

# Modèles Multi-Facteurs

P. Hénaff

Version: 05 févr. 2022

# Droite de Marché des Capitaux



Figure 1: Droite de Marché des Capitaux

## MEDAF: Droite de Marché des Titres

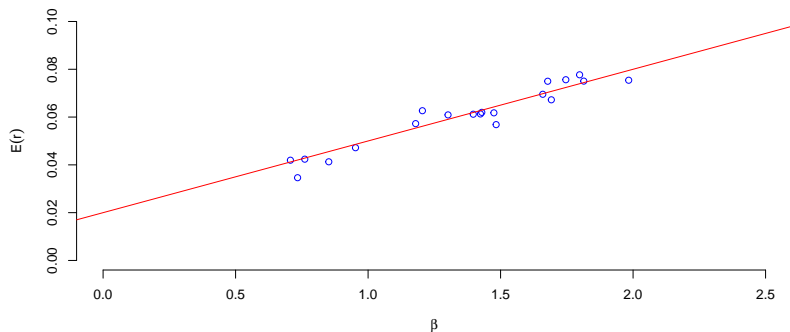


Figure 2: Droite de Marché des Titres

# APT (0)

## Valorisation par Arbitrage

- ▶ Rendement fonction linéaire d'un nombre limité de facteurs
- ▶ Il y a assez de titres sur le marché pour créer des portefeuilles où le risque spécifique a été diversifié
- ▶ Absence d'arbitrage

# Raisonnement par Arbitrage

## APT (1)

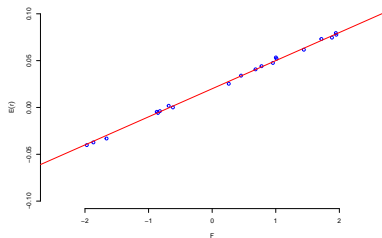


Figure 3: Portefeuille diversifié

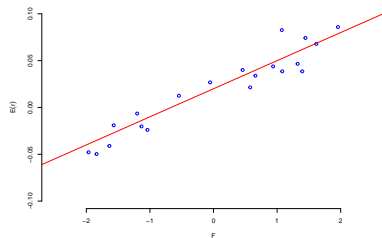


Figure 4: Action Simple

## APT (2)

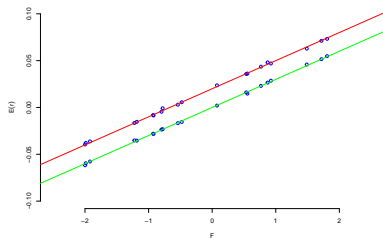


Figure 5: Opportunité d'arbitrage

## APT (3)

$$E(R_i) - R_f = \beta_i^1(\bar{R}_1 - R_f) + \beta_i^2(\bar{R}_2 - R_f) + \dots$$



## Modèle Fama-French

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M}R_{M,t} + \beta_{i,SMB}SMB_t + \beta_{i,HML}HML_t + e_{i,t}$$

$R_i$  Excédent de rendement, titre  $i$

$R_M$  Excédent de rendement, marché

$SMB$  "Small Minus Big": Facteur Capitalisation

$HML$  "High Minus Low": Facteur Valorisation

# Modèle Fama-French

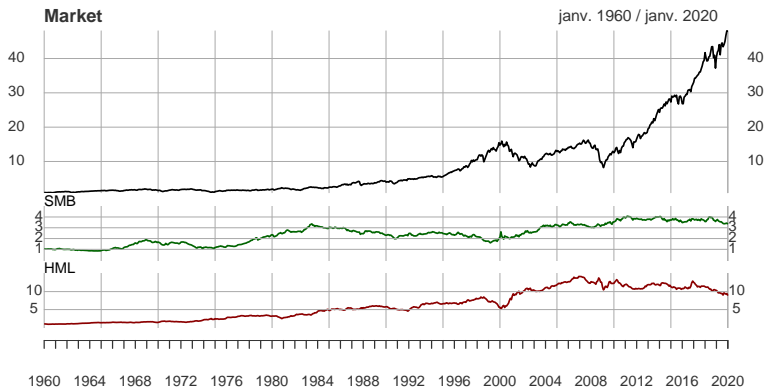


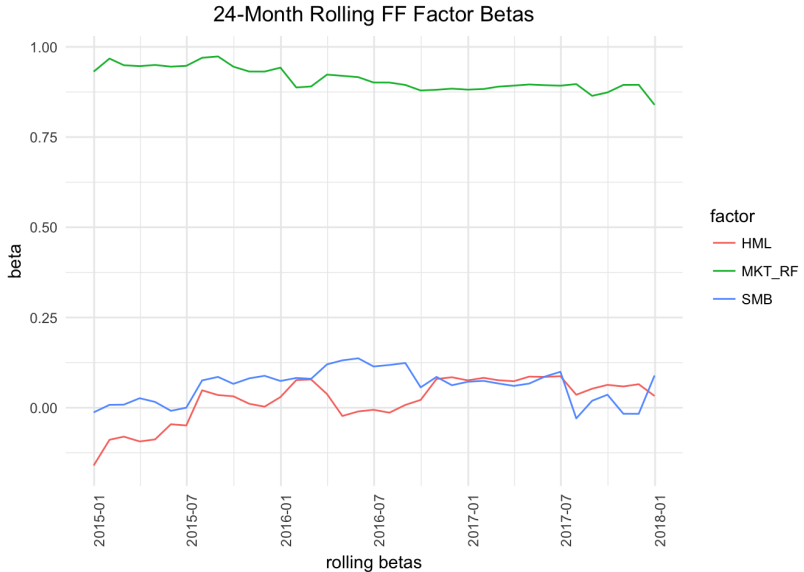
Figure 6: Facteurs Fama-French

## Stabilité des Betas Fama-French (1)

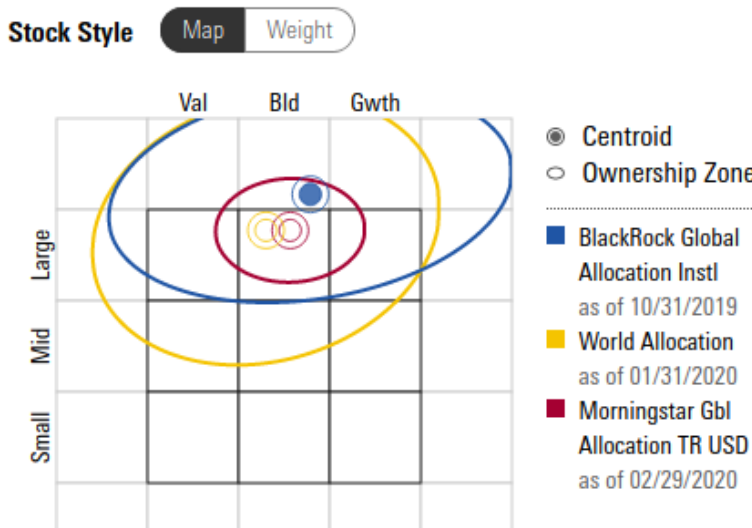
Portefeuille:

- ▶ SPY (S&P500) 25%
- ▶ EFA (Actions ex-US) 25%
- ▶ IJS (Small Cap Value) 20%
- ▶ EEM (EM) weighted 20%
- ▶ AGG (Obligations) 10%

## Stabilité des Betas Fama-French (2)



## Influence du modèle Fama-French



## Autres Facteurs: Momentum

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M}R_{M,t} + \beta_{i,SMB}SMB_t + \beta_{i,HML}HML_t + \beta_{i,UMD}R_{UMD,t} + \dots + e_i$$

UMD: Up Minus Down

# Momentum et Liquidité (1)

## CARNET D'ORDRES

<div> <div></div> <div></div> </div>					
ORDRES	QTÉ	ACHAT	VENTE	QTÉ	ORDRES
3	1 217	10.720	10.760	223	2
4	2 006	10.710	10.770	1 079	2
5	1 621	10.700	10.780	3 482	5
3	4 046	10.690	10.790	1 237	4
3	1 172	10.680	10.800	1 611	4
2	1 328	10.670	10.810	4 933	2
6	14 129	10.660	10.830	10 410	5
3	2 135	10.650	10.840	90	1
2	445	10.640	10.850	2 787	5
2	1 844	10.630	10.870	125	1
33	29 943	TOTAL	TOTAL	25 977	31

## DERNIÈRES TRANSACTIONS

HEURES	COURS	QUANTITÉ
13:26:17	10.760	1 218
13:24:24	10.750	257
13:20:53	10.740	163
13:20:53	10.740	538
13:19:55	10.740	93

[Consulter les dernières transactions de la journée](#)

## DERNIÈRES ACTUALITÉS

18 févr. **Maisons du Monde : Telelos CP se renforce au capital • CERCLE FINANCE**

20 févr. **MAISONS DU MONDE**

Figure 9: Maisons du Monde

## Momentum et Liquidité (2)

ORDRES	QTÉ	ACHAT	VENTE	QTÉ	ORDRES
3	821	40.0450	40.0550	100	1
4	836	40.0400	40.0600	917	3
4	1205	40.0350	40.0650	954	3
7	2 064	40.0300	40.0700	2 032	5
4	1577	40.0250	40.0750	1944	5
6	1975	40.0200	40.0800	877	4
4	1504	40.0150	40.0850	1 589	4
6	1646	40.0100	40.0900	1 038	4
3	1 048	40.0050	40.0950	4 376	3
4	1 329	40.0000	40.1000	397	2
45	14 005	TOTAL	TOTAL	14 224	34

HEURES	COURS	QUANTITÉ
13:35:28	40.1850	30
13:35:28	40.1850	250
13:35:28	40.1850	130
13:35:28	40.1850	450
13:35:28	40.1850	200

[Consulter les dernières transactions de la journée](#)

### DERNIÈRES ACTUALITÉS

ven. **Grande Bretagne: Total candidat à la reprise d'éollennes en mer • REUTERS**

Figure 10: Total



## Facteurs et Fouille de Données (Harvey et al.)

$$R_i(t) - R_f(t) = \alpha_i + \beta_i(R_M(t) - R_f(t)) + \gamma_i F(t) + \epsilon_i(t)$$

$$\frac{\hat{\gamma}_i}{\sigma(\gamma_i)} \sim \text{t-stat}$$

Erreur Type I: Accepter un facteur alors qu'il n'est pas significatif.

## Exercise: Significativité de $\alpha$

- ▶  $\alpha$  mensuel = 0,20%
- ▶  $\beta = 1,2$
- ▶  $\sigma$  résiduel mensuel = 2%
- ▶  $\sigma$  marché mensuel = 6%
- ▶ 36 mois de données.

Est-ce que le gérant apporte une valeur ajoutée, ou bien est-il chanceux?

## Exercice: Valider le résultat précédent par simulation

- ▶ Tirer un échantillon de  $R(t)$  et  $R_M(t)$  sous  $H_0$
- ▶ Estimer  $\alpha$  par regression, en utilisant `apply`
- ▶ Calculer la distribution empirique du ratio

$$\frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma(\hat{\alpha}_i)} \sim \text{t-stat}$$

## Black-Litterman (1)

- ▶ Par défaut: Accepter les espérances de rendement implicites dans le portefeuille de marché, et investir dans ce portefeuille.
- ▶ Exprimer des “vues” sur l’espérance de rendement de portefeuilles quelconques
- ▶ Utiliser ces “vues” pour modifier les espérances de rendement et la structure de covariance des actifs.

## Black-Litterman (2)

View: IBM et Dell surperforme MS.

```
pickMatrix <- matrix(c(1/2, -1, 1/2, rep(0, 3)),
                      nrow = 1, ncol = 6 )
views <- BLViews(P = pickMatrix, q = 0.06,
                 confidences = 100,
                 assetNames = colnames(monthlyReturns))
views
```

```
## 1 : 0.5*IBM+-1*MS+0.5*DELL=0.06 + eps. Confidence: 100
```

# Black-Litterman (3)

```
## Prior means:
## IBM  MS DELL  C  JPM  BAC
##    0   0   0   0   0   0
## Posterior means:
##          IBM          MS          DELL          C          JPM
## 0.0011338343 -0.0104660433 0.0107975334 -0.0031698631 -0.0017878388
##          BAC
## -0.0008618328
## Posterior covariance:
##          IBM          MS          DELL          C          JPM          BAC
## IBM 0.011787595 0.010442937 0.010517196 0.007334887 0.008897717 0.002982477
## MS 0.010442937 0.019344067 0.015147649 0.009681186 0.011153548 0.004785561
## DELL 0.010517196 0.015147649 0.033290488 0.008060615 0.011172018 0.005510119
## C 0.007334887 0.009681186 0.008060615 0.008736200 0.009086340 0.004586600
## JPM 0.008897717 0.011153548 0.011172018 0.009086340 0.022705524 0.006498246
## BAC 0.002982477 0.004785561 0.005510119 0.004586600 0.006498246 0.007690513
```

## Black-Litterman (4)

View: Le rendement moyen du secteur financier sera de 15%

```
finViews <- matrix(ncol = 4, nrow = 1, dimnames = list(NULL, c("C","JPM","BAC","MS")))
finViews[,1:4] <- rep(1/4,4)
views <- addBLViews(finViews, 0.15, 90, views)
views
```

```
## 1 : 0.5*IBM+-1*MS+0.5*DELL=0.06 + eps. Confidence: 100
## 2 : 0.25*MS+0.25*C+0.25*JPM+0.25*BAC=0.15 + eps. Confidence: 90
```

# Black-Litterman (5)

```
marketPosterior <- BLPosterior(as.matrix(monthlyReturns), views,
                                tau = 1/2,
                                marketIndex = as.matrix(sp500Returns),
                                riskFree = as.matrix(US13wTB))
marketPosterior
```

```
## Prior means:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## 0.020883598 0.059548398 0.017010062 0.014492325 0.027365230 0.002829908
## Posterior means:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## 0.06344562 0.07195806 0.07777653 0.04030821 0.06884519 0.02592776
## Posterior covariance:
##      IBM      MS      DELL      C      JPM      BAC
## IBM  0.021334221 0.010575532 0.012465444 0.008518356 0.010605748 0.005281807
## MS   0.010575532 0.031231768 0.017034827 0.012704758 0.014532900 0.008023646
## DELL 0.012465444 0.017034827 0.047250599 0.007386821 0.009352949 0.005086150
## C     0.008518356 0.012704758 0.007386821 0.016267422 0.010968240 0.006365457
## JPM   0.010605748 0.014532900 0.009352949 0.010968240 0.028181136 0.011716834
## BAC   0.005281807 0.008023646 0.005086150 0.006365457 0.011716834 0.011199343
```



## Black-Litterman (6)

Portefeuille Tangent:

```
optPorts <- optimalPortfolios.fPort(marketPosterior,  
  optimizer = "tangencyPortfolio")
```

# Black-Litterman (7)

Weights

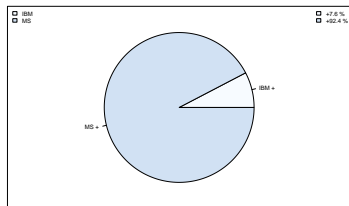


Figure 11: Prior Rdt/Risque

Weights

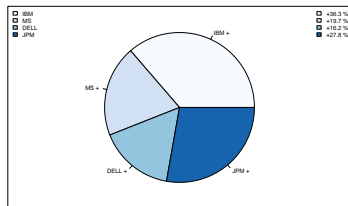


Figure 12: Posterior Rdt/Risque

## Risk Budgeting

$$\sigma(w) = w^T \Sigma w$$

Contribution au risque de l'actif  $i$ :

$$RC_i = \frac{w_i (\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

## Risk Parity & Budgeting

Parity:

$$RC_i = \frac{1}{N} \sigma(w)$$

Budgeting:

$$RC_i = b_i \sigma(w)$$

Cas Particulier:  $\Sigma$  diagonal

$$\Omega = \sqrt{\text{diag}(\Sigma)}$$

$$w = \frac{\Omega^{-1}}{\mathbf{1}^T \Omega^{-1}}$$

## Risk Parity & Budgeting: Exemple.

```

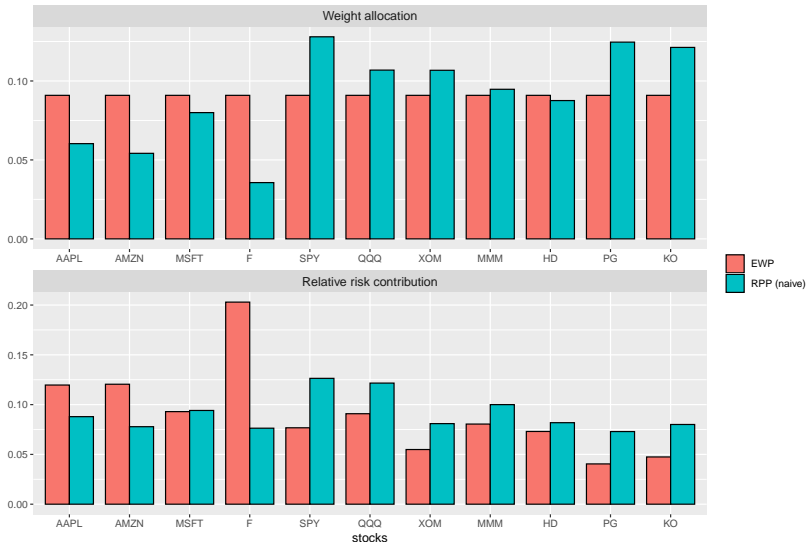
Sigma <- cov(monthly.ret)
mu <- colMeans(monthly.ret)
rpp_naive <- riskParityPortfolio(Sigma, formulation = "diag")
rpp_vanilla <- riskParityPortfolio(Sigma)
rpp_mu <- riskParityPortfolio(Sigma, formulation = "rc-over",
                             mu = mu, lmd_mu = 1e-3,
                             w_ub = 0.16)

w_all <- cbind("EWP" = rep(1/nrow(Sigma), nrow(Sigma)),
              "RPP (naive)" = rpp_naive$w)

```

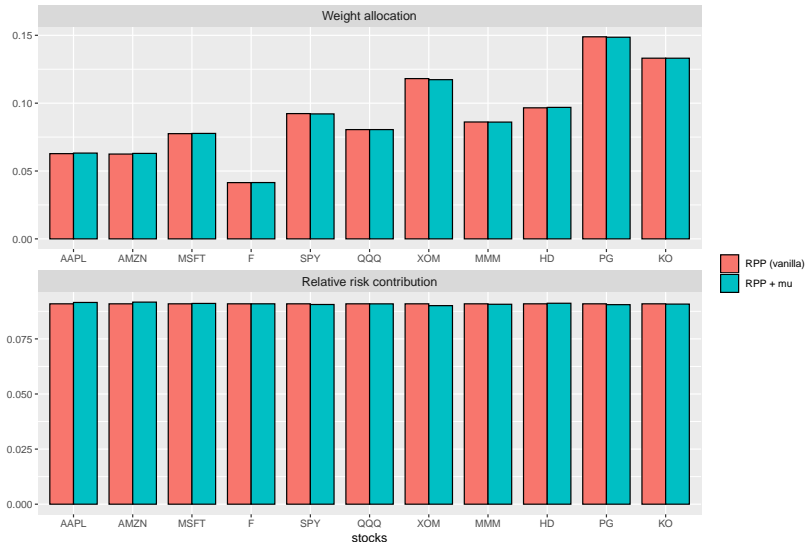
# Risk Budgeting

Portfolio capital and risk distribution



# Risk Budgeting

Portfolio capital and risk distribution





## Attribution de Performance (1)

- ▶  $t=0$ : Achat d'une action à 50E
- ▶  $t=1$ : Dividende reçu: 2E, achat d'une action à 53E
- ▶  $t=2$ : Dividende reçu: 4E, valeur de marché d'une action: 54E

Rendement annuel?

# Quels Indicateurs de Risque?

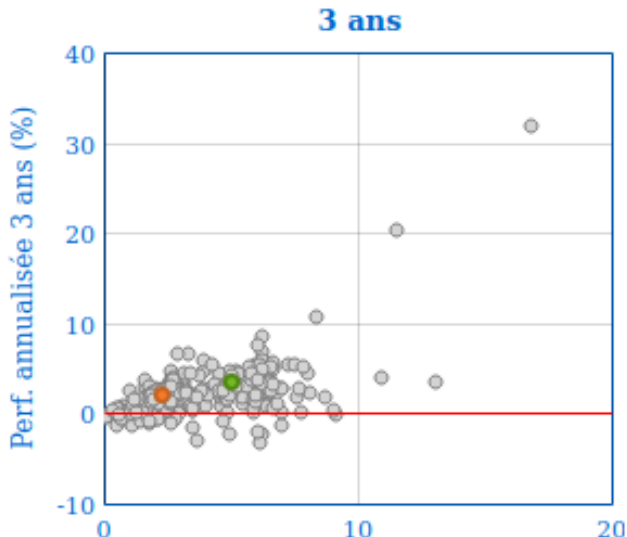


Figure 13: Indicateurs de Risque

## Quels Indicateurs de Risque?

- ▶ Sharpe:  $(r_P - r_f)/\sigma_P$
- ▶ Treynor:  $(r_P - r_f)/\beta_P$
- ▶ IR:  $\alpha_P/\sigma(e_P)$

## Diagramme Rendement / Risque



# Attribution de Performance: Timing

## Performance et indicateurs mensuels au 31/01/2020

	1 an	3 ans	5 ans
--	------	-------	-------

### Perf Annualisée ?

Fonds	11,46 %	5,20 %	3,18 %
Catégorie	5,26 %	0,79 %	0,53 %
Différence	6,20 %	4,41 %	2,65 %
Indice*	5,26 %	0,79 %	0,53 %
Différence	6,20 %	4,41 %	2,65 %

### Risque

Volatilité ?	3,43 %	3,90 %	4,53 %
Volatilité Cat	2,57 %	2,97 %	3,54 %
Volatilité Indice	2,57 %	2,97 %	3,54 %
Perte Maximum ?	-1,51 %	-5,89 %	-8,60 %
Délai de recouvrement ?	101 j	608 j	981 j
DSR ?	1,74 %	2,63 %	3,12 %
Sortino ?	6,84	2,12	1,12
VAR 95 ?	-0,63 %	-0,85 %	-0,94 %
VAR 99 ?	-0,85 %	-1,19 %	-1,88 %

	1 an	3 ans	5 ans
--	------	-------	-------

### Ratios

Ratio de Sharpe ?	3,46	1,43	0,77
Ecart de Suivi ?	2,63 %	2,85 %	3,99 %
Ratio d'Information (IR) ?	2,41	1,57	0,68
Up Capture Ratio ?	1,33	1,21	0,90
Down Capture Ratio ?	0,60	0,67	0,61
Ratio Omega ?	2,91	1,62	1,32

### Réactivité

Beta ?	0,87	0,92	0,69
R² ?	42,07	46,99	28,10
Beta haussier ?	0,76	0,85	0,57
Beta baissier ?	0,57	1,00	0,68

### Asymétrie

Skewness ?	-0,30	-0,71	-0,31
Kurtosis ?	-0,58	0,88	2,12

Timing = Call sur le marché

## Attribution de Performance: Allocation et Selection

$i$ : indice de la classe d'actif.

Benchmark

$$r_B = \sum_i w_{Bi} r_{Bi}$$

Portefeuille

$$r_P = \sum_i w_{Pi} r_{Pi}$$

## Attribution de Performance: Allocation et Selection

Contribution de la classe  $i$  =

$$\begin{aligned} w_{Pi}r_{Pi} - w_{Bi}r_{Bi} = \\ (w_{Pi} - w_{Bi})r_{Bi} & \quad \text{allocation} \\ + w_{Pi}(r_{Pi} - r_{Bi}) & \quad \text{selection} \end{aligned}$$



## Exercice

Utiliser le package “riskParityPortfolio” et le dataset “monthly returns”.

A partir de l'exemple: “A practical example using FAANG price data”, comparer par un backtest les performances et la composition d'un portefeuille tangent et d'un portefeuille “risk parity”.

Ajouter des contraintes au portefeuille tangent:

- ▶ Poids  $\leq 20\%$
- ▶ Secteur Technologie  $\leq 30\%$

<https://cran.r-project.org/web/packages/riskParityPortfolio/vignettes/RiskParityPortfolio.html>

## Bibliographie

Grinhold, R.C. and Kahn, R. Active Portfolio Management, McGraw-Hill, 2000