Ejercicios a entregar – Cálculo y Métodos Numéricos 2022/23

Andrés García López – Estudiante de 1ºA Ingeniería Informática
Andres.Garcia20@alu.uclm.es

Índice

Introducción

Durante este trabajo se expondrá la resolución de los ejercicios asignados a Andrés García López, los cuales han sido los siguientes:

- Ejercicio 6 del Bloque 1.
- Ejercicio 8 del Bloque 2.
- Ejercicio 11 del Bloque 3.
- Ejercicio 30 de la Hoja de Integrales.

De igual manera, las herramientas y tecnologías utilizadas para realizar el trabajo han sido:

- **LibreOffice Writer:** Procesador de textos libre y gratuito.
- **MATLAB:** Aplicación que permite la realización de cálculos numéricos que permite diseñar y analizar grandes volúmenes de datos numéricos.
- **Herramienta Recortes:** Aplicación para sacar capturas de pantalla, utilizada para obtener las gráficas diseñadas en MATLAB.
- **GIMP:** Aplicación de edición de imágenes.

Finalmente en los anexos encontraremos el código fuente utilizado en el programa MATLAB para la obtención de gráficas expuestas durante el trabajo.

Ejercicio 6 Bloque 1

Sean $f(x) = x^2 + 1$ **y** $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad.
b) Si se consideran definidas sobre[-1,2], ¿están acotadas?,
c) ¿Alcanzan su máximo y su mínimo?.
d) Hallar $f([-1,2])$

Para la resolución de este ejercicio, primero realizaré el estudio de la función f(x) y, posteriormente, el estudio de la función g(x).

Estudio de la función f(x):

$$f(x)=x^2+1$$

Previamente a realizar los distintos apartados del ejercicio, podemos contemplar gráficamente la función:

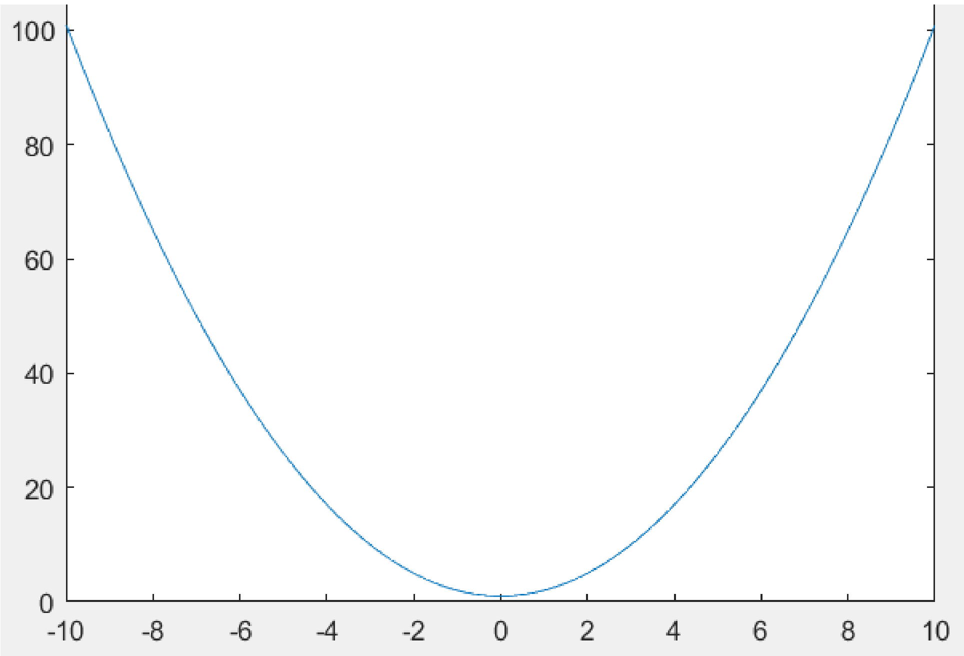


Figura 1: Gráfica de f(x) desarrollada en MATLAB. Código fuente disponible en el Anexo 1.

a) Estudiar su continuidad.

Debido a que f(x) se trata de una función polinómica, nos podemos basar en el teorema que cita que toda función polinómica es continua en todo su dominio, para asegurar que **la función f(x) será continua en todo su dominio**, siendo éste todos los números reales.

De igual manera, una vez que ya sabemos de manera teórica que la función f(x) va a ser continua en todo su dominio; si nos fijamos en su gráfica, podremos contemplar de manera visual la continuidad de la misma.

b) Si se considera definida sobre [-1, 2], ¿está acotada?

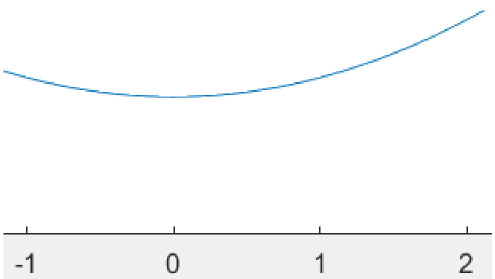
Para hallar si la función f(x) se encuentra acotada en el intervalo [-1, 2], utilizaré la definición del teorema de acotabilidad en un intervalo, el cual cita el siguiente enunciado:

> **Teorema de acotabilidad en un intervalo:** Dada una función continua en un intervalo, la función se encontrará acotada en dicho intervalo.

Si aplicamos el teorema a nuestro caso práctico, podremos apreciar que nuestra función será f(x) y, a su vez, nuestro intervalo será [-1, 2].

Tal y como hemos descubierto en el apartado a), la función f(x) es continua en todo su dominio, siendo éste todos los números reales (al tratarse de una función polinómica). De esta manera, podemos saber que la función f(x) es continua en el intervalo [-1, 2].

De forma adicional, si volvemos a apreciar la gráfica de la función pero fijándonos en el intervalo [-1, 2] podremos descubrir de manera visual que la función f(x) es continua en el intervalo:



Ampliación de la gráfica de f(x) para apreciar mejor el intervalo [-1, 2]

Ahora que ya sabemos que la función f(x) es continua en el intervalo [-1, 2], podemos decir que **la función f(x) se encuentra acotada en el intervalo [-1, 2].**

c) ¿Alcanza su máximo y su mínimo?

Para hallar si la función f(x) alcanza su máximo y su mínimo, utilizaré la definición del teorema de Weirstrass, el cual cita el siguiente enunciado:

> **Teorema de Weirstrass:** Dada una función continua en un intervalo, la función alcanza el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo.

En nuestro caso, hemos apreciado que la función f(x) es continua en todo su dominio y, a su vez, en el intervalo [-1, 2]; es por ello que podremos asegurar que **la función f(x) alcanzará su máximo y su mínimo en el intervalo**.

d) Hallar $f([-1,2])$.

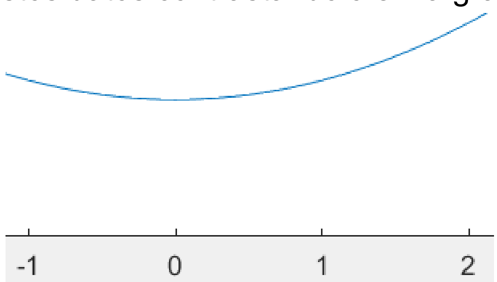
En este último apartado se pide calcular la imagen de la función f(x) en el intervalo [-1, 2], es por ello que utilizaré la definición del siguiente teorema:

> **Teorema:** Dada una función continua en un intervalo, su imagen es otro intervalo cerrado y acotado.

Un error muy común sería evaluar la función f(x) en los puntos x=-1 y x=2, sin embargo, esto sería un posible error; ya que nada nos asegura que la imagen se encuentre definida entre los valores de f(x) en dichos puntos.

Sabemos que el valor mínimo de la imagen se encontrará en x=0.
A su vez, el valor máximo que alcanzará la imagen será en x=2.

Podemos corroborar estos datos contrastándolo en la gráfica obtenida:



Ampliación de la gráfica de f(x) para apreciar mejor el intervalo [-1, 2]

Por lo que solamente deberemos evaluar la función f(x) en los puntos x=0 y x=2 para hallar el intervalo que definirá la imagen de la función:

$$f(0)=0^2+1=0+1=1$$

$$f(2)=2^2+1=4+1=5$$

Por lo que podemos definir:

$$f([-1,2])=[1,5]$$

<u>Estudio de la función g(x):</u>

Dada $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$:

Previamente a realizar los distintos apartados del ejercicio, podemos contemplar gráficamente la función:

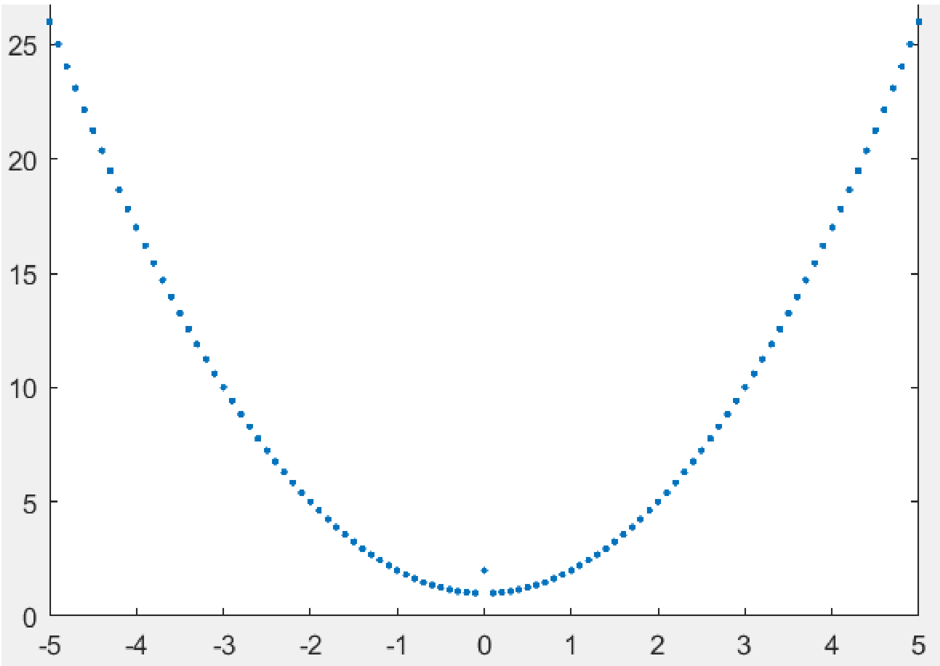


Figura 2: Gráfica de g(x) desarrollada en MATLAB. Código fuente disponible en el Anexo 2.

a) Estudiar su continuidad.

Debido a que g(x) se trata de una función definida a trozos, inicialmente no podemos decir si consiste en una función continua o no.

Sabemos que cuando x≠0, g(x) será igual a f(x); y previamente hemos estudiado que f(x) es una función continua en todo su dominio. Sin embargo, cuando x=0, g(x) equivale a 2, por lo que deberemos estudiar la continuidad de la función g(x) en el punto x=0.

<u>Estudio de la continuidad de g(x) en x=0:</u>

Partiendo de la teoría, sabemos que para que una función sea continua se debe considerar:

1. Verificar que la función g(x) está definida en el punto x=0:
   g(0)=2

2. Verificar que la función g(x) tiene límite en el punto x=0:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2+1=0^2+1=1$$

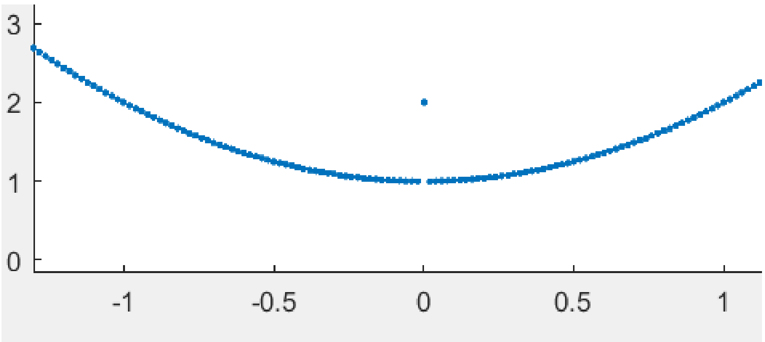
3. Verificar que el valor de la función g(x) en el punto x=0 es igual al límite de la función g(x) en el punto x=0:

$$g(0) \neq \lim_{x \to 0} g(x)$$

$$2 \neq 1$$

Como se puede apreciar, **la función g(x) no es una función continua**, puesto que cuenta con una discontinuidad de tipo evitable debido a que en el punto x=0 la función tiene limite y está definida, pero ambos valores no coinciden (2≠1).
La función g(x) presenta una discontinuidad de tipo evitable puesto que la podemos convertir en una función continua solamente asignando a la función en el punto x=0 el valor del límite en dicho punto (1).

De igual manera, una vez que ya sabemos de manera teórica que la función g(x) no es continua; si nos fijamos en su gráfica, podremos contemplar de manera visual la discontinuidad que presenta:



Ampliación de la gráfica de g(x) para apreciar mejor la discontinuidad que presenta

b) Si se considera definida sobre [-1, 2], ¿está acotada?

En el apartado a) hemos descubierto que la función g(x) no es continua en su Dominio debido a que en el punto x=0 presenta una discontinuidad de tipo evitable.

A su vez, en este apartado se nos pide definir la acotabilidad de la función g(x) en el intervalo [-1,2], sin embargo, la discontinuidad presentada en el punto x=0 se encuentra dentro de este intervalo; por lo que la función g(x) tampoco será continua en el intervalo [-1,2].

Debido a que la función g(x) no es continua en el intervalo [-1,2], inicialmente no podemos definir si la función g(x) se encuentra acotada en el intervalo [-1, 2], ya que no le podemos aplicar la definición del teorema de acotabilidad en un intervalo, el cual cita el siguiente enunciado:

Teorema de acotabilidad en un intervalo: Dada una función continua en un intervalo, la función se encontrará acotada en dicho intervalo.

A pesar de que no podemos hacer una aplicación directa del teorema de acotabilidad en un intervalo, sabemos que la función g(x) está definida por:

$$g(x)=\left\{\begin{matrix} f(x) & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{matrix}\right\}$$

Sabiendo la definición de la función g(x), podemos decir que la función estará acotada cuando x ≠ 0 (tal y como hemos visto con el estudio de la función f(x)).

Por lo que deberemos estudiar la acotabilidad de la función g(x) pero teniendo en cuenta que la función g(x) obtendrá el valor de y=2 cuando x=0.

Debido a que en el estudio de la función f(x) hemos hallado f([-1,2]) y hemos descubierto que la imagen de la función f(x) en el intervalo [-1, 2] está definida en el intervalo [1, 5], sabemos que cuando g(x) no esté evaluada en el punto x=0; ésta estará acotada en [1, 5].

De igual manera, sabemos que cuando x=0, f(x)=2; por lo que dicho este valor se encuentra dentro del intervalo [1,5].

De esta manera, podemos definir que **la función g(x) está acotada inferiormente por k=1 y acotada superiormente por k=5**.

c) ¿Alcanza su máximo y su mínimo?

Debido a que la función g(x) no es continua, no podemos aplicar la definición del teorema de Weirstrass para determinar si alcanza su máximo y su mínimo, el cual cita el siguiente enunciado:

> **Teorema de Weirstrass:** Dada una función continua en un intervalo, la función alcanza el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo.

Sin embargo, sabemos que la definición de la función g(x) es la siguiente:

$$g(x)=\left\{\begin{matrix} f(x) & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{matrix}\right\}$$

Como podemos apreciar, para cualquier punto que no sea x=0 la función g(x) corresponderá al valor de f(x). Tal y como hemos descubierto durante el estudio de la función f(x), ésta es continua por lo que su máximo y su mínimo se encontraban dentro del intervalo.

De manera más precisa, el valor máximo de la función f(x) lo podemos encontrar en el punto x=2, dónde f(2) = 5.

A su vez, el valor mínimo de la función f(x) lo podemos encontrar en el punto x=0, dónde f(0) = 1. Sin embargo, la función g(x) en el punto x=0 presenta una discontinuidad, es por ello que no presenta dicho mínimo.

Con esto, llegamos a la conclusión de que **la función g(x) presenta su máximo dentro del intervalo pero no su mínimo.**

d) Hallar $g([-1,2])$**.**

* Este último apartado no está solicitado en el enunciado (ya que sólo se solicita estudiar el intervalo de la imagen de la función f(x) en el intervalo [-1, 2], sin embargo, para hacer el ejercicio más completo, hallaré también dicha información).

En este último apartado se pide calcular la imagen de la función g(x) en el intervalo [-1, 2], sin embargo, al no tratarse de una función continua en el intervalo, no podemos utilizar la definición del siguiente teorema:

> **Teorema:** Dada una función continua en un intervalo, su imagen es otro intervalo cerrado y acotado.

Un error muy común sería evaluar la función g(x) en los puntos x=-1 y x=2, sin embargo, esto sería un posible error; ya que nada nos asegura que la imagen se encuentre definida entre los valores de g(x) en dichos puntos.

Para hallar la imagen de la función g(x) en el intervalo [-1, 2] deberemos revisar la definición de la propia función:

$$g(x)=\left\{\begin{matrix} f(x) & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{matrix}\right\}$$

Cuando hemos realizado el estudio de la función f(x) hemos hallado que:
El valor mínimo de la imagen se encontraba en x=0.
A su vez, el valor máximo que alcanzaba la imagen era en x=2.

Sin embargo, podemos apreciar que la función g(x) en el punto x=0 obtiene un valor de y=2; por lo que **la imagen de la función g(x) en el intervalo [-1, 2] estará definida en el intervalo (1, 5].**

Ejercicio 8 Bloque 2

8.a) Determinar las constantes **a** y **b** de manera que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) - 1 & 1 \leq x \leq e \\ ax + b & e < x \leq e^2 \end{cases}$$

verifique las condiciones dek teorema del valor medio de Lagrange en $[1, e^2]$.

b) Encontrar algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los extremos de la curva.

Primero, debemos saber el enunciado que cita el teorema del valor medio de Lagrange:

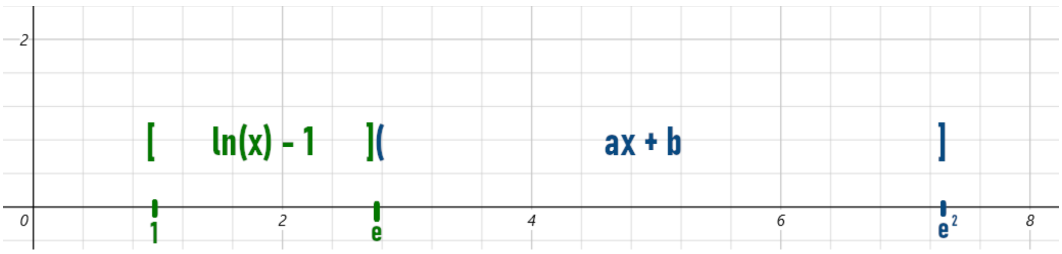
Teorema del Valor Medio de Lagrange: Sea una función con un dominio definido en un intervalo cerrado [a, b] y una imagen correspondiente a los números reales; si:

1. La función es continua en todo el intervalo [a, b]
2. La función es derivable en el intervalo (a, b)

Entonces, siempre va a existir una tangente en el punto c (el cual éste está contenido en el intervalo (a, b)) que sea paralela a la recta. De tal manera que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Al tratarse la función f(x) de una función definida a trozos, para tener una representación visual de la misma, he desarrollado el siguiente diagrama:



Representación de la función f(x) para saber los trozos correspondientes a la misma

Lo primero que debemos estudiar es la continuidad de la función f(x).

<u>Estudio de la continuidad de la función f(x):</u>

Debido a que f(x) se trata de una función definida a trozos, inicialmente no podemos decir si consiste en una función continua o no.

Sabemos que en el intervalo [1, e] la función será equivalente a ln(x) -1, por lo que podemos asegurar que la función f(x) será continua en el intervalo [1, e].

A su vez, en el intervalo (e, e^2] la función f(x) es una función polinómica, por lo que podemos asegurar que la función f(x) también será continua en dicho intervalo.

La única duda que nos resulta es la continuidad de la función f(x) en el punto x=e, es por ello que vamos a estudiar la continuidad de la función f(x) en en punto x=e.

<u>Estudio de la continuidad de f(x) en x=e:</u>

Partiendo de la teoría, sabemos que para que una función sea continua se debe considerar:

1. Verificar que la función f(x) está definida en el punto x=e:

$$f(e)=\ln(e)-1=1-1=0$$

2. Verificar que la función f(x) cuenta con límite en el punto x=e:
   a) Calcular el límite de la función f(x) en el punto x=e por la izquierda:

   $$\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e} \ln(x)-1=\ln(e)-1=1-1=0$$

   b) Calcular el límite de la función f(x) en el punto x=e por la derecha:

   $$\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e} ax+b=ae+b$$

   c) Para que la función f(x) tenga límite en el punto x=e, los límites laterales en dicho punto deben coincidir. Por lo que:

   $$0=a*e+b$$

De esta manera, conseguimos una primera condición de los valores de las constantes a y b.

De igual manera, para verificar el teorema de valor medio de Lagrange, la función f(x) debe ser derivable en en el intervalo (1, e^2). Es por ello que vamos a pasar a estudiar la derivabilidad de la función f(x) en dicho intervalo.

<u>Estudio de la derivabilidad de la función f(x) en el intervalo (1, e^2):</u>

Debido a que f(x) se trata de una función definida a trozos, inicialmente no podemos decir si consiste en una función derivable o no.

Sabemos que en el intervalo (1, e] la función es equivalente a ln(x) -1, por lo que podemos asegurar que la función f(x) será derivable en el intervalo (1, e).

A su vez, en el intervalo (e, e^2] la función f(x) es una función polinómica, por lo que podemos asegurar que la función f(x) también será derivable en dicho intervalo.

La única duda que nos resulta es la derivabilidad de la función f(x) en el punto x=e, es por ello que vamos a estudiar la derivabilidad de la función f(x) en en punto x=e.

Estudio de la derivabilidad de f(x) en x=e:

Primero de todo, vamos a hallar la función derivada de f(x):

$$f'(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x} & 1<x<e \\ a & e<x<e^2\end{matrix}\right\}$$

Primero calculamos la derivada por la izquierda en el punto x=e:

$$f'(e)=\frac{1}{e}$$

Y la derivada por la derecha en el punto x=e:

$$f'(e)=a$$

Sabemos que, para que la función f(x) sea derivable en el punto x=e, las derivadas laterales de la función deben coincidir. Por lo que:

$$\frac{1}{e}=a$$

Llegado a este punto, tenemos que para que la función sea continua y derivable en el punto x=e (y por ende se cumpla el teorema del valor medio de Lagrange), obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$0=a*e+b$$
$$\frac{1}{e}=a$$

Si desarrollamos dicho sistema de ecuaciones:

$$0=\frac{1}{e}*e+b$$

$$0=1+b$$

$$-1=b$$

De esta manera obtenemos el valor de las constantes a y b para verificar el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [1, e^2]:

$$a=\frac{1}{e}$$
$$b=-1$$

De manera adicional, adjunto la gráfica de la función f(x) una vez obtenidos los valores de las constantes a y b:

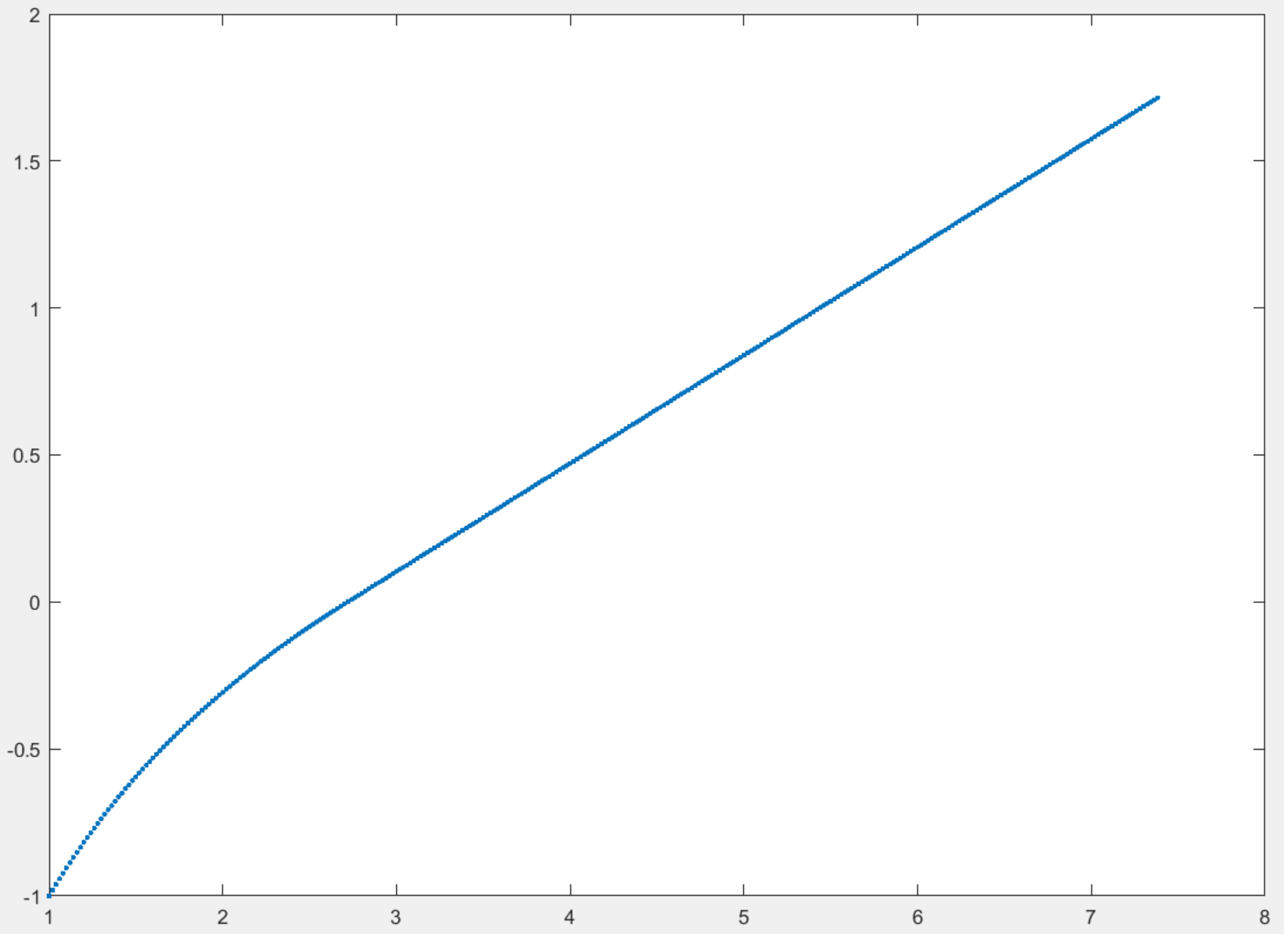


Figura 3: Gráfica de f(x) desarrollada en MATLAB. Código fuente disponible en el Anexo 3.

Ejercicio 11 Bloque 3

11. En el intervalo [0,4] se define $\mathbf{F(x)} = \int_0^x \sqrt{16 - t^2}dt$

a) Calcular $F'(2)$
b) Calcular $F(2)$

a) Calcular F'(2)

Para realizar este apartado, haremos uso del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, el cual cita el siguiente enunciado:

Primer Teorema Fundamental del Cálculo: Dada una función f(x) integrable en el intervalo [a,b], llamaremos F(x) a una función definida en [a,b] tal que

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x \mathrm{f}(t).dt$$

A su vez, gracias a la primera observación del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que si f(x) es continua en (a,b), entonces F(x) es derivable en (a,b) y se cumple que F'(x) = f(x)

Una vez sabido esto, vamos a aplicar dicho teorema a nuestro caso práctico propuesto en este ejercicio.

Primero, debemos saber si la función f(x) es integrable en el intervalo [0,4], siendo f(x):

$$\mathrm{f}(x)=\sqrt{16-x^2}$$

Tal y como sabemos a nivel teórico, las funciones continuas, las monótonas y las funciones que tienen un conjunto finito de discontinuidades son integrables, es por ello que podemos asegurar que la función f(x) es integrable en el intervalo [0,4].

Por lo que, una vez sabido que la función f(x) es integrable en el intervalo [0,4], podemos definir que:

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x \sqrt{16-t^2}.dt$$

Adicionalmente, debido a que la función f(x) es continua en el intervalo (0,4), podemos asegurar que la función F(x) es derivable en (a, b) y que F'(x) = f(x), por lo que:

$$\mathrm{F}'(x)=\sqrt{16-x^2}$$

Una vez hallado esto, solamente nos queda evaluar la función F’(x) en el punto x=2:

$$F'(2)=\sqrt{16-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}\approx 3.46$$

b) Calcular F(2)

Para realizar este apartado, haremos uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual cita el siguiente enunciado:

> **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:** Dada una función f(x) continua en el intervalo [a,b] y la función F(x) cualquier función primitiva de f(x), es decir, F’(x) = f(x) , tendremos:
>
> $$\int_a^b f(x).dx=F(b)-F(a)$$

Una vez sabido esto, vamos a aplicar dicho teorema a nuestro caso práctico propuesto en este ejercicio.

Como debemos calcular F(2), tendremos la siguiente función:

$$F(2)=\int_0^2 f(t).dt=F(2)-F(0)$$

Primero, debemos saber si la función f(x) es continua en el intervalo [0,4], siendo f(x):

$$f(x)=\sqrt{16-x^2}$$

Es por ello que vamos a estudiar la continuidad de la función f(x) en el intervalo [0,4]:

1. Verificar que f(x) es continua en (0,4).
   Debido a que el Dominio de la función f(x) es [-4,4], podemos asegurar que la función f(x) será continua en el intervalo (0,4).

2. Verificar que f(x) es continua por la derecha en x=0.
   Para hallar esto, debemos comprobar que:
   1. Existe f(0).

      $$f(0)=\sqrt{16-0^2}=\sqrt{16}=4$$

   2. Existe el límite por la derecha de f(0):

      $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-0^2}=\sqrt{16}=4$$

3. Verificar que f(0) = lim f(0)

$$\mathrm{f}(0)=\lim_{x \to 0} f(x)$$
$$4=4$$

3. Verificar que f(x) es continua por la izquierda en x=4.
   Para hallar esto, debemos comprobar que:
   1. Existe f(4).

   $$\mathrm{f}(4)=\sqrt{16-4^2}=\sqrt{16-16}=\sqrt{0}=0$$

   2. Existe el límite por la izquierda de f(4):

   $$\lim_{x \to 4} f(x)=\lim_{x \to 4} \sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-4^2}=\sqrt{16-16}=\sqrt{0}=0$$

   3. Verificar que f(4) = lim f(4)

   $$\mathrm{f}(4)=\lim_{x \to 4} f(x)$$
   $$0=0$$

De esta manera, comprobamos que la función f(x) es continua en el intervalo [0, 4].

Por lo que podemos proceder a calcular:

$$\int_0^2 \sqrt{16-x^2}.\,dx=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(0)$$

Pero primero, vamos a proceder a resolver la integral:

$$\int_0^2 \sqrt{16-x^2}.\,dx$$

Para calcular esta integral definida, primero vamos a calcular la integral indefinida sin tener en cuenta los límites de integración, los cuales tomaremos en cuenta al final de la resolución de la integral.

Para resolver la integral indefinida, utilizo la siguiente sustitución trigonométrica:
Como en la raíz cuadrada tengo 16 – x^2, o lo que es lo mismo 4^2 – x^2, realizo la sustitución de x = a sen θ , siendo a = 4.

Ahora, si obtengo el valor de dx, hallo que:

$$dx=4*\cos\theta*d\theta$$

Si sustituyo estos valores en la integral, obtengo:

$$\int \sqrt{16-x^2}.\,dx=\sqrt{16-4^2*sen^2\theta}*4*cos\theta*d\theta$$

Una vez hecho esto, saco factor común a² en la raíz cuadrada de la integral:

$$\int \sqrt{16-4^2 * sen^2\theta} * 4 * cos\theta * d\theta = \int \sqrt{16*(1-sen^2\theta)} * 4 * cos\theta * d\theta$$

Al encontrarme con un producto dentro de la raíz cuadrada, puedo obtener 2 raíces:

$$\int \sqrt{16*(1-sen^2\theta)} * 4 * cos\theta * d\theta = \int \sqrt{16} * \sqrt{1-sen^2\theta} * 4 * cos\theta * d\theta$$

En este paso utilizo la identidad trigonométrica cos² x = 1 – sen² x, por lo que obtengo:

$$\int \sqrt{16} * \sqrt{1-sen^2\theta} * 4 * cos\theta * d\theta = \int \sqrt{16} * \sqrt{\cos^2\theta} * 4 * cos\theta * d\theta$$

Por lo que puedo resolver ambas raíces:

$$\int \sqrt{16} * \sqrt{\cos^2\theta} * 4 * cos\theta * d\theta = \int 4 * \cos\theta * 4 * cos\theta * d\theta$$

Multiplico ambos “4” para dejar más “limpia” la integral:

$$\int 4 * \cos\theta * 4 * cos\theta * d\theta = \int 16 * \cos\theta * cos\theta * d\theta$$

De igual manera, multiplico los “cos θ” para dejar más “despejada” la integral:

$$\int 16 * \cos\theta * cos\theta * d\theta = \int 16 * \cos^2\theta * d\theta$$

Al ser el 16 un valor constante, lo puedo sacar fuera de la integral:

$$\int 16 * \cos\theta * cos\theta * d\theta = 16 \int \cos^2\theta * d\theta$$

Utilizo la identidad trigonométrica:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}$$

Y lo sustituyo en la integral:

$$16 \int \cos^2\theta * d\theta = 16 \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} * d\theta$$

Divido la integral en 2 integrales, ya que la integral de una suma es igual a la suma de integrales:

$$16 \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} * d\theta = 16 \int \frac{1}{2} * d\theta + 16 \int \frac{\cos 2\theta}{2} * d\theta$$

Saco los valores constantes de las integrales:

$$16 \int \frac{1}{2} * d\theta + 16 \int \frac{\cos 2\theta}{2} * d\theta = 8 \int d\theta + 8 \int \cos 2\theta * d\theta$$

Primero resuelvo la primera integral:

$$8\int d\theta+8\int \cos 2\theta * d\theta=8\theta+8\int \cos 2\theta * d\theta$$

Para la segunda integral, utilizaré:

$$\int f'(x)*\cos(f(x))*dx=sen(f(x))$$

Debido a que en el coseno tenemos 2θ (lo cual sería el valor de f(x)), deberemos contar con un 2 (realizando el papel de f'(x)). Para poder hacer esto, inserto el 2 dentro de la integral pero fuera de la misma debo insertar un ½ para no modificar el valor de la integral:

$$8\theta+8\int \cos 2\theta * d\theta=8\theta+4\int 2*\cos 2\theta * d\theta$$

Y ahora ya sí puedo resolver la segunda integral:

$$8\theta+4\int 2*\cos 2\theta * d\theta=8\theta+4\, sen 2\theta+C$$

Acabo de resolver la integral indefinida, sin embargo, la variable actual es θ y la variable inicial era x.

Primero sustituiré el valor de sen2θ mediante la identidad de ángulo doble:
sen2x = 2 senx cosx

Por lo que me queda:

$$8\theta+4\, sen 2\theta+C=8\theta+4(2\, sen\theta\, cos\theta)+C$$

Saco el 2 del paréntesis para multiplicarlo por el 4:

$$8\theta+4(2\, sen\theta\, cos\theta)+C=8\theta+8(sen\theta\, cos\theta)+C$$

Ahora, voy a hallar el valor de:
- θ
- senθ
- cosθ

Para ello, primero hallo el valor de senθ, ya que como hice la sustitución x = 4 senθ, puedo hallar que senθ = x/4.

Ahora hallo el valor de θ simplemente despejando el seno que acabo de obtener: θ = arc sen (x/4).

Finalmente, hallo el valor de cosθ, para ello, utilizo la identidad trigonométrica $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. Por lo que:

$$cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$$

Como he hallado que senθ = x/4, puedo definir que:

$$cos\theta=\sqrt{1-(\frac{x}{4})^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$$

Si desarrollo la fracción de la raíz, obtengo:

$$cos\theta=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

Por lo que:

$$cos\theta=\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

Recopilando los valores obtenidos, tengo que:

senθ = x/4

θ = arc sen (x/4)

$cos\theta=\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$

Ahora simplemente debo sustituir estos valores:

$$8\theta+8(sen\theta\, cos\theta)+C=8*arc\, sen(\frac{x}{4})+8*\frac{x}{4}*\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}+C$$

Simplificándola, finalmente me queda:

$$8*arc\, sen(\frac{x}{4})+8*\frac{x}{4}*\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}+C=8*arc\, sen(\frac{x}{4})+\frac{x}{2}*\sqrt{16-x^2}+C$$

Por lo que, de esta manera he obtenido el valor de la integral indefinida:

$$\int\sqrt{16-x^2}*dx=8*arc\, sen(\frac{x}{4})+\frac{x}{2}*\sqrt{16-x^2}+C$$

Una vez hecho esto, voy a tener en cuenta los límites de integración de la integral definida inicial:

$$\int_0^2\sqrt{16-x^2}*dx=(8*arc\, sen(\frac{x}{4})+\frac{x}{2}*\sqrt{16-x^2})\Big|_0^2$$

Y la resuelvo:

$$(8*arc\, sen(\frac{x}{4})+\frac{x}{2}*\sqrt{16-x^2})\Big|_0^2=(8*arc\, sen(\frac{2}{4})+\frac{2}{2}*\sqrt{16-2^2})-(8*arc\, sen(\frac{0}{4})+\frac{0}{2}*\sqrt{16-0^2})$$

$$(8*arc\, sen(\frac{2}{4})+\frac{2}{2}*\sqrt{16-2^2})-(8*arc\, sen(\frac{0}{4})+\frac{0}{2}*\sqrt{16-0^2})=(8*\frac{\pi}{6}+\sqrt{12})-0$$

Finalmente, obtengo:

$$(8*\frac{\pi}{6}+\sqrt{12})-0\approx 7,65$$

Por lo que, llego a la conclusión de:

$$F(2) \approx 7{,}65$$

Ejercicio 30 Bloque 3

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\, dx$$

Para calcular esta integral, primero vamos a multiplicarla por el conjugado del denominador:

$$\int \frac{1}{1+cosx}.dx=\int \frac{1}{1+cosx}*\frac{1-cosx}{1-cosx}.dx$$

La integral como tal no se ha visto alterada puesto que al multiplicarla por el mismo numerador y denominador es como si la hubiéramos multiplicado por 1.

Como podemos apreciar, en la parte inferior de la integral ahora tenemos un producto de binomios conjugados, cuyo resultado de multiplicarlos será la resta de los cuadrados de los mismos, es decir:

(1 + cosx) * (1 – cosx) = 1 – cosx

Por lo que nuestra integral se quedaría de la siguiente manera:

$$\int \frac{1-cosx}{1-\cos^{2x}}.dx$$

Como podemos apreciar, el denominador de la integral se nos ha quedado como 1–cos^{2}x. Y aplicando la identidad trigonométrica sen^{2}x + cos^{2}x = 1 podemos dejar el denominador de la integral como sen^{2}x, ya que sen^{2}x = cos^{2}x – 1 . Por lo que la integral se nos queda como:

$$\int \frac{1-cosx}{sen^{2x}}.dx$$

En este paso, podemos separar el denominador de la resta y convertirlo en dos integrales:

$$\int \frac{1-cosx}{sen^{2x}}.dx=\int \frac{1}{sen^{2x}}-\frac{cosx}{sen^{2x}}.dx=\int \frac{1}{sen^{2x}}.dx-\int \frac{cosx}{sen^{2x}}.dx$$

Ahora, para la primera integral podemos utilizar la siguiente identidad trigonométrica para simplificarla:

$$csc\, x=\frac{1}{sen\, x}$$

Por lo que:

$$\frac{1}{sen^2 x}=csc^2 x$$

De igual manera, con la segunda integral podemos hacer:

$$\int \frac{cosx}{sen^{2x}}.dx = \int sen^{-2} x * \cos x.dx$$

Llegados a esta situación, contamos con 2 integrales inmediatas, siendo la resolución de cada una de ellas:

$$\int csc^2 x.dx = -\cot x$$

$$\int sen^{-2} x * \cos x.dx = \frac{sen^{-1} x}{-1} = \frac{-1}{sen\, x}$$

Por lo que la solución final de nuestra integral sería:

$$\int \frac{1}{1+cosx}.dx = -\cot x + \frac{1}{sen\, x} + C$$

Anexos

Anexo 1: Código fuente de la figura 1, correspondiente a la función f(x) del Ejercicio 6 perteneciente al Bloque 1

```
% Genero un vector con los valores que intrudciré a la función
x=-10:0.1:10;
% En este caso el vector contiene valores comprendidos entre el -10 y el 10
% con saltos de 0.1

% Defino la función que utilizaré
y=x.^2+1;
% Debido a que MATLAB trabaja con operaciones con matrices, para que haga
% el cuadrado de cada elemeneto deberemos poner .^2

% Dibujo la función con los valores del vector
plot(x,y);
```

Anexo 2: Código fuente de la figura 2, correspondiente a la función g(x) del Ejercicio 6 perteneciente al Bloque 1

```
% Genero un vector con los valores que intrudciré a la función
x=-5:0.1:5;
% En este caso el vector contiene valores comprendidos entre el -5 y el 5
% con saltos de 0.1

% Defino la función que utilizaré
g=(x<0|x>0).*(x.^2+1)+(x==0).*(x+2);
% Podemos contemplar que la función está compuesta por 2 términos:
%   (x<0|x>0).*(x.^2+1) verifica si la x es distinta a cero.
%       En caso de cumplirse, el valor del término es "true", y por tanto:
%           g(x)=x^2+1
%   (x==0).*(x+2) verifica si la x equivale a cero.
%       En caso de cumplirse, el valor del término es "true", y por tanto:
%           g(0) = 2

% Dibujo la función con los valores del vector
plot(x,g,'.');
```

Anexo 3: Código fuente de la figura 3, correspondiente a la función f(x) del Ejercicio 8 perteneciente al Bloque 2

```
% Genero un vector con los valores del intervalo en el que está definida la función
x=1:0.02:exp(2);
% En este caso el vector contiene valores comprendidos entre el 1 y el e^2
% con saltos de 0.02
    % exp(2) es la manera de introducir en MATLAB el valor de e^2

% Defino la función que utilizaré
f=(x>=1&x<(exp(1)+0.001)).*(log(x)-1)+(x>exp(1)).*((x/exp(1))-1);

% Podemos contemplar que la función está compuesta por 2 términos:
%   (x>=1&x<(exp(1)+0.001)) verifica lo siguiente:
%       x>=1    la x es mayor o igual a 1
%       &       y
%       x<(exp(1)+0.001)    la x es menor que e^2 + 0.001
%           (ya que los saltos son de 0.02 y así no cometemos ningún error)
%       En caso de cumplirse, el valor del término es "true", y por tanto:
%           f(x)=log(x)-1 que es la manera de expresar ln(x)-1 en MATLAB
%   (x>exp(1)) verifica si la x es mayor que e.
%       En caso de cumplirse, el valor del término es "true", y por tanto:
%           f(x) = x/exp(1))-1 que es la manera de expresar (x/e)-1 en
%           MATLAB (ya habiendo sistituido a=1/e y b=-1)

% Dibujo la función con los valores del vector
plot(x,f,'.');
```