

E. Yu. Kolesnichenko, V. E. Pavlovsky, D. A. Gribkov, I. A. Orlov, A. P. Aliseychik,
Kinematic motion control of six-wheeled mecanum-robot, *Keldysh Institute preprints*,
2016, 127

DOI: 10.20948/prepr-2016-127

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 79.139.215.77

December 17, 2023, 01:00:51





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 127 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко Е.Ю.,
Павловский В. Е., Грибков Д.А.,
Орлов И.А., Алисейчик А.П.

Кинематическое управление
движением шестиколесного
меканум-робота

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кинематическое управление движением шестиколесного меканум-робота / Е.Ю.Колесниченко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 127. 26 с. doi:[10.20948/prepr-2016-127](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-127)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-127>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е.Ю. Колесниченко, В.Е. Павловский, Д.А. Грибков,
И.А. Орлов, А.П. Алисейчик

Кинематическое управление движением шестиколесного механум-робота

Москва — 2016

УДК 796.012:612.7:531.1

Колесниченко Е.Ю., Павловский В.Е., Грибков Д.А., Орлов И.А., Алисейчик А.П.

Кинематическое управление движением шестиколесного механум-робота

В работе рассматривается теоретическая механическая модель многоколесного мобильного робота на механум-колесах, кратко обсуждаются вопросы ее аппаратной реализации. Основная цель работы – синтез управляемого движения аппарата по криволинейным траекториям. Использование механум-колес (роликонесущих колес всенаправленного движения) упрощает кинематическую схему аппарата за счет отказа от сложных рулевых механизмов и приводов, и при этом полностью сохраняет возможности управления криволинейными движениями. В работе показаны способы управления аппаратом по различным траекториям.

Ключевые слова: механум-колесо, шестиколесный робот, движение по криволинейной траектории, сплайн-интерполяция

Elena Yu. Kolesnichenko, Vladimir E. Pavlovsky, Dmitry A. Gribkov, Igor A. Orlov, Anton P. Aliseychik

Kinematic motion control of six-wheeled mecanum-robot

The work considers a theoretical model of the multi-wheel mobile robot on mecanum-wheels. It also briefly discusses the hardware implementation. The main purpose of the work is synthesis of controlled machine movement along the curved trajectories. Mecanum-wheels (wheels with a series of rollers attached to their circumference that can move a vehicle in any direction) simplify the kinematic scheme of the machine because the vehicle doesn't need sophisticated steering mechanisms and drives. The vehicle fully preserves the control possibilities for curvilinear motion. This work shows ways of the machine control for different trajectories.

Key words: mecanum-wheel, six-wheeled robot, motion along curved trajectories, spline interpolation

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 16-19-10705, а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 16-08-00880, № 15-08-08769, № 16-01-00131.

Введение. Состояние проблемы

Меканум-колеса были изобретены шведским инженером Бенгтом Эрландом Айлоном, которому принадлежат идея и патент США на эту конструкцию. Он придумал идею [1] в 1973 г., когда был сотрудником в шведской компании Mecanum AB. По этой причине эти колеса в зарубежной литературе часто называют шведскими колесами или колесами Айлона. Меканум-колеса являются одной из возможных моделей омни-колес (колес всенаправленного движения), но имеют ряд отличий, главным из которых является использование специальных роликов, установленных на ободе под углом (обычно 45 град.) к оси и к плоскости колеса. В результате меканум-колесо демонстрирует ряд специфических свойств сложной механической природы, среди которых весьма интересное и важное — движение под углом к плоскости колеса. Виды меканум-колес для разных типовых конструкций приведены на рис.1.

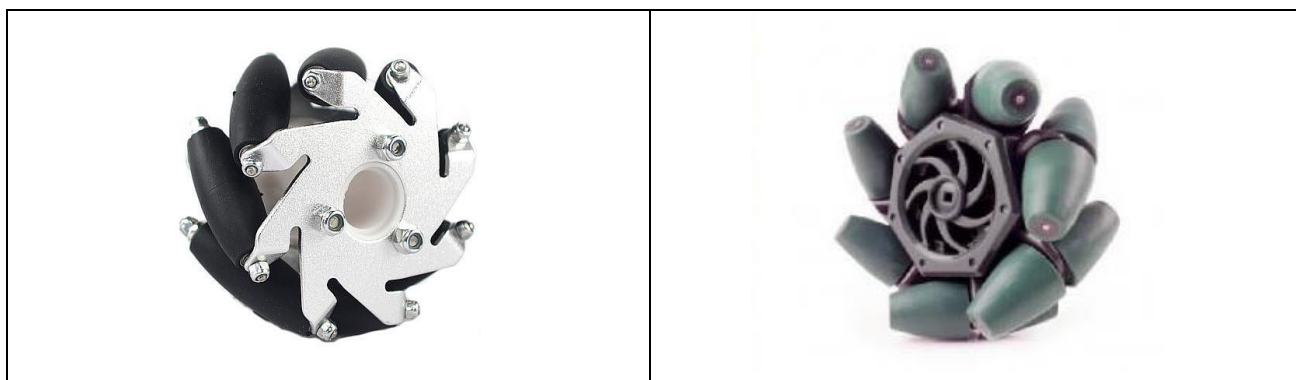


Рис.1. Меканум-колесо, типовые конструкции.

Типичная конфигурация аппарата на меканум-колесах четырехколесный аппарат, хотя есть и другие решения. Использование меканум-колес приводит к следующему: изменяя скорость и направление вращения каждого колеса, можно обеспечить движение корпуса аппарата обычным для четырехколесных шасси образом, реализовать поступательное движение корпуса или произвольное его вращение и повороты. Можно создать, например, поперечное движение аппарата, комбинации движений колес позволяют строить движение в любом направлении с любым вращением. К настоящему времени разработано уже большое число меканум-роботов и аппаратов [1-8], как исследовательских, так и коммерческих.

Вначале укажем примеры исследовательских аппаратов.

Одним из первых таких роботов был робот "Уран" (URANUS) Университета Карнеги-Меллон, США, 1985 г. [2]. Шасси этого робота показано на рис.2. Кроме шасси, робот оснащался системой датчиков навигации и

ориентации, был способен двигаться в помещении, в том числе в затрудненной стесненной обстановке.



Рис.2. Шасси робота Уран, Университет Карнеги-Меллон, США, 1985 г.

На рис.3 приведены разработки коллектива Лаборатории Роботики и Автоматики Университета Западной Австралии [3,4]. Показаны робот OMNI-2 (всего в Лаборатории разработаны три робота OMNI-1, OMNI-2, OMNI-3, последний мог везти человека), и роботизированное кресло на механум-колесах.

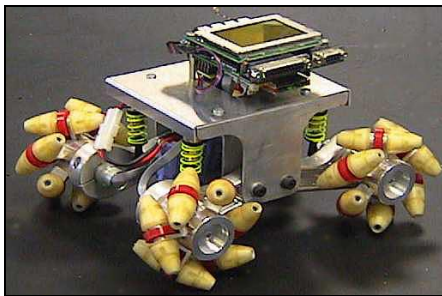


Рис.3. Роботы Лаборатории Роботики и Автоматики Университета Западной Австралии.

На рис.4 показаны российские роботы Института прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН, шасси Омнибот-1 и полнофункциональный робот Омнибот-2 [5].

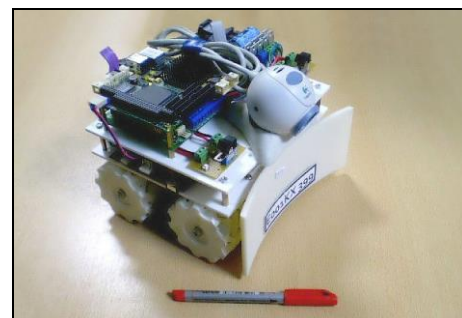
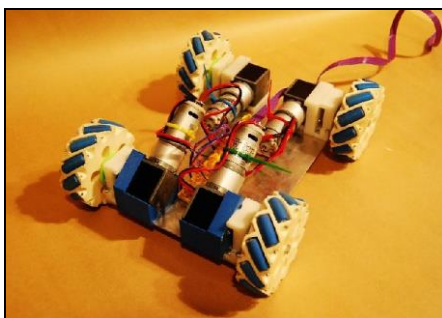


Рис.4. Роботы Омнибот-1 и Омнибот-2. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.

Заметим, что кроме этих роботов в России еще разработаны механум-роботы в Ижевске в УдГУ и Институте компьютерных исследований [6].

Укажем далее несколько коммерческих разработок.

На рис. 5 слева показан аппарат Omni-Directional Vehicle (ODV) для транспортировки грузов [7], разработанный лабораторией ВМС США в Панама-Сити по патенту Айлона, ВМС США купили этот патент в 1980-х, аппарат построен к 1997 г., в настоящее время находится в производстве. Аппарат используется для транспортировок в узких пространствах, например, на служебных палубах кораблей. Подобные погрузчики используются также при загрузке самолетов. На рис. 5 справа показана современная версия подобного аппарата транспортное шасси фирмы КУКА с манипулятором (Германия) [8].

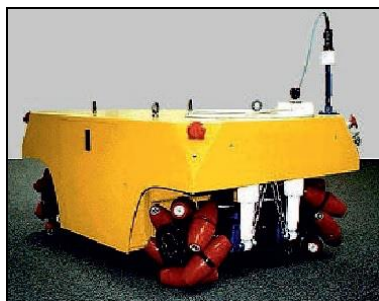


Рис. 5. Аппарат ODV ВМС США (слева) и транспортное шасси фирмы КУКА с манипулятором (справа).

На рис. 6 слева показан вилочный погрузчик на механум-колесах, разработка фирмы Airtrax, ныне производится компанией Vetex (США), аппарат поставляется по Северной Америке, в Израиль и Индию [9,10]. Справа на рис. 6 футуристический дизайн "машины будущего", автор концепции - дизайнер из Германии Себастьян Тодденрот, концепция получила название Volkswagen Rescue Rover, аппарат имеет функции омни-движения, при этом способен плыть, предназначен в качестве спасательного средства [11].



Рис. 6. Погрузчик фирмы Airtrax (слева), концепт С. Тодденрота (справа)

В настоящее время развитие этого направления продолжается, появляются новые фирмы (Китай), выполняющие разработки колес и роботов по механум-технологиям, например [12].

Примеры перечисленных аппаратов, опубликованные результаты экспериментов подтверждают эффективность механум-технологии для реализации движения в стесненных условиях.

Теория движения механум-машин развита в меньшей степени и касается в основном только отдельных колес или четырехколесных аппаратов [13-16]. Поэтому в настоящей работе делается попытка развить теорию кинематического управления более сложными шестиколесными аппаратами. Статья продолжает и развивает краткое исследование, приведенное в [17].

1. Исходные геометрические соотношения

Мобильный робот с механум-колесами может двигаться по плоскости (или слабо неровной поверхности) в произвольном направлении без поворотов корпуса или при произвольных поворотах. А тем самым можно не встраивать в робот сложные рулевые механизмы и приводы и обеспечивать рулевую функцию робота за счет использования способности механум-колес двигаться в произвольном направлении. Аппарат, имеющий несколько механум-колес, должен лишь реализовать необходимую различную скорость вращения колес [13-17].

Будем рассматривать модель шестиколесного механум-робота и будем считать, что колеса расположены в два ряда вдоль сторон прямоугольного корпуса, так, как показано на рис.7 (слева). При этом важно отметить, что согласно рис.7 механум-колеса могут иметь при монтаже на корпус разную ориентацию – правую и левую. В качестве первого, основного, варианта будем рассматривать симметричную конфигурацию, в которой колеса 1,3,5 являются правыми, а колеса 2,4,6 – левыми (см. рис.7 в центре). Вторым вариантом будем рассматривать такой, в котором колеса 1,2,6 – левые, колеса 3,4,5 – правые (см. рис.7 справа). Отметим, что всего возможно 64 разных варианта компоновки колес [17], что должно учитываться при реализации конструкции робота.

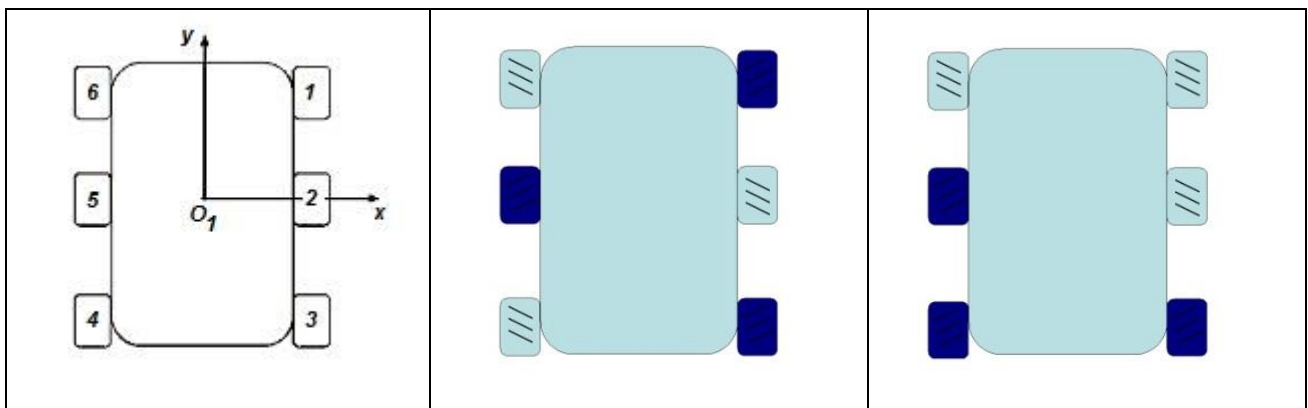


Рис.7. Схемы шестиколесного механум-робота.

2. Кинематика шестиколесного механум-робота

Исследуем кинематику робота на шести механум-колесах. Пусть его корпус представляет собой прямоугольную платформу со сторонами $L \times l$ (для определенности $L > l$). Свяжем с его центром O_1 систему координат так, чтобы оси O_1x и O_1y были осями симметрии робота (см. рис.7). Оси всех шести колес параллельны оси O_1x . Координаты центров $A_i, i=1...6$ в этой системе координат следующие:

$$A_1\left(\frac{l}{2}; \frac{L}{2}\right), A_2\left(\frac{l}{2}; 0\right), A_3\left(\frac{l}{2}; -\frac{L}{2}\right), A_4\left(-\frac{l}{2}; -\frac{L}{2}\right), A_5\left(-\frac{l}{2}; 0\right), A_6\left(-\frac{l}{2}; \frac{L}{2}\right).$$

Нумерация колес показана на рис.7. Углы отклонения осей роликов от осей колес либо 45° , либо -45° градусов.

Согласно [16] уравнение для одного механум-колеса имеет следующий вид:

$$\dot{q} = -\frac{1}{r \sin \delta} (\sin(\alpha + \delta)(v_y + \omega a_x) + \cos(\alpha + \delta)(v_x - \omega a_y)),$$

где \dot{q} – угловая скорость колеса, r – его радиус, δ – угол отклонения оси ролика от оси колеса, α – угол отклонения оси колеса от оси O_1x , (v_x, v_y, ω) – линейные и угловая скорости робота, (a_x, a_y) – координаты центра колеса.

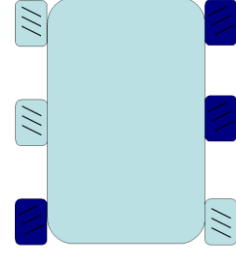
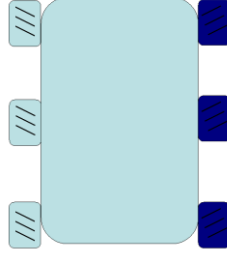
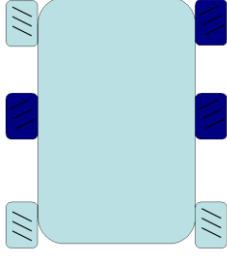
Для рассматриваемого в данной статье робота выполнено условие $\alpha = 0$ для всех колес. Тогда угловые скорости колес в этом случае выражаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \delta_1 & 1 & a_{1x} - a_{1y} \operatorname{ctg} \delta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{ctg} \delta_6 & 1 & a_{6x} - a_{6y} \operatorname{ctg} \delta_6 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

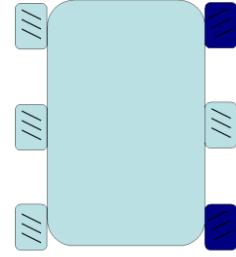
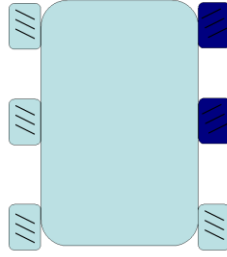
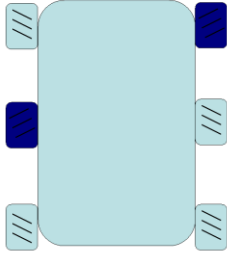
где (a_{ix}, a_{iy}) – координаты центров $A_i, i=1...6$. Уравнения (1) задают обратную кинематическую задачу. В зависимости от углов $\delta_i, i=1...6$ матрица M имеет разный вид. Для двух случаев, изображенных на рис.7 (предполагается, что $\delta = 45^\circ$ или $\delta = -45^\circ$), соответствующие матрицы M для решения обратной кинематической задачи (1 – для левого варианта, 2 – для правого):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}.$$

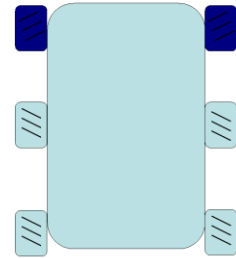
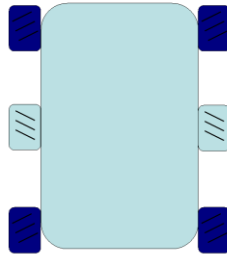
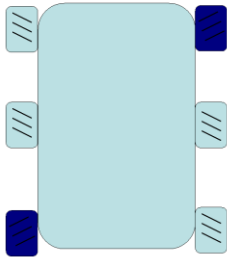
Ниже приведены еще 12 неидентичных друг другу вариантов того, как могут располагаться механум-колеса в зависимости от углов $\delta_i, i = 1 \dots 6$.



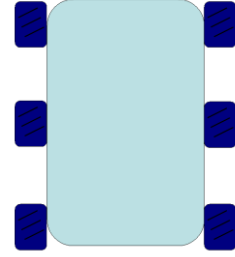
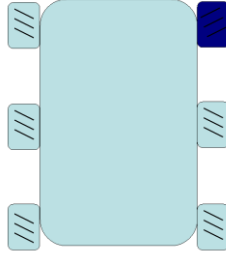
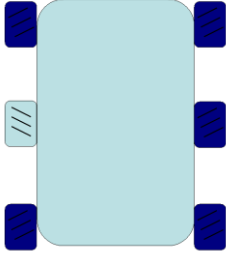
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}.$$



$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}.$$



$$M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ 1 & 1 & -l/2 - L/2 \end{pmatrix}, M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ 1 & 1 & -l/2 - L/2 \end{pmatrix}.$$



$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 + L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ 1 & 1 & -l/2 - L/2 \end{pmatrix}, M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ -1 & 1 & l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 - L/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 + L/2 \end{pmatrix}, M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & l/2 - L/2 \\ 1 & 1 & l/2 \\ 1 & 1 & l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 + L/2 \\ 1 & 1 & -l/2 \\ 1 & 1 & -l/2 - L/2 \end{pmatrix}.$$

На приведенных схемах прямоугольниками с темной заливкой и штриховкой вправо выделены колеса, для которых $\delta = 45^\circ$, а со светлой заливкой и штриховкой влево – колеса с $\delta = -45^\circ$. Под каждым вариантом выписана соответствующая матрица M для решения обратной кинематической задачи, подсчитанная для данного случая.

Остальные 50 вариантов аналогичны рассмотренным. В этом смысле приведенные варианты исчерпывают возможные схемы компоновок для шестиколесного аппарата с рядным расположением колес. В каждом случае несложно вычислить псевдообратные матрицы для решения прямой кинематической задачи. Но наиболее интересными являются варианты 1 и 2 в силу того, что они не сводятся к четырехколесным роботам.

Для них ниже приведены псевдообратные матрицы $M_i^+, i = 1, 2$, где индекс обозначает номер рассматриваемого варианта:

$$M_1^+ = \begin{pmatrix} \frac{2l^2 + lL + 2L^2}{4(4l^2 + 3L^2)} & -\frac{2l^2 + L^2}{2(4l^2 + 3L^2)} & \frac{2l^2 - lL + 2L^2}{4(4l^2 + 3L^2)} & -\frac{2l^2 - lL + 2L^2}{4(4l^2 + 3L^2)} & \frac{2l^2 + L^2}{2(4l^2 + 3L^2)} & -\frac{2l^2 + lL + 2L^2}{4(4l^2 + 3L^2)} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2l - 3L}{2(4l^2 + 3L^2)} & \frac{2l}{4l^2 + 3L^2} & \frac{2l + 3L}{2(4l^2 + 3L^2)} & -\frac{2l + 3L}{2(4l^2 + 3L^2)} & -\frac{2l}{4l^2 + 3L^2} & -\frac{2l - 3L}{2(4l^2 + 3L^2)} \end{pmatrix},$$

$$M_2^+ = \begin{pmatrix} \frac{-6l^2 + lL - 2L^2}{12(4l^2 + L^2)} & \frac{-3l^2 - lL - L^2}{6(4l^2 + L^2)} & \frac{12l^2 + lL + 2L^2}{12(4l^2 + L^2)} & \frac{6l^2 + lL + 2L^2}{12(4l^2 + L^2)} & \frac{3l^2 - lL + L^2}{6(4l^2 + L^2)} & \frac{-12l^2 + lL - 2L^2}{12(4l^2 + L^2)} \\ \frac{2l^2 - lL}{3(4l^2 + L^2)} & \frac{4l^2 - 2lL + 3L^2}{6(4l^2 + L^2)} & \frac{2l^2 - 2lL}{3(4l^2 + L^2)} & \frac{2l^2 + lL}{3(4l^2 + L^2)} & \frac{4l^2 + 2lL + 3L^2}{6(4l^2 + L^2)} & \frac{2l^2 + 2lL}{3(4l^2 + L^2)} \\ \frac{2l + L}{2(4l^2 + L^2)} & \frac{l - L}{4l^2 + L^2} & \frac{4l + L}{2(4l^2 + L^2)} & \frac{-2l + L}{2(4l^2 + L^2)} & \frac{-l - L}{4l^2 + L^2} & \frac{-4l + L}{2(4l^2 + L^2)} \end{pmatrix}.$$

3. Движение робота по касательной к траектории

Рассмотрим движение робота вдоль различных траекторий при условии, что в каждый момент времени ось O_1x робота совпадает с касательной к траектории. Тогда $\omega = kv$, где k – кривизна траектории (со знаком).

Предполагаем, что в начальный момент корпус робота уже расположен так, что ось O_1x и касательная к графику совпадают. Тогда угловые скорости колес выражаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ k\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2} \end{pmatrix}.$$

3.1. Движение по эпитрохоиде

Эпитрохоида – это кривая класса циклоидальных, схема ее построения для робота приведена на рис.8.

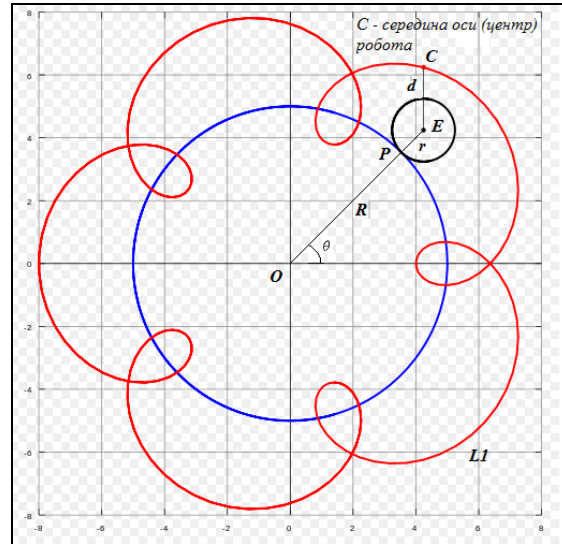


Рис.8. Эпитрохоида (кривая $L1$).

Эпитрохоида в параметрическом виде в некоторой системе координат $O\xi_1\xi_2$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \xi_1 = (R_1 + R_2)\cos\theta - d\cos\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\theta\right), \\ \xi_2 = (R_1 + R_2)\sin\theta - d\sin\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\theta\right), \\ \theta = \lambda t \end{cases} \quad (2)$$

где R_1, R_2, d, λ – параметры эпитрохоиды. Нетрудно получить выражение кривизны для эпитрохоиды:

$$k = \frac{\frac{(R_1 + R_2)d^2 + R_2^3}{R_2^3} - \frac{(R_1 + 2R_2)d}{R_2^2}\cos\left(\frac{R_1}{R_2}\theta\right)}{(R_1 + R_2)\left(\frac{d^2 + R_2^2}{R_2^2} - \frac{2d}{R_2}\cos\left(\frac{R_1}{R_2}\theta\right)\right)^{3/2}}.$$

Тогда для варианта 1 расстановки колес угловые скорости колес после преобразований имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\frac{\lambda}{r}(v_1 + (l/2 - L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_2 = -\frac{\lambda}{r}(v_2 + l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_3 = -\frac{\lambda}{r}(v_1 + (l/2 + L/2)\omega_k), \\ \dot{q}_4 &= -\frac{\lambda}{r}(v_2 - (l/2 + L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_5 = -\frac{\lambda}{r}(v_1 - l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_6 = -\frac{\lambda}{r}(v_2 - (l/2 - L/2)\omega_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{(R_1 + R_2)d^2 + R_2^3 - (R_1 + 2R_2)R_2d\cos\left(\frac{R_1}{R_2}\theta\right)}{(d^2 + R_2^2)R_2 - 2dR_2^2\cos\left(\frac{R_1}{R_2}\theta\right)}, \\ v_1 &= \sqrt{2}(R_1 + R_2)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \frac{d}{R_2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{R_1 + R_2}{R_2}\theta\right)\right), \\ v_2 &= \sqrt{2}(R_1 + R_2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \frac{d}{R_2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{R_1 + R_2}{R_2}\theta\right)\right). \end{aligned}$$

Для варианта 2 расстановки колес угловые скорости колес в тех же обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\frac{\lambda}{r}(v_2 + (l/2 + L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_2 = -\frac{\lambda}{r}(v_2 + l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_3 = -\frac{\lambda}{r}(v_1 + (l/2 + L/2)\omega_k), \\ \dot{q}_4 &= -\frac{\lambda}{r}(v_1 - (l/2 - L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_5 = -\frac{\lambda}{r}(v_1 - l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_6 = -\frac{\lambda}{r}(v_2 - (l/2 - L/2)\omega_k). \end{aligned}$$

3.2. Движение по "змейке"

Рассмотрим движение по синусоидальной траектории: $\xi_1 = t$, $\xi_2 = \sin t$.

Кривизна такой траектории:

$$k = \frac{-\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Тогда для варианта 1 расстановки колес угловые скорости колес после преобразований имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\frac{1}{r}(v_1 + (l/2 - L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_2 = -\frac{1}{r}(v_2 + l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_3 = -\frac{1}{r}(v_1 + (l/2 + L/2)\omega_k), \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{r}(v_2 - (l/2 + L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_5 = -\frac{1}{r}(v_1 - l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_6 = -\frac{1}{r}(v_2 - (l/2 - L/2)\omega_k), \end{aligned}$$

где

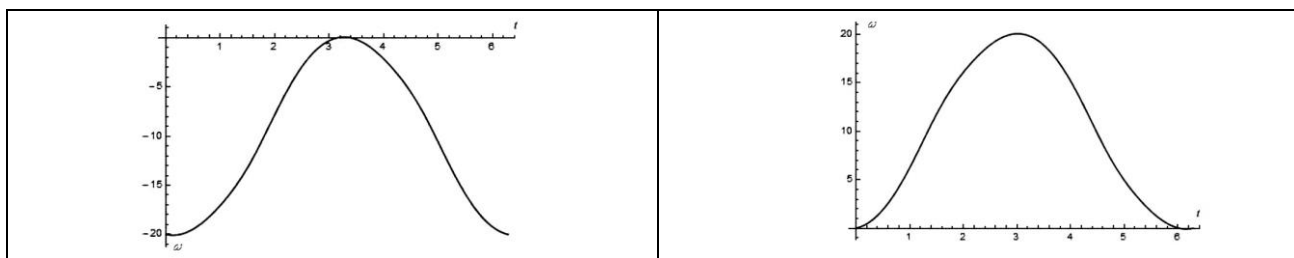
$$\omega_k = \frac{-\sin t}{1 + \cos^2 t}, \quad v_1 = 1 + \cos t, \quad v_2 = -1 + \cos t.$$

Для варианта 2 расстановки колес угловые скорости колес в тех же обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\frac{1}{r}(v_2 + (l/2 + L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_2 = -\frac{1}{r}(v_2 + l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_3 = -\frac{1}{r}(v_1 + (l/2 + L/2)\omega_k), \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{r}(v_1 - (l/2 - L/2)\omega_k), \quad \dot{q}_5 = -\frac{1}{r}(v_1 - l/2 \cdot \omega_k), \quad \dot{q}_6 = -\frac{1}{r}(v_2 - (l/2 - L/2)\omega_k). \end{aligned}$$

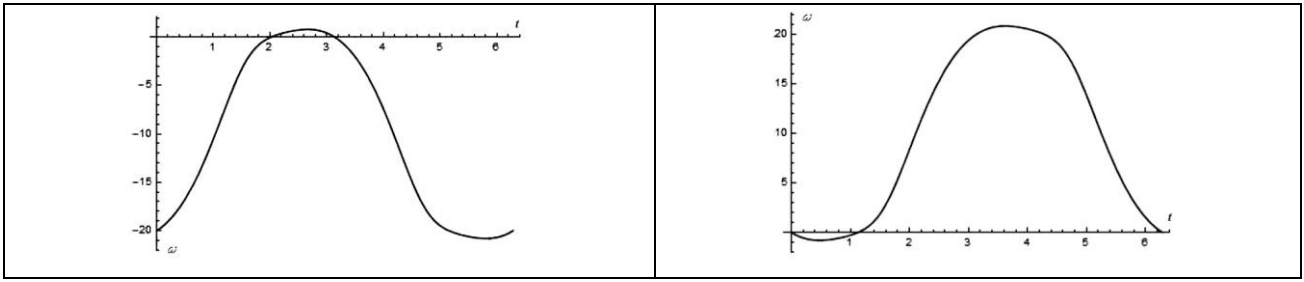
Ниже на рис.9 приведены графики угловых скоростей колес при движении по "змейке" для 1-го варианта расстановки колес.

Заметим, что на всех графиках оси абсцисс – это время в секундах, оси ординат – угловые скорости колес в (рад/сек). Из графиков видно, что скорости пар колес "первое-пятое" и "второе-шестое" и третьего и четвертого колес в значительной степени аналогичны и отличаются фактически только знаками, т.е. указанные колеса вращаются в противоположные стороны.



а) первое и пятое колеса

б) второе и шестое колеса



в) третье колесо

г) четвертое колесо

Рис.9. Скорости вращения колес для движения по "змейке" при параметрах $r=0.1$, $l=0.5$, $L=1$.

Для второго варианта скорости вращения колес аналогичны с точностью до перестановок по номерам колес.

3.3. Движение по сплайн-траектории четвертого порядка

Предположим, что система управления робота (система маршрутизации) выбирает точки, по которым должен проезжать робот. Приведем явное решение задачи управления.

Пусть задано несколько точек, через которые должен проехать робот. Чтобы его движение было гладким, сначала построим путь через данные точки с помощью сплайнов так, чтобы в точках, где стыкуются различные полиномиальные функции, они совпадали по значению, по первой, второй и третьей производной. Это условие обеспечит гладкое движение робота по касательной к траектории. При этом в такой постановке задачи достаточно интерполяции сплайнами четвертой степени.

Рассмотрим пример с 4 заданными точками: (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Точки соединим тремя сплайн-кривыми:

$$y = \begin{cases} y_1 = c_{14}x^4 + c_{13}x^3 + c_{12}x^2 + c_{11}x + c_{10}, & x_0 \leq x < x_1, \\ y_2 = c_{24}x^4 + c_{23}x^3 + c_{22}x^2 + c_{21}x + c_{20}, & x_1 \leq x < x_2, \\ y_3 = c_{34}x^4 + c_{33}x^3 + c_{32}x^2 + c_{31}x + c_{30}, & x_2 \leq x < x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Потребуем выполнения следующих условий гладкости (штрихами обозначены производные по времени соответствующего порядка):

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = y_0, \quad y_1(x_1) = y_1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad y_1''(x_0) = 0, \quad y_1'''(x_0) = 0, \quad y_1'(x_1) = y_2'(x_1), \quad y_1''(x_1) = y_2''(x_1), \\ y_1'''(x_1) = y_2'''(x_1), \quad y_2(x_1) = y_1, \quad y_2(x_2) = y_2, \quad y_2'(x_2) = y_3'(x_2), \quad y_2''(x_2) = y_3''(x_2), \quad y_2'''(x_2) = y_3'''(x_2), \\ y_3(x_2) = y_2, \quad y_3(x_3) = y_3. \end{aligned}$$

Все вышеперечисленные условия задают систему уравнений на полиномиальные коэффициенты c_{ij} . Эту систему удобно записать в следующем виде:

$$A \cdot c = B,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_{14} \ c_{13} \ c_{12} \ c_{11} \ c_{10} \ c_{24} \ c_{23} \ c_{22} \ c_{21} \ c_{20} \ c_{34} \ c_{33} \ c_{32} \ c_{31} \ c_{30})^T, \\ \mathbf{B} &= (y_0 \ y_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ y_1 \ y_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ y_2 \ y_3)^T, \\ A &= \begin{pmatrix} x_0^4 & x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4x_0^3 & 3x_0^2 & 2x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12x_0^2 & 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24x_0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4x_1^3 & 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & -4x_1^3 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12x_1^2 & 6x_1 & 2 & 0 & 0 & -12x_1^2 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24x_1 & 6 & 0 & 0 & 0 & -24x_1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4x_2^3 & 3x_2^2 & 2x_2 & 1 & 0 & -4x_2^3 & -3x_2^2 & -2x_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12x_2^2 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 & -12x_2^2 & -6x_2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24x_2^2 & 6 & 0 & 0 & 0 & -24x_2^3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

После нахождения решения $\mathbf{c} = A^{-1} \mathbf{B}$ будет получена уже конкретная траектория для робота. Найдем выражения для угловых скоростей колес для движения по такой траектории. Предполагая, что изначально центр робота находится в точке (x_0, y_0) и своей продольной осью робот направлен параллельно оси Ox , имеем при параметризации $x=t$, $y=y(t)$ для линейной и угловой скоростей робота:

$$v_x = 1, \quad v_y = \begin{cases} 4c_{14}t^3 + 3c_{13}t^2 + 2c_{12}t + c_{11}, & x_0 \leq t < x_1, \\ 4c_{24}t^3 + 3c_{23}t^2 + 2c_{22}t + c_{21}, & x_1 \leq t < x_2, \\ 4c_{34}t^3 + 3c_{33}t^2 + 2c_{32}t + c_{31}, & x_2 \leq t < x_3. \end{cases}$$

$$\omega = kv = \begin{cases} \frac{12c_{14}t^2 + 6c_{13}t + 2c_{12}}{1 + (4c_{14}t^3 + 3c_{13}t^2 + 2c_{12}t + c_{11})^2}, & x_0 \leq t < x_1, \\ \frac{12c_{24}t^2 + 6c_{23}t + 2c_{22}}{1 + (4c_{24}t^3 + 3c_{23}t^2 + 2c_{22}t + c_{21})^2}, & x_1 \leq t < x_2, \\ \frac{12c_{34}t^2 + 6c_{33}t + 2c_{32}}{1 + (4c_{34}t^3 + 3c_{33}t^2 + 2c_{32}t + c_{31})^2}, & x_2 \leq t < x_3. \end{cases}$$

Заметим, в последней формуле k – это алгебраическая (со знаком) кривизна траектории, по которой движется центр робота, и начало связанной с его корпусом системы координат. Заметим также, что линейная и угловая скорости робота являются непрерывными функциями в силу наложенных условий на коэффициенты c_{ij} . Здесь и далее принято, что при движении продольная ось корпуса робота движется по касательной к траектории его центра.

Окончательно, для первого варианта расположения механум-колес (см. рис.2 слева) угловые скорости колес имеют вид:

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y + (l/2 - L/2)\omega), \quad \dot{q}_2 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y + l/2\omega), \quad (4)$$

$$\dot{q}_3 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y + (l/2 + L/2)\omega),$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y - (l/2 + L/2)\omega), \quad \dot{q}_5 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y - l/2\omega),$$

$$\dot{q}_6 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y - (l/2 - L/2)\omega),$$

для второго варианта (см. рис.2 справа):

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y + (l/2 + L/2)\omega), \quad \dot{q}_2 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y + l/2\omega),$$

$$\dot{q}_3 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y + (l/2 + L/2)\omega),$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y - (l/2 - L/2)\omega), \quad \dot{q}_5 = -\frac{1}{r}(v_x + v_y - l/2\omega),$$

$$\dot{q}_6 = -\frac{1}{r}(-v_x + v_y - (l/2 - L/2)\omega).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда роботу требуется проехать через точки $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,1)$, $(5,5)$. Решая систему на коэффициенты c_{ij} , получаем:

$$c_{ij} = \left(2, 0, 0, 0, 0, -\frac{129}{16}, \frac{161}{4}, -\frac{483}{8}, \frac{161}{4}, -\frac{161}{16}, \frac{601}{8}, -958, \frac{17727}{4}, -8944, \frac{53825}{8} \right). \quad (5)$$

Соответствующие графики приведены на рис.10, на левом – траектория согласно (3) и (5), на правом – график угловой скорости вращения первого колеса (4), графики угловых скоростей остальных колес робота аналогичны. На графике траектории показаны также точки, задающие построенную траекторию.

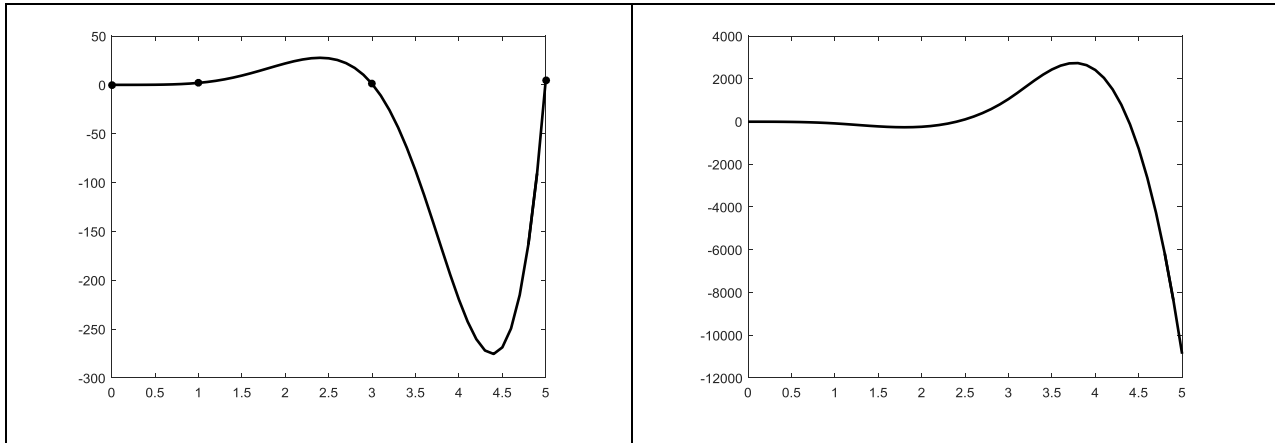


Рис.10. Траектория (слева). Угловая скорость вращения первого колеса (справа) при выбранных параметрах $r=0.1$, $l=0.5$, $L=1$.

Заметим, что существенное колебание траектории ("выброс") между 3-й и 4-й определяющими точками на рис.10 (слева) связано с особенностями сплайновой аппроксимации траектории, но эта особенность не повлияла на возможность реализации движения робота. Расчеты показывают также, что скорости колес для второго варианта компоновки колес на роботе аналогичны скоростям первого варианта и описываются близкими к рис.10 функциями и графиками.

Реализуя указанные законы движения колес, робот способен двигаться по достаточно сложным траекториям, с поворотами значительной кривизны, и все повороты реализуются без использования рулевых механизмов на роботе.

3.4. Движение по сплайн-траектории пятого порядка

Рассмотрим аналогичную предыдущей задаче о прохождении робота вдоль траектории, построенной на четырех точках, но потребуем выполнения дополнительных условий: $y'_3(x_3) = 0$, $y''_3(x_3) = 0$, $y'''_3(x_3) = 0$. Эти условия гарантируют нам, что робот придет в конечную точку параллельно оси Ox (как и начинал своё движение) и остановится. Таким образом матрица A становится размера 18 на 18 (а не 15 на 15, как это было ранее), а траектория имеет вид:

$$y = \begin{cases} y_1 = c_{15}x^5 + c_{14}x^4 + c_{13}x^3 + c_{12}x^2 + c_{11}x + c_{10}, & x_0 \leq x < x_1, \\ y_2 = c_{25}x^5 + c_{24}x^4 + c_{23}x^3 + c_{22}x^2 + c_{21}x + c_{20}, & x_1 \leq x < x_2, \\ y_3 = c_{35}x^5 + c_{34}x^4 + c_{33}x^3 + c_{32}x^2 + c_{31}x + c_{30}, & x_2 \leq x < x_3. \end{cases} \quad (6)$$

Задача решается аналогично предыдущему варианту. Пусть сплайн 5-го порядка должен пройти через те же точки $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,1)$, $(5,5)$. Коэффициенты сплайн-кривой вычисляются аналогично предыдущему случаю, с той лишь разницей, что их будет не 15, а 18:

$$c_{ij} = (-3.0000, 5.0000, 0, 0, 0, 0.0000, -1.2422, 13.0078, -49.6094, 83.2031, -58.3984, 15.0391, -0.3047, 6.7578, -58.9844, 251.9531, -522.4609, 420.0391) \quad (7)$$

Соответствующий график траектории построен на рис.11. Важно отметить, и рис.11 это подтверждает, что колебания (выбросы) траектории для сплайна 5-го порядка будут меньше, что важно для синтеза движения робота.

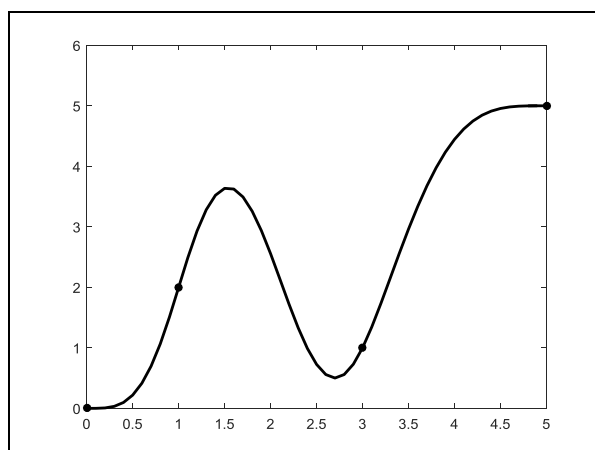


Рис.11. Траектория 5-го порядка.

На последующем рисунке 12 показаны угловые скорости колес для первого варианта их компоновки, реализующие движение робота по построенной траектории. Как и ранее, ось абсцисс – это время в *сек.*, ось ординат – угловая скорость в *рад/сек.*

Целесообразно отметить, что угловые скорости колес принимают разные знаки, стало быть, при данном движении на разных участках траектории колеса вращаются в разные стороны.

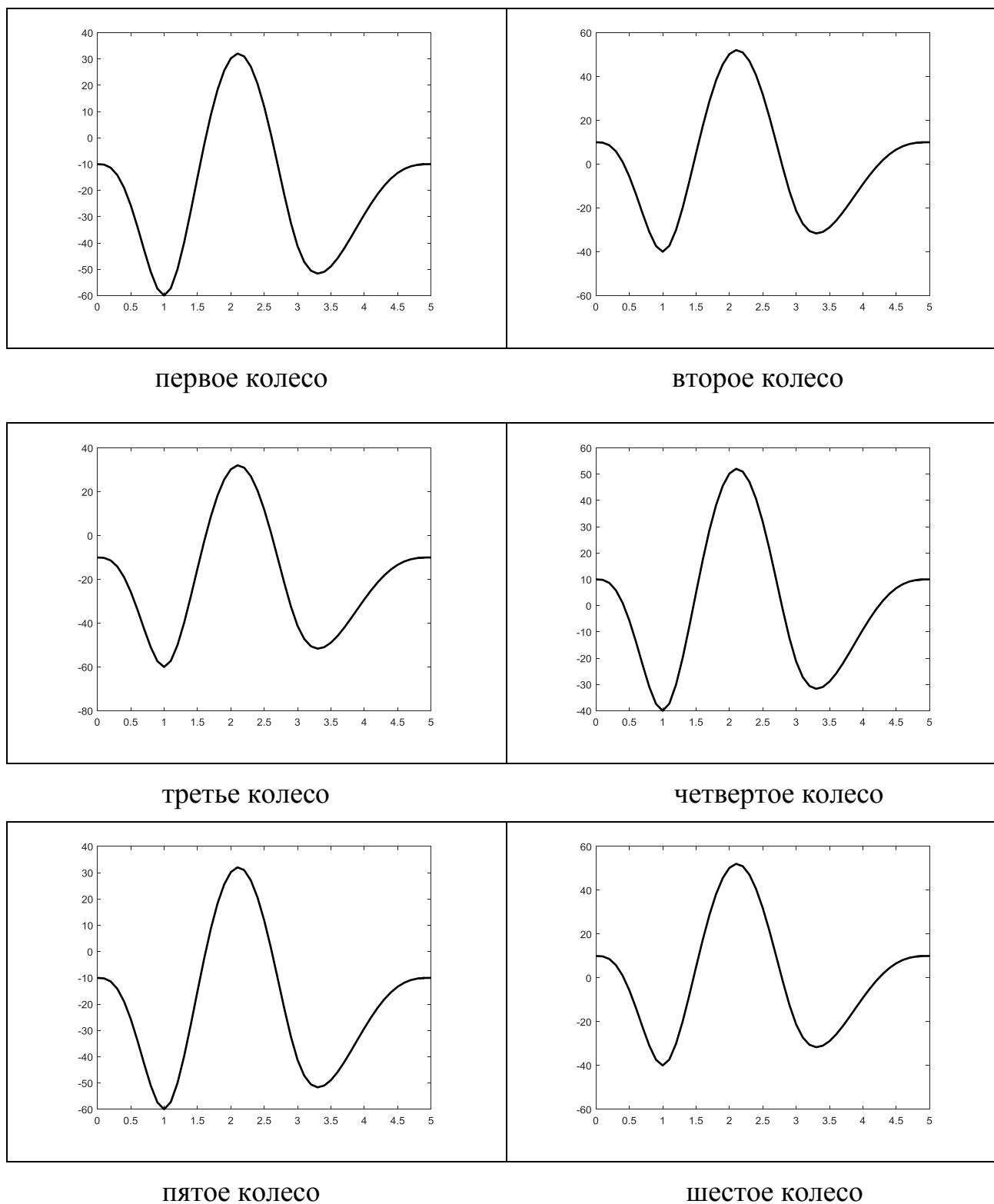


Рис.12. Угловые скорости колес при движении по траектории 5-го порядка.

4. Поступательное движение робота вдоль траектории

Благодаря тому, что с помощью механум-колес можно реализовать движение в любом направлении, роботу необязательно поворачивать свой

корпус при движении по траектории. Рассмотрим вариант перемещения робота, при котором корпус всегда остается параллелен себе, при этом движение по-прежнему задается некоторой криволинейной траекторией. Если корпус робота не может вращаться вокруг своей оси O_1z , то $\omega = 0$. Будем считать, центр робота уже находится в какой-то точке траектории, а его ось O_1x находится под некоторым углом β к оси $O\xi_1$ и, согласно постановке задачи, должен его сохранять. Матрица перехода от системы O_1xy к системе $O\xi_1\xi_2$ – это матрица поворота $\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$. Таким образом, угловые скорости колес выражаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \cos \beta + \dot{\xi}_2 \sin \beta \\ -\dot{\xi}_1 \sin \beta + \dot{\xi}_2 \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Интересно заметить, что для данных меканум-колес (с углом роликов 45 градусов), чтобы сохранять угол в 45 градусов, выражения для угловых скоростей колес имеют простой вид, а именно: для 1 варианта расположения колес

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \dot{q}_5 = \omega_1 = -\frac{1}{r} \dot{\xi}_2 \sqrt{2}, \dot{q}_2 = \dot{q}_4 = \dot{q}_6 = \omega_2 = \frac{1}{r} \dot{\xi}_1 \sqrt{2},$$

и для варианта 2 в тех же обозначениях $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_6 = \omega_2$.

4.1. Движение по эпитрохоиде

Рассмотрим поступательное движение робота вдоль эпитрохоиды. Напомним, что эпитрохоида описывается уравнениями (2).

Для варианта 1 расстановки колес угловые скорости колес имеют вид: $\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_2 = \dot{q}_4 = \dot{q}_6 = \omega_2$, где

$$\begin{aligned} \omega_1 = & -\frac{\lambda(R_1 + R_2)}{r} \left((\sin \beta - \cos \beta) \left(\sin \theta - \frac{d}{R_2} \sin \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta \right) + \right. \\ & \left. + (\cos \beta + \sin \beta) \left(\cos \theta - \frac{d}{R_2} \cos \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta \right) \right), \\ \omega_2 = & -\frac{\lambda(R_1 + R_2)}{r} \left((\sin \beta + \cos \beta) \left(\sin \theta - \frac{d}{R_2} \sin \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta \right) + \right. \\ & \left. + (\cos \beta - \sin \beta) \left(\cos \theta - \frac{d}{R_2} \cos \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta \right) \right). \end{aligned}$$

Для варианта 2 расстановки колес угловые скорости колес выражаются теми же комбинациями, отличие только в номерах колес:
 $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_6 = \omega_2.$

4.2. Движение по «змейке»

Рассмотрим поступательное движение по синусоидальной траектории.

Для варианта 1 расстановки колес угловые скорости колес имеют вид:
 $\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_2 = \dot{q}_4 = \dot{q}_6 = \omega_2,$ где

$$\omega_1 = -\frac{1}{r}(\cos \beta - \sin \beta + \cos t(\cos \beta + \sin \beta)), \quad \omega_2 = -\frac{1}{r}(-\cos \beta - \sin \beta + \cos t(\cos \beta - \sin \beta)).$$

Для варианта 2 расстановки колес угловые скорости колес выражаются теми же комбинациями, отличие только в номерах колес:
 $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_6 = \omega_2.$

Ниже на рис.13 приведены графики этих угловых скоростей. Для первого варианта слева дан график угловых скоростей 1,3 и 5 колес, а справа – 2,4,6 колес.

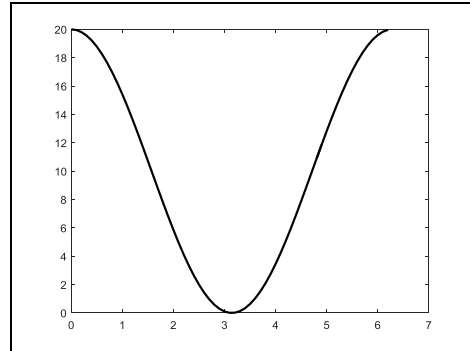
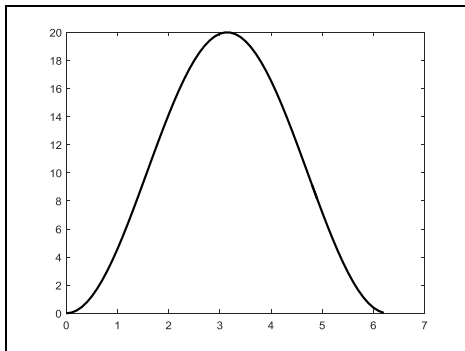


Рис.13. Графики угловых скоростей ω_1 (слева) и ω_2 (справа) при $r=0.1, \beta=90^\circ$.

4.3. Движение по сплайн-траектории четвертого порядка

Рассмотрим поступательное движение по сплайн-траектории 4-го порядка, заданной уравнениями (3).

Для варианта 1 расстановки колес угловые скорости колес имеют вид:
 $\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_2 = \dot{q}_4 = \dot{q}_6 = \omega_2,$ где

$$\omega_1 = -\frac{1}{r}(\cos \beta - \sin \beta + v_y(\cos \beta + \sin \beta)), \quad \omega_2 = -\frac{1}{r}(-\cos \beta - \sin \beta + v_y(\cos \beta - \sin \beta)),$$

$$v_y = \begin{cases} 4c_{14}t^3 + 3c_{13}t^2 + 2c_{12}t + c_{11}, & x_0 \leq t < x_1, \\ 4c_{24}t^3 + 3c_{23}t^2 + 2c_{22}t + c_{21}, & x_1 \leq t < x_2, \\ 4c_{34}t^3 + 3c_{33}t^2 + 2c_{32}t + c_{31}, & x_2 \leq t < x_3. \end{cases}$$

Для варианта 2 расстановки колес угловые скорости колес выражаются теми же комбинациями, отличие только в номерах колес: $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \omega_1, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_6 = \omega_2$.

Ниже на рис.14 изображены графики угловых скоростей ω_1 (слева) и ω_2 (справа) при $r=0.1$, $\beta=90^\circ$ и коэффициентах c_{ij} (5).

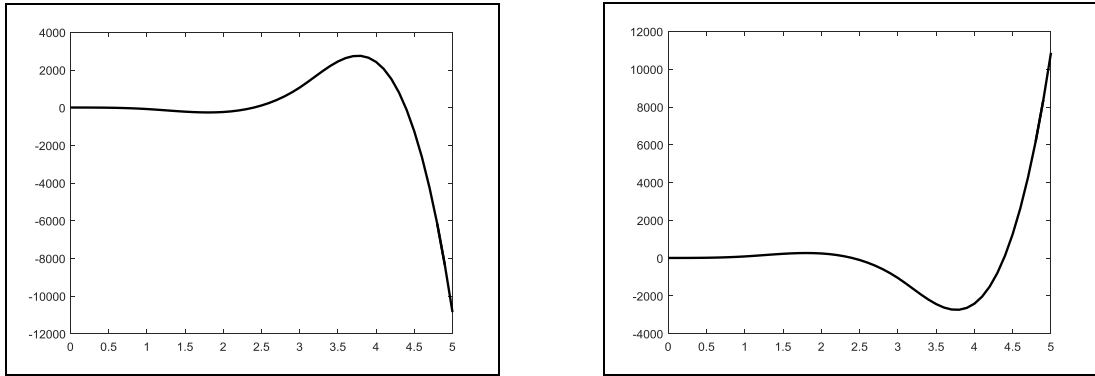


Рис.14. Графики угловых скоростей ω_1 (слева) и ω_2 (справа) при $r=0.1$, $\beta=90^\circ$.

4.4. Движение по сплайн-траектории пятого порядка

Рассмотрим поступательное движение по сплайн-траектории 5-го порядка, заданной уравнениями (6).

Общее решение для обоих случаев расстановки колес повторяет описанное выше в п.4.3 с тем лишь исключением, что в выражении для v_y добавляются новые слагаемые за счет увеличения степени сплайна:

$$v_y = \begin{cases} 5c_{15}t^4 + 4c_{14}t^3 + 3c_{13}t^2 + 2c_{12}t + c_{11}, & x_0 \leq t < x_1, \\ 5c_{25}t^4 + 4c_{24}t^3 + 3c_{23}t^2 + 2c_{22}t + c_{21}, & x_1 \leq t < x_2, \\ 5c_{35}t^4 + 4c_{34}t^3 + 3c_{33}t^2 + 2c_{32}t + c_{31}, & x_2 \leq t < x_3. \end{cases}$$

Ниже на рис.15 изображены графики угловых скоростей ω_1 (слева) и ω_2 (справа) при $r=0.1$, $\beta=90^\circ$ и коэффициентах c_{ij} (7).

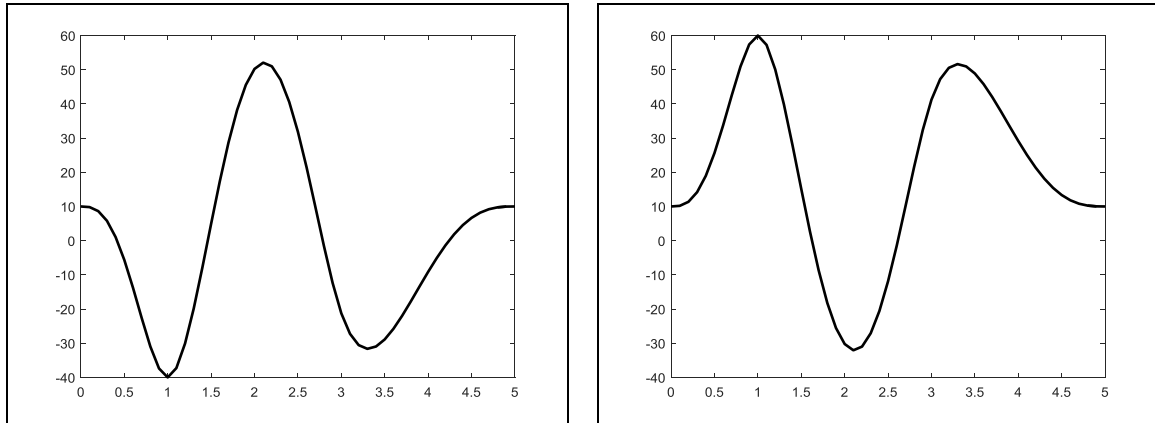


Рис.15. Графики угловых скоростей ω_1 (слева) и ω_2 (справа) при $r=0.1$, $\beta=90^\circ$.

5. Модель механум-робота

На рис. 16 показано шасси шестиколесного механум-робота, разработанного в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН при участии авторов настоящей работы. Разработчиками робота были сотрудники Лаборатории «Интеллект и Мехатроника» ФИЦ «Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН», основной вклад в создание механической части внесли Д.А.Грибков, И.А.Орлов.

В качестве демонстрационной задачи выбрана задача управления и навигации колесной платформы с роботом манипулятором на борту. Создан макет робота омни-мобильного движения на шести механум-колесах с двигателями постоянного тока.

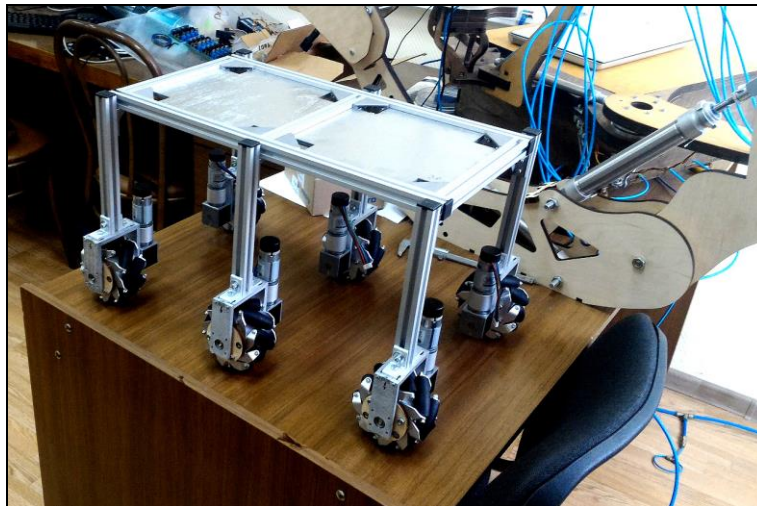


Рис.16. Шестиколесный механум-робот.

Основная цель исследований – синтез управляемого движения аппарата по криволинейным траекториям. Использование механум-колес (роликонесущих колес всенаправленного движения) упрощает кинематическую схему аппарата

за счет отказа от сложных рулевых механизмов и приводов, и при этом полностью сохраняет возможности управления криволинейными движениями.

Разработана программно-аппаратная архитектура системы управления мобильным на базе микроконтроллера STM32F4, в качестве среды моделирования системы управления выбраны MATLAB Simulink, моделирования кинематики и динамики роботов – программный пакет «Универсальный механизм».

В графической среде имитационного моделирования MATLAB Simulink создана универсальная система управления низкого уровня для электродвигателей постоянного тока с обратной связью по датчикам тока и датчикам скорости на основе эффекта Холла для многофункциональной подвижной робототехнической платформы. Разработана архитектура системы навигации робота в помещении по маякам на базе ультразвуковых датчиков расстояния. В программном комплексе «Универсальный механизм» создана динамическая модель робота (рис. 17) с шестью механум-колесами, состоящая из 61-го твердого тела, соединенных посредством вращательных шарниров: корпус, 6 колес, 54 ролика (по 9 роликов на колесе). На каждом ролике задано по 9 контактов типа окружность-плоскость, в сумме 486 контактных взаимодействия. Численным моделированием исследуется контактное взаимодействие между роликами механум-колес и поверхностью, по которой движется робот. Показаны способы кинематического управления аппаратом по различным траекториям. Продемонстрирована высокая мобильность аппарата.

С участием всех авторов предполагается отработка полученных в настоящей работе схем управления на указанном роботе. Предполагается создание интеллектуального мобильного робота-манипулятора на базе реализованного механум-шасси.

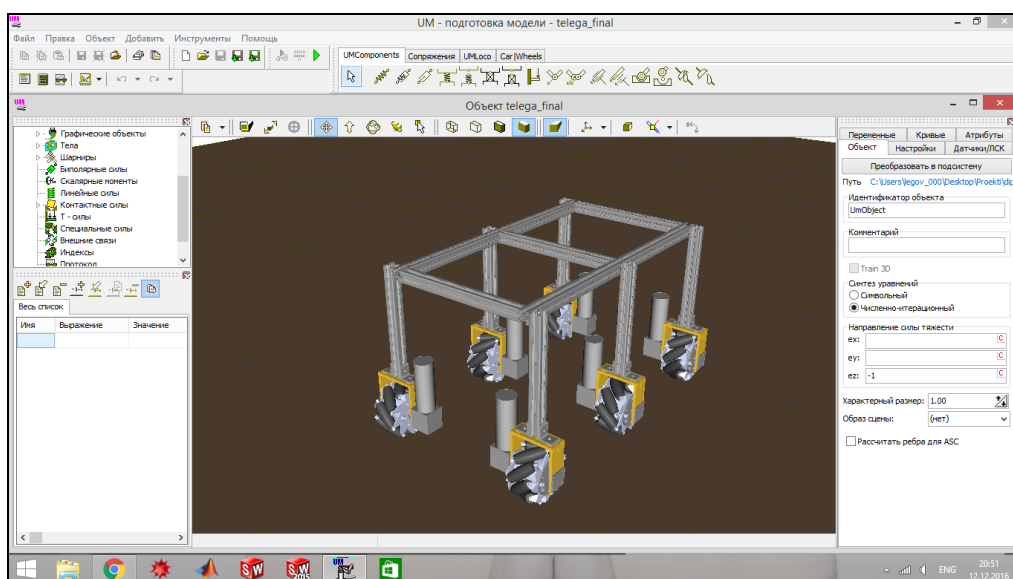


Рис.17. Модель механум-робота в ПК УМ.

Заключение

По предложенной схеме рассмотрены различные движения и маневры робота, простые и достаточно сложные. Рассмотрены простые повороты на различные углы, рассмотрены движения по заданным траекториям типа окружностей, или синусоидальным траекториям (задача "змейка"). Рассмотрены сложные движения, пример – описанное выше движение робота по эпитрохоиде. Робот осуществлял движение так, что продольная ось корпуса была направлена по касательной к траектории движения или сохранял угол при поступательном движении.

Рассмотрено также достаточно сложное движение, которое можно назвать "вальсирующим", в нем центр корпуса робота движется по заданной кривой, например, по прямой, а корпус вращается заданным образом вокруг оси, проходящей через центр корпуса ортогонально плоскости корпуса. Оказалось, что и такое движение просто реализуется соответствующим управлением скоростями вращения колес.

В работе был предложен синтез управляемого движения аппарата с механум-колесами по криволинейным траекториям, заданным алгебраическими сплайнами. Показано явное решение задачи кинематического управления движением аппарата. Проведенные исследования показали, что сплайновое задание траекторий является удобным инструментом синтеза движения механум-робота. По ним удастся достаточно легко строить кинематические законы вращения колес робота, реализующих желаемое движение. Эти кинематические законы являются кинематическими программами движения, которые затем подлежат реализации и отслеживанию в системе управления робота.

Сказанное приводит к выводу, что механум-конструкция колесного мобильного робота может оказаться удачной альтернативой традиционным мобильным схемам в условиях, когда необходимо обеспечить высокую маневренность робота в стесненных условиях. Примеры этого уже появляются, например, в [8].

Во всех рассмотренных случаях указанные преимущества механум-конструкции были очевидны.

Библиографический список

1. В. Ilon. Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base. Patent USA, 3876255, 1974 .
2. «Uranus» [Электронный ресурс] _Режим доступа:
<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/user/gwp/www/robots/Uranus.html>
3. Robotics UWA [Электронный ресурс] _Режим доступа:
<http://robotics.ee.uwa.edu.au/research.html>
4. Электронный ресурс: <http://robotics.ee.uwa.edu.au/omni/>

5. Лаборатория робототехники и искусственного интеллекта Политехнического музея/ Выставка робототехнических устройств [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://www.railab.ru/old-seasons/13-sorevnovaniya-robotov/29-vystavka-robotov-2012.html>
6. Institute of computer science / Robot tango [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://ics.org.ru/events/5322-tango-robotov/>
7. Hillery M. Omni-Directional Vehcile (ODV) by the U.S. Navy [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://www.arrickrobotics.com/robomenu/odv.html>
8. KUKA Roboter GmbH KUKA OMNIMOVE [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://www.kuka-omnimove.com/en/>
9. The Old Stageh and Airtrax Sidewinder Forklift [Электронный ресурс] _Режим доступа: http://wn.com/Mecanum_wheel
10. Vehicle Technologies, Inc. Sidewinder [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://www.airtrax.com/>
11. С.Тодденрот. Volkswagen Rescue Rover [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://future24.ru/plavayushchii-avtomobil-volkswagen-rescue-rover>
12. Dongguan City Omni Mechanical Technology Co., Ltd. [Электронный ресурс] _Режим доступа: <http://www.omrobot.com/en/index.html>
13. O. Diegel, A. Badve, G. Bright, J. Podgieter, S. Tlale Improved Mecanum Wheel Design for Omni-directional Robots. Proc. 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation (ARAA-2002), Auckland, 27–29 November 2002. pp. 117–121.
14. L. Lin and H. Shih. Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot. Intelligent Control and Automation, Vol. 4 No. 2, 2013, pp. 166-179.
15. Hamid Taheri, Bing Qiao and Nurallah Ghaeminezhad. Kinematic Model of a Four Mecanum Wheeled Mobile Robot. International Journal of Computer Applications 113(3):6-9, March 2015.
16. A. Gfrerrer, Geometry and kinematics of the Mecanum wheel. Comput. Aided Geom. Design 25 (2008), no. 9, 784-791.
17. Е.Ю. Баранова, В.Е. Павловский. Кинематика шестиколесного механум-робота. // Известия ВолгГТУ, серия "Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах". - Волгоград, 2015. - № 13 (177). – с. 147-152.

Оглавление

Введение. Состояние проблемы	3
1. Исходные геометрические соотношения.....	6
2. Кинематика шестиколесного механум-робота.....	7
3. Движение робота по касательной к траектории.....	10
3.1. Движение по эпитрохоиде.....	10
3.2. Движение по "змейке"	12
3.3. Движение по сплайн-траектории четвертого порядка	13
3.4. Движение по сплайн-траектории пятого порядка	16
4. Поступательное движение робота вдоль траектории.....	18
4.1. Движение по эпитрохоиде.....	19
4.2. Движение по «змейке».....	20
4.3. Движение по сплайн-траектории четвертого порядка	20
4.4. Движение по сплайн-траектории пятого порядка	21
5. Модель механум-робота	22
Заключение.....	24
Библиографический список.....	24