

# Cálculo de Programas

## Trabalho Prático

### MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática  
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr.	57
a84610	Gonçalo Almeida
a86788	Lázaro Pinheiro
a80960	Rúben Rodrigues

## 1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

## 2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

---

<sup>1</sup>O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

### 3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **B** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

## Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- *dic\_rd* — procurar traduções para uma determinada palavra
- *dic\_in* — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- *dic\_imp* — importar dicionários do formato “lista de pares palavra-tradução”
- *dic\_exp* — exportar dicionários para o formato “lista de pares palavra-tradução”.

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo **B** é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura **1**. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:



Figura 1: Representação em memória do dicionário dado para testes.

**Propriedade [QuickCheck] 1** Se um dicionário estiver normalizado (ver apêndice B) então não perdemos informação quando o representamos em memória:

$$\text{prop\_dic\_rep } x = \text{let } d = \text{dic\_norm } x \text{ in } (\text{dic\_exp} \cdot \text{dic\_imp}) d \equiv d$$

**Propriedade [QuickCheck] 2** Se um significado  $s$  de uma palavra  $p$  já existe num dicionário então adicioná-lo em memória não altera nada:

$$\begin{aligned} \text{prop\_dic\_red } p \ s \ d \\ | \text{ dic\_red } p \ s \ d = \text{dic\_imp } d \equiv \text{dic\_in } p \ s \ (\text{dic\_imp } d) \\ | \text{ otherwise } = \text{True} \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 3** A operação  $\text{dic\_rd}$  implementa a procura na correspondente exportação do dicionário:

$$\text{prop\_dic\_rd } (p, t) = \text{dic\_rd } p \ t \equiv \text{lookup } p \ (\text{dic\_exp } t)$$

## Problema 2

Árvores binárias (elementos do tipo **BTree**) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das **árvores binárias de procura**, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.<sup>2</sup>

Note que tais árvores permitem reduzir *significativamente* o espaço de procura, dado que ao procurar um valor podemos sempre *reduzir a procura a um ramo* ao longo de cada nó visitado. Por exemplo, ao procurar o valor 7 na primeira árvore ( $t_1$ ), sabemos que nos podemos restringir ao ramo da direita do nó com o valor 5 e assim sucessivamente. Como complemento a esta explicação, consulte também os **vídeos das aulas teóricas** (capítulo ‘pesquisa binária’).

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raiz tem o valor  $a$ , um filho  $s_1$  à esquerda e um filho  $s_2$  à direita. Assuma

<sup>2</sup>As imagens foram geradas com recurso à função *dotBt* (disponível neste documento). Recomenda-se o uso desta função para efeitos de teste e ilustração.



Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por  $t_1$  e a da direita por  $t_2$ .

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de  $t_1$  é menor ou igual a  $a$ ; e que o elemento *mais à esquerda* de  $t_2$  é maior ou igual a  $a$ . Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$\text{maisEsq} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$   
 $\text{maisDir} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda ( $t_1$ ) e à árvore da direita ( $t_2$ ) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
Just 16
*Splay> maisEsq t1
Just 1
*Splay> maisDir t2
Just 8
*Splay> maisEsq t2
Just 0
```

**Propriedade [QuickCheck] 4** As funções  $\text{maisEsq}$  e  $\text{maisDir}$  são determinadas unicamente pela propriedade

$\text{prop\_inv} :: \text{BTree } \text{String} \rightarrow \text{Bool}$   
 $\text{prop\_inv} = \text{maisEsq} \equiv \text{maisDir} \cdot \text{invBTree}$

**Propriedade [QuickCheck] 5** O elemento *mais à esquerda* de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:

$\text{propEsq } \text{Empty} = \text{property } \text{Discard}$   
 $\text{propEsq } x@(Node (a, (t, s))) = (\text{maisEsq } t) \neq \text{Nothing} \Rightarrow (\text{maisEsq } x) \equiv \text{maisEsq } t$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$\text{insOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$\text{isOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{Bool}$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.

**Sugestão:** Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$\text{insOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{BTree } a, \text{BTree } a)$   
 $\text{isOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{Bool}, \text{BTree } a)$

tais que  $\text{insOrd}' x = \langle \text{insOrd } x, \text{id} \rangle$  para todo o elemento  $x$  do tipo  $a$  e  $\text{isOrd}' = \langle \text{isOrd}, \text{id} \rangle$ .

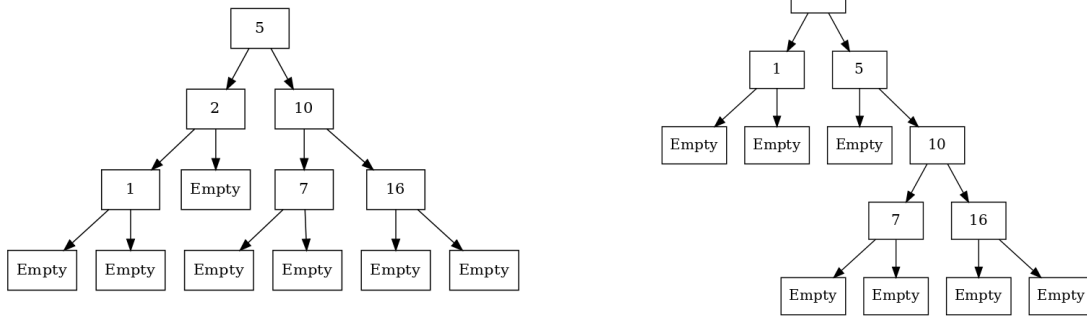


Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

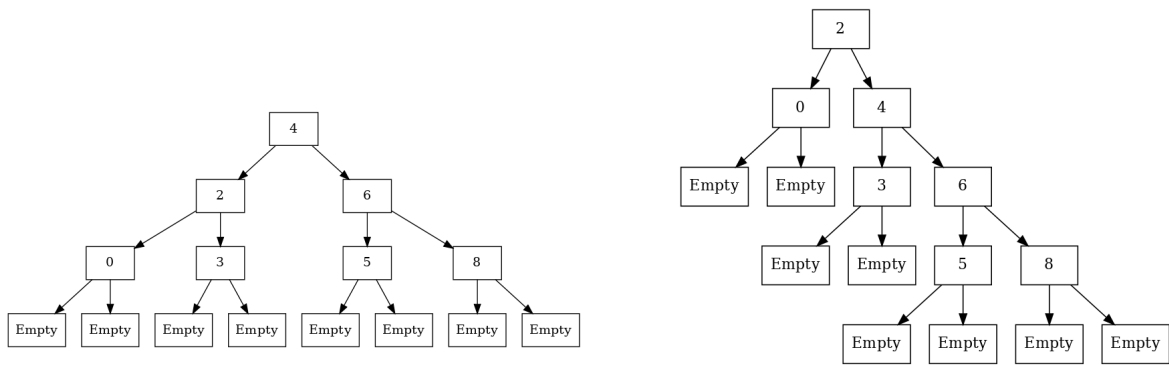


Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

**Propriedade [QuickCheck] 6** Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.

$prop\_ord :: [Int] \rightarrow Bool$   
 $prop\_ord = isOrd \cdot (foldr insOrd Empty)$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raiz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*<sup>3</sup>. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós "uma casa para a sua direita". Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raiz pela letra  $r$ . Se  $r$  não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,
2. designe o filho à esquerda pela letra  $l$ . A árvore que vamos retornar tem  $l$  na raiz, que mantém o filho à esquerda e adota  $r$  como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de  $l$ ) passa a ser o filho à esquerda de  $r$ .

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspondente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raiz (dando origem portanto à referida operação de splaying).

Comece então por implementar as funções

<sup>3</sup>Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

```

rrot :: BTree a → BTree a
lrot :: BTree a → BTree a

```

de rotação à direita e à esquerda.

**Propriedade [QuickCheck] 7** As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.

```

prop_ord_pres_esq = forAll orderedBTree (isOrd · lrot)
prop_ord_pres_dir = forAll orderedBTree (isOrd · rrot)

```

De seguida implemente a operação de splaying

```

splay :: [Bool] → (BTree a → BTree a)

```

como um catamorfismo de listas. O argumento `[Bool]` representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor `True` representa "seguir pelo ramo da esquerda" e o valor `False` representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

**Propriedade [QuickCheck] 8** A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.

```

prop_ord_pres_splay :: [Bool] → Property
prop_ord_pres_splay path = forAll orderedBTree (isOrd · (splay path))

```

### Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de **machine learning** para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu" ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climáticas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer" a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não", "não"]` leva-nos à decisão "não precisa" e responder `["não", "sim"]` leva-nos à decisão "precisa".

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em **Haskell** usando o seguinte tipo de dados:

```

data Bdt a = Dec a | Query (String, (Bdt a, Bdt a)) deriving Show

```

Note que o tipo de dados `Bdt` é parametrizado por um tipo de dados `a`. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não" (como apresentado acima), a escolha de números, ou **classificações**.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em **Haskell**, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções `inBdt`, `outBdt`, `baseBdt`, `(|·|)`, e `[·]`.
2. Apresentar no relatório o diagrama de `[·]`.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária  $t$ , o computador precisa apenas da estrutura de  $t$  (i.e. pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas "sim ou não" (para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1.  $extLTree : Bdt\ a \rightarrow LTree\ a$  (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

**Propriedade [QuickCheck] 9** A função  $extLTree$  preserva as folhas da árvore de origem.

$$\begin{aligned} prop\_pres\_tips &:: Bdt\ Int \rightarrow Bool \\ prop\_pres\_tips &= tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree \end{aligned}$$

2.  $navLTree : LTree\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree\ a)$  (navega um elemento de  $LTree$  de acordo com uma sequência de respostas "sim ou não". Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de  $LTree$ . Neste contexto, elementos de  $[Bool]$  representam sequências de respostas: o valor  $True$  corresponde a "sim" e portanto a "segue pelo ramo da esquerda"; o valor  $False$  corresponde a "não" e portanto a "segue pelo ramo da direita".

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar  $navLTree$  a  $(extLTree\ bdtGC)$ , em que  $bdtGC$  é a árvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

**Propriedade [QuickCheck] 10** Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.

$$\begin{aligned} prop\_inv\_nav &:: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool \\ prop\_inv\_nav\ t\ l &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t\ \mathbf{in} \\ &\quad invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (fmap\ \neg\ l) \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 11** Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.

$$\begin{aligned} prop\_af &:: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property \\ prop\_af\ t\ (l1,l2) &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t \\ &\quad f = \mathbf{length} \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t') \\ &\quad \mathbf{in}\ isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geq f\ l2) \end{aligned}$$

## Problema 4

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca **Probability** oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ Dist\ a = D\ \{\mathit{unD} :: [(a, ProbRep)]\} \quad (1)$$

em que  $ProbRep$  é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par  $(a, p)$  numa distribuição  $d :: \text{Dist } a$  indica que a probabilidade de  $a$  é  $p$ , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de  $d$  somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de  $A$  a  $E$ ,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]
```

que o **GHCI** mostrará assim:

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma"  20.0%
"cinco" 20.0%
"de"    20.0%
"frase"  20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.<sup>4</sup> `Dist` forma um **mónade** cuja unidade é `return a = D [(a, 1)]` e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que  $g : A \rightarrow \text{Dist } B$  e  $f : B \rightarrow \text{Dist } C$  são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira... Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

<sup>4</sup>Para mais detalhes ver o código fonte de **Probability**, que é uma adaptação da biblioteca **PHP** ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].



respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas ("sim" ou "não") são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados *Bool*. Implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$bnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ Bool) \rightarrow LTree\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo  $[Bool]$ , mas do tipo  $BTree\ Bool$ . O tipo  $BTree\ Bool$  é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar *bnavLTree* a (*extLTree* *anita*), em que *anita* é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```

*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True, (Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"

```

Por fim, implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$pbnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ (Dist\ Bool)) \rightarrow Dist\ (LTree\ a))$$

que deverá consistir na "monadificação" da função *bnavLTree* via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

## Problema 5

Os **mosaicos de Truchet** são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos *a* e *b* (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade **Random** e a biblioteca **Gloss** para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código **Haskell**.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.



Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.

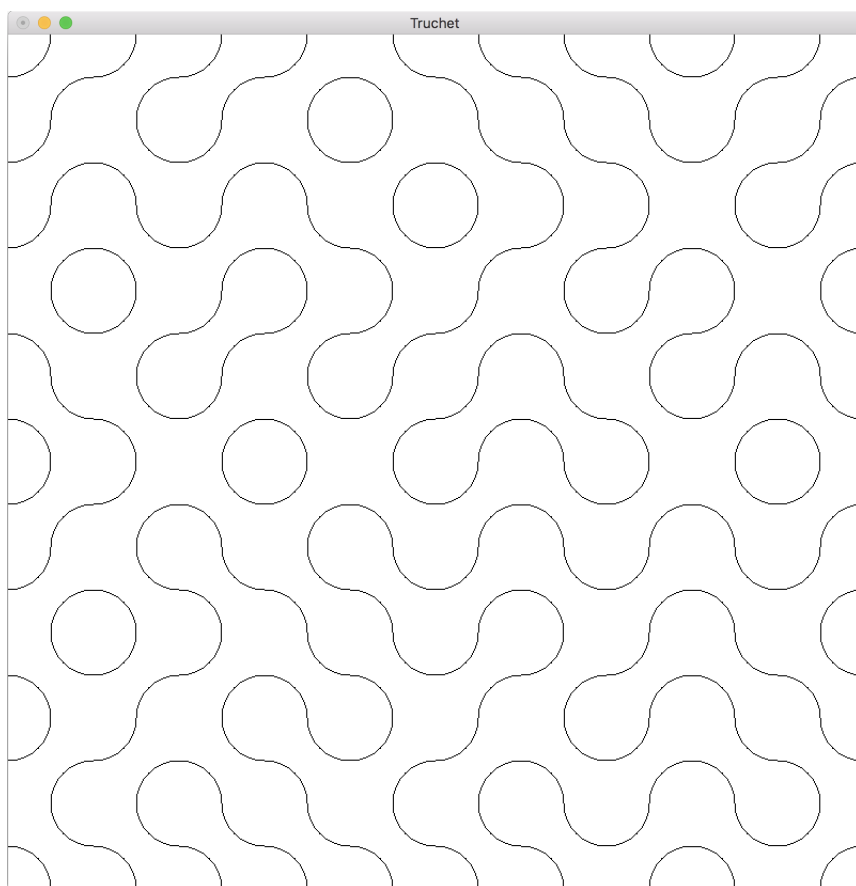


Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

# Anexos

## A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## B Código fornecido

### Problema 1

Função de representação de um dicionário:

```
dic_imp :: [(String, [String])] -> Dict
dic_imp = Term "" · map (bmap id singl) · untar · discollect
```

onde

```
type Dict = Exp String String
```

Dicionário para testes:

```
d :: [(String, [String])]
d = [("ABA", ["BRIM"]),
      ("ABALO", ["SHOCK"]),
      ("AMIGO", ["FRIEND"]),
      ("AMOR", ["LOVE"]),
      ("MEDO", ["FEAR"]),
      ("MUDO", ["DUMB", "MUTE"]),
      ("PE", ["FOOT"]),
      ("PEDRA", ["STONE"]),
      ("POBRE", ["POOR"]),
      ("PODRE", ["ROTTEN"])]
```

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

```
dic_norm = collect · filter p · discollect where
  p (a, b) = a > "" ∧ b > ""
```

Teste de redundância de um significado *s* para uma palavra *p*:

```
dic_red p s d = (p, s) ∈ discollect d
```

---

<sup>5</sup>Exemplos tirados de [?].

## Problema 2

Árvores usadas no texto:

```
emp x = Node (x, (Empty, Empty))
t7 = emp 7
t16 = emp 16
t7_10_16 = Node (10, (t7, t16))
t1_2_nil = Node (2, (emp 1, Empty))
t' = Node (5, (t1_2_nil, t7_10_16))
t0_2_1 = Node (2, (emp 0, emp 3))
t5_6_8 = Node (6, (emp 5, emp 8))
t2 = Node (4, (t0_2_1, t5_6_8))
dotBt :: (Show a) => BTree a -> IO ExitCode
dotBt = dotpict · bmap Just Just · cBTree2Exp · (fmap show)
```

## Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

```
tipsBdt :: Bdt a -> [a]
tipsBdt = ([singl, ( $\widehat{+}$ ) ·  $\pi_2$ ])
tipsLTree = tips
```

## Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

```
permuta [] = return []
permuta x = do { (h, t) ← getR x; t' ← permuta t; return (h : t') } where
  getR x = do { i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1)); return (x !! i, retira i x) }
  retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

## QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary a => Arbitrary (BTree a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = return (inBTree $ i_1 ())
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]
instance (Arbitrary v, Arbitrary o) => Arbitrary (Exp v o) where
  arbitrary = (genExp 10) where
    genExp 0 = liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary
    genExp n = oneof [liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda a \rightarrow (a, [])$ )) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c)) \rightarrow (a, [b, c])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,)
        (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))),
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c, d)) \rightarrow (a, [b, c, d])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM3 (,,)
```

```

    (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1))))
  ]
orderedBTree :: Gen (BTree Int)
orderedBTree = liftM (foldr insOrd Empty) (QuickCheck.arbitrary :: Gen [Int])
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (Bdt a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = liftM Dec QuickCheck.arbitrary
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry Query)
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]

```

## Outras funções auxiliares

Lógicas:

```

infixr 0 =>
  (=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
  p => f = λa -> p a => f a
infixr 0 <=>
  (<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
  p <=> f = λa -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ≡
  (≡) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≡ g = λa -> f a ≡ g a
infixr 4 ≤
  (≤) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≤ g = λa -> f a ≤ g a
infixr 4 ∧
  (∧) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
  f ∧ g = λa -> (f a) ∧ (g a)

```

Compilação e execução dentro do interpretador:<sup>6</sup>

```
run = do { system "ghc cp1920t"; system "./cp1920t" }
```

## C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

### Problema 1

```

discollect :: (Ord b, Ord a) => [(b, [a])] -> [(b, a)]
discollect = concat · map lstr
dic_exp :: Dict -> [(String, [String])]
dic_exp = collect · tar
tar :: Exp c String -> [(String, c)]
tar = (|g|) where

```

---

<sup>6</sup>Pode ser útil em testes envolvendo [Gloss](#). Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

```

g = [g1, g2]
g1 = singleton · ⟨nil, id⟩
g2 =  $\widehat{zip} \cdot \langle (\text{map } \widehat{++}) \cdot \text{discollect} \cdot \text{singleton} \cdot \langle \pi_1, (\text{map } \pi_1) \cdot \pi_2 \rangle, (\text{map } \pi_2) \cdot \pi_2 \rangle \cdot (id \times \text{concat})$ 
dic_rd :: String → Exp String String → Maybe [String]
dic_rd p t = (if (result ≡ []) then nothing else Just) result where
  result = (concat · map π₂ · filter ((p ≡) · π₁) · dic_exp) t
dic_in :: String → String → Dict → Dict
dic_in x y z = f ((x, y), z)
where
  f = dic_imp · (sortBy compare) · conc · (singl × id) · (⟨π₁, singl · π₂⟩ × dic_exp)

```

## Diagramas

tar

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Exp } V \ O & \xrightarrow{\text{outExp}} & V + O \times (\text{Exp } V \ O)^* \\
 \downarrow \text{tar} = \langle g \rangle & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times (\text{map tar}) \\
 (O \times V)^* & \xleftarrow{g = [\text{singl} \cdot \langle \text{nil}, \text{id} \rangle, g2]} & V + O \times ((O \times V)^*)^*
 \end{array}$$

g2

$$\begin{array}{ccccc}
 & & O \times ((O \times V)^*)^* & & \\
 & & \downarrow \text{id} \times \text{concat} & & \\
 O \times O^* & \xleftarrow{a = \langle \pi_1, (\text{map } \pi_1) \cdot \pi_2 \rangle} & O \times (O \times V)^* & \xrightarrow{e = (\text{map } \pi_2) \cdot \pi_2} & V^* \\
 \downarrow b = \text{discollect} \cdot \text{singleton} & & \downarrow f = \langle d, e \rangle & & \\
 (O \times O)^* & & O^* \times V^* & & \\
 \downarrow c = \text{map } \widehat{++} & \nearrow d = c \cdot b \cdot a & \downarrow h = \widehat{zip} & & \\
 O^* & & (O \times V)^* & & 
 \end{array}$$

## Problema 2

```

maisDir = ⟨g⟩ where
  g = [nothing, λ(a, (−, s2)) → if (isNothing s2) then Just a else s2]

```

```

maisEsq = (|g|) where
  g = [nothing, λ(a, (s1, -)) → if (isNothing s1) then Just a else s1]
insOrd' x = (|g|) where
  g = ⟨[h1, h2], [k1, k2]⟩
  h1 () = Node (x, (Empty, Empty))
  h2 (a, ((esqIns, esq), (dirIns, dir))) = curry Node a $ if (x < a) then (esqIns, dir) else (esq, dirIns)
  k1 () = Empty
  k2 (a, ((esqIns, esq), (dirIns, dir))) = Node (a, (esq, dir))
insOrd a x = π1 · (insOrd' a) $ x
isOrd' = (|g|) where
  g = ⊥
isOrd = (λl → and $ zipWith (≤) l (tail l)) · inordt
rrot = (|g|) where
  g = [Empty, h]
  h (r, (Empty, d)) = Node (r, (Empty, d))
  h (r, (Node (e, (ee, ed)), d)) = Node (e, (ee, (Node (r, (ed, d)))))
lrot = (|g|) where
  g = [Empty, h]
  h (r, (e, Empty)) = Node (r, (e, Empty))
  h (r, (e, Node (d, (de, dd)))) = Node (d, ((Node (r, (e, de))), dd))
splay l t = ⊥

```

## Diagramas

### maisDir

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xrightarrow{\text{outBTree}} & 1 + A \times (\text{BTree } A \times \text{BTree } A) \\
 \text{maisDir} = (|g|) \downarrow & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times (\text{maisDir} \times \text{maisDir}) \\
 \text{Maybe } A & \xleftarrow{g = [\text{nothing}, \lambda(a, (-, s2)) \rightarrow \text{if } (\text{isNothing } s2) \text{ then Just } a \text{ else } s2]} & 1 + A \times (\text{Maybe } A \times \text{Maybe } A)
 \end{array}$$

### maisEsq

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xrightarrow{\text{outBTree}} & 1 + A \times (\text{BTree } A \times \text{BTree } A) \\
 \text{maisEsq} = (|g|) \downarrow & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times (\text{maisEsq} \times \text{maisEsq}) \\
 \text{Maybe } A & \xleftarrow{g = [\text{nothing}, \lambda(a, (s1, -)) \rightarrow \text{if } (\text{isNothing } s1) \text{ then Just } a \text{ else } s1]} & 1 + (A \times (\text{Maybe } A \times \text{Maybe } A))
 \end{array}$$

### insOrd

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xrightarrow{\text{outBTree}} & 1 + (A \times (\text{BTree } A \times \text{BTree } A)) \\
 \text{insOrd}' = (|g|) \downarrow & & \downarrow \text{id} + (\text{id} \times (\text{insOrd}' \times \text{insOrd}')) \\
 (\text{BTree } A \times \text{BTree } A) & \xleftarrow{g = \langle [h1, h2], [k1, k2] \rangle} & 1 + (A \times (\text{BTree } A^2 \times \text{BTree } A^2)) \\
 \pi_1 \downarrow & & \\
 \text{BTree } A & & 
 \end{array}$$

## isOrd

$$\begin{array}{ccc}
 BTree\ A & \xrightarrow{outBTree} & 1 + A \times (BTree\ A \times BTree\ A) \\
 \downarrow inord & & \downarrow id + id \times (inord \times inord) \\
 A^* & \xleftarrow{inord} & 1 + A \times (A^* \times A^*) \\
 \downarrow (\backslash l \rightarrow zipWith\ (\leq)\ l\ (tail\ l)) & & \\
 2^* & & \\
 \downarrow and & & \\
 2 & & 
 \end{array}$$

## Funções Auxiliares

### isNothing

Testa se o parâmetro recebido do tipo Maybe é Nothing e devolve o valor de verdade do teste da condição.

```

isNothing :: Maybe a → Bool
isNothing Nothing = True
isNothing _ = False

```

## Problema 3

```

extLTree :: Bdt a → LTree a
extLTree = (|g|) where
  g = [Leaf, Fork · π2]
inBdt = [Dec, Query]
outBdt (Dec a) = i1 a
outBdt (Query (a, (t1, t2))) = i2 (a, (t1, t2))
baseBdt f g h = f + (g × (h × h))
recBdt f = baseBdt id id f
(|a|) = a · (recBdt (|a|)) · outBdt
(|f|) = inBdt · (recBdt (|f|)) · f
navLTree :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTree = cataLTree g where
  g = [curry (Leaf · π1), aux]
  aux (esq, dir) [] = Fork (esq [], dir [])
  aux (esq, dir) l = (if (head l ≡ True) then esq else dir) $ tail l

```

## Diagramas

### anaBdt

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt\ A & \xleftarrow{\quad in \quad} & A + B \times (Bdt\ A \times Bdt\ A) \\
 \uparrow (|g|) & & \uparrow id + id \times (|g| \times |g|) \\
 C & \xrightarrow{\quad g \quad} & FC
 \end{array}$$



## extLTree

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt\ A & \xrightarrow{outBdt} & A + B \times (Bdt\ A \times Bdt\ A) \\
 \downarrow extLTree = \langle g \rangle & & \downarrow id + id \times (extLTree \times extLTree) \\
 LTree\ A & \xleftarrow{g = [Leaf, Fork \cdot \pi_2]} & A + B \times (LTree\ A \times LTree\ A)
 \end{array}$$

## navLTree

### Problema 4

```

bnavLTree = cataLTree g
  where g = ⊥
pbnaveLTree = cataLTree g
  where g = ⊥

```

### Problema 5

```

truchet1 = Pictures [put (0,80) (Arc (-90) 0 40), put (80,0) (Arc 90 180 40)]
truchet2 = Pictures [put (0,0) (Arc 0 90 40), put (80,80) (Arc 180 (-90) 40)]
-- janela para visualizar:
janela = InWindow
  "Truchet" -- window title
  (800,800) -- window size
  (100,100) -- window position
  -- defs auxiliares -----
put = Translate
--

```

# Índice

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, [1](#)

**bibtex**, [2](#)

    lhs2TeX, [1](#)

    makeindex, [2](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [2](#)

    Material Pedagógico, [1](#)

    BTree.hs, [3](#)

Combinador “pointfree”

    cata, [11](#)

    either, [12](#)

Função

$\pi_1$ , [11](#)

$\pi_2$ , [11](#), [12](#)

    length, [7](#), [12](#)

    map, [11](#)

    uncurry, [12](#), [14](#)

Functor, [4](#), [6–9](#), [12](#), [13](#)

Haskell, [1](#), [2](#), [6](#), [9](#)

    “Literate Haskell”, [1](#)

    Biblioteca

        PFP, [8](#)

        Probability, [7](#), [8](#)

    Gloss, [2](#), [9](#), [13](#)

    interpretador

        GHCi, [2](#), [8](#)

    Monad

        Random, [9](#)

    QuickCheck, [2](#)

Mosaico de Truchet, [9](#)

Números naturais ( $\mathbb{N}$ ), [11](#)

Programação literária, [1](#)

U.Minho

    Departamento de Informática, [1](#)