

# Modèles de Black-Litterman

P. Hénaff

Version: 01 mars 2022

# Droite de Marché des Capitaux



Figure 1: Droite de Marché des Capitaux

## Black-Litterman (1)

- ▶ Par défaut: Accepter les espérances de rendement implicites dans le portefeuille de marché, et investir dans ce portefeuille.
- ▶ Exprimer des “vues” sur l’espérance de rendement de portefeuilles quelconques
- ▶ Utiliser ces “vues” pour modifier les espérances de rendement et la structure de covariance des actifs.

## Information ex-ante

Distribution des rendements:

$$r \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

L'espérance de rendement  $\mu$  est aussi aléatoire

$$\mu = \Pi + \epsilon^{(e)}$$

avec

$$\epsilon^{(e)} \sim \mathcal{N}(0, \tau \Sigma)$$

## Optimisation inversée

On utilise le portefeuille de marché pour inférer l'espérance de rendement:

$$U(w) = w^T \Pi - \frac{\delta}{2} w^T \Sigma w$$

Solution “inversée” de  $\Pi$  en fonction de  $w$ :

$$\Pi = \delta \Sigma w_{eq}$$

## Expression de prédictions à propos des rendements

Les prédictions sont exprimées par des portefeuilles dont on donne le rendement, avec une marge d'erreur.

$$P\mu = Q + \epsilon^{(\nu)}$$

avec

$$\epsilon^{(\nu)} \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

## Résumé

Deux équations pour  $\mu$

- Distribution ex-ante

$$\mu = \Pi + \epsilon^{(e)}$$

- Views

$$P\mu = Q + \epsilon^{(v)}$$

# Exemple

##	IBM	MS	DELL
##	Min. : -0.445480	Min. : -0.53590	Min. : -0.515656
##	1st Qu.: -0.060482	1st Qu.: -0.06699	1st Qu.: -0.086565
##	Median : 0.009032	Median : 0.02846	Median : 0.008809
##	Mean : 0.006868	Mean : 0.01264	Mean : 0.002769
##	3rd Qu.: 0.070162	3rd Qu.: 0.10020	3rd Qu.: 0.079835
##	Max. : 0.353799	Max. : 0.50707	Max. : 0.497706
##	C	JPM	BAC
##	Min. : -0.3400743	Min. : -0.444608	Min. : -0.278997
##	1st Qu.: -0.0572979	1st Qu.: -0.076672	1st Qu.: -0.050389
##	Median : 0.0009806	Median : 0.013887	Median : 0.010103
##	Mean : 0.0056924	Mean : -0.003876	Mean : 0.008242
##	3rd Qu.: 0.0539650	3rd Qu.: 0.082539	3rd Qu.: 0.065332
##	Max. : 0.2533333	Max. : 0.317181	Max. : 0.173060



# Correlation

	IBM	MS	DELL	C	JPM	BAC
IBM	1.0000000	0.3873395	0.4193389	0.4635322	0.4459814	0.3585381
MS	0.3873395	1.0000000	0.3981657	0.5929457	0.5226294	0.4646464
DELL	0.4193389	0.3981657	1.0000000	0.2701329	0.2671891	0.2321042
C	0.4635322	0.5929457	0.2701329	1.0000000	0.5477972	0.5070248
JPM	0.4459814	0.5226294	0.2671891	0.5477972	1.0000000	0.6832878
BAC	0.3585381	0.4646464	0.2321042	0.5070248	0.6832878	1.0000000

## Exemple 1: IBM et Dell surperforme MS ( $sd = 5\%$ )

Rendement de  $(1/2 \text{ IBM} - \text{MSFT} + 1/2 \text{ DELL}) = 6\% + \text{terme d'erreur}$

```
sd <- .02
pickMatrix <- matrix(c(1/2, -1, 1/2, rep(0, 3)),
                      nrow = 1, ncol = 6)
views <- BLViews(P = pickMatrix, q = 0.06,
                 confidences = 1/sd,
                 assetNames = colnames(monthlyReturns))
views
```

```
## 1 : 0.5*IBM+-1*MS+0.5*DELL=0.06 + eps. Confidence: 50
```

# Traduction en distribution ex-post (voir note de cours)

```
## Prior means:
## IBM  MS DELL  C  JPM  BAC
##    0   0   0   0   0   0
## Posterior means:
##          IBM          MS          DELL          C          JPM
## -6.017515e-05 -1.066304e-02  1.187053e-02 -4.021455e-03 -6.341132e-03
##          BAC
## -2.538643e-03
## Posterior covariance:
##          IBM          MS          DELL          C          JPM          BAC
## IBM  0.012688654  0.01121218  0.009584750  0.008563839  0.008863605  0.002830593
## MS   0.011212181  0.02486863  0.011775409  0.012214255  0.017341862  0.006189570
## DELL 0.009584750  0.01177541  0.043744898  0.005776306  0.009912530  0.003180016
## C     0.008563839  0.01221425  0.005776306  0.010488660  0.010422200  0.004957930
## JPM   0.008863605  0.01734186  0.009912530  0.010422200  0.020202754  0.007630552
## BAC   0.002830593  0.00618957  0.003180016  0.004957930  0.007630552  0.007976383
```

Exemple 2: Le rendement moyen du secteur financier sera de 15% (sd = .04)

Rendement de  $(C + JPM + BAC + MS)/4 = 15\% + \text{terme d'erreur}$

```
finViews <- matrix(ncol = 4, nrow = 1, dimnames = list(NULL, c("C", "JPM", "BAC", "MS")))
finViews[,1:4] <- rep(1/4, 4)
views <- addBLViews(finViews, q=0.15, confidences=1/sd, views)
views
```

```
## 1 : 0.5*IBM+-1*MS+0.5*DELL=0.06 + eps. Confidence: 50
## 2 : 0.25*MS+0.25*C+0.25*JPM+0.25*BAC=0.15 + eps. Confidence: 50
```

# Traduction en distribution ex-post (voir note de cours)

```
marketPosterior <- BLPosterior(as.matrix(monthlyReturns), views,
                                tau = 1/2,
                                marketIndex = as.matrix(sp500Returns),
                                riskFree = as.matrix(US13wTB))
marketPosterior
```

```
## Prior means:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## 0.020883598 0.059548398 0.017010062 0.014492325 0.027365230 0.002829908
## Posterior means:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## 0.04706734 0.06682760 0.05446292 0.03021575 0.05268582 0.01692391
## Posterior covariance:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## IBM  0.021741389 0.010716133 0.013042457 0.008775076 0.011014736 0.005509895
## MS   0.010716133 0.032543053 0.016985477 0.013356160 0.015376383 0.008513377
## DELL 0.013042457 0.016985477 0.048117247 0.007639836 0.009794284 0.005328471
## C    0.008775076 0.013356160 0.007639836 0.016680082 0.011539075 0.006692420
## JPM  0.011014736 0.015376383 0.009794284 0.011539075 0.028982501 0.012174496
## BAC  0.005509895 0.008513377 0.005328471 0.006692420 0.012174496 0.011460867
```

# Optimisation MV classique

Portefeuille Tangent:

```
optPorts <- optimalPortfolios.fPort(marketPosterior,  
  optimizer = "tangencyPortfolio")
```

# Black-Litterman (7)

Weights

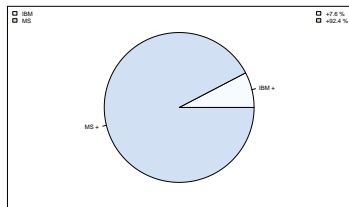


Figure 2: Prior Rdt/Risque

Weights

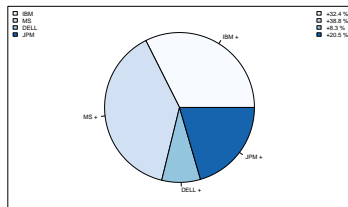


Figure 3: Posterior Rdt/Risque

## Exercice

1. Contraindre  $w_i > 0$  en utilisant le code de la note de cours.
2. Avec la librairie BLCOP, ajouter les “vues” suivantes au modèle. Choisissez les sd qui vous semblent pertinentes.
  - ▶ BAC va surperformer Citibank (C)
  - ▶ Dell aura un rendement de 0.5%