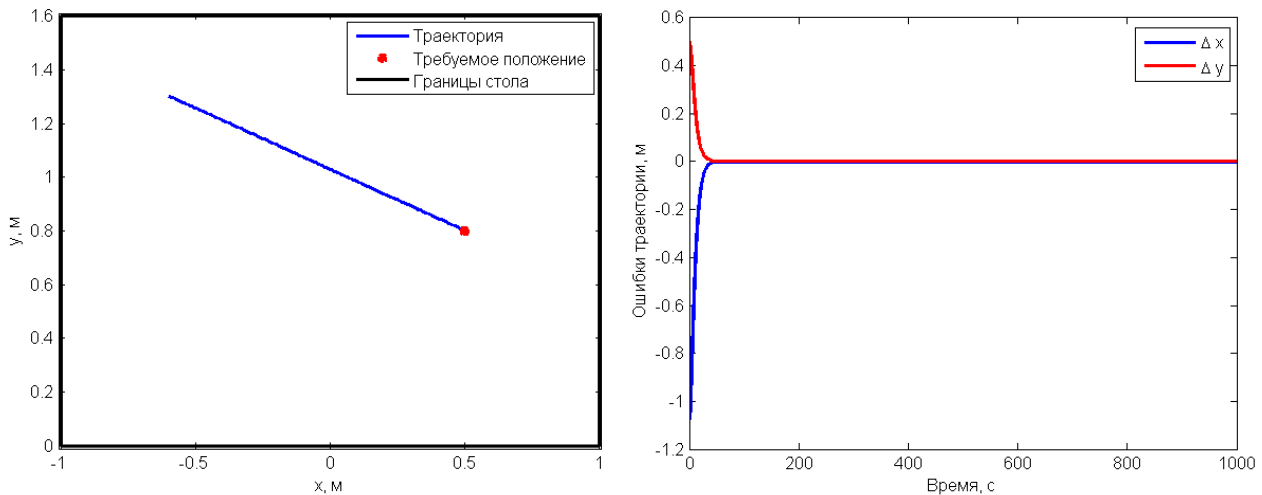


Рис. 31. Траектория движения и отклонения траектории в отсутствие возмущений

Теперь добавим в моделирование движения возмущения – силы и моменты, действующие на макет. Будем задавать возмущения в виде полиномов 5-го порядка, коэффициенты которых были определены в предыдущем разделе. Так как отклонение измеренных ускорений от полиномиальной поверхности имеет гауссово распределение (рис. 24-26, справа), то добавим к возмущениям случайную составляющую со среднеквадратическим отклонением  $\sigma = 8 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup> при линейном движении и  $\sigma = 8 \cdot 10^{-3}$  рад/с<sup>2</sup> — при угловом. Однако закон управления (10) оставим прежним, т.е. в алгоритме управления эти возмущения не будут учтены. На рис. 30а слева представлен пример траектории при движении из начальной точки в заданную, из которого видно, что вследствие действия возмущений макет не приходит в окрестность требуемой точки, а останавливается в положении равновесия на некотором расстоянии от этой точки. Как видно из рис. 30б ошибки траектории стабилизируются. Отклонение координат  $\Delta q_i$  можно вычислить, если приравнять пропорциональную часть регулятора (дифференциальная равна нулю, так как макет остановился) к действующему постоянному возмущению  $D_i$ :

$$k_1 \Delta q_i = D_i.$$



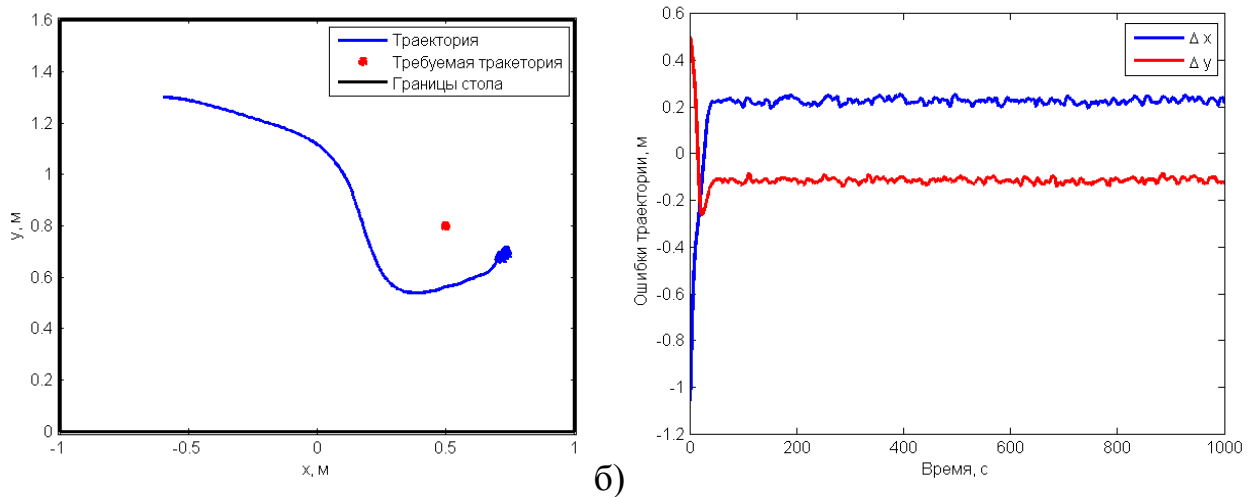


Рис. 32. Траектория движения (а) и отклонения траектории (б) под воздействием возмущений

Однако в случае если в алгоритме управления учитывать возмущающие ускорения (только постоянную их составляющую), то постоянного отклонения траектории можно избежать. Пусть

$$u_i = -k_1 \Delta q_i - k_2 \Delta \dot{q}_i - D_i,$$

т.е. управление будет компенсировать возникающие в каждой точке поверхности стола возмущения. В этом случае траектория движения и отклонения представлены на рис. 33. Ошибки траектории экспоненциально стремятся к нулю и после достижения требуемого положения они не превышают нескольких сантиметров.

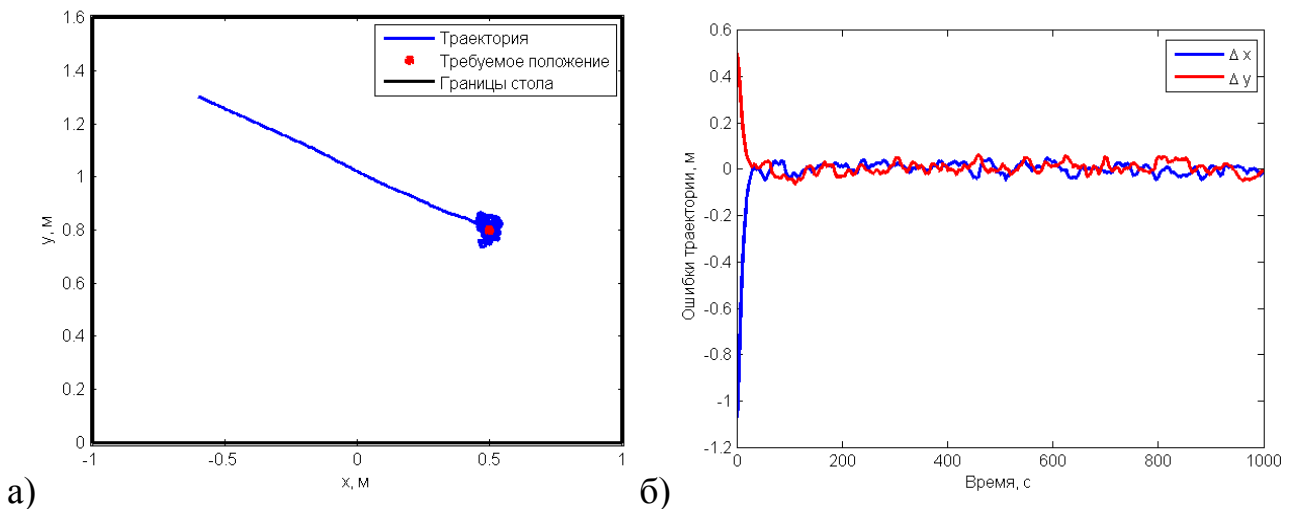


Рис. 33. Траектория движения (а) и отклонения траектории (б) при учете возмущений в управлении

При моделировании относительного движения двух спутников в групповом полете может потребоваться облет одного спутника другим. Для этого можно задать требуемую траекторию в виде круговой траектории по координатам и постоянное угловое вращение с угловой скоростью, равной угловой скорости движения по кругу,

$$x_d = A \sin(\omega t) + x_0,$$

$$y_d = A \cos(\omega t) + y_0,$$

$$\varphi_d = \omega t + \varphi_0,$$

где  $A$  – радиус окружности,  $(x_0, y_0)$  – центр окружности,  $\varphi_0$  – начальная ориентация. Это движение соответствует траектории слежения, когда управляемый макет движется вокруг другого макета, а камера слежения при ее наличии всегда направлена на второй аппарат. Пример управляемого движения в случае, если возмущения не учитываются в алгоритме управления и в случае если они включены, представлен на рис. 31. На левом рисунке видно, что траектория движения далека от требуемой окружности, так как неучтенные возмущения смещают траекторию. Справа же можно увидеть, что траектория близка к требуемой окружности. Таким образом, этот пример также демонстрирует, насколько критичным для выполнения требуемого эксперимента является исследование и учет возмущений в алгоритмах управления макетами.

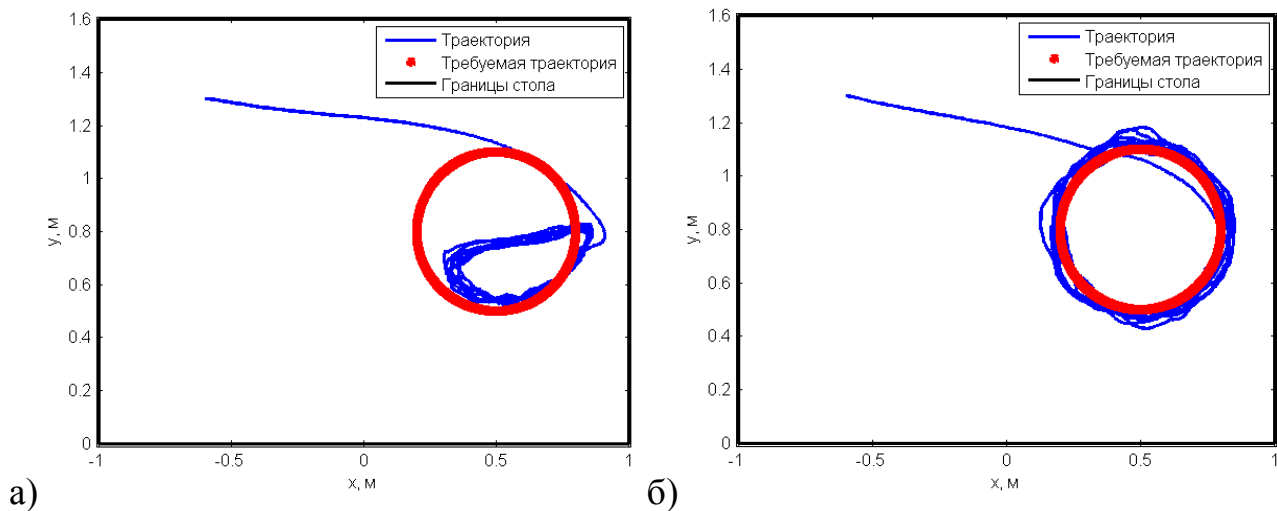


Рис. 31. Траектория движения для отслеживания цели без учета (слева) и с учетом (справа) возмущений в алгоритме управления

## **Заключение**

Использование лабораторных стендов для наземного тестирования систем и алгоритмов управления спутниками необходимо для повышения уверенности их успешной работы в орбитальном полете. Однако сами лабораторные стенды необходимо изучать на степень соответствия движения макетов орбитальному движению спутников, чтобы правильно проецировать результаты экспериментов на реальный полет. Поэтому настоящая работа по изучению возмущений, действующих на макеты систем управления на аэродинамическом столе, является неотъемлемым этапом тестирования алгоритмов. Разработанная методика экспериментального определения возмущений является достаточно универсальной, что позволяет использовать ее и на других стендах со схожим принципом действия. Используемые модели возмущений и движения макетов по столу являются, с одной стороны, весьма простыми, но в то же время позволяют получить достоверные результаты, применимые для тестирования алгоритмов.

## Литература

1. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Стенд КОСМОС для моделирования движения макетов системы управления микроспутников и обзор мировых аналогов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 138. 32 с.
2. Tsiotras P. ASTROS: A 5 DOF experimental facility for research in space proximity operations // Proc. 37th AAS Guid. Control Conf. Breckenridge. 2014. P. 14.
3. Sabatini M. et al. Image based control of the “PINOCCHIO” experimental free flying platform // Acta Astronaut. Elsevier, 2014. Vol. 94, № 1. P. 480–492.
4. Ferguson J. Multivariable curve interpolation // J. ACM. 1964. Vol. 11, № 2. P. 221–228.
5. Коптев М.Д., Прошунин Н.Н., Иванов Д.С. Определение движения макетов системы управления микроспутников на аэродинамическом столе с использованием видеокамеры // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 109. 32 с.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Определение гравитационных возмущений.....	5
1.1. Построение сетки опорных точек.....	7
1.2. Нахождение формы поверхности стола.....	8
2. Аэродинамические возмущения.....	12
3. Экспериментальная оценка возмущений.....	18
3.1. Проверка стационарности возмущений.....	19
3.2. Составление карты возмущений.....	21
4. Учет возмущений в алгоритмах управления.....	25
4.1. Алгоритм управления .....	25
4.2. Моделирование управляемого движения .....	26
Заключение.....	30
Литература .....	31