

G. P. Terehov, V. E. Pavlovsky, Control of the spherical robot by means of fly-wheels,
Keldysh Institute preprints, 2017, 016

DOI: 10.20948/prepr-2017-16

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 79.139.215.77

December 17, 2023, 00:50:00





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Терехов Г.П., Павловский В.Е.

Управление роботом-шаром
с помощью маховиков

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Терехов Г.П., Павловский В.Е.
Управление роботом-шаром с помощью маховиков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017.
№ 16. 31 с. doi:[10.20948/prepr-2017-16](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-16)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-16>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Г.П.Терехов, В.Е.Павловский

Управление роботом-шаром
с помощью маховиков

Москва 2017 г

Г.П.Терехов, В.Е.Павловский

Управление роботом-шаром с помощью маховиков

Рассматривается теоретическая механическая модель робота-шара с маховиками, расположенными внутри шара. Описанная конструкция предназначена для управления движением шара по различным траекториям. В работе построены и исследованы алгоритмы управления шаром по базовым траекториям, рассмотрены движения от вращения на месте и движения по отрезку прямой до базовых движений по криволинейным траекториям. Рассмотрены динамические модели шара-робота, разные модели трения, в качестве основной модели трения рассмотрена двухпараметрическая модель. В работе обоснована техническая возможность реализации шара-робота с маховиками.

Ключевые слова : робот-шар, динамические модели, двухпараметрическая модель трения, алгоритм управления шаром с маховиками.

Georgy P.Terehov, Vladimir E.Pavlovsky

Control of the spherical robot by means of fly-wheels

The theoretical mechanical model of the spherical robot with the flywheels located in a sphere is considered. The described design intends for motion control of a sphere on various trajectories. In work control algorithms of a sphere on basic trajectories are investigated, the movements from rotation on the point and the movements on a straight line piece before the basic movements on curvilinear trajectories are considered. Dynamical models of a sphere robot, different models of friction are considered, as the main model of friction the two-parametrical model is considered. In work technical capability of realization of a sphere robot with flywheels is proved.

Key words : the spherical robot, dynamic models, two-parametrical model of friction, control algorithm of a sphere by means a flywheels.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-08-00880-а, 16-01-00131-а.

1 Введение

В последнее время появляется значительное разнообразие роботов, отличающихся как по конструкции, так и по назначению. В частности, сформировался отдельный класс мобильных роботов - роботы, движение которых основано на принципе качения. Среди них интересным представляется рассмотрение роботов сферической формы, имеющих такие преимущества перед иными реализациями, как герметичность робота и отсутствие мест сопряжений и сочленений, являющихся наиболее уязвимыми для различного рода неблагоприятных воздействий. Такая форма аппарата способствует практическому применению робота в исследовательских и разведывательных целях, например для работы в зонах с агрессивной внешней средой (места аварий, поверхности других планет и т.д.)

Спектр различных решений и реализаций внутренних механизмов, приводящих в движение такие аппараты (которые, к слову, активно развиваются в разных странах мира—Швеция [1], США, Израиль, Россия и т.д.) тоже весьма и весьма широк. Большое количество работ использует принцип смещения центра масс системы, такие как различные маятниковые роботы, или роботы с движущимися внутренними массами. Представляют интерес и аппараты, движущиеся за счет деформации корпуса. Настоящая работа посвящена иному принципу—принципу гиростата, подразумевающего наличие внутри шара системы приводов, обеспечивающей создание внутреннего кинетического момента. В частности, рассмотрен пример робота, внутри которого на трех взаимно-ортогональных осях расположены три маховика, создающие управляющий момент.

Исследование движения и планирования траекторий подобного аппарата на абсолютно шероховатой плоскости были предприняты в [2]. Затем в [3] была доказана управляемость системы для неголономной постановки и явно указаны алгоритмы управления роботом. В [4] результаты были обобщены на случай плоскости с трением, в частности, рассмотрены модели сухого трения Кулона, вязкого трения. Важной особенностью полученных моделей было наличие двух интегралов кинетического момента относительно точки контакта (а в случае отсутствия трения верчения - трех).

Вместе с тем, в последнее время появляется ряд работ, предполагающих существенно измененные модели трения, дополняющие и обобщающие модель сухого трения Кулона. Обобщение происходит за счет того, что точечное кулоновское взаимодействие катящегося тела с плоскостью заменяется на взаимодействие вдоль некоторой области (пятна контакта). Примером этого подхода является рассмотрение пятна контакта в виде круга, такая модель была впервые предложена Контенсу [9], а далее развита В.Ф.Журавлевым [8]. При таком подходе можно говорить о плоских деформациях сферической оболочки шара вблизи контакта с абсолютно твердой плоскостью. Однако,

есть и подход, при котором пятно контакта представляет собой не плоскую область, а сферический сегмент, что соответствует предположению о деформации как шара, так и плоскости вблизи их контакта. Такая модель была предложена и затем развита А.В.Карапетяном в работах [5],[6]. Интересно, что эта модель зависит от двух параметров и при определенных их значениях переходит в модели Кулона и Контенсу-Журавлева. В данной работе используется двухпараметрическая модель трения [5].

2 Динамика и управление роботом-шаром

2.1 Описание модели. Уравнения движения

Будем рассматривать на неподвижной плоскости Sxy шар радиусом R с центром в точке O . Внутри сферической оболочки на трех взаимно-ортогональных осях находятся три одинаковых диска-маховика массой m и радиусом ρ . J_1 и J_2 —экваториальный и полярный моменты инерции соответственно. Расстояние от точки пересечения осей G , ортогональных маховикам до центра каждого из маховиков (точек A_i) равно a , и центры маховиков лежат в экваториальной плоскости шара. Масса шара без учета маховиков— M . Далее, предположим, что центр масс робота находится в точке O , т.е. совпадает с геометрическим центром шара. Тензор инерции конструкции (без учета маховиков) предполагается шаровым с моментом инерции J .

Введем подвижную систему координат $Oe_1e_2e_3$ с центром в точке O , выбор базисных векторов e_i предполагается сонаправленным осям маховиков (отрезкам GA_i). Переход к подвижной системе координат осуществляется посредством матрицы перехода $D \in SO(3)$. Конфигурационное многообразие системы суть $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$. Три угловые скорости вращения маховиков вокруг своей оси обозначим за α_i . Затем перейдем к безразмерным координатам $x' = \frac{x}{R}, y' = \frac{y}{R}$, а радиус-вектор и вектор скорости обозначим $\mathbf{r}' = (x'; y')^T$ и $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ (Далее, везде под физическими характеристиками, такими как сила, скорость и.т.д понимается именно безразмерная величина, если не оговорено противное).

Для исследования движения системы будем применять общие теоремы динамики, причем уравнение на импульс разделим на $\hat{M}R$ ($\hat{M} = M + 3m$)—полная масса системы, а уравнение на кинетический момент - на величину $\hat{J} = \frac{ma^2}{3}$. Таким образом, обозначив получившиеся силы и моменты сил за f и μ соответственно, имеем следующую систему уравнений (по вертикальной

оси Sz движение предполагается невозможным):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + C\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \Omega(I\boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\alpha}) &= D\boldsymbol{\mu} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Уравнение на кинетический момент записано в подвижном базисе и ω_i —компоненты вектора угловой скорости в нем. Обезразмеренный тензор инерции "пассивной" части обозначен за I , за C —обезразмеренный аналог тензора инерции "управляющей" части. (По сути, это диагональная матрица состоящая из полярного момента инерции каждого маховика) Матрицы I и C имеют следующий вид:

$$I = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 1 \\ 1 & \nu & 1 \\ 1 & 1 & \nu \end{pmatrix}$$

$$C = \text{diag}\{c, c, c\}$$

$$c = \frac{3J_2}{ma^2}$$

$$\nu = 4 + 3\frac{J_2 + J + 2J_1}{ma^2}$$

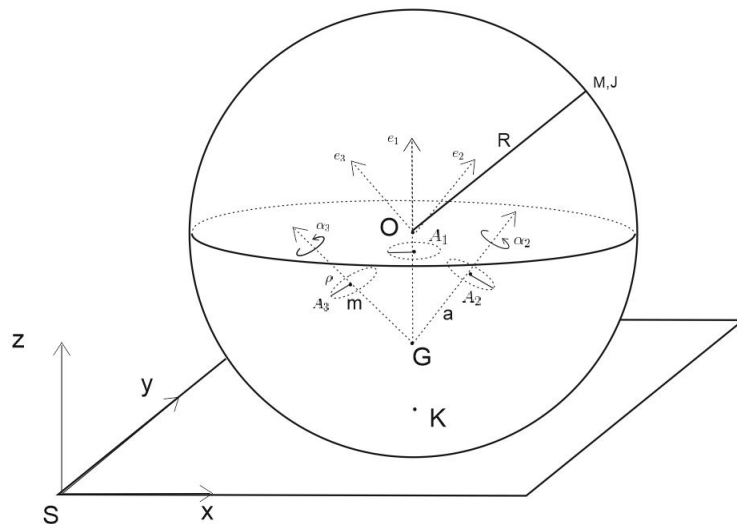


Рис. 1: Модель шара на плоскости

Стоит отметить, что данная система является вполне управляемой, что доказано в [3]. Интересно, что управляемость сохраняется при замене ортогональности осей на некопланарность и даже при аннулировании одного из

маховиков. Однако, в последнем случае, очевидно, не любой закон движения допустим из произвольной конфигурации. В частности, при двух некомпланарных маховиках невозможно такое движение из состояния покоя, что угловая скорость направлена по нормали к плоскости этих маховиков. Для реализации подобного движения необходимо сначала изменить конфигурацию сферы.

Далее, для замыкания системы, необходимо задать условия контактного взаимодействия между сферической поверхностью робота и опорной плоскостью. Принимая во внимание, что $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 - b[\mathbf{e}_z; \mathbf{f}]$, где $b = \frac{3\hat{M}R^2}{ma^2}$, $\boldsymbol{\mu}^0$ — дополнительно возникающие моменты в контакте, а также уравнение на импульс, можно отметить что верно следующее утверждение:

Утверждение 1.1

Если $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$, то система уравнений допускает три первых интеграла кинетического момента относительно точки контакта.

В частности, это утверждение выполняется для таких типов контактного взаимодействия как движение по абсолютно гладкой плоскости, движение по абсолютно шероховатой плоскости (неголономная модель), а также для законов вязкого трения и сухого трения Кулона.

2.2 Двухпараметрическая модель трения

Реальные эксперименты показывают наличие пятна контакта между сферической поверхностью робота и опорной плоскостью. Наиболее правдоподобно предположение, что оно представляет собой сферический сегмент. Согласно [5],[6] в каждой точке этого сегмента выполнен локально закон сухого трения Кулона. Пусть радиус сферы, задающей этот сегмент — R_f , а радиус сегмента — R_s . R — по-прежнему радиус шара. Таким образом, пятно контакта зависит от двух параметров $\delta = \frac{R}{R_f}$ и $\varepsilon = \frac{R_s}{R}$. Полученные в [5],[6] выражения

для сил и моментов :

$$\begin{aligned}
f_i &= -\frac{3kN}{4\pi(1 - \cos \beta_0)^{3/2} \hat{M} R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{u_i} d\beta \\
\mu_i^0 &= -\frac{3kbN}{4\pi(1 - \cos \beta_0)^{3/2} \delta \hat{M} R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{w_i} d\beta \\
I_{u_i} &= \int_0^{2\pi} \frac{u_i}{||u||} d\alpha \\
I_{w_i} &= \int_0^{2\pi} \frac{w_i}{||u||} d\alpha \\
B(\beta) &= \sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0} \sin \beta \\
\mu &= \mu^0 - b[\mathbf{e}_z; \mathbf{f}]
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
u_I &= u(1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) + \delta^{-1}(\omega_I \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha + \omega_{II}(1 - \cos \beta - \\
&\quad - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) - \omega_{III} \sin \beta \sin \alpha) \\
u_{II} &= -u \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha - \delta^{-1}(\omega_{II} \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha + \omega_I(1 - \cos \beta - \\
&\quad - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha) + \omega_{III} \sin \beta \cos \alpha) \\
u_{III} &= u \sin \beta \cos \beta \cos \alpha + \delta^{-1} \sin \beta (1 - \cos \beta)(\omega_I \sin \alpha - \omega_{II} \cos \alpha) \\
w_I &= u \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha + \delta^{-1}(\omega_I(1 - \cos \beta)^2 - \omega_{II}(1 - \cos \beta) \sin \beta \cos \alpha) \\
w_{II} &= u(1 - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) + \delta^{-1}(\omega_{II}(1 - \cos \beta)^2 - \\
&\quad - \omega_{III}(1 - \cos \beta) \sin \beta \sin \alpha) \\
w_{III} &= \sin \beta (-u \sin \alpha + \delta^{-1}(-(1 - \cos \beta)(\omega_I \cos \alpha + \omega_{II} \sin \alpha) + \omega_{III} \sin \beta))
\end{aligned}$$

Здесь g —ускорение свободного падения, N —сила нормальной реакции опоры, u —скорость скольжения шара, деленная на его радиус, ось 1 направлена по скорости скольжения, ось 3 вертикальна, а ось 2 дополняет репер до правой тройки. Этот базис в дальнейшем будем именовать *вспомогательным*, а вектора в нем индексировать римскими цифрами во избежание путаницы с СК жестко связанной с роботом. Ω —вектор угловой скорости в этой СК (таким образом, $\omega_{III} \equiv \omega_z$). Далее, $\sin \beta_0 = \frac{R_s}{R_f}$, k —коэффициент трения.

Развивая идею, предложенную в [7], заметим, что если перейти к сфери-

ческим координатам $r, \theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$\begin{aligned}\delta u &= r \cos \theta_1 \\ \omega_I &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \omega_{II} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \omega_{III} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3\end{aligned}$$

то функции f и μ не зависят от радиуса сфер r . Угловые переменные θ_k характеризуют отношения между скольжением, качением, верчением и закручиванием, поэтому в дальнейшем они будут называться *режимными углами*. Таким образом, будем считать функции f и μ определенными на единичной трехмерной сфере \mathcal{S}^3 . Принимая во внимание зависимость от параметров пятна контакта $(\delta; \varepsilon)$, стоит отметить, что гладкость по первому параметру и негладкость по второму была доказана в [5].

Для случая $\delta = 0$ выражения примут несколько иной вид и соответствуют модели Контенсу-Журавлева [8]. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует модели Кулона, что разобрано в [4]. Далее, если не оговорено противное, рассматривается когда $\varepsilon\delta \neq 0$.

2.3 Поворот робота на месте

Перейдем к построению алфавитных движений робота. Для начала, рассмотрим случай, когда центр масс аппарата неподвижен, а шар совершает вращение вокруг вертикали. Для режимных углов в этом случае верно, что

$$\begin{cases} \theta_2 = \pi/2 \\ \theta_3 = \pi/2. \end{cases}$$

Таким образом, возникает режим чистого верчения, где все компоненты сил и моментов, кроме μ_z равны нулю. Момент трения верчения $\mu_z = \mu_z^0 = \text{const} = \mu$

$$\mu_z = \frac{-3kgb}{2R(1 - \cos \beta_0)^{3/2}} \int_0^{\beta_0} \sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0} \sin^2 \beta d\beta$$

вследствие чего можно выписать проинтегрированное уравнение на кинетический момент:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{c}(\mu t E - \omega(t) I) \mathbf{e}$$

Где \mathbf{e} —неподвижный единичный вектор вертикали в подвижной системе координат. Считая, что маховики приводятся в движение электродвигателями постоянного тока (т.е. $c\dot{\alpha}_i = \varkappa_i U_i - \varkappa_2 \alpha_i$, где U —размерное напряжение, а $\varkappa_{1,2}$ —постоянные электродвигателей с учетом обезразмеривания), приведем графики управляющих напряжений для поворота на угол $\pi/2$ за время $2T$ в случае треугольного профиля угловой скорости верчения. (Т.е.

$\omega(t) = \mathcal{E}(T - |t - T|)$, где \mathcal{E} —постоянное по модулю угловое ускорение равное $\frac{\pi}{2T^2}$. Будем брать начальные условия нулевыми по скоростям.

Для вектора $\mathbf{e} = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$ имеем, что все компоненты вектора одинаковы. Для них графики таковы:

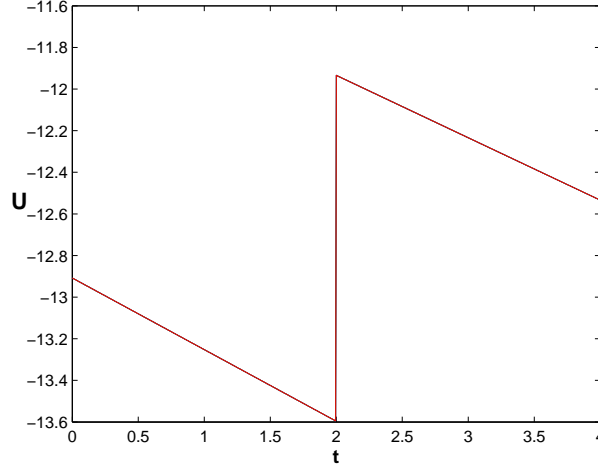


Рис. 2: Управляющие напряжения для $\mathbf{e} = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

Для вектора $\mathbf{e} = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$, и для несобственного вектора $\mathbf{e} = (1; 0; 0)$ имеем следующую картину:

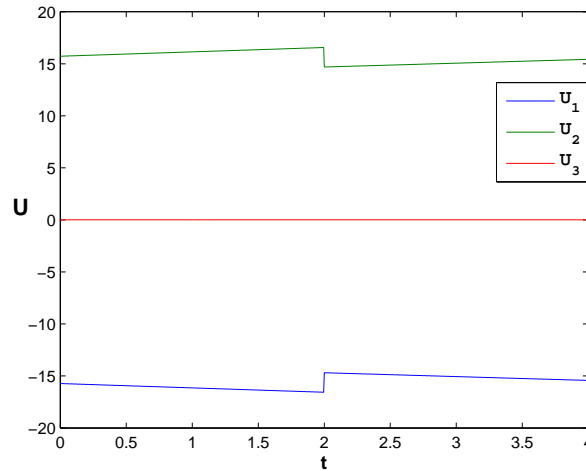


Рис. 3: Управляющие напряжения для $\mathbf{e} = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$.

Отметим, что величину μ в данном случае можно интерпретировать как момент трения покоя, который нужно преодолеть, чтобы начать движение. Поверхность $\mu(\delta, \varepsilon)$, показывающая зависимость этого момента от значений параметров пятна контакта показана на рисунке. Можно сделать вывод, что

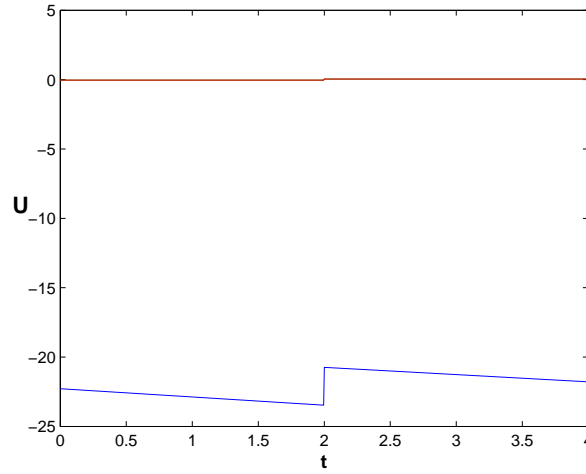


Рис. 4: Управляющие напряжения для вектора $\mathbf{e} = (1; 0; 0)$

влияние на эту величину оказывает только параметр δ , характеризующий жесткость плоскости. В заключении можно отметить, что если маховики робота приводятся в движение двигателями Махон-RE-10, то шар сможет начать движение по плоскости с $\delta < 0.02$, для двигателя ДПМ-20-Н2 пороговое значение $\delta = 0.03$.

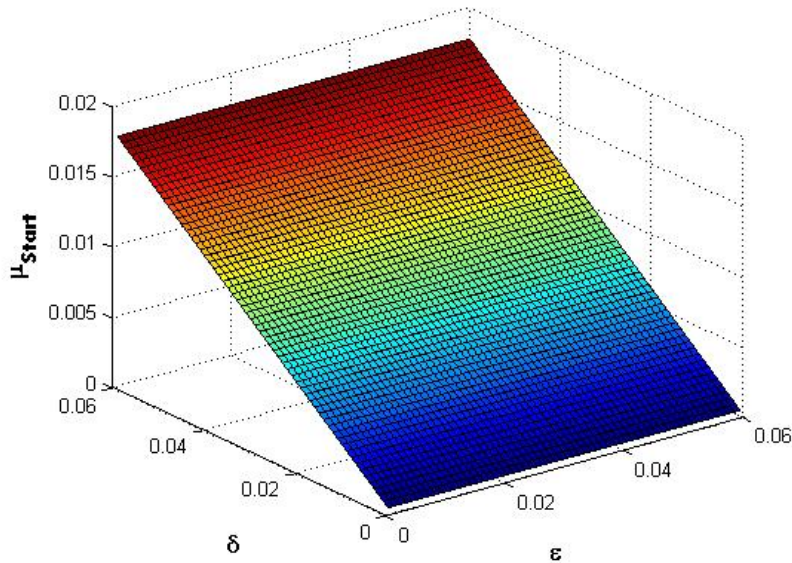


Рис. 5: Момент трения покоя.

2.4 Движение робота по отрезку

Пусть имеет место движение вдоль некоторой прямой линии (без ограничения общности—оси Sx без верчения, т.е. $\omega_z = 0$). В сферических координ-

натах режимных углов это соответствует окружности $\begin{cases} \theta_2 = \pi/2 \\ \theta_3 = 0. \end{cases}$ Т.е. режим движения полностью определяется лишь углом θ_1 , который для удобства будем обозначать просто θ .

При таких условиях $f = f_x$, а $\mu = \mu_y^0 - b f_x$ (Равенство нулю остальных компонент в условии $\omega_I = 0$ показано в [6]). В силу того, что $f_3 \equiv 0$ имеем для безразмерной силы нормального давления n , то что $n = \frac{g}{R}$ (Что в размерных переменных соответствует условию $N = \hat{M}g$). Выражения для f_x и μ_y^0 будут такими:

$$f(\theta) = -\frac{3kg}{4\pi(1 - \cos \beta_0)^{3/2}R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{u1} d\beta$$

$$I_{u1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) + \sin \theta (1 - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)}{l(\theta)} d\alpha$$

$$l(\theta) = (\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) + \sin^2 \theta (1 - \cos \beta)^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \times \\ \times (1 - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha))^{1/2}$$

Для момента μ :

$$\mu^0(\theta) = -\frac{3kgb}{4\pi(1 - \cos \beta_0)^{3/2}\delta R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{w1} d\beta$$

$$I_{w2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (1 - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) + \sin \theta (1 - \cos \beta)^2}{l(\theta)} d\alpha$$

Уравнения движения в переменных (r, θ) примут вид:

$$\dot{r} \left(\frac{\cos \theta}{\delta} + \sin \theta \right) + r \dot{\theta} \left(-\frac{\sin \theta}{\delta} + \cos \theta \right) = f(\theta) \\ (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) I \mathbf{e} + C \dot{\boldsymbol{\alpha}} + r^2 \sin^2 \theta \Omega_e I \mathbf{e} + r \sin \theta \Omega_e C \boldsymbol{\alpha} = \mu(\theta) \mathbf{e}$$

Здесь

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{pmatrix}$$

- постоянный вектор, описывающий вектор \mathbf{e}_y в подвижной системе координат, а матрица, эквивалентная операции умножения слева не единичный вектор \mathbf{e} Ω_e постоянна по времени и равна

$$\Omega_e = \begin{pmatrix} 0 & d_{32} & -d_{22} \\ -d_{32} & 0 & d_{12} \\ d_{22} & -d_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.1 Анализ силы и момента трения.

Для начала подробнее остановимся на анализе сил и моментов как функций режимного угла θ . Это необходимо как и для решения обратной задачи динамики, так и для исследования свободной динамики системы (решения прямой задачи). Вместе с тем, отмечая π -антипериодичность этих функций, достаточно ограничиться отрезком $\theta \in [0; \pi]$. Кроме того, стоит заметить, что наиболее реализуемые на практике движения робота будут соответствовать режимам преимущественного качения (т.е. проскальзывание будет существенно меньше качения), что означает нахождение θ в некоторой довольно малой окрестности точки $\pi/2$.

Утверждение 2.1

$f(\theta) \in C(0; \pi)$ и возрастает на этом промежутке.

Первая часть утверждения очевидна, так как подынтегральные функции непрерывны (единственная потенциально особая точка, связанная с равенством нулю знаменателя приходится как раз на значение $\theta = \pi/2$, однако в этом случае интеграл существует и конечен). Полезно заметить, что в этом случае

$$f(\pi/2) = -\frac{kg\varepsilon^2\delta^2}{5R(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2\delta^2})}$$

Производная рассматриваемой функции такова:

$$\frac{\partial I_{u_1}}{\partial \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin^4 \beta \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin \theta}{(l(\theta))^{3/2}}$$

Таким образом, очевидно, что при $\sin \theta > 0$ функция $f(\theta)$ возрастает. Стоит отметить, что производная $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ в точке $\pi/2$ имеет разрыв второго рода, связанный с тем, что интеграл по β расходится (вблизи точки $\beta = 0$ возникает неопределенность вида $1/\beta$). Далее, исходя из того что $f(\pi/2) < 0$, а $f(\pi) > 0$, существует такой угол θ_f для которого $f = 0$.

Приведем в заключение графики силы f в окрестности точки $\theta = \pi/2$ (первый график соответствует случаю $\delta = 0.13, \varepsilon = 0.06$, второй — $\delta = 0.03, \varepsilon = 0.06$:

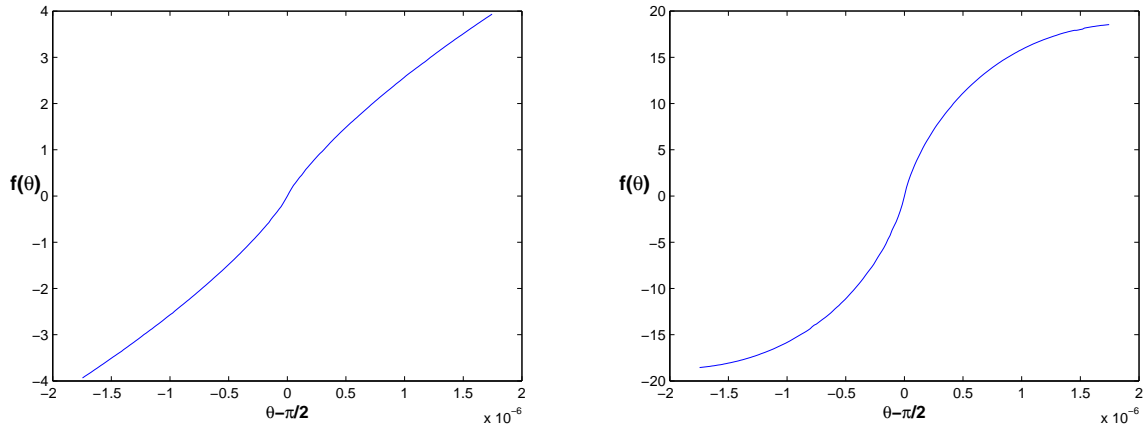


Рис. 6: Графики силы.

Нетрудно заметить, что вследствие возрастания $f(\theta)$ имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.2

Движение из состояния покоя возможно, если $\theta(0+) \in (\theta_f; \theta_)$, где $\theta_* = \pi - \arctg 1/\delta$*

В силу определения

$$v = r\left(\frac{1}{\delta} \cos \theta + \sin \theta\right)$$

Для того, чтобы движение из состояния покоя было возможно, необходимо чтобы скорость и ускорение (а, значит и сила) в некоторой малой окрестности нуля имели один знак, без ограничения общности — "+". Угол θ_* будем называть углом полной пробуксовки, в этом случае $v = 0$ и шар стоит на месте, а угловая скорость равна скорости скольжения с обратным знаком. Можно показать, что $f(\theta_*) > 0$ для любых значениях параметров плоскости. Таким образом, старт робота возможен, очевидно, только с режимов $\theta \in (\theta_f; \theta_*)$. Кроме того, стоит заметить, что равноускоренное движение системы эквивалентно условию $\theta = const$, т.е. постоянству отношения угловой скорости к скорости скольжения шара.

Утверждение 2.3

Функция $\mu^0(\theta_0) \in C(\pi/2; \pi)$ и возрастает на этом промежутке

Непрерывность показывается также как и для силы f . Производная функции I_{w2} равна

$$\frac{\partial I_{w2}}{\partial \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \beta \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos \theta}{(l(\theta))^{3/2}}$$

Очевидно, что при θ лежащим на данном промежутке эта производная отрицательна, а значит производная самой функции μ^0 положительна. также можно отметить наличие разрыва второго рода у производной в точке $\pi/2$ и то, что выполняется соотношение:

$$\frac{\delta}{b} \frac{\partial \mu^0}{\partial \theta} \sin \theta = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta$$

Исходя из утверждений 2.1, 2.3, а также из явного вида производных, следует важный факт:

Утверждение 2.4

Функция $\mu(\theta_0) \in C(0; \pi)$ и убывает на промежутке $\theta \in [0; \theta_]$*

Действительно, исходя из явного вида $\mu = \mu^0 - bf$ следует непрерывность. Что касается производной, то

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = b \frac{\partial(\delta \mu^0 - f)}{\partial \theta} = -b \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\delta} \cos \theta + \sin \theta \right)$$

Приведем графики момента в окрестности точки $\theta = \pi/2$ (параметры плоскости аналогичны тем, что задавались для силы):

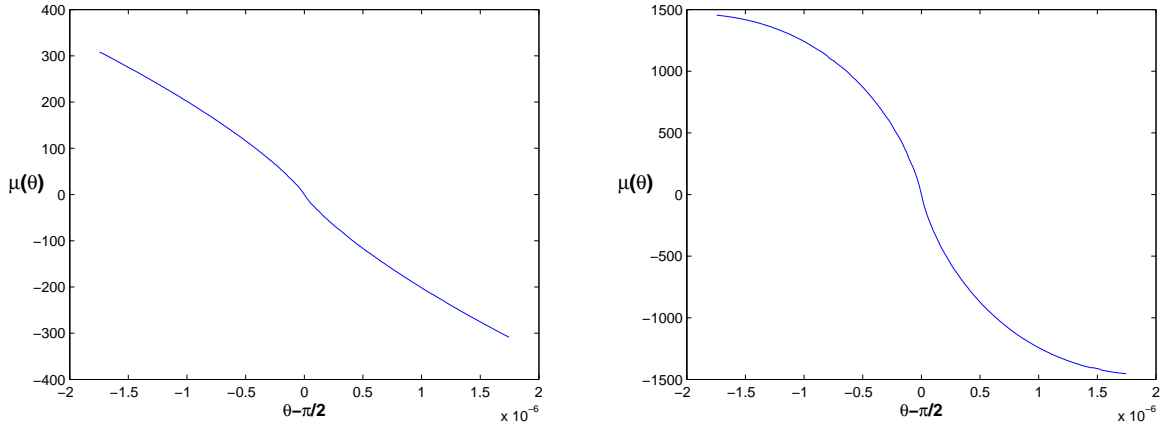


Рис. 7: Графики моментов.

Далее, можно заметить, что $\mu(\pi) = -\mu(0) < 0$, а значит существует угол $\theta_\mu \in (0; \pi/2)$, для которого $\mu = 0$. Величину $\mu(\theta_f)$ можно считать моментом трения покоя, который нужно преодолеть для того, чтобы начать движение. Величина этого момента в зависимости от параметров контакта:

Кривые, ограничивающие области параметров, для которых движение возможно в случае двух моделей маховиков (движение допустимо внутри кривой):

2.4.2 Некоторые аспекты свободной динамики

Решение обратной задачи динамики позволяет для представленных аппаратов найти необходимые управления, для которых движение будет совершаться по заданному отрезку. Для предложенных конструкций управления реализуются путем создания моментов на маховиках. Вместе с тем, представляет интерес задача о движении шара с "выключенными" приводами, т.е.

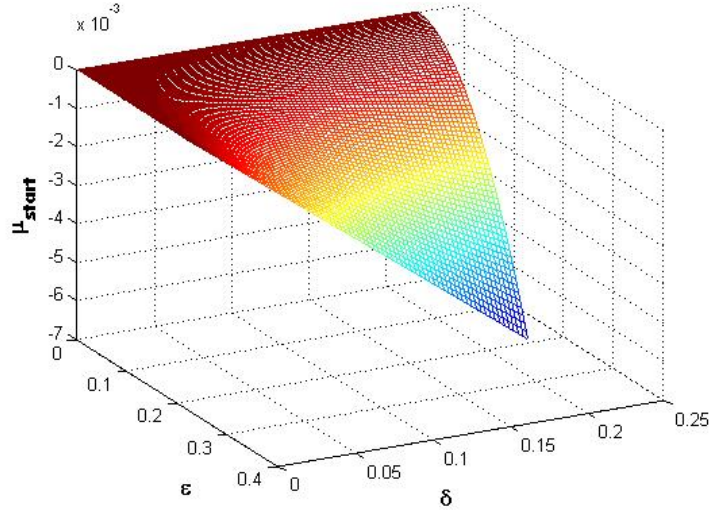


Рис. 8: Момент трения покоя при начале движения.

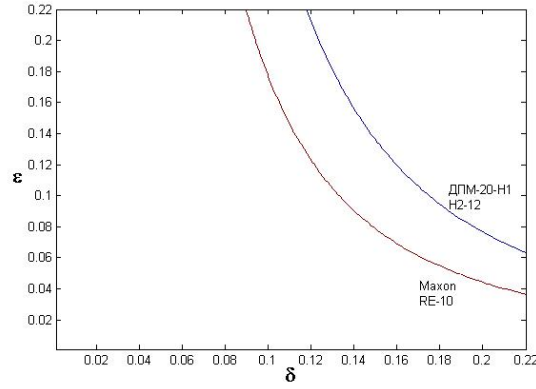


Рис. 9: Область возможности движения.

свободная динамика системы. В частности, такое движение помогает частично решить проблему "сброса" моментов на маховиках, что важно, во-первых для сравнительно плавного движения (без полных остановок и переходов в новый режим), а во-вторых для поддержания необходимого ресурсного резерва. Задача, таким образом, переходит в классическую задачу механики о движении шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости. Такая задача для обычного бильярдного шара была в достаточно полной мере исследована в [10]. Здесь будут приведены некоторые факты, имеющие отношение к динамике шара Чаплыгина на плоскости с двухпараметрическим трением в случае прямолинейного движения. Все эти свойства так или иначе следуют из [10], однако в данной работе предлагается несколько иной подход. В частности, в [10] предполагалось разложение в ряд Тейлора по параметру $\varepsilon\delta$, предполагаемому малым, а здесь мы оставим исходные выражения для сил и моментов. Наконец, отметим, что все результаты получены только при $\theta \in [0; \pi]$. При желании с учетом π -антипериодичности функций f и μ по θ , их можно обоб-

щать и на оставшиеся значения.

В первую очередь необходимо отметить, что для динамики шара Чаплыгина на выключенных маховиках справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3.1

Свободное качение шара Чаплыгина вдоль прямой возможно только в том случае, если оно будет происходить вдоль собственного вектора оператора инерции I .

Это следует из того, что как показано выше, $\mu \equiv \mu_y \mathbf{e}_y$, вектор угловой скорости также направлен вдоль этой оси, вектора $\mathbf{k} = I\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\mathbf{k}}$ сонаправлены. Но $\dot{\mathbf{k}} + [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{k}] = \boldsymbol{\mu} = \lambda \boldsymbol{\omega}$. Последнее говорит о компланарности векторов \mathbf{k} , $\boldsymbol{\omega}$ и их векторного произведения, что возможно только при коллинеарных векторах кинетического момента и угловой скорости, откуда и следует, что угловая скорость направлена вдоль одной из главных осей инерции.

Как уже говорилось выше, в случае постоянного θ и сила и момент будут постоянными функциями времени, и, следовательно, в этом случае реализуется режим торможения с постоянным ускорением. Заметим, что для свободной динамики шара (на выключенных маховиках) шар Чаплыгина ведет себя также, как динамически идеальный шар, а именно верно следующее утверждение:

Утверждение 3.2

Качение шара Чаплыгина без скольжения невозможно

Действительно, система уравнений для свободной динамики шара Чаплыгина, с учетом того, что $\theta \equiv \pi/2$:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{f} \\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} I \mathbf{e}) &= \mu \mathbf{e}\end{aligned}$$

\mathbf{e} —неподвижный вектор, такой, что $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$. Как доказано выше (из утверждения 3.1) этот вектор—собственный для тензора инерции I , а значит, дифференцируя левую часть второго уравнения получается следующий результат:

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}} I - \mu E) \mathbf{e} = (f I - \mu E) \mathbf{e} = 0$$

Считая, что тензор инерции I записан в главных осях, имеем условия движений, соответствующих вращению вокруг k -й оси инерции:

$$f(\pi/2) i_k = \mu(\pi/2)$$

А значит,

$$i_k = \frac{\mu(\pi/2)}{f(\pi/2)} \iff i_k = b\left(\frac{2}{\delta} - 1\right) \iff \frac{i_k}{b} = \frac{2}{\delta} - 1 \geq 1$$

Последнее невозможно, так как для размерных моментов инерции относительно центральной оси верно, что $I_k < \hat{M} R^2$. Для поддержания же такого

движения с помощью внутренних маховиков, нужно создавать управляющий кинетический момент, пропорциональный времени t , и, с учетом ограниченности ресурсов маховиков, такое решение допустимо только конечное время.

Для свободной динамики верно и следующее утверждение:

Утверждение 3.3

Скольжение шара без качения невозможно

Действительно, при $\theta \equiv \pi$ имеем, что $\mu \equiv 0$, что невозможно.

Следствие

Скольжение и качение имеют место одновременно почти всюду, причем их окончание имеет место быть одновременно.

Кроме того, верно утверждение:

Утверждение 3.4

Для свободной динамики шара (т.е на выключенных маховиках) система допускает первый интеграл вида

$$r = r_0 e^{\int \Lambda(\theta) d\theta}$$

Действительно, если угловая скорость направлена по одной из главной осей инерции (из утверждения 3.1 это является необходимым условия рассматриваемого движения по прямой при условии выключенных маховиков), то систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \xi(\theta) \cos \theta + \eta(\theta) \sin \theta \\ r\dot{\theta} &= -\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta \\ \xi(\theta) &= \delta \left(f - \frac{\mu}{i} \right) \\ \eta(\theta) &= \frac{\mu}{i} \end{aligned}$$

Где i —главный момент инерции, соответствующий той главной оси, вокруг которой идет вращение. Разделив одно уравнение на другое имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= \Lambda(\theta) d\theta \\ \Lambda(\theta) &= \frac{\xi(\theta) \cos \theta + \eta(\theta) \sin \theta}{-\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta} \end{aligned}$$

Откуда и получается утверждение замечания. Стоит также отметить, что в [10] было показано наличие первого интеграла в случае, если раскладывать в ряд по параметру $\varkappa = \varepsilon \delta$ выражения для сил и моментов. Вышедоказанное утверждение показывает, что наличие этого интеграла сохраняется и для точных выражений f и μ . Можно отметить, что нулю в знаменателе функции $\Lambda(\theta)$ соответствует решению $\theta \equiv \dot{\theta} \equiv const$ (что представляет собой равнозамедленное движение шара). На графике линий первых интегралов этому решению соответствует вертикальная линия в плоскости (r, θ) .

Кроме того, нетрудно заметить и то, что на всех движениях при $r \mapsto 0, \theta \mapsto \hat{\theta}$, что означает, в свою очередь не только одновременное обращение угловой скорости и скорости скольжения в нуль, но и то, что в конце движения для любых стартовых условий их отношение постоянно и равно $\tan \hat{\theta}$. Вместе с тем, такое решение не единственно, и можно показать существование по крайней мере двух таких режимов $\hat{\theta}_{st} \in (\theta_\mu; \pi/2)$ и $\hat{\theta}_{unst} \in (\theta_*; \pi)$. Численное моделирование показывает, что таких режимов ровно два, причём если первый является предельным для почти всех начальных условий, то второй возможен лишь в виде решения $\theta = const$, а траектории, начинающийся в сколь угодно близости от него, сведутся к первому режиму. Именно с этим связывается выбор индексов *st* и *unst* в определении этих режимов. В заключении приведем линии уровня $r(\theta)$ вблизи точек $\hat{\theta}_{st}$ и $\hat{\theta}_{unst}$.

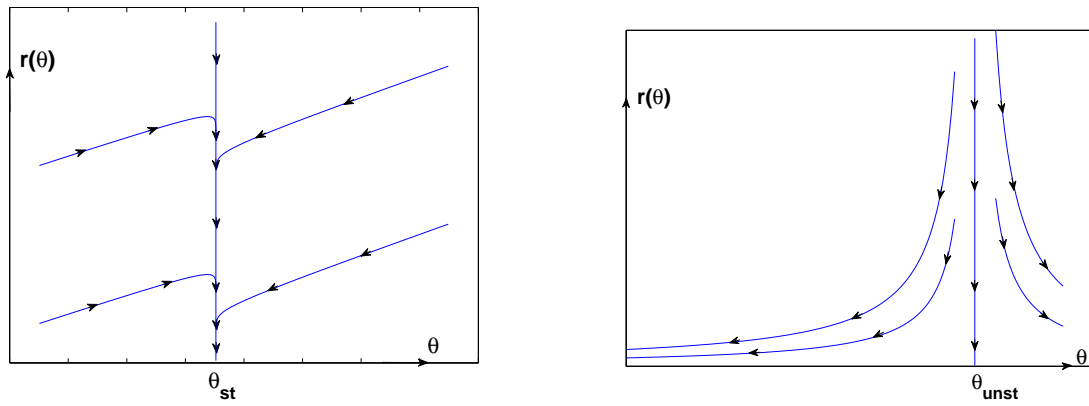


Рис. 10: Линии уровня.

2.4.3 Пример построения управления для движения по отрезку

Переходя к построению управления для прохождения конкретного отрезка вано заметить, что желаемое значение профиля скорости должно удовлетворять условию $v(t) \in C^1$, так как разрывное решение по ускорениям ведет к разрыву по θ , что в свою очередь, к разрыву по скоростям, что нежелательно. Поэтому выберем следующий профиль скорости:

$$v(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t \quad t \in [0; \pi/\eta]$$

Для перемещения верно, что $\Delta x = \frac{4A}{3\eta}$.

Если направление вектора \mathbf{e}_y совпадает с направлением какой-либо из главных осей инерции, управляющий вектор $\boldsymbol{\beta} = C\boldsymbol{\alpha}$ кинетического момента можно искать в виде $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}$. В силу уравнений такое решение найдется, и будет единственным. Таким образом, в этом случае имеем:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C^{-1}(\mu(\theta) + \dot{\omega} \lambda_e) \mathbf{e}$$

Где λ_e —соответствующее собственному вектору \mathbf{e} собственное значение.

Если же вектор \mathbf{e} не является собственным для оператора инерции I , находим управляющие угловые скорости исходя из следующей системы:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C^{-1}[(\mu(\theta) + \dot{\omega}I - \omega^2\Omega_e I)\mathbf{e} - \omega\Omega_e C\boldsymbol{\alpha}]$$

Приведем графики основных параметров движения ($\delta = 0.03, \varepsilon = 0.06$), u, ω, x, θ, U . Пятый параметр—размерное управляющее напряжение. Взяты значения $\Delta x = 2\pi, \eta = \pi/7$. Параметры электродвигателей ($\kappa_1; \kappa_2$) взяты такими: $\kappa_1 = 2.6, \kappa_2 = 0.2$.

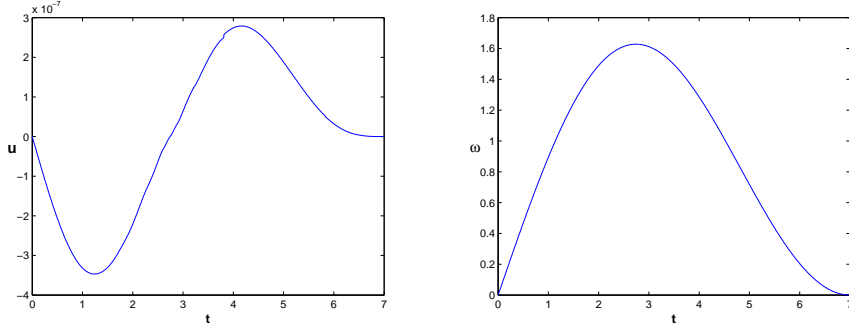


Рис. 11: Основные параметры движения u, ω .

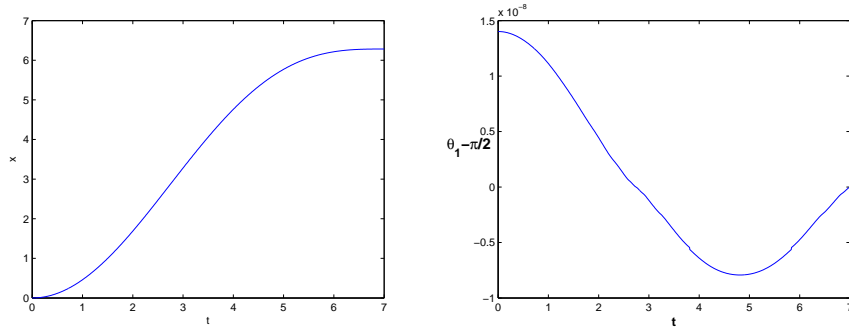


Рис. 12: Основные параметры движения x, θ .

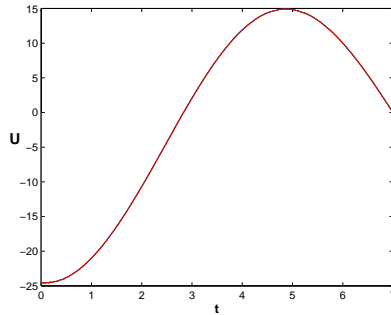


Рис. 13: Управляющее напряжение U .

Для векторов $\mathbf{e} = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$ $\mathbf{e} = (1; 0; 0)$

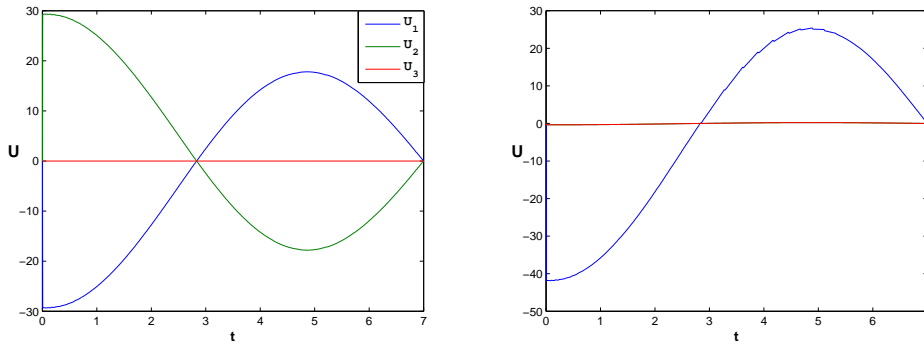


Рис. 14: Управляющее напряжение U .

2.5 Обход препятствий. Криволинейное движение

2.5.1 Основные замечания

Базовые движения робота—поворот на месте на заданный угол, а также прохождение отрезка заданной длины, позволяют решить задачу и о прохождении ломаной. Как уже говорилось выше, если траекторией является спрямляемая кривая, то аппроксимируя её ломаными, и комбинируя алфавитные движения, можно говорить о прохождении такой траектории с некоторой точностью. Причём, так как в теории ограничения снизу на длину отрезка нет, можно сказать, что эта точность будет сколь угодно большой. Вместе с тем, с практической точки зрения, движение "рывками" не всегда является хорошим способом прохождения вдоль заданной траектории, а в случае, если закон движения включает поворот на малые углы или движения по малым отрезкам, то он и вовсе представляется нереализуемым на практике. Поэтому для более эффективного маневрирования необходимо решить задачу о прохождении аппаратом и криволинейной траектории тоже.

Пусть кривая γ , по которой движется центр масс робота O задана своим натуральным параметром s , т.е. $x = x(s)$, $y = y(s)$. Свяжем с кривой естественный трехгранник Френе $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\beta$. Положение вспомогательного базиса относительно естественного трехгранника характеризуется углом φ между векторами \mathbf{e}_I и \mathbf{e}_τ . Для скорости будет выполнено соотношение:

$$\dot{s}\mathbf{e}_\tau = (u + \Omega_{II})\mathbf{e}_I - \Omega_I\mathbf{e}_{II}$$

Имеет место следующее утверждение:

Утверждение 4.1

Для движения не по прямой линии верно, что $\Omega_I \neq 0$ на любом интервале времени

Действительно, пусть на интервале времени T верно обратное, и $\Omega_I \equiv 0$.

Но тогда, как сказано выше, $f_{II} \equiv 0$. Кроме того, из соотношения на скорость легко заключить, что вектора \mathbf{e}_I и \mathbf{e}_τ совпадают на этом промежутке. Проецируя на главную нормаль уравнение на импульс получаем:

$$k(s)\dot{s}^2 = 0$$

Откуда следует что траектория прямая линия.

Таким образом, для вычисления сил и моментов необходимо учесть еще тот факт, что

$$n = \frac{g}{R(1 + f_{III}(\theta_1, \theta_2, \theta_3))}$$

В общем случае получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= f_I \cos \varphi - f_{II} \sin \varphi \\ k(s)\dot{s}^2 &= f_I \sin \varphi + f_{II} \cos \varphi \\ \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega} + c\boldsymbol{\alpha}) &= \hat{D}\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

Где \hat{D} —матрица перехода вспомогаельного репера к реперу жестко связанному с шаром, и есть произведение матрицы D на матрицу поворота в горизонтальной плоскости на угол между векторами \mathbf{e}_I и \mathbf{e}_x :

$$\hat{D} = D \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) & 0 \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь ψ —угол между векторами \mathbf{e}_τ и \mathbf{e}_x ; его координаты, очевидно, равны $(\frac{\partial x'}{\partial s}; \frac{\partial y'}{\partial s})$. Кроме того, в проекции на оси естественного трехгранника выполняются два следующих кинематических соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= (u + \Omega_{II}) \cos \varphi - \Omega_I \sin \varphi \\ 0 &= (u + \Omega_{II}) \sin \varphi + \Omega_I \cos \varphi\end{aligned}$$

Переходя к переменным r, θ_k последние два условия переписываются в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= -\frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\delta \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1} \\ r &= \frac{\dot{s}}{(\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1) \cos \varphi - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi}\end{aligned}$$

Задавая кривую $\gamma(s)$, закон движения $s(t)$, а также желаемое верчение $\omega_z(t)$ находим вектор угловой скорости, после чего и управления. Вообще говоря, произвольным образом это сделать нельзя, так как верно следующее:

Утверждение 4.2

Функции $k(s)$ и $s(t)$ должны в каждый момент времени удовлетворять неравенству

$$\ddot{s}^2 + k^2(s)\dot{s}^4 \leq F^2$$
$$F = \max_{\theta_{1,2,3}} f_I(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^2 + \max_{\theta_{1,2,3}} f_{II}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^2$$

Что следует из ограниченности функций f_i , в также явного вида уравнения на импульс. (Ограниченность f_i , в свою очередь легко получается из оценок для составляющих их интегралов). Для алфавитных движений по криволинейным отрезкам естественным образом можно рассмотреть только те траектории, для которых $\dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$, $\text{sgn}(\dot{s}) = \text{const} \quad \forall t \in (0; T)$, где T —время движения. Предполагая $\dot{s} \geq 0$ имеем:

$$\sin \varphi = - \frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + \delta^2 \sin^2 \theta_1 + 2\delta \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2}}$$
$$\cos \varphi = \frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + \delta^2 \sin^2 \theta_1 + 2\delta \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2}}$$
$$r = \dot{s} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \delta^2 \sin^2 \theta_1 + 2\delta \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2}$$

Далее, из уравнений на импульс а также исходя из выбора желаемого профиля верчения находятся сферические переменные $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Наконец, управляющий вектор α можно найти из векторного дифференциального уравнения на кинетический момент.

2.5.2 Анализ сил и моментов для движения без верчения

Как было доказано выше, для криволинейного движения необходимо учитывать уже обе горизонтальные компоненты вектора угловой скорости. Помимо этого, для тех движений, где $\omega_I \neq 0$ сила реакции опора не равна по модулю силе тяжести (так как компонента f_{III} отлична от нуля) и вычисляется как $n = \frac{g}{R(1 + f_{III})}$. Угловая скорость верчения не влияет на остальные кинематические характеристики, однако входит в выражения для сил и моментов, которые достаточно громоздки. Поэтому, для упрощения, проведем численный анализ функций f и μ в предположении что верчение отсутствует, т.е. $\theta_3 \equiv 0$. Будем считать скольжение достаточно малым в сравнении с угловой скоростью, что соответствует нахождению вблизи сечения сферы плоскостью ($\theta_1 = \pi/2$). Графики поверхностей $f_I, f_{II}, f_z, \mu_I^0, \mu_{II}^0$ тогда примут вид, приведенный на последующих трех рисунках.

Исходя из явного вида графиков, можно в дальнейшем положить, что $f = f_I, \mu = \mu_{II}$ (отношение между f_I и f_{II} составляет примерно 10^2 , для моментов аналогично). Такое предположение позволяет существенно облегчить

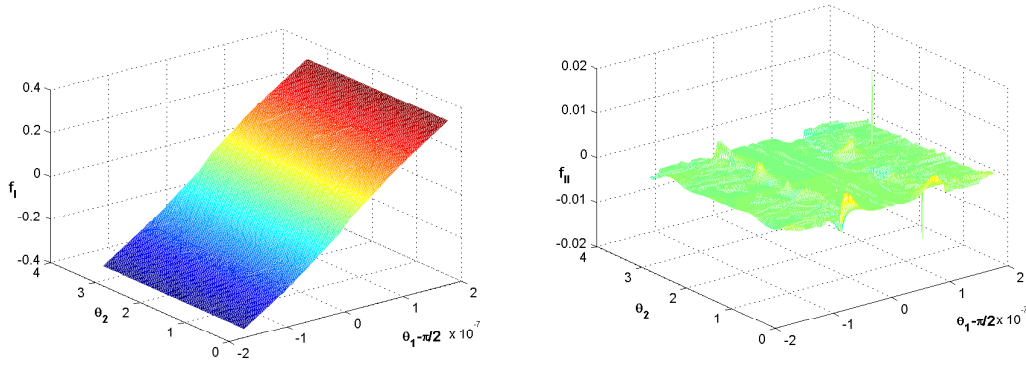


Рис. 15: Поверхности f_I, f_{II}

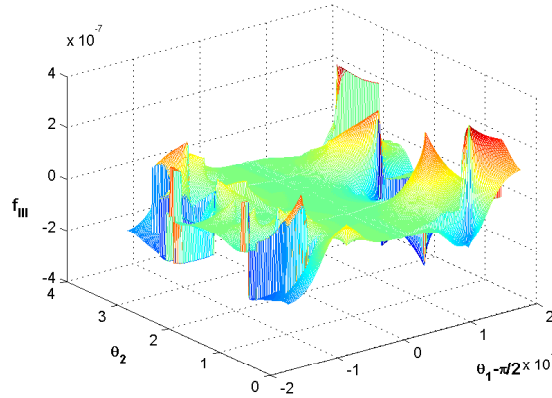


Рис. 16: Поверхность f_z

дальнейшее разрешение обратной задачи динамики, так как анализ и тем более обращение оставшихся компонент сил и моментов—крайне трудоемкая задача. При этом, можно заметить, сохраняется достаточно высокая точность результатов. В таком случае, имеем следующие уравнения на импульс:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= f \cos \varphi \\ k(s)\dot{s}^2 &= f \sin \varphi\end{aligned}$$

Заметим, что в абсолютной системе координат компоненты момента μ выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\mu_x &= -\mu \sin(\varphi + \psi) \\ \mu_y &= \mu \cos(\varphi + \psi)\end{aligned}$$

2.5.3 Примеры траекторий

Предполагая, что задана траектория с желаемым законом движения по ней, т.е. $k(s)$ и $s(t)$, на первом этапе необходимо разрешить систему относи-

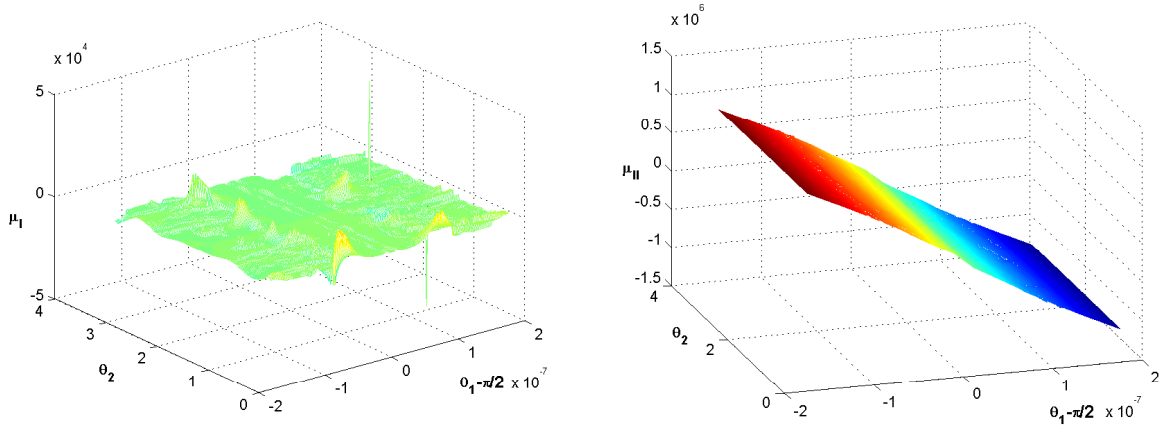


Рис. 17: Поверхности μ_I^0, μ_{II}^0

тельно $\theta_1, \theta_2, \varphi$:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= f_I \cos \varphi \\ k(s)\dot{s}^2 &= f_I \sin \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\delta \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1}\end{aligned}$$

Исходя из явного вида уравнений верно следующее очевидное утверждение:

Утверждение 4.3

Пусть для некоторого отрезка времени траектория движения—гладкая кривая, такая, что $k(s) \neq 0$ в каждой точке, причем движение начинается из состояния покоя. Тогда на всем движении $f(t) \geq 0$, причем равенство нулю достигаться может только на концах этого отрезка.

Действительно, в силу рассматриваемых траекторий, знак \dot{s} положителен и не меняется на всем отрезке. В силу начальных условий, нетрудно заметить, что $\varphi(0) = 0$ (случай $\varphi = \pi$ опускается, для него, очевидным образом, верно аналогичное утверждение с точностью до знака f). Но тогда $f(0) > 0$, в силу положительности \ddot{s} в некоторой окрестности начального момента времени. Далее, если в какой-либо точке f обратится в нуль, это повлечет за собой либо равенство нулю $k(s)$, либо \dot{s} , что не подходит под сделанные выше предположения.

Теперь попробуем рассмотреть частный случай, а именно движение по дуге окружности радиуса ρ . Для угла ψ , отвечающего за угол между касательным вектором и осью Sx верно, что $\psi = \rho s$ (здесь предполагается, что все начальные условия—нулевые). В качестве закона движения выберем для обеспечения достаточной гладкости такую же функцию, как в 3.2, а именно

$$\dot{s}(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t \quad t \in [0; \pi/\eta]$$

Для кривизны $k(s)$ очевидным образом выбрано равенство $k(s) = 1/\rho$.

Приведем результаты численного решения системы уравнений для случая $\Delta\psi = \pi/2, \rho = 4, \eta = \pi/7$ (первое значение отвечает за величину пройденной дуги):

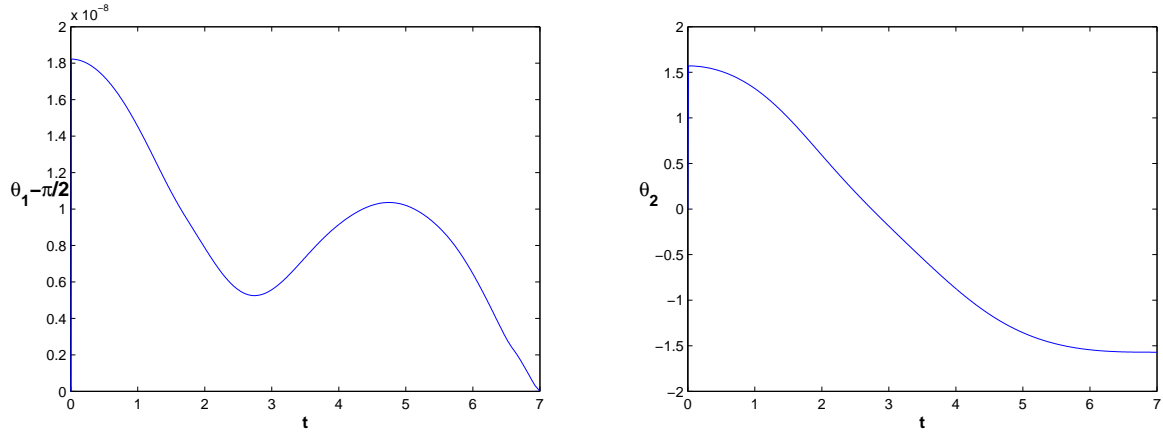


Рис. 18: Переменные θ_1, θ_2

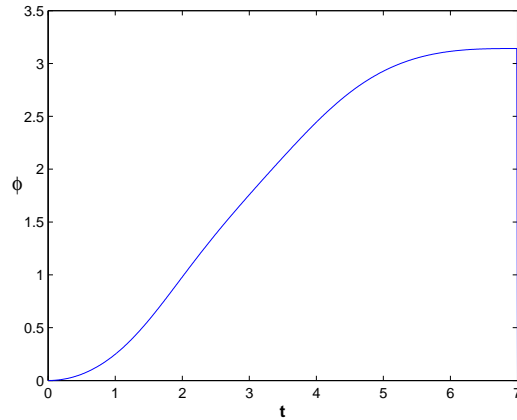


Рис. 19: Переменная φ

Далее, в отличие от движения по прямой, где все три уравнения на кинетический момент сводились к одному в проекции на неподвижную ось, для нахождения управлений в этом случае необходимо знать зависимость $D(t)$. Как и в [2], в качестве локальных координат на многообразии $SO(3)$ будут взяты углы Эйлера Θ, Ψ, Φ . (Большие буквы использованы во избежании путаницы с уже используемыми углами).

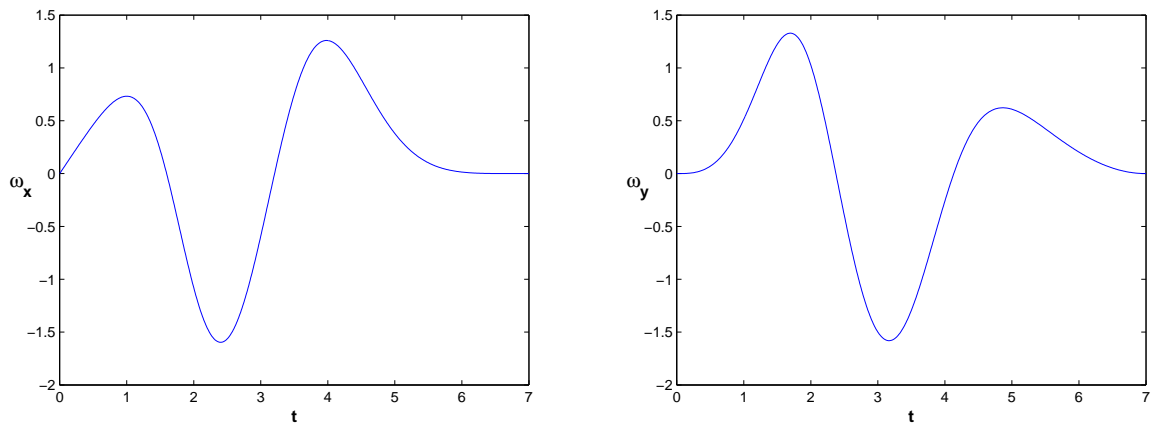


Рис. 20: Переменные ω_x, ω_y

Эволюция углов Эйлера для описанного движения приведена ниже на левом графике.

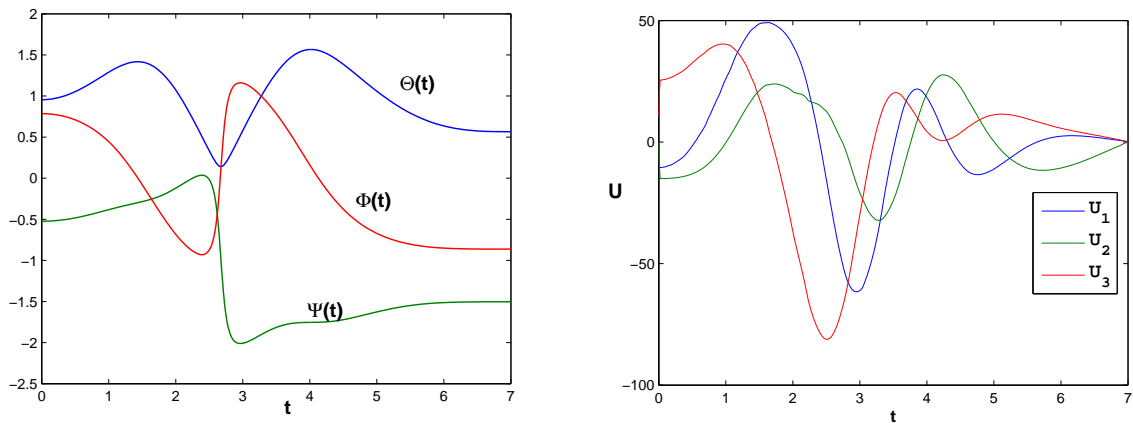


Рис. 21: Эволюция углов Эйлера и управляющие напряжения.

На левом графике начальные условия таковы: $\Theta(0) = \arctg \sqrt{2}$, $\Psi(0) = -\pi/6$, $\Phi(0) = \pi/4$. Они взяты в качестве примера, и соответствуют в начальный момент времени ситуации, когда плоскость, проходящая через центры маховиков горизонтальна.

Наконец, аналогично 3.2, приведем в этом случае графики управляющих размерных напряжений, они приведены на правом графике.

Управляющие напряжения показывают способ управления шаром.

3 Заключение

По результатам представленного исследования можно сказать, что для предложенной конструкции робота-шара решена обратная задача динамики в предположении двухпараметрической модели трения. В качестве примера рассмотрены т.наз. базовые алфавитные движения, вместе с тем результаты можно распространить на любую кривую траекторию. Показано, что движение возможно не всегда, так как существует феномен момента трения покоя, который необходимо преодолевать для начала движения. Для реальных электродвигателей, приводящих в движение маховики, приведены области параметров где движение возможно.

Вместе с тем, реальные эксперименты показывают, что для реального аппарата для большей точности описания движения нужно рассматривать модель несбалансированного шара, т.е. отказаться от условия совпадения центра масс системы и геометрического центра шара. Решение обратной задачи динамики для такой конструкции - цель ближайших исследований.

4 Приложение 1. Примеры роботов шаров

Как говорилось выше, роботы-шары развиваются во многих странах. Приведем некоторые интересные примеры реальных конструкций

Упомянутый робот GroundBot от Rotundus, хоть и не является "идеальным" шаром заслуживает внимание тем, что представляет из себя коммерчески-ориентированный продукт. Аппарат приводится в движение по принципу маятника. Производители уверяют, что данный робот может двигаться не только по дороге, но и по песку и даже по воде. Кроме того, этот робот проходил испытания в вооруженных силах Швеции.

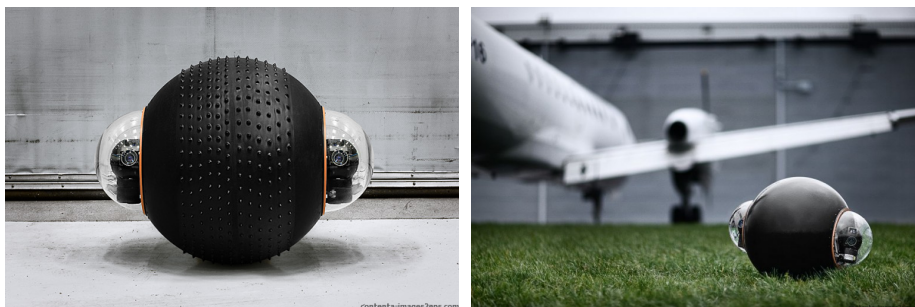


Рис. 22: Робот GroundBot

Еще один коммерчески-ориентированный продукт-робот шар Sphero[11]. Управлять таким шаром можно при помощи смартфона на iOS или Android.



Рис. 23: Робот Sphero 2.0

Робот японской фирмой Sony[12] примечателен тем, что им можно управлять ГОЛОСОМ.



Рис. 24: Робот Sony

Робот, разработанный компанией Solarbotics движется благодаря наличию

подвижной тележки внутри. Интересно, что робот может быть энергетически независим от внешних источников питания, в силу того, что на нём установлены солнечные батареи.[13]



Рис. 25: Робот Solarbotics

Ниже приведен робот Rosphere—разработка испанских ученых и инженеров для нужд агропромышленного комплекса[14]. Предполагается, что сферическая форма и малый вес позволят роботу лавировать между растениями, не повреждая их. Движение осуществляется за счет смещения центра масс.



Рис. 26: Робот Rosphere

В России тоже идут разработки в данном направлении. Примером может послужить робот SpheRob (Москва-Ижевск-Санкт-Петербург):



Рис. 27: Робот SpheRob

5 Библиографический список

1. Rotundus. [Электронный ресурс] Режим доступа <http://www.rotundus.se/>
2. В.Е.Павловский, Г.П. Терехов Управление мобильным сферическим информационным роботом с тремя ортогональными маховиками. // Спецтехника и связь, №3/2012 с.19-25.
3. А.В.Борисов, А.А.Килин, И.С.Мамаев. Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов. // Нелинейная динамика, 2012. Т8, №2 стр. 289-307.
4. А.В.Борисов, А.А.Килин, И.С.Мамаев. Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов // Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар. Сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, с. 131-168
5. А.В.Карапетян. Двухпараметрическая модель трения. // ПММ т.73 вып.4, 2009 с.515-519.
6. А.В.Карапетян О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости. // ПММ т.74 вып.4, 2010, с.531-535.
7. Т.В.Сальникова, Д.В.Трещев, С.Р.Галлямов Движение свободной шайбы по горизонтальной шероховатой плоскости. // Нелинейная динамика, 2012. т.8, №1 с. 83-101.
8. В.Ф.Журавлев О модели сухого трения в задаче качения твердых тел. // ПММ, 1998. т.62 вып. 5 . 762-767.
9. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. // Проблемы гироскопии М.: Мир, с. 60-77.
10. М.В.Ишханян. Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с трением скольжения, верчения и качения. // Дис. канд. физ.-мат. наук, 01.02.01, 2010. МГУ им.М.В. Ломоносова, механико-математический факультет.
11. [Электронный ресурс] Режим доступа <http://www.sphero.com/>
12. [Электронный ресурс] Режим доступа <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/1898342.stm>
13. [Электронный ресурс] Режим доступа <http://www.robotliving.com/robot-news/solar-robot-ball/>
14. [Электронный ресурс] Режим доступа <http://www.agritimes.ru>

Содержание

1	Введение	3
2	Динамика и управление роботом-шаром	4
2.1	Описание модели. Уравнения движения	4
2.2	Двухпараметрическая модель трения	6
2.3	Поворот робота на месте	8
2.4	Движение робота по отрезку	10
2.4.1	Анализ силы и момента трения	12
2.4.2	Некоторые аспекты свободной динамики	14
2.4.3	Пример построения управления для движения по отрезку	18
2.5	Обход препятствий. Криволинейное движение	20
2.5.1	Основные замечания	20
2.5.2	Анализ сил и моментов для движения без верчения . . .	22
2.5.3	Примеры траекторий	23
3	Заключение	27
4	Приложение 1. Примеры роботов шаров	28
5	Библиографический список	30