



# Chapitre 2 : modèles géométriques et cinématiques

Salih ABDELAZIZ

Maître de Conférences à l'UM2

LIRMM, Département robotique

Montpellier, France

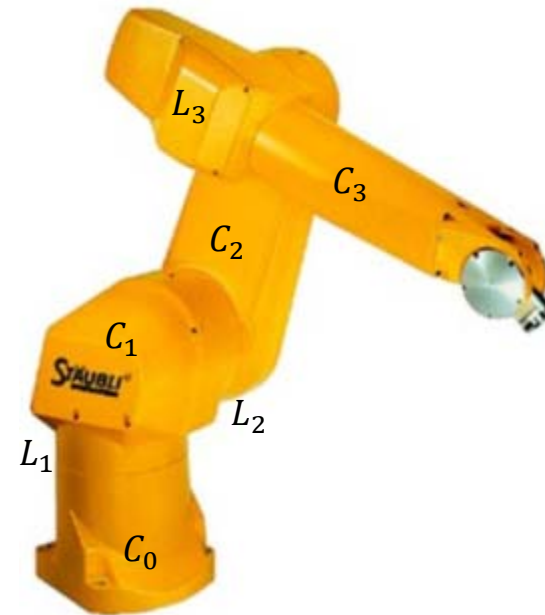
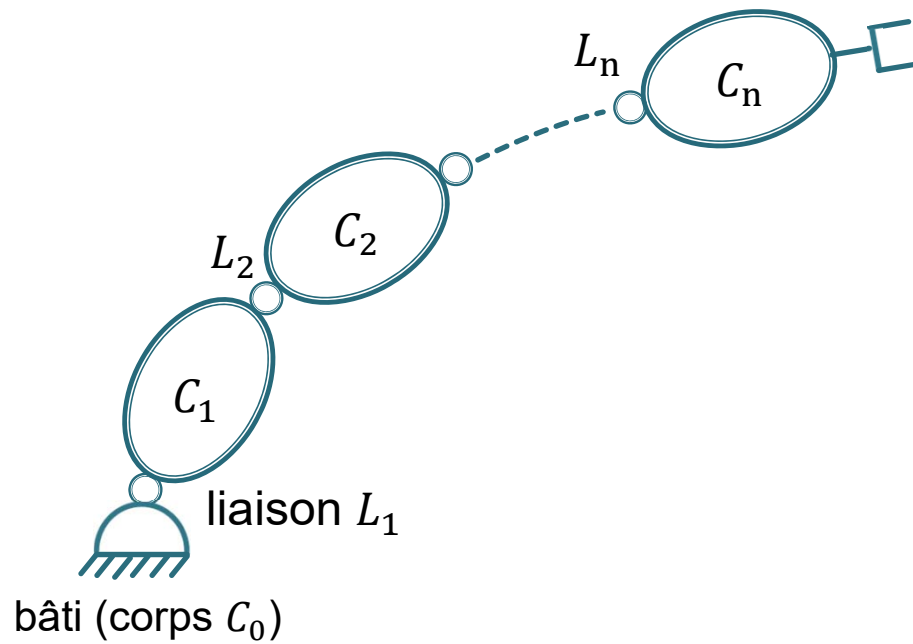
[abdelaziz@lirmm.fr](mailto:abdelaziz@lirmm.fr)

# NOTATIONS ET DÉFINITION

---

- ❖ Pose = position + orientation
- ❖  $n$  : nombre d'articulation
- ❖  $m$  : nombre de degré de liberté
- ❖ **MGD** : Modèle Géométrique Direct
- ❖ **MGI** : Modèle Géométrique inverse
- ❖ **MCD** : Modèle Cinématique Direct
- ❖ **MCI** : Modèle Cinématique Inverse

# DESCRIPTION D'UN BRAS MANIPULATEUR



Chaine cinématique d'une structure ouverte simple

# DESCRIPTION D'UN BRAS MANIPULATEUR

---

- ❖ Liaison (ou *articulation*) rotoïde (R)



- ❖ Liaison prismatique (P)



- ❖ Pour une liaison  $j$ , on définit le paramètre géométrique :

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{pour une liaison rotoïde} \\ 1 & \text{pour une liaison prismatique} \end{cases}$$

# DESCRIPTION D'UN BRAS MANIPULATEUR

---

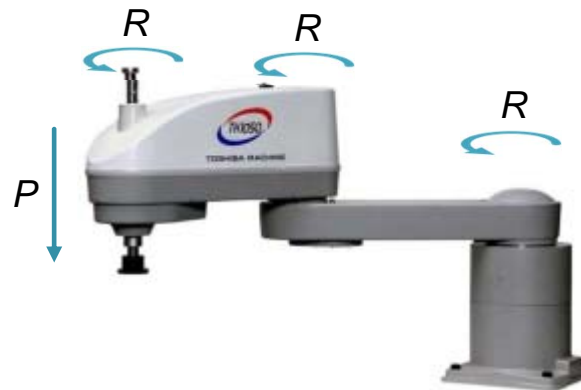
- ❖ Bras manipulateur de type anthropomorphe  $6R$

$6R$  : 6 liaisons rotoïdes



Robot Stäubli RX-90

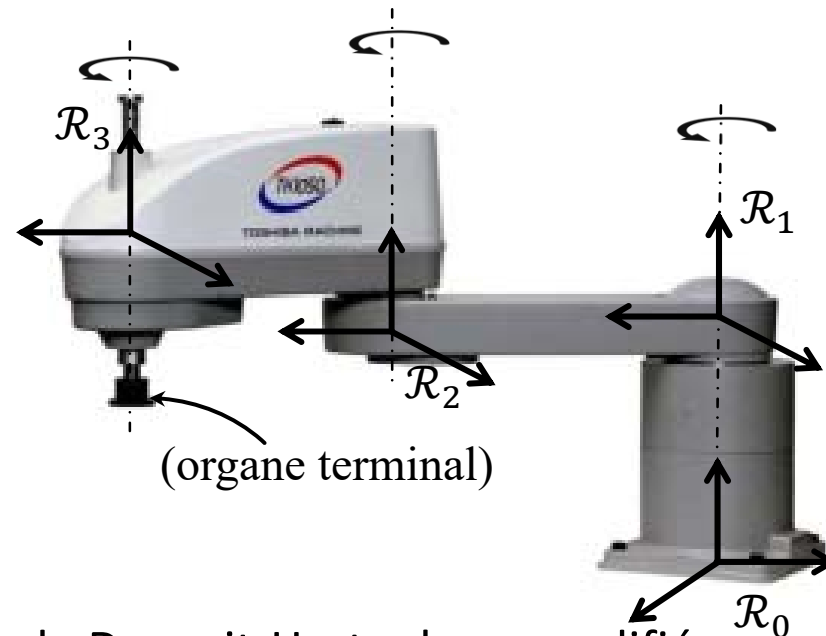
- ❖ Bras manipulateur de type SCARA  $RRRP$



Robot SCARA (Toshiba)

# MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

**Objectif** : établir une relation entre les repères  $\mathcal{R}_i$  afin de déterminer la pose (position et orientation) de l'organe terminal par rapport au repère de référence  $\mathcal{R}_0$

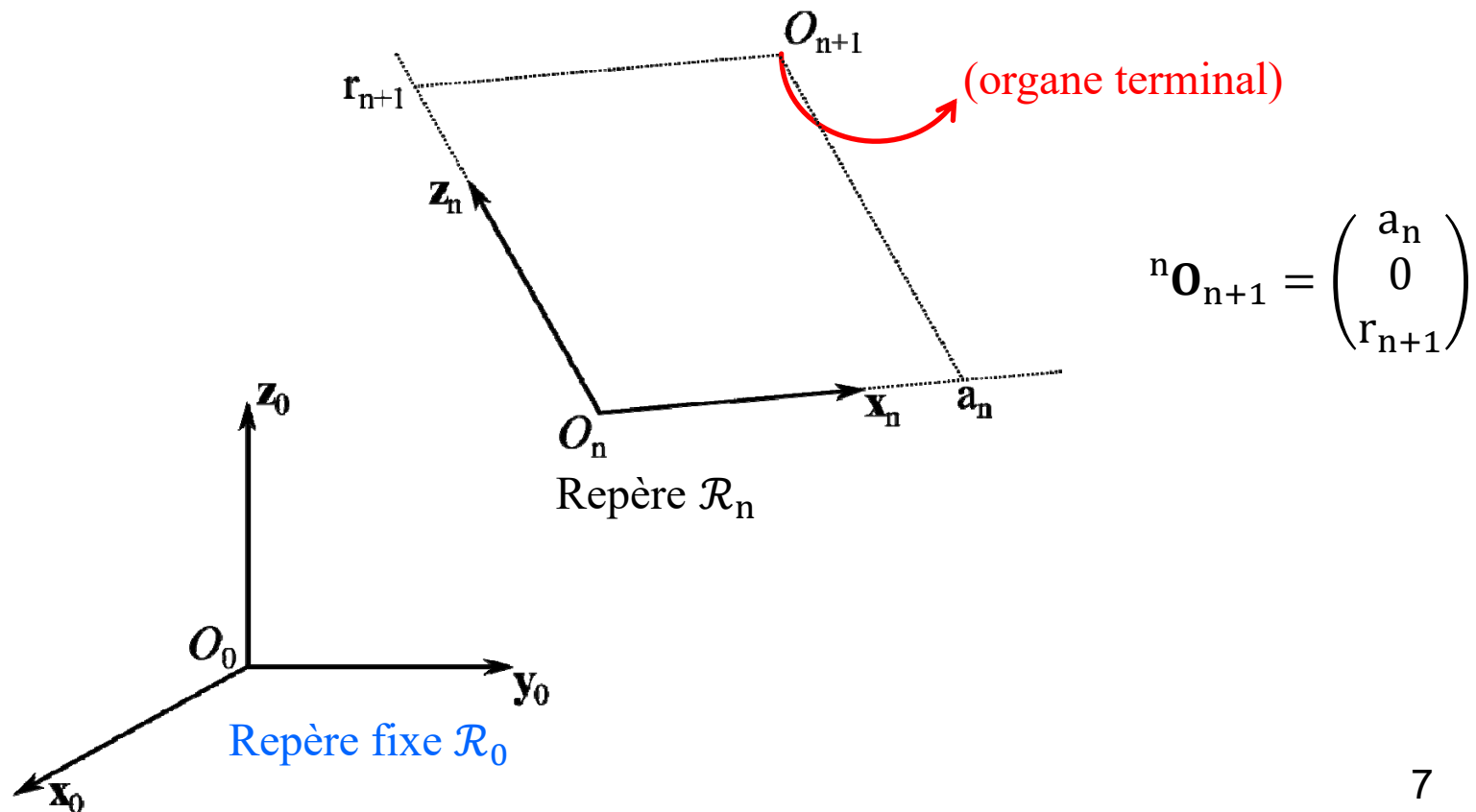


**Méthode** : convention de Denavit-Hartenberg modifiée

# CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIÉE

## Placement des repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_n$ :

- ❖  $\mathcal{R}_0$  est choisi librement
- ❖  $O_{n+1}$  est associé à l'organe terminal
- ❖  $\mathcal{R}_n$  est choisi de sorte à ce que :  $O_{n+1} \in (O_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n)$

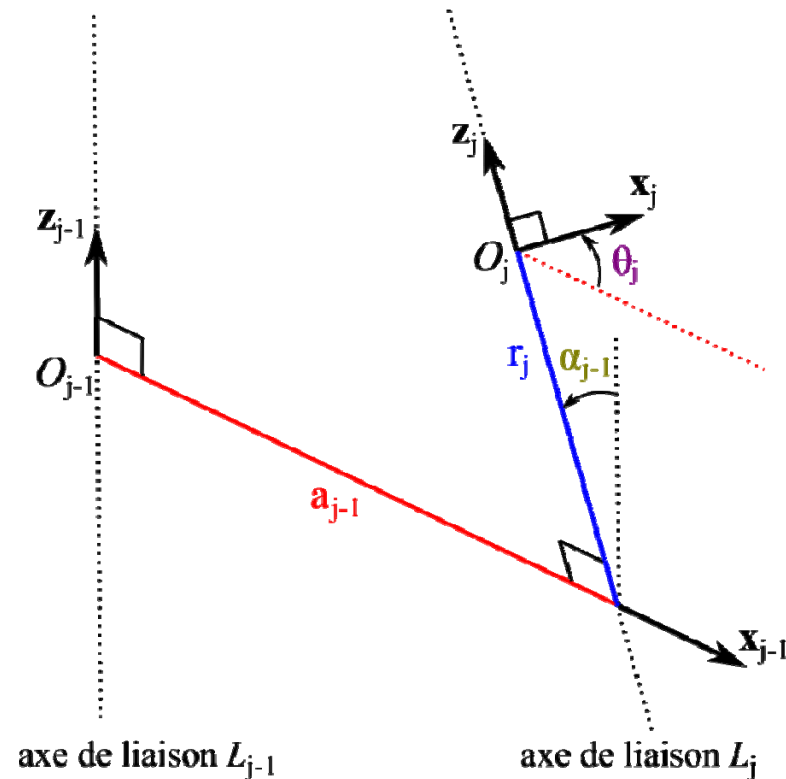


# CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIÉE

## Placement des repères $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{n-1}$

Le repère  $\mathcal{R}_j$ , fixé sur le corps  $C_j$ , est défini de manière à ce que :

- ❖ L'axe  $\mathbf{z}_j$  est porté par l'axe de la liaison  $j$
- ❖ L'axe  $\mathbf{x}_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $\mathbf{z}_j$  et  $\mathbf{z}_{j+1}$
- ❖ Si les axes  $\mathbf{z}_j$  et  $\mathbf{z}_{j+1}$  sont parallèles ou colinéaires  $\rightarrow$  le choix de  $\mathbf{x}_j$  n'est pas unique





# CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIÉE

## Paramètres DH :

- ❖  $\alpha_{j-1}$  : angle entre  $\mathbf{z}_{j-1}$  et  $\mathbf{z}_j$  (rotation autour de  $\mathbf{x}_{j-1}$ )
- ❖  $a_{j-1}$  : distance entre  $\mathbf{z}_{j-1}$  et  $\mathbf{z}_j$  le long de  $\mathbf{x}_{j-1}$
- ❖  $\theta_j$  : angle entre  $\mathbf{x}_{j-1}$  et  $\mathbf{x}_j$  (rotation autour de  $\mathbf{z}_j$ )
- ❖  $r_j$  : distance entre  $\mathbf{x}_{j-1}$  et  $\mathbf{x}_j$  le long de  $\mathbf{z}_j$

## Matrice de passage $\mathcal{R}_{j-1} \rightarrow \mathcal{R}_j$ :

$$\begin{aligned} {}^{j-1}\mathbf{T}_j &= \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{j-1}) \mathbf{Trans}(\mathbf{x}, a_{j-1}) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_j) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_j) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{j-1} & -S\alpha_{j-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{j-1} & C\alpha_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{j-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & 0 \\ S\theta_j & C\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIÉE

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & a_{j-1} \\ C\alpha_{j-1}S\theta_j & C\alpha_{j-1}C\theta_j & -S\alpha_{j-1} & -r_jS\alpha_{j-1} \\ S\alpha_{j-1}S\theta_j & S\alpha_{j-1}C\theta_j & C\alpha_{j-1} & r_jC\alpha_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ❖ La variable articulaire  $q_j$  de l'articulation  $j$  est définie par :

$$q_j = \sigma_j r_j + \bar{\sigma}_j \theta_j$$

Avec :

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{pour une liaison rotoïde} \\ 1 & \text{pour une liaison prismatique} \end{cases}$$

- ❖  ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$  dépend de la variable articulaire  $q_j$ :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = {}^{j-1}\mathbf{T}_j(q_j)$$

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

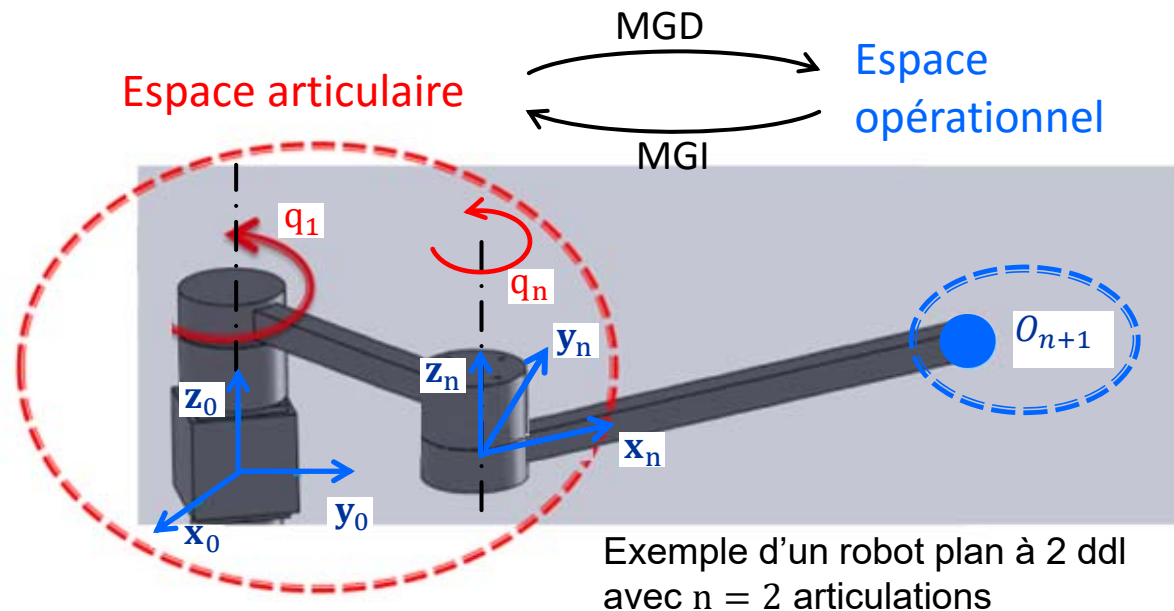
**MGD** : consiste à calculer, à partir des positions articulaires, la pose (position + orientation) de l'organe terminal.

Espace articulaire :

Vecteur de positions articulaires :  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$

Espace opérationnel :

Pose de l'OT  $\equiv \begin{cases} \text{position de } O_{n+1} \text{ dans le repère } \mathcal{R}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \\ \text{orientation du repère } \mathcal{R}_n \text{ par rapport à } \mathcal{R}_0 \end{cases}$



# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

---

## Méthodologie de calcul (1)

- ❖ Déterminer la matrice de passage, du repère  $\mathcal{R}_0$  vers le repère  $\mathcal{R}_n$  :

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) \cdot {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n)$$

- ❖ Calculer la position de l'organe terminal dans le repère  $\mathcal{R}_0$  :

$$\begin{pmatrix} {}^0\mathbf{O}_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = {}^0\mathbf{T}_n \begin{pmatrix} {}^n\mathbf{O}_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ❖ Déterminer la matrice  ${}^0\mathbf{R}_n$ , qui correspond à l'orientation de l'OT :

$${}^0\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{T}_n(1:3, 1:3)$$

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

---

## Méthodologie de calcul (2)

- ❖ On note par  $\mathbb{x}$  la pose de l'organe terminal :

$$\mathbb{x} = (x \quad y \quad z \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha)^T$$

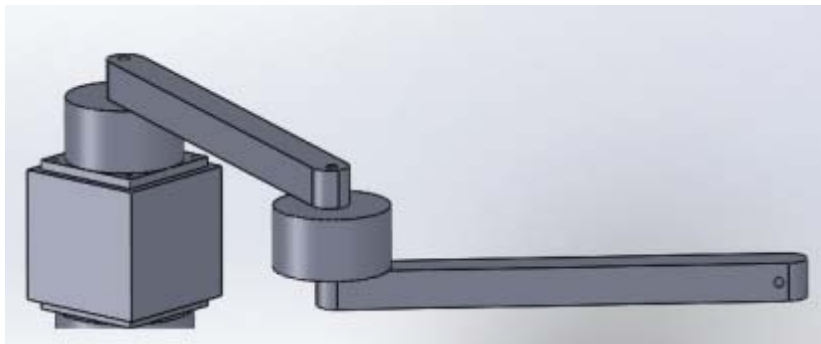
Les 3 premières composantes de  $\mathbb{x}$  correspondent à la position de l'OT :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^0\mathbf{O}_{n+1}$$

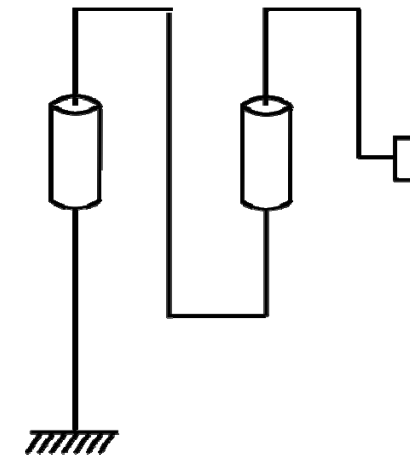
$\gamma, \beta$  et  $\alpha$  sont soit les angles de roulis, tangage et lacet, soit les angles d'Euler. Ils représentent l'orientation de l'OT. Ils sont calculés à partir de la matrice de rotation  ${}^0\mathbf{R}_n$  (voir chapitre 1)

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

**Exemple1** : modélisation géométrique d'un robot plan à 3 ddl



Robot plan à 2 ddl



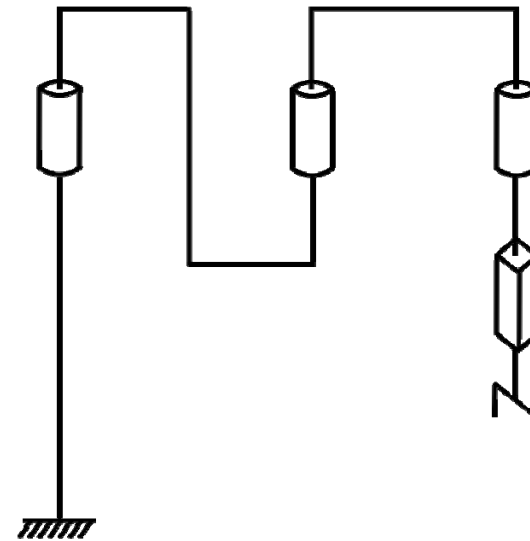
Cinématique équivalente

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

## Exemple2 : modélisation géométrique du robot SCARA



Robot SCARA (Toshiba)



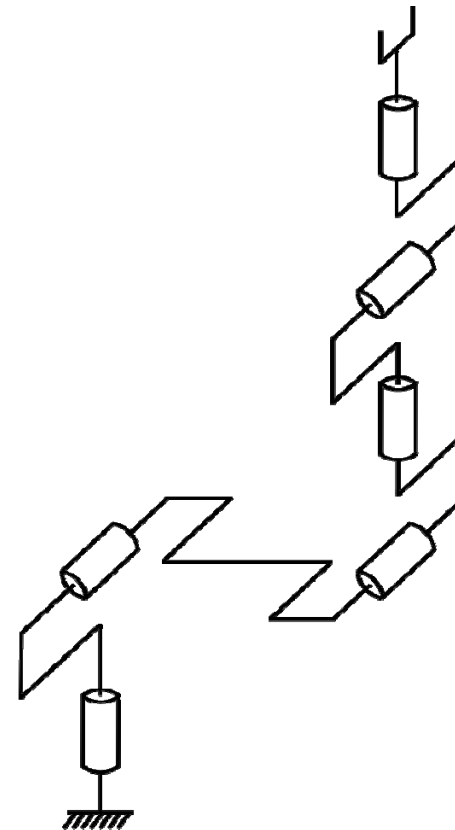
Cinématique équivalente

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

## Exemple3 : modélisation géométrique du robot antropomorphe



Robot Staubli RX-90

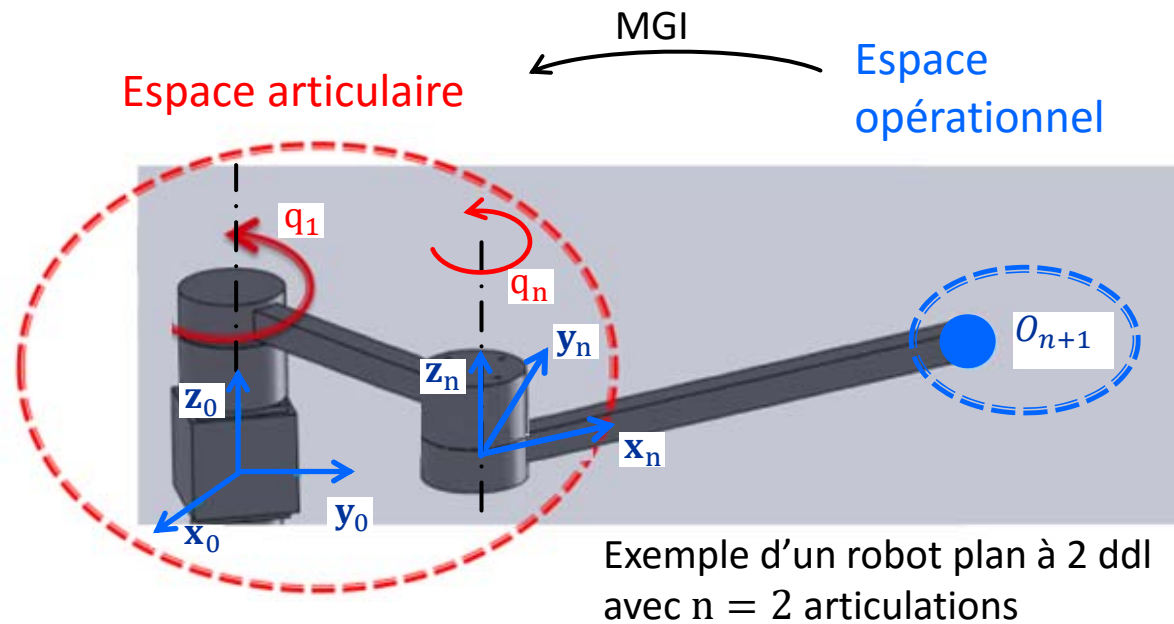


Cinématique équivalente



# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

**MGI** : consiste à calculer, à partir de la pose  $\mathbf{x}$  de l'organe terminal, les positions articulaires  $\mathbf{q}$ . Ce modèle permet de passer de l'espace opérationnel vers l'espace articulaire



# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

---

**Problématique** : résoudre  $m$  système d'équation non-linéaires. Cet ensemble d'équation est souvent complexe à résoudre. Il est donc nécessaire de s'intéresser avant d'entamer la résolution à :

- L'existence d'une solution
- Au nombre de solution
- Méthode de résolution

## **Existence d'une solution**

- Si  $n < m$  : pas de solutions
- Si  $n = m$  : nombre fini de solutions
- Si  $n > m$  : infinité de solutions

# MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

---

## Remarque

Un robot sériel à chaîne cinématique ouverte peut posséder jusqu'à **16 solutions** aux  $m$  systèmes d'équation non-linéaires, et donc 16 expressions différentes du MGI.

Dans le cadre de ce cours, on se limite au calcul du MGI des robots manipulateurs ayant au plus 4 ddl.

## **À faire en TD :**

Exemple1 : robot plan à 2 ddl

Exemple2 : robot SCARA à 4 ddl

# MODÈLES CINÉMATIQUES : DIRECT ET INVERSE

---

**MCD** : permet d'exprimer la vitesse opérationnelle de l'OT en fonction des vitesses articulaires par la relation :

$$\mathbb{V} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$  : matrice jacobienne de dimension  $m \times n$

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T$  : vecteur des vitesses articulaires

$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$  : vecteur des vitesses opérationnelles

Avec  $\mathbf{V} = (\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z})^T$  : vitesse de translation de l'organe terminal  
 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)^T$  : vitesse de rotation de l'organe terminal

# MODÈLES CINÉMATIQUES : DIRECT ET INVERSE

---

**MCI** : permet d'exprimer les vitesses articulaires en fonction de la vitesse opérationnelle de l'OT par :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\#(\mathbf{q})\mathbf{V}$$

Si  $n = m$  :

$$\mathbf{J}^\# = \mathbf{J}^{-1}$$

si non (matrice non carrée) :

$$\mathbf{J}^\# = \mathbf{J}^+ \text{ (inverse généralisée)}$$

Le **MCI** peut être obtenu en **inversant** le **MCD**. La mise en œuvre peut être faite de manière **analytique** ou **numérique**. Les méthodes analytiques ne sont pas exposées dans ce cours.

Note : pour le TP, on se contentera d'employer l'approche numérique en utilisant l'inverse généralisée (commande sous MATLAB : pinv)

# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

---

## Méthodologie de calcul

- ❖ Dérivation du MGD pour les structures simples
- ❖ Procédure en deux étapes pour les structures complexes :

**1<sup>ère</sup> étape** : Calculer la vitesse du repère  $\mathcal{R}_n$  :

$$\mathbb{V}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{V}_n$  : vitesse de translation de  $O_n$  (origine du repère  $\mathcal{R}_n$ )

$\boldsymbol{\omega}_n$  : vitesse de rotation du repère  $\mathcal{R}_n$

Il est à noter que la vitesse de chaque articulation du robot contribue à la vitesse de l'organe terminal. Cette contribution dépend de la nature de l'articulation

# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

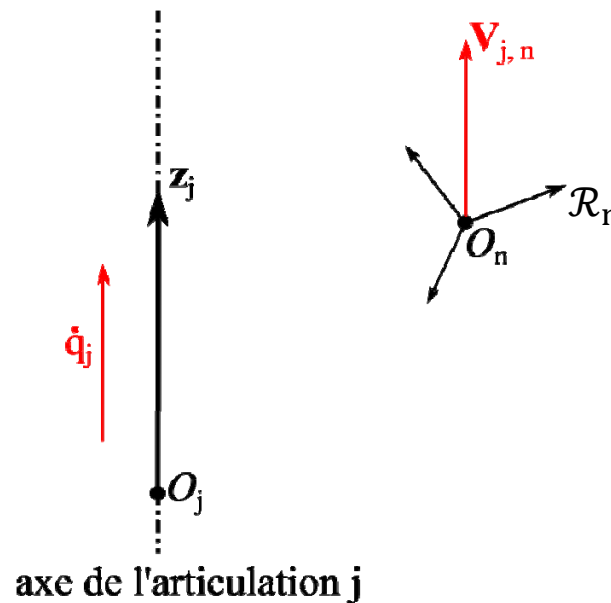
- ❖ Si l'articulation  $j$  est prismatique :  $\sigma_j = 1$

Contribution de l'articulation  $j$  à la vitesse de translation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\mathbf{V}_{j,n} = \dot{q}_j \mathbf{z}_j$$

Contribution de l'articulation  $j$  à la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\boldsymbol{\omega}_{j,n} = 0$$



# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

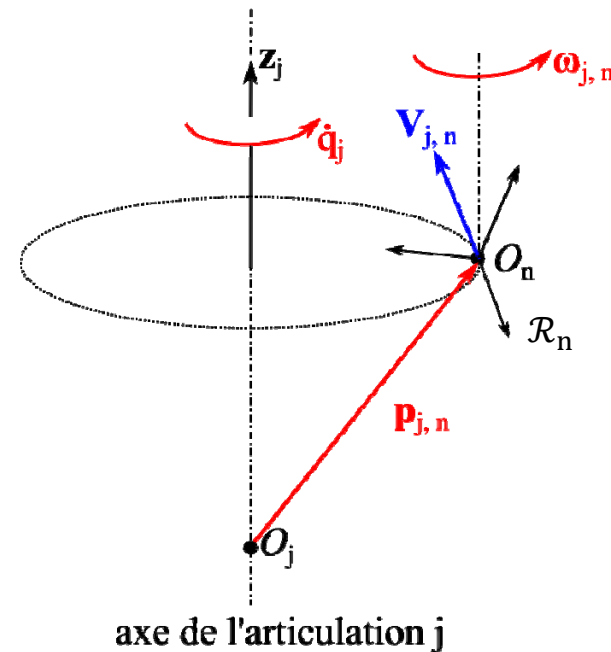
- ❖ Si l'articulation  $j$  est rotoïde :  $\sigma_j = 0$

Contribution de l'articulation  $j$  à la vitesse de translation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\mathbf{V}_{j,n} = \dot{q}_j (\mathbf{z}_j \wedge \mathbf{p}_{j,n})$$

Contribution de l'articulation  $j$  à la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\boldsymbol{\omega}_{j,n} = \dot{q}_j \mathbf{z}_j$$





# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

---

## En résumé :

- ❖ Contribution de l'articulation  $j$  sur la vitesse de translation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\mathbf{V}_{j,n} = \left( \sigma_j \mathbf{z}_j + \bar{\sigma}_j (\mathbf{z}_j \wedge \mathbf{p}_{j,n}) \right) \dot{q}_j$$

- ❖ Contribution de l'articulation  $j$  sur le vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\boldsymbol{\omega}_{j,n} = \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{z}_j$$

- ❖ Vitesse de translation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\mathbf{V}_n = \sum_{j=1}^n \left( \sigma_j \mathbf{z}_j + \bar{\sigma}_j (\mathbf{z}_j \wedge \mathbf{p}_{j,n}) \right) \dot{q}_j$$

- ❖ Vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_n$  :

$$\boldsymbol{\omega}_n = \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{z}_j$$

# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

❖ Ecriture sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}_n \dot{\mathbf{q}}$$

Avec :

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \sigma_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\sigma}_1 (\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{p}_{1,n}) & \sigma_2 \mathbf{z}_2 + \bar{\sigma}_2 (\mathbf{z}_2 \wedge \mathbf{p}_{2,n}) & \dots & \sigma_n \mathbf{z}_n + \bar{\sigma}_n (\mathbf{z}_n \wedge \mathbf{p}_{n,n}) \\ \bar{\sigma}_1 \mathbf{z}_1 & \bar{\sigma}_2 \mathbf{z}_2 & \dots & \bar{\sigma}_n \mathbf{z}_n \end{pmatrix}$$

Les vitesses  $\mathbf{V}_n$  et  $\boldsymbol{\omega}_n$  sont souvent exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_0$  ou dans le repère  $\mathcal{R}_n$ . Les matrices jacobiennes correspondantes sont notées  ${}^0\mathbf{J}_n$  et  ${}^n\mathbf{J}_n$

# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

---

**2<sup>ème</sup> étape** : Calcul de la vitesse (translation + rotation) de l'organe terminal :

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{J}_n \dot{\mathbf{q}} \\ = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

Avec :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{J}_n \text{ la matrice jacobienne du robot}$$

# MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

---

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & a_n x_z + r_{n+1} z_z & -a_n x_y - r_{n+1} z_y \\ -a_n x_z - r_{n+1} z_z & 0 & a_n x_x + r_{n+1} z_x \\ a_n x_y + r_{n+1} z_y & -a_n x_x - r_{n+1} z_x & 0 \end{pmatrix}$$

- ❖ Les valeurs :  $x_x, x_y, x_z, z_x, z_y$  et  $z_z$  sont déterminées à partir de la matrice de rotation  ${}^0\mathbf{R}_n$  (déjà calculée dans le MGD) :

$${}^0\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix}$$

## À faire en TD :

Exemple 1 : calculer la matrice jacobienne du robot à 2 ddl (par les 2 approches)

Exemple 2 : calculer la matrice jacobienne du robot à 4 ddl

---

## **Fin du chapitre 2**