

DOUČKO Z MATEMATIKY

TEORIE A DEFINICE
MATEMATIKA 4MM101/4MM106



Math with Bětko

ALŽBĚTA KAŠPAROVÁ
AUTORKA MATERIÁLŮ

MNOŽINY, LOGIKA

MNOŽINA

Množinu chápeme jako souhrn objektů určitých vlastností. Těmito objekty říkáme **prvky** (elementy, body).

Zápisem $x \in A$ označujeme prvek, který patří do množiny A . (čteme – x je prvkem množiny A).

Prázdná množina = množina, která neobsahuje žádný prvek.

VÝROK

Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Pravdivý výrok má hodnotu 1, nepravdivý má hodnotu 0.

NEGACE, KONJUNKCE, DISJUNKCE, EKVIVALENCE, IMPLIKACE (POUZE 4MM106)

- **Negaci** označujeme symbolem $\neg\alpha$
- **Konjunkce** výroků α, β označujeme $\alpha \wedge \beta$
- **Disjunkci** výroků α, β označujeme $\alpha \vee \beta$
- **Implikaci** výroků α, β označujeme $\alpha \Rightarrow \beta$ (čteme: Jestliže platí α , pak platí β)
- **Ekvivalenci** výroků α, β označujeme $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (čteme: α platí právě tehdy, když platí β)

Tabulky, které ukazují, kdy jsou uvedené výroky pravdivé či nepravdivé v závislosti na pravdivosti výroků:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

TAUTOLOGIE (POUZE 4MM106)

Výroky, které jsou vždy pravdivé (bez ohledu na pravdivost vstupujících výroků) se nazývají **tautologie**.

PODMNOŽINA

Jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B , říkáme, že množina A je podmnožinou množiny B . Zapisujeme symbolem $A \subset B$ (\subset je tzv. inkluze)

SJEDNOCENÍ, PRŮNIK, ROZDÍL, DISJUNKTIVNÍ MNOŽINA

- **Sjednocení** množin A, B je množina $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
- **Průnik** množin A, B je množina $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$
- **Sjednocení** množin A, B je množina $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
- **Rozdíl** množin A, B je množina $A - B = \{x; x \in A \vee x \notin B\}$
- Množiny A, B jsou **disjunktivní**, jestliže nemají žádný společný prvek.

ZOBRAZENÍ MNOŽINY A DO MNOŽINY B

Podmnožinou f kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B** , jestliže ke každému x z množiny A existuje právě jedno y z množiny B takové, že $[x, y] \in f$. Zobrazení f množiny A do množiny B značíme symbolem $f: A \rightarrow B$

DEFINIČNÍ OBOR A OBOR HODNOT

- Množina A je **definiční obor** zobrazení f , značí se $D(f)$
- Množina $\{f(x); x \in A\}$ je **obor** zobrazení f , značí se $H(f)$

REÁLNÁ FUNKCE

Zobrazení f libovolné množiny A do množiny reálných čísel (tj. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$) se nazývá **reálná funkce**.

REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Zobrazení f podmnožiny reálných čísel do množiny reálných čísel (tj. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$) se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**.

Zatímco f budeme značit funkci, tak $f(x)$ budeme značit **funkční hodnotu funkce f v bodě x** .

REÁLNÁ POSLOUPNOST

Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel (tj. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) se nazývá **reálná posloupnost**.

REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ**REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ**

Zobrazení $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, tj. zobrazení podmnožiny reálných čísel do množiny reálných čísel se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**.

ROSTOUCÍ, KLESAJÍCÍ, NEROSTOUCÍ, NEKLESAJÍCÍ, PROSTÁ, OMEZENÁ SHORA A OMEZENÁ FUNKCE

Funkce f je na množině $M \subset D(f)$:

- (1) **rostoucí**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$
- (2) **klesající**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$
- (3) **nerostoucí**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$
- (4) **neklesající**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$
- (5) **prostá**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$
- (6) **omezená shora (resp. zdola)**, existuje-li reálná konstanta K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$ (resp. $f(x) \geq K$)
- (7) **omezená**, existuje-li reálná konstanta K tak, že pro každé $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$

Pozn. Rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce jsou tzv. **monotónní**.

SUDÁ, LICHÁ, PERIODICKÁ FUNKCE

Funkce f je na množině $M \subset D(f)$:

- (1) **sudá**, jestliže pro každé $x \in M$ je $-x \in M$ a platí $f(-x) = f(x)$
- (2) **lichá**, jestliže pro každé $x \in M$ je $-x \in M$ a platí $f(-x) = -f(x)$
- (3) **periodická**, jestli existuje kladné číslo p takové, že pro každé $x \in M$ je $x \pm p \in M$ a platí $f(x + p) = f(x)$. Číslo p se nazývá perioda funkce f .

Pozn. Sudé funkce jsou souměrné podle osy y , liché funkce jsou souměrné podle počátku.

SOUČET, ROZDÍL, SOUČIN A PODÍL FUNKCÍ, SLOŽENÁ FUNKCE

Nechť f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné.

- (1) Funkce $f + g$ definovaná předpisem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ se nazývá **součet funkcí f a g**
- (2) Funkce $f - g$ definovaná předpisem $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ se nazývá **rozdíl funkcí f a g**
- (3) Funkce $f \cdot g$ definovaná předpisem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ se nazývá **součin funkcí f a g** .
- (4) Funkce $\frac{f}{g}$ definovaná předpisem $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se nazývá **podíl funkcí f a g**
- (5) Funkci $f[g]$ definovaná předpisem $f[g](x) = f(g(x))$ říkáme **složená funkce** z vnější funkce f a vnitřní funkce g (superpozice funkcí f a g)

INVERZNÍ FUNKCE

Pokud je funkce f prostá v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** f^{-1} definovaná vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

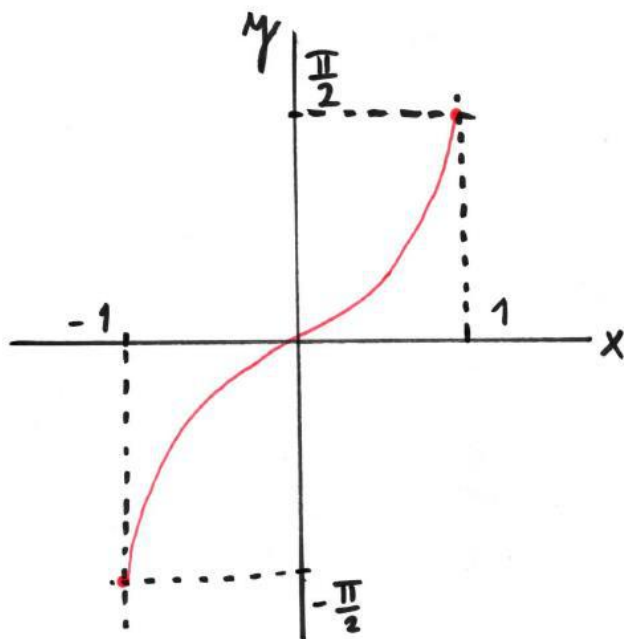
Platí:

- (1) $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$
- (2) Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$

DEFINICE FUNKCE ARCSINX

Inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ se nazývá **arkussinus**, značí se \arcsin .

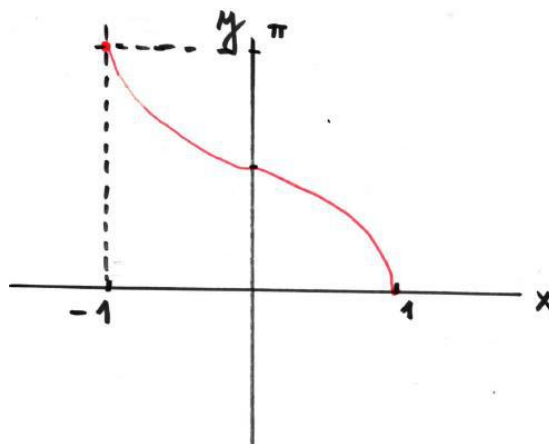
- Definiční obor funkce: $D(f) = < -1, 1 >$
- Obor hodnot funkce: $H(f) = < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$
- Graf funkce



DEFINICE FUNKCE ARCCOSX

Inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $< 0, \pi >$ se nazývá **arkuskosinus**, značí se \arccos .

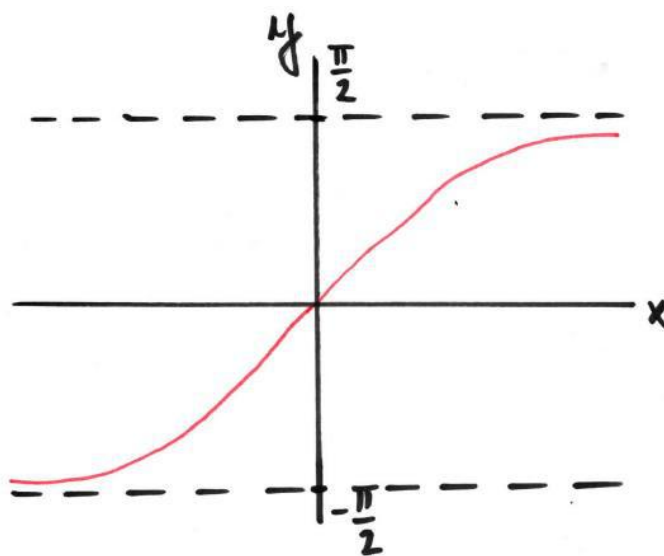
- Definiční obor funkce:
 $D(f) = < -1, 1 >$
- Obor hodnot funkce:
 $H(f) = < 0, \pi >$
- Graf funkce



DEFINICE FUNKCE ARCTG X

Inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se nazývá **arkustangens**, značí se \arctg .

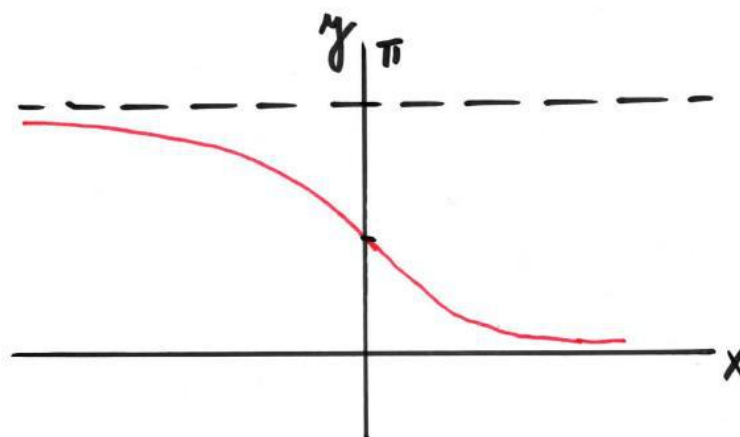
- Definiční obor funkce: $D(f) = \mathbb{R}$
- Obor hodnot funkce: $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- Graf funkce



DEFINICE FUNKCE ARCCOTG X

Inverzní funkce k funkci kotangens na intervalu $(0, \pi)$ se nazývá **arkuskotangens**, značí se $\operatorname{arccotg}$.

- Definiční obor funkce:
 $D(f) = \mathbb{R}$
- Obor hodnot funkce:
 $H(f) = (0, \pi)$
- Graf funkce



Poznámka: Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ a $\operatorname{arccotg} x$ se nazývají **cyklometrické funkce**.

ZÁKLADNÍ FUNKCE

Funkce $c, x, \sqrt[n]{x}, e^x, \ln x$, goniometrické a cyklometrické funkce jsou tzn. **základní funkce**

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Funkce, které vzniknou ze základních funkcí sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním se nazývají **elementární funkce**.



MATICOVÁ ALGEBRA

VEKTOR

Vektory chápeme jako uspořádané n -tice reálných čísel, které budeme zapisovat ve tvaru (a_1, \dots, a_n)

ROVNOST VEKTORŮ

Vektory $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ z V_n jsou si rovny, jestliže jsou **si rovny** odpovídající souřadnice těchto vektorů, tj.

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \ (i = 1, \dots, n)$$

SOUČET VEKTORŮ

Součet vektorů $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ definujeme vztahem

$$a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

REÁLNÝ NÁSOBEK VEKTORU

Reálný násobek vektoru $a = (a_1, \dots, a_n)$ definujeme vztahem

$$ca = (ca_1, \dots, ca_n)$$

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

Říkáme, že vektor x je **lineární kombinací** vektoru x_1, \dots, x_r , jestliže existují reálná čísla c_1, \dots, c_r taková, že platí

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_r x_r.$$

Čísla c_1, \dots, c_r se nazývají **koefficienty lineární kombinace**. Lineární kombinace vektorů, ve kterou všechny koefficienty rovny nule, se nazývá **triviální**.

SKALÁRNÍ SOUČIN

Skalární součin vektorů $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ je reálné číslo, které je definováno vztahem

$$xy = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Vektory a, b jsou tzv. **ortogonální (kolmé)**, protože jejich skalární součin je roven 0.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

Vektory x_1, \dots, x_r se nazývají **lineárně závislé**, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj. jestliže existují reálná čísla c_1, \dots, c_r z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že $c_1 x_1 + \dots + c_r x_r = 0$. V opačném případě jsou nezávislé.

NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA LINEÁRNÍ ZÁVISLOSTI VEKTORŮ

Vektory x_1, \dots, x_r jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

MATICE

Uspořádané schéma reálných čísel $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nazývá **matice typu $m \times n$** .

ROVNOST MATIC

Matice A, B typu $m \times n$ jsou **si rovny** (značíme $A = B$), jestliže pro všechny $i=1, \dots, m$ a $j=1, \dots, n$ je

$$a_{ij} = b_{ij}$$

NULOVÁ MATICE

Matice O typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí $a_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, m$), $j = 1, \dots, n$) se nazývá **nulová matice**.

ČTVERCOVÁ MATICE

Matice typu $n \times n$ se nazývá **čtvercová matice** řádu n .

JEDNOTKOVÁ MATICE

Čtvercová matice J řádu n , pro jejíž prvky platí $j_{ik} = 1$ pro $i = k$, $j_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ ($i = 1, \dots, n$); $k = 1, \dots, n$) se nazývá **jednotková matice** řádu n .

HODNOST MATICE

Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A se nazývá **hodnost matice**.

Pozn. Hodnost matice A budeme značit $h(A)$. Hodnost nulové matice $h(O) = 0$. Jestliže A se nerovná O , pak $h(A) \in \mathbb{N}$, přičemž platí: Je-li A matice typu $m \times n$, pak

$$h(A) \leq \min\{m, n\}$$

TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

Matice A typu $m \times n$ se nazývá **trojúhelníková**, když $m \leq n$ a pro $i = 1, \dots, m$ je $a_{ii} \neq 0$ a $a_{ij} = 0$ pro $j < i$.

Pozn. Trojúhelníková matice má na hlavní diagonále nenulové prvky a pod hlavní diagonálou samé nuly.

VĚTA O HODNOSTI TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE

Je-li A^Δ trojúhelníková matice typu $m \times n$, pak její hodnost je rovna počtu řádků matice A^Δ , tj. $h(A^\Delta) = m$

VĚTA O ELEMENTÁRNÍCH ŘÁDKOVÝCH ÚPRAVÁCH MATICE

Hodnost matice se nezmění, pokud v ní uděláme následující tzv. **elementární řádkové úpravy**:

- (1) Zaměníme pořadí řádků matice
- (2) Vynásobíme libovolný řádek matice nenulovým reálným číslem
- (3) Přičteme k libovolnému řádku matice lineární kombinaci ostatních
- (4) Vynecháme řádek matice, který je lineární kombinací ostatních.

TRANSPONOVANÁ MATICE A JEJÍ HODNOST

Matice A' , která vznikne z A tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, se nazývá matice **transponovaná k matici A** .

Věta: Jestliže v matici A zaměníme pořadí sloupců, pak takto vzniklá matice má s maticí A stejnou hodnotu.

VĚTA O HODNOSTI TRANSPONOVANÉ MATICE

Jsou – li A a A' navzájem transponované matice, pak hodnota matice A je rovna hodnotě matice A' , tj. $h(A) = h(A')$.

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Koeficienty u neznámých a_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) a pravé strany rovnic b_1, \dots, b_m jsou daná reálná čísla.

MATICE SOUSTAVY

Matici, jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých, tj. matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se nazývá **matice soustavy** (S)

ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY

Přidáme-li k matici soustavy navíc sloupec pravých stran rovnice soustavy, dostaneme matici

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}, & a_{12}, \dots & , a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, \dots & , a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & , a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

Které říkáme **rozšířená matice soustavy**(S).

FROBENIOVA PODMÍNKA

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení tehdy a jen tedy, když hodnost matice soustavy je rovna **hodnosti rozšířené matice soustavy**.

VĚTA O POČTU ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Předpokládejme, že soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých. Potom platí:

- (a) Jestliže $h=n$, pak má soustava (S) **právě jedno řešení**
- (b) Jestliže $h<n$, pak má soustava (S) **nekonečně mnoho řešení**, přičemž za $n-h$ neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Dosadíme-li za volitelné neznámé konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení soustavy, které se nazývá **partikulární řešení soustavy**.

ZÁKLADNÍ ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Partikulární řešení soustavy, ve kterém jsou volitelné neznámé rovny nule, se nazývá **základní řešení soustavy**.

VĚTA O EKVIVALENTNÍCH SOUSTAVÁCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jestliže v rozšířené matici soustavy (S) uděláme jakékoli elementární řádkové úpravy, dostaneme matici, které odpovídá ekvivalentní soustava lineárních rovnic.

GAUSSOVA A JORDANOVA METODA

Gaussova eliminační metoda – převedeme soustavu rovnic na trojúhelníkový tvar

Jordanova eliminační metoda:

1. Rozšířenou matici soustavy převedeme na trojúhelníkový tvar
2. V trojúhelníkové matici odspodu nulujeme prvky nad hlavní diagonálou
3. Na hlavní diagonále takto upravené matice vytvoříme jedničky
4. Výsledné matici přiřadíme ekvivalentní soustavu, kterou snadno vyřešíme.

Pozn. Pokud máme řešit soustavu lineárních rovnic pomocí Jordánovy metody a vyjde nekonečně mnoho řešení, pak za volitelné neznámé dáme nuly a získáme tzn. Bazické proměnné.

HOMOGENNÍ SOUSTAVA

V homogenní soustavě jsou všechny pravé strany rovnic rovny nule, tudíž soustava má tvar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Pozn. Homogenní soustava má vždy řešení.

VĚTA O POČTU ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY

Homogenní soustava lineárních rovnic (Z) má vždy řešení. Označíme-li h hodnost matice soustavy a n je počet neznámých, potom platí:

- (a) Jestliže $h=n$, pak má homogenní soustava **jediné řešení** $x=(0,\dots,0)$.
- (b) Jestliže $h<n$, pak má homogenní soustava **nekonečně mnoho řešení**, přičemž za $n-h$ neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.

SOUČET MATIC

Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$. Matice X typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí $x_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) se nazývá **součet matic A, B** a značí se $A+B$.

REÁLNÝ NÁSOBEK MATICE

Nechť A je matice typu $m \times n$, c je reálné číslo. Matice X typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí $x_{ij} = ca_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) se nazývá **reálný násobek matice A** a značí se cA .

SOUČIN MATIC

Nechť A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$. Matice X typu $m \times p$, pro jejíž prvky x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$) platí $x_{ij} =$ skalární součin i – tého řádku matice A a j – tého sloupce matice B , se nazývá **součin matic A, B** a značí se AB .

Pozn. Násobení matic není komutativní, tj. existují matice A, B takové, že $AB \neq BA$.

VĚTA O ASOCIATIVITĚ NÁSOBENÍ MATIC

Pro každé tři matice A typu $m \times n$, B typu $n \times p$ a C typu $p \times q$ platí

$$A(BC) = (AB)C$$

VĚTA O DISTRIBUTIVITĚ MATICOVÝCH OPERACÍ

(a) Pro každé tři matice A typu $m \times n$, B typu $n \times p$ a C typu $n \times p$ platí

$$A(B + C) = AB + AC$$

(b) Pro každé tři matice A typu $m \times n$, B typu $n \times p$ a C typu $n \times p$ platí

$$(B + C)A = BA + CA$$

REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ MATICE

Matice A se nazývá **regulární**, jestliže je čtvercová a má lineárně nezávislé řádky. Čtvercová matice, jejíž řádky jsou lineárně závislé, se nazývá **singulární**.

INVERZNÍ MATICE

Nechť A je čtvercová matice. Matice X , pro kterou platí $AX = J$ se nazývá **inverzní matice k matici A** .

VĚTA O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI INVERZNÍ MATICE

Inverzní matice k matici A existuje tehdy a jen tedy, když A je regulární. Je-li A regulární matice, pak inverzní matice k matici A je určena jednoznačně.

VĚTA O NAVZÁJEM INVERZNÍCH MATICÍCH

Je-li A regulární matice, pak matice k ní inverzní A^{-1} je opět regulární a platí $(A^{-1})^{-1} = A$.

MATICOVÉ ROVNICE

- Jestliže A je regulární matice řádu n , B je libovolná matice typu $n \times p$, pak maticové rovnice $AX=B$ má právě jedno řešení $X = A^{-1}B$.
- Jestliže A je regulární matice řádu n , B je libovolná matice typu $n \times p$, pak maticové rovnice $XA=B$ má právě jedno řešení $X = BA^{-1}$.

VĚTA O MATICOVÉM ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Jestliže matice A je regulární, pak soustava lineárních rovnic $Ax=b$ má právě jedno řešení $x = A^{-1}b$.

DETERMINANT

Determinant je reálné číslo, které je jednoznačně přiřazeno každé čtvercové matici.

Determinant čtvercové matice A řádu n budeme značit $\det A$ nebo zapisovat ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DETERMINANT PRVNÍHO ŘÁDU

Determinant prvního řádu je definován vztahem $|a_{11}| = a_{11}$

DEFINICE DETERMINANTU 2. A 3. ŘÁDU

Determinant druhého řádu – Je definován vztahem $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$

Pozn. Od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále

Determinant třetího řádu – Je definován vztahem
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{21} * a_{32} * a_{13} - (a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{23} * a_{32} * a_{11})$$

VÝPOČET DETERMINANTŮ VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Determinant čtvrtého a vyššího řádu se dají počítat rozvojem nebo převodem na trojúhelníkový tvar matice.

VĚTA O ROZVOJI DETERMINANTU

Jestliže A je čtvercová matice řádu n , pak pro $i=1, \dots, n$ platí:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in},$$
 kde M_{ij} je subdeterminant, který vznikne z determinant matice A po vynechání i -tého řádku a j -tého sloupce.

VĚTA O DETERMINANTU TRANSPONOVANÉ MATICE

Jsou-li A a A' navzájem transponované čtvercové matice, pak $\det A = \det A'$.

VĚTA O ŘADOVÝCH ÚPRAVÁCH DETERMINANTU

Pro řadové úpravy determinantu platí:

- (a) Násobíme-li libovolnou řadu determinantu číslem c , potom se číslem c násobí celý determinant.
- (b) Vyměníme-li navzájem v determinantu dvě rovnoběžné řady, pak determinant změní znaménko.
- (c) Přičteme-li k některé řadě determinantu libovolnou lineární kombinaci řad s ní rovnoběžných, pak se hodnota determinantu nezmění.

VĚTA O DETERMINANTU TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE

Je-li čtvercová matice A trojúhelníková, pak její determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

VĚTA O DETERMINANTU REGULÁRNÍ MATICE

Čtvercová matice A je regulární tehdy a jen tehdy, když její determinant je různý od nuly.

Pozn. Matice A je singulární tehdy a jen tehdy, když její determinant je roven nule.

CRAMEROVO PRAVIDLO

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n . Jestliže matice soustavy A je regulární, pak má soustava právě jedno řešení, které se dá zapsat ve tvaru

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad (j = 1, \dots, n),$$

kde A_j je matice, která vznikne z matice soustavy A po náhradě j -tého sloupce sloupcem pravých stran rovnic soustavy.

CHARAKTERISTICKÁ (VLASTNÍ) ČÍSLA MATICE

Nechť A je čtvercová matice. Komplexní číslo λ vyhovující rovnici

$$\det(A - \lambda J) = 0$$

se nazývá **charakteristické (vlastní) číslo** matice A . Rovnice $\det(A - \lambda J) = 0$ se nazývá **charakteristická rovnice** matice A .

VĚTA O CHARAKTERISTICKÝCH ČÍSLECH SYMETRICKÉ MATICE

Je-li A čtvercová symetrická matice, pak všechna její charakteristická čísla jsou reálná.

LIMITY**REÁLNÁ POSLOUPNOST**

Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel (tj. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) se nazývá **reálná posloupnost**.

ZOBECNĚNÁ REÁLNÁ ČÍSLA

Množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se nazývá **rozšířená číselná osa**, prvky množiny \mathbb{R}^* se nazývají **zobecněná reálná čísla**, prvky $\pm\infty$ jsou tzv. nevlastní body.

Definujeme na množině zobecněných reálných čísel R^*

ROSTOUCÍ, KLESAJÍCÍ, NEROSTOUCÍ A NEKLESAJÍCÍ POSLOUPNOST

Nechť (a_n) je reálná posloupnost.

- (a) Říkáme, že posloupnost (a_n) je **rostoucí**, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- (b) Říkáme, že posloupnost (a_n) je **klesající**, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- (c) Říkáme, že posloupnost (a_n) je **neklesající**, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- (d) Říkáme, že posloupnost (a_n) je **nerostoucí**, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

DEFINOVANÉ VÝRAZY

Na množině zobecněných reálných čísel R^* definujeme

- (a) $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in R$
- (b) $a + \infty = +\infty + a = \infty$ pro každé $a > -\infty$
- (c) $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ pro každé $a < +\infty$
- (d) $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a$
 - $\pm\infty$ pro $a > 0$
 - $\mp\infty$ pro $a < 0$
- (e) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro každé $a \in R$

NEDEFINOVANÉ VÝRAZY

Nedefinované výrazy:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{a}{0}$, kde $a \in R^*$

OKOLÍ BODU

- (a) **Otevřený interval** $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, se nazývá **okolí bodu** $a \in R$
- (b) Interval $(\lambda, +\infty)$, kde $\lambda \in R$, se nazývá **okolí bodu** $+\infty$
- (c) Interval $(-\infty, \lambda)$, kde $\lambda \in R$, se nazývá **okolí bodu** $-\infty$

POSLOUPNOST

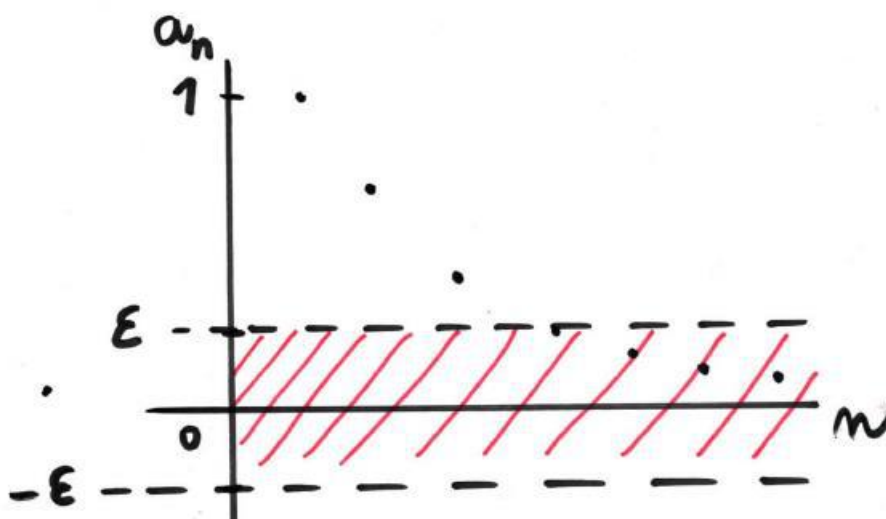
Zobrazení množiny přirozených čísel N do množiny reálných čísel R se nazývá **reálná posloupnost**.

VYBRANÁ POSLOUPNOST

Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel (indexů). Pak posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti (a_n) .

LIMITA POSLOUPNOSTI

Říkáme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in R^*$, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti a_n od jistého indexu n_0 počínaje.



Obrázek 1: Limita posloupnosti $\lim 1/n=0$

Pozn.

- Pokud $a \in R$, říkáme, že posloupnost (a_n) má **vlastní limitu**
- Pokud $a = \pm\infty$, říkáme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu**

VĚTA O JEDNOZNAČNOSTI LIMITY

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

+ věta o lim typu $\frac{a}{0}$ **VĚTA O LIMITĚ KONSTANTNÍ**

Je-li (a_n) **konstantní posloupnost**, tj. $a_n = a$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

VĚTA O LIMITĚ VYBRANÉ POSLOUPNOSTI

Jestliže posloupnost (a_n) má limitu, pak každé posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu.

VĚTA O LIMITĚ ARITMETICKÝCH OPERACÍ

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti. Pak platí

$$(a) \lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$$

$$(b) \lim(a_n * b_n) = \lim a_n * \lim b_n$$

$$(c) \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

Pokud existují $\lim a_n$, $\lim b_n$ a operace na pravé straně vztahů jsou definovány.

VĚTA O LIMITĚ SEVŘENÉ POSLOUPNOSTI

Nechť (a_n) , (b_n) , (c_n) jsou reálné posloupnosti. Jestliže od jistého indexu n_0 počínaje $a_n \leq b_n \leq c_n$ a $\lim a_n = \lim c_n$ pak existuje $\lim b_n$ a platí $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$.

SPOJITOST FUNKCE

Nechť funkce f je definována v okolí bodu c . Říkáme, že **funkce f je spojitá** v bodě c , jestliže pro každou posloupnost (x_n) obsaženou v $D(f)$ platí: když $x_n \rightarrow c$, pak $f(x_n) \rightarrow f(c)$

JEDNOSTRANNÁ SPOJITOST

Pokud definici spojitosti omezíme jen na posloupnost (x_n) , které konvergují k bodu c zprava ($x_n \geq c$ pro $n \in \mathbb{N}$), resp. zleva ($x_n \leq c$ pro $n \in \mathbb{N}$), definuje tzv. **jednostrannou spojitost funkce**.

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÉ A OBOUSTRANNÉ SPOJITOSTI

Funkce f je spojitá v bodě c , právě když je v bodě c spojitá zleva i zprava.

SPOJITOST V INTERVALU J

Říkáme, že funkce f je **spojitá v intervalu J** , jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu J a v krajních bodech (pokud patří do intervalu) je spojitá zprava, resp. zleva.

SPOJITOST ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

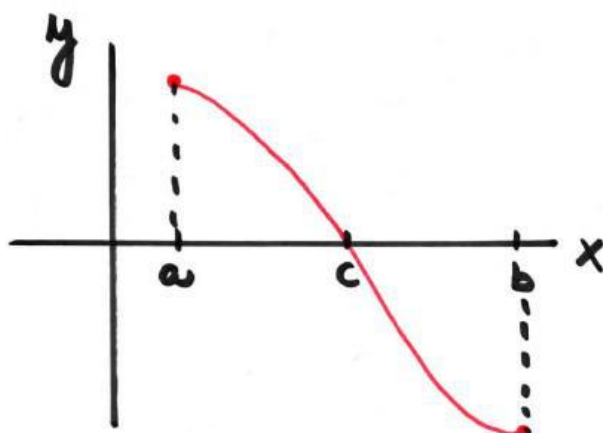
Každá elementární funkce je spojitá v libovolném intervalu, na kterém je definována.

WEIERSTRASSOVA VĚTA

Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ má v tomto intervalu maximum i minimum.

BOLZANOVA VĚTA

Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Obrázek 2: Bolzanova věta

PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU C

Okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$, ve kterém vynecháme bod c , se nazývá prstencové okolí bodu c .

LIMITA FUNKCE

Nechť funkce f je definována v prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$. Říkáme, že **funkce f má v bodě c limitu $a \in \mathbb{R}^*$** , jestliže pro každou posloupnost (x_n) obsaženou v $D(f)$ -c platí: když $x_n \rightarrow c$, pak $f(x_n) \rightarrow a$.

JEDNOSTRANNÉ LIMITY FUNKCE F V BODĚ

Analogicky jako jednostrannou spojitost definujeme jednostranné limity funkce. Limitu funkce f v bodě c zprava (resp. zleva) značíme $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ resp. $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$.

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÝCH LIMIT A OBOUSTRANNÉ LIMITY

Limita funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ existuje právě když existují obě jednostranné limity funkce f v bodě c a jsou si rovny. Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ resp. $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$.

VĚTA O VZTAHU SPOJITOSTI A LIMITY FUNKCE

Funkce f v bodě c spojitá právě když $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

VĚTA O JEDNOZNAČNOSTI LIMITY FUNKCE

Funkce f má v bodě c nejvýše jednu limitu.

VĚTA O LIMITĚ SLOŽENÉ FUNKCE

Nechť $f[g]$ je **složená funkce** z vnější funkce f a vnitřní g . Jestliže $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = d$ a vnější funkce f má v bodě d limitu, pak $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow d} f(y)$, pokud existuje levá strana.

VĚTA O LIMITĚ ARITMETICKÝCH OPERACÍ FUNKCE

Nechť f a g jsou funkce jedné proměnné. Pak platí

$$(a) \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

Pokud existují $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ a operace na pravé straně vztahů jsou definovány.

VĚTA O LIMITĚ SEVŘENÉ FUNKCE

Nechť f , g a h jsou funkce jedné proměnné, $c \in \mathbb{R}^*$. Jestliže v prstencovém okolí bodu c je

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ a } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x)$$

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x)$$

VĚTA O LIMITĚ FUNKCE TYPU A/0

Jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ je typu " $\frac{a}{0}$ ", kde $a \neq 0$ a funkce f je v prstencovém okolí bodu c kladná (resp. záporná), pak $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$.

Pozn. Toto tvrzení platí i pro jednostranné limity, pro které se především používá. Symbolicky

$$\frac{a}{0} = \pm\infty$$

DERIVACE

DERIVACE FUNKCE V BODĚ

Nechť funkce f je definována v okolí bodu c . Číslo $f'(c)$, definované vztahem $f'(c) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ se nazývá } \textbf{derivace funkce } f \textbf{ v bodě } c.$$

GEOMETRICKÁ INTERPRETACE DERIVACE

Derivace funkce f v bodě c je rovna směrnici tečny grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$, tj. $f'(c) = \tan \alpha$, kde α je úhel, který svírá tato tečna s kladnou poloosou x .

JEDNOSTRANNÉ DERIVACE FUNKCE F V BODĚ C

Pomocí jednostranných limit definujeme analogicky jednostranné derivace funkce f v bodě c .

Značíme $f'_+(c)$, resp. $f'_-(c)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě c zprava, resp. zleva.

$$\text{Máme tedy } f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \text{ resp. } f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÉ A OBOUSTRANNÉ DERIVACE

Derivace funkce f v bodě c existuje právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě c a jsou si rovny. Pak platí $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.

DERIVACE FUNKCE F

Funkce f' , definovaná předpisem $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se nazývá **derivace funkce** f .

VĚTA O VZTAHU DERIVACE A SPOJITOSTI FUNKCE

Má-li funkce f v bodě c derivaci, pak je v bodě c spojitá.

VĚTA O DERIVACI OPERACÍ A SUPERPOZICE (SLOŽENÉ FUNKCE)

Platí:

$$(a) (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(b) (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(c) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(d) (f[g])' = f'[g] \cdot g'$$

Pokud existuje pravá strana vztahů.

DRUHÁ DERIVACE

Funkce f'' definovaná vztahem $f'' = (f')'$ se nazývá **druhá derivace funkce f** .

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Jestliže limita podílu funkce $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ je typu " $\frac{0}{0}$ " nebo " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ", pak

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pokud limita na pravé straně vztahu existuje.

VZTAH LIMITY FUNKCE A LIMITY POSLOUPNOSTI

Protože reálná posloupnost je speciální příklad reálné funkce jedné reálné proměnné, platí:

Jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, pak existuje i limita posloupnosti $(f(n))$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n).$$

EXTRÉMY FUNKCE

Nechť M je podmnožina definičního oboru funkce f . Jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c **maximum (resp. minimum)** na množině M . Maximum a minimum jsou tzv. extrémů funkce.

LOKÁLNÍ A ABSOLUTNÍ EXTRÉM

Pokud množina M je jen okolí bodu C , hovoříme o tzv. **lokálních extrémech funkce**. Když $M = D(f)$, má funkce f v bodě c **absolutní extrém**.

NUTNÁ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM

Má-li funkce f ve vnitřním bodě $c \in D(f)$ lokální extrém, pak $f'(c) = 0$ nebo $f'(c)$ neexistuje.

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM

Nechť c je vnitřní bod $D(f)$, ve kterém $f'(c) = 0$. Jestliže $f''(c) > 0$ (resp. $f''(c) < 0$) pak funkce f má v bodě c lokální minimum (resp. lokální maximum).

EXTRÉMY NA UZAVŘENÉM INTERVALU

K hledání extrémů spojitě funkce na uzavřeném intervalu používáme dvě věty – Weierstrassovu větu a nutnou podmínku pro lokální extrém.

VĚTA O VÝZNAMU 1. DERIVACE PRO PRŮBĚH FUNKCE

Nechť f je spojitá funkce v intervalu J . Jestliže

$$f'(x) > 0, \text{ resp. } f'(x) < 0 \text{ ve vnitřních bodech } x \in J,$$

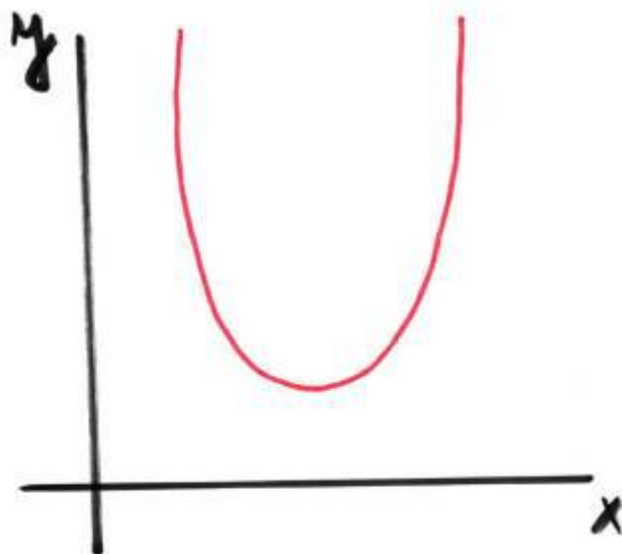
pak funkce f je **rostoucí (resp. klesající)** v intervalu J .

VĚTA O VÝZNAMU 2. DERIVACE PRO PRŮBĚH FUNKCE

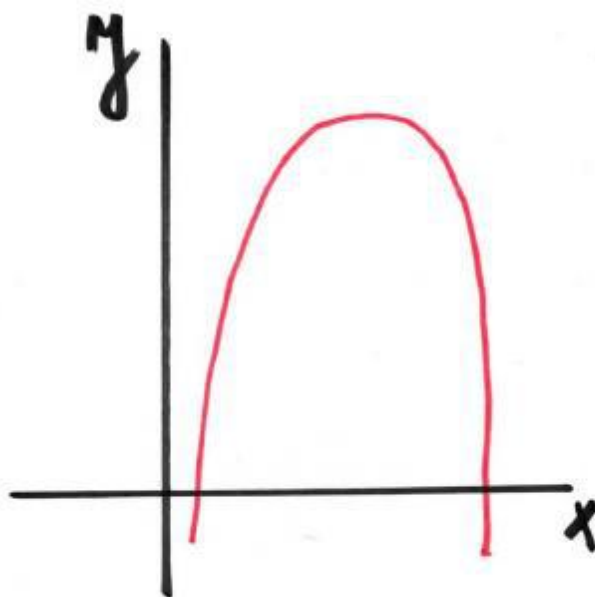
Nechť f je spojitá funkce v intervalu J . Jestliže

$$f''(x) > 0, \text{ resp. } f''(x) < 0 \text{ ve vnitřních bodech } x \in J,$$

pak funkce f je **konvexní (resp. konkávní)** v intervalu J .



Obrázek 3: Graf konvexní funkce



Obrázek 4: Graf konkávní funkce

INFLEXE

Nechť funkce f má v bodě c derivaci. Jestliže se funkce v bodě c mění z konkávní na konvexní nebo naopak, říkáme, že má v bodě c inflexi. Bodu c pak říkáme **inflexní bod** funkce f .

PRŮBĚH FUNKCE

Zjišťujeme:

- (a) Definiční obor funkce
- (b) Spojitost funkce v definičním oboru
- (c) Sudost, lichost, periodičnost funkce
- (d) Nulové body funkce a intervaly, ve které je kladná, resp. záporná
- (e) Intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, resp. klesající a lokální extrém
- (f) Intervaly, ve kterých je funkce konvexní, resp. konkávní a inflexní body
- (g) Limity v krajních bodech definičního oboru

TAYLORŮV POLYNOM (POUZE 4MM106)

Nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n -tého ($n \in \mathbb{N}$). Polynom T_n daný vztahem

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se nazývá **Taylorův polynom funkce f v bodě a** .

VĚTA O LAGRANGEOVĚ TVARU ZBYTKU (POUZE 4MM106)

Má-li funkce f v okolí bodu a derivaci řádu $n+1$, potom existuje číslo c mezi body a a x takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Pozn. Lagrangeův tvar zbytku má stejný tvar jako další člen Taylorova polynomu s tím, že derivace je v bodě c (nikoli v bodě a).

INTEGRÁLY

PRIMITIVNÍ FUNKCE

Funkce F , pro kterou platí

$F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$, se nazývá **primitivní funkce k funkci f** v intervalu J .

Primitivní funkce k funkci f v intervalu J může, ale nemusí existovat. Jednoduchou postačující podmínkou existence primitivní funkce je spojitost funkce.

Jestliže f je elementární funkce a interval $J \subset D(f)$, pak k funkci f v intervalu J existuje primitivní funkce.

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE PRIMITIVNÍ FUNKCE

Jestliže je funkce f spojitá v intervalu J , pak k ní v tomto intervalu existuje primitivní funkce.

MNOŽINA PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

Pokud primitivní funkce k funkci $f(x)$ existuje, tak je jich nekonečně mnoho řešení a všechny se liší aditivní konstantou (integrační konstanta).

Jestliže F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J , pak také každá funkce $G=F+c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je primitivní funkce k funkci f v intervalu J .

NEURČITÝ INTEGRÁL

Libovolnou primitivní funkci k funkci f v intervalu J budeme značit

$$\int f, \text{ resp. } \int f(x)dx \text{ a říkat jí neurčitý integrál funkce } f.$$

Pozn. dx značí, že funkci f integrujeme podle x .

VĚTA O INTEGRACI SOUČTU FUNKCÍ A REÁLNÉHO NÁSOBKU FUNKCE

Jestliže existují integrály $\int f$ a $\int g$ v intervalu J a $k \in \mathbb{R}$, pak při vhodné volbě integračních konstant je

$$\int (f + g) = \int f + \int g \text{ a } \int kf = k \int f$$

VĚTA O INTEGRACI PER PARTES

Jestliže existují derivace f' a g' a integrál $\int f'g$ v intervalu J , pak při vhodné volbě integračních konstant je

$$\int f * g' = f * g - \int f' * g$$

VĚTA O INTEGRACI SUBSTITUCÍ

Jsou-li f, g funkce a $f[g]$ jejich superpozice, pak při vhodné volbě integračních konstant platí

$$\int f[g] * g' = (\int f)[g] \text{ pokud tyto integrály existují.}$$

NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL A JEHO GEOMETRICKÁ INTERPRETACE

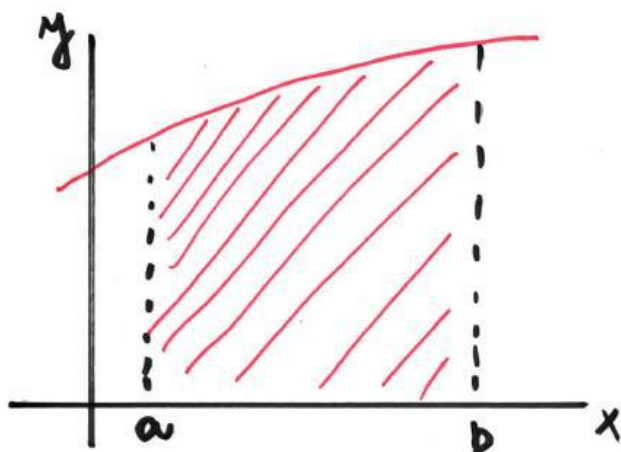
Nechť k funkci f existuje v intervalu $\langle a, b \rangle$ primitivní funkce F . Reálné číslo

$\int_a^b f$, resp. $\int_a^b f(x)dx$, definované vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ se nazývá } \textbf{Newtonův určitý integrál funkce } f \text{ od } a \text{ do } b.$$

GEOMETRICKÁ INTERPRETACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Je-li funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná, pak určitý integrál $\int_a^b f$ je roven obsahu plochy omezené grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a, x = b$



Obrázek 5: Geometrická interpretace určitého integrálu

Pozn. Jestliže funkce f je v intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná (resp. nekladná), pak obsah plochy omezené grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ je $\int_a^b -f = -\int_a^b f$

Určitý integrál $\int_a^b f$ je reálné číslo. Toto číslo nezávisí na volbě primitivní funkce, neboť platí:

Jestliže v definici určitého integrálu použijeme místo primitivní funkce funkce $G=F+c$ dostaneme:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

VĚTA O EXISTENCI URČITÉHO INTEGRÁLU

Pokud k funkci f existuje na intervalu $\langle a, b \rangle$ primitivní funkce, tak existuje určitý integrál.

VĚTA O ADITIVITĚ URČITÉHO INTEGRÁLU

Jestliže existuje integrál $\int_a^b f$ a $c \in (a, b)$, pak platí $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Pozn:

(a) Z geometrické interpretace určitého integrálu plyne, že **pro sudou funkci** f je $\int_0^a f =$

$\int_{-a}^0 f$. Odtud podle věty o aditivitě určitého integrálu platí: Je-li funkce f sudá a existuje integrál $\int_{-a}^a f$, pak $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

(b) Z geometrické interpretace určitého integrálu plyne, že **pro lichou funkci** f je $\int_0^a f =$

$-\int_{-a}^0 f$. Odtud podle věty o aditivitě určitého integrálu platí: Je-li funkce f lichá a existuje integrál $\int_{-a}^a f$, pak $\int_{-a}^a f = 0$

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Nechť funkce f není v bodě a definována (resp. $a = -\infty$) a v intervalu (a, b) k ní existuje primitivní funkce. Integrál $\int_a^b f$, resp. $\int_{-\infty}^b f$, definovaný vztahem

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f, \text{ resp. } \int_{-\infty}^b f = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f,$$

se nazývá **nevlastní integrál funkce f vlivem dolní meze**.

Pozn. Nevlastní integrál f vlivem horní meze (funkce f není v bodě b definována, resp. $b=\infty$)

$$\text{vztahem } \int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f, \text{ resp. } \int_a^\infty f = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f,$$

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Zobrazení $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}^2$, tj. zobrazení podmnožiny \mathbb{R}^2 do množiny reálných čísel, se nazývá **reálná funkce dvou reálných proměnných**.

OKOLÍ BODU V ROVINĚ

Nechť $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$. Kartézský součin otevřených intervalu

$$(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon), \text{ kde } \varepsilon > 0$$

se nazývá **okolí bodu A**.

VNITŘNÍ A HRANIČNÍ BODY

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. Bod $A \in \mathbb{R}^2$ se nazývá

- (a) **Vnitřní bod** množiny M , jestliže existuje jeho okolí, které je podmnožinou M
- (b) **Hraniční bod** množiny M , jestliže v každém jeho okolí je bod, který patří i nepatří do množiny M .

MNOŽINA OTEVŘENÁ, UZAVŘENÁ, OMEZENÁ, KOMPAKTNÍ

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. Množina M se nazývá

- (a) **Otevřená**, jestliže neobsahuje žádný hraniční bod
- (b) **Uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body
- (c) **Omezená**, jestliže je podmnožinou okolí nějakého bodu.
- (d) **Kompaktní**, jestliže je uzavřená a omezená.

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Všechny funkce v kapitole Funkce dvou proměnných jsou elementární. Platí pro ně stejné věty, jako pro elementární funkce jedné proměnné.

VĚTA O SPOJITOSTI ELEMENTÁRNÍ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Každá elementární funkce dvou proměnných je spojitá ve svém definičním oboru.

ZOBECNĚNÁ WEIERSTRASSOVA VĚTA

Funkce (dvou proměnných) spojitá v neprázdné kompaktní množině má na této množině maximum a minimum.

Důležitá pro vyšetřování extrémů funkce dvou proměnných (zaručuje existenci extrémů).

PARCIÁLNÍ DERIVACE

*Nechť f je funkce dvou proměnných. Funkce dvou proměnných $\partial_x f$, resp. $\partial_y f$ definovaná předpisem $\partial_x f(x, y) = f'_1(x)$, resp. $\partial_y f(x, y) = f'_2(y)$ se nazývají **parciální derivace funkce f podle x (resp. y)**. Funkce f_1 (resp. f_2) je zúžení funkce f na funkce jedné proměnné x (resp. y).*

ZÚŽENÍ FUNKCE

Jestliže ve funkci dvou proměnných zvolíme jednu proměnnou pevně (dáme za ni nějaké číslo = konstantu), dostaneme funkci jedné proměnné, které říkáme zúžení funkce.

PARCIÁLNÍ DERIVACE FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH V BODĚ

Nechť f je funkce dvou proměnných, $C = [c_1, c_2]$ je vnitřní bod $D(f)$ a f_1 (resp. f_2) je zúžení funkce f definované předpisem $f_1(x) = f(x, c_2)$, resp. $f_2(y) = f(c_1, y)$. Číslo $\partial_x f(C)$, resp. $\partial_y f(C)$, definované vztahem

$$\partial_x f(C) = f'_1(c_1), \text{ resp. } \partial_y f(C) = f'_2(c_2)$$

*se nazývá **parciální derivace funkce f podle x (resp. y) v bodě C** .*

DRUHÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE

*Nechť f je funkce dvou proměnných. Funkce dvou proměnných $\partial_{xx} f, \partial_{xy} f, \partial_{yx} f, \partial_{yy} f$ definované vztahy $\partial_{xx} f = \partial_x(\partial_x f)$, $\partial_{xy} f = \partial_y f(\partial_x f)$, $\partial_{yx} f = \partial_x f(\partial_y f)$, $\partial_{yy} f = \partial_y f(\partial_y f)$ se nazývají **druhé parciální derivace funkce f** .*

Pozn. Smíšené druhé parciální derivace $\partial_{xy}f$ a $\partial_{yx}f$ jsou stejné. To obecně neplatí, ale pokud jsou všechny druhé parciální derivace funkce f spojité, pak $\partial_{xy}f = \partial_{yx}f$

DERIVACE FUNKCE f V BODĚ C

Nechť f je funkce dvou proměnných, $C=[c_1, c_2]$ je vnitřní bod $D(f)$, f' definovaný vztahem

$$f'(c) = (\partial_x f(C), \partial_y f(C))$$

se nazývá **derivace funkce f v bodě C** .

LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť M je podmnožina definičního oboru funkce dvou proměnných f . Jestliže pro všechna $X = [x, y] \in M$ platí $f(X) \leq f(C)$, resp. $f(X) \geq f(C)$, říkáme, že funkce f má v bodě $C = [c_1, c_2]$ maximum (resp. minimum) na množině M . Maximum a minimum funkce jsou tzv. **extrémy funkce**.

Pozn. Pokud množina M je jen okolí bodu C , hovoříme o tzv. **lokálních extrémech funkce**.

Když $M = D(f)$, má funkce f v bodě C absolutní extrém.

NUTNÁ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Má-li funkce dvou proměnných ve vnitřním bodě $C \in D(f)$ lokální extrém a existuje derivace $f'(C)$, pak $f'(C) = (0, 0)$

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť C je vnitřní bod $D(f)$, ve kterém $f'(C) = (0, 0)$ a funkce dvou proměnných f má v okolí bodu C spojité druhé parciální derivace. Označme

$$D_1 = \partial_{xx}f(C), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \partial_{xx}f(C) & \partial_{xy}f(C) \\ \partial_{yx}f(C) & \partial_{yy}f(C) \end{vmatrix}$$

(a) Jestliže $D_2 > 0$ a $D_1 > 0$, pak funkce f má v bodě C **lokální minimum**.

(b) Jestliže $D_2 > 0$ a $D_1 < 0$, pak funkce f má v bodě C **lokální maximum**.

(c) Jestliže $D_2 < 0$, pak funkce f **nemá v bodě C lokální extrém**.

VÁZANÉ EXTRÉMY PRO FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť f a g jsou funkce dvou proměnných, $M = \{[x, y] \in D(f), g(x, y) = 0\}$. Extrémy funkce f v množině M se nazývají **vázané extrémy**, rovnici $g(x, y) = 0$ říkáme vazební podmínka.

NUTNÁ PODMÍNKA PRO VÁZANÝ EXTRÉM

Má-li funkce dvou proměnných f při vazební podmínce $g(x, y) = 0$ v bodě C vázaný extrém a funkce f, g mají v okolí bodu C spojité parciální derivace, pak $\begin{vmatrix} \partial_x f(C) & \partial_y f(C) \\ \partial_x g(C) & \partial_y g(C) \end{vmatrix} = 0$.

Pozn. Determinant v předchozí větě se nazývá Jacobiho determinant funkcí f, g .

METODA LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ (PRO DVĚ PROMĚNNÉ)

Použití především u funkce tří a více proměnných v situacích, kdy se nedá použít dosazovací metoda ani Jacobián.

Nechť f a g_1, \dots, g_k jsou funkce r proměnných, $k < r$. Vázané extrémy funkce f při vazebních podmínkách $g_1(x_1, \dots, x_r) = 0, \dots, g_r(x_1, \dots, x_r) = 0$ můžeme najít pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů následujícím způsobem:

(1) Vytvoříme Lagrangeovu funkci, která je definovaná vztahem

$L(x_1, \dots, x_r) = f(x_1, \dots, x_r) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_r) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_r)$, kde lambdy jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory.

(2) Podezřelé body z vázaného extrému funkce f najdeme řešením soustavy

$$\partial_1 L(x_1, \dots, x_r) = 0$$

$$\partial_r L(x_1, \dots, x_r) = 0$$

$$g_1(x_1, \dots, x_r) = 0$$

$$g_k(x_1, \dots, x_r) = 0$$

Kde $\partial_i L$ je parciální derivace Lagrangeovy funkce podle x_i ($i = 1, \dots, r$)

(3) Pokud je množina bodů vyhovující vazebním podmínkám kompaktní, dokončíme řešení pomocí zobecněné Weierstrassovy věty, jinak můžeme použít odpovídající postačující podmínku.

VÝPOČET ABSOLUTNÍCH EXTRÉMŮ SPOJITÉ FUNKCE NA KOMPAKTNÍ MNOŽINĚ S VNITŘNÍMI BODY

Extrémy spojitě funkce na neprázdné kompaktní množině existují podle zobecněné Weierstrassovy věty. Postup je následující:

- Najdeme podezřelé body z extrému uvnitř množiny (nutná podmínka pro lokální extrém funkce dvou proměnných)
- Najdeme podezřelé body z extrému na hranici množiny (dosazovací metoda, nutná podmínka pro vázaný extrém, metoda Lagrangeových multiplikátorů)
- Vypočteme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech a vybereme z nich největší a nejmenší.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU

Rovnice pro neznámou funkci y jedné reálné proměnné x , ve které se vyskytují také její derivace $y', y'', \dots, y^{(n)}$ se nazývá **diferenciální rovnice n -tého řádu**.

OBECNÉ A PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

Obecné řešení = všechna řešení diferenciální rovnice

Partikulární řešení = konkrétní řešení vzhledem k počáteční podmínce

POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Z vět o obecném řešení lineární diferenciální rovnice a zkrácené lineární diferenciální rovnice plyne, že (L_n) má nekonečně mnoho řešení. Pro rovnice tohoto typu platí: Jestliže k lineární diferenciální rovnici n -tého řádu přidáme tzv. **počátečních podmínek**, pak řešení této rovnice je jednoznačné.

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU S KONSTATNÍMI KOEFICIENTY

Nechť p_1, \dots, p_n jsou reálná čísla, q je spojitá funkce v otevřeném intervalu J . Rovnice

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

Rovnice $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ je tzv. **zkrácená lineární diferenciální rovnice (Zn)**

VĚTA O OBEČNÉM ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obecné řešení lineární diferenciální rovnice je součet partikulárního řešení této rovnice a obecného řešení odpovídající rovnici zkrácené.

Pozn. Můžeme ji psát jako $\text{Obecné řešení (Ln)} = \text{partikulární řešení (Ln)} + \text{obecné řešení (Zn)}$

VĚTA O OBEČNÉM ŘEŠENÍ ZKRÁCENÉ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obecné řešení zkrácené lineární rovnice n -tého řádu (Zn) je lineární kombinace lineárně nezávislých řešení této rovnice.

ZKRÁCENÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Zkrácená lineární diferenciální rovnice prvního řádu má tvar $y' + py = 0$, tj. $y' = -py$.

Řešením rovnice lze najít ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, kde λ je konstanta. Po dosazení do rovnice $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ dostaneme $e^{\lambda x}(\lambda + p) = 0$. Odtud $\lambda + p = 0$. Tato rovnice se **nazývá charakteristická rovnice diferenciální rovnice**. Rovnice má jediné řešení $\lambda = -p$, takže $y = e^{-px}$. Řešením je tedy $y = c \cdot e^{-px}$.

Pozn. Na kurzu jsme pro tento tvar měli vzoreček $y = c \cdot e^{\lambda x}$. Je to stejné, protože z rovnice $\lambda + p = 0 \rightarrow \lambda = -p$.

x možné počty řešení

ZKRÁCENÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

Zkrácená lineární diferenciální rovnice druhého řádu má tvar $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, tj. $y' = -py$. Řešením rovnice lze najít ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, kde λ je komplexní konstanta. Máme $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$. Po dosazení do rovnice dostaneme $e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0$. Odtud $\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0$. To je **charakteristická rovnice diferenciální rovnice**. Rovnice je kvadratická, protože budeme rozlišovat 3 typy:

- (a) **Diskriminant charakteristické rovnice $D > 0$** – Rovnice má dva reálné kořeny λ_1, λ_2 , takže máme funkce $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

- *Lema: Má-li charakteristická rovnice diferenciální rovnice dva reálné kořeny λ_1, λ_2 , pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

(b) **Diskriminant charakteristické rovnice $D=0$** – Diskriminant má jeden reálný dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = \lambda$, takže funkce $y_1 = e^{\lambda x}$ je řešením rovnice. Dosazením do rovnice dostaneme další řešení $y_2 = x e^{\lambda x}$.

- *Lema: Má-li charakteristická rovnice diferenciální rovnice jeden reálný dvojnásobný kořen λ , pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

(c) **Diskriminant charakteristické rovnice $D<0$** – Rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Dosazením dokážeme, že funkce $y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx$ jsou řešením rovnice.

- *Má-li charakteristická rovnice diferenciální rovnice dva komplexně sdružené kořeny $a \pm ib$, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = e^{ax} \cos bx + e^{ax} \sin bx$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

ŘEŠENÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

K nalezení obecného řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty potřebujeme kromě zkráceného řešení ještě najít partikulární řešení rovnice.

- *Lema: Má-li pravá strana lineární rovnice s konstantními koeficienty tvar $q(x) = e^{\rho x} \cdot P_m(x)$, kde $\rho \in \mathbb{R}$ a P_m je polynom stupně m , pak partikulární řešení se dá najít ve tvaru $y = e^{\rho x} \cdot x^r \cdot (a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0)$ kde r je násobnost čísla ρ jako kořene příslušné charakteristické rovnice.*

ZDROJE

Klůfa, J. (2016). *Matematika pro Vysokou školu ekonomickou*. Praha: Ekopress