DOUČKO Z MATEMATIKY

TEORIE A DEFINICE

MATEMATIKA 4MM101/4MM106

Math with Bětka

ALŽBĚTA KAŠPAROVÁ
AUTORKA MATERIÁLŮ

MNOŽINY, LOGIKA

MNOŽINA

Množinu *chápeme jako souhrn objektů určitých vlastností. Těmito objekty říkáme* ***prvky*** *(elementy, body).*

Zápisem $x \in A$ *označujeme prvek, který patří do množiny A. (čteme – x je prvkem množiny A).*

Prázdná množina *= množina, která neobsahuje žádný prvek.*

VÝROK

Výrok *je tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Pravdivý výrok má hodnotu 1, nepravdivý má hodnotu 0.*

NEGACE, KONJUNKCE, DISJUNKCE, EKVIVALENCE, IMPLIKACE (POUZE 4MM106)

- ***Negaci*** *označujeme symbolem* $\neg\alpha$
- ***Konjunkce*** *výroků* α, β *označujeme* $\alpha \wedge \beta$
- ***Disjunkci*** *výroků* α, β *označujeme* $\alpha \vee \beta$
- ***Implikaci*** *výroků* α, β *označujeme* $\alpha \Rightarrow \beta$ *(čteme: Jestliže platí* α*, pak platí* β*)*
- ***Ekvivalenci*** *výroků* α, β *označujeme* $\alpha \Leftrightarrow \beta$ *(čteme:* α *platí právě tehdy, když platí* β*)*

Tabulky, které ukazují, kdy jsou uvedené výroky pravdivé či nepravdivé v závislosti na pravdivosti výroků:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

TAUTOLOGIE (POUZE 4MM106)

*Výroky, které jsou vždy pravdivé (bez ohledu na pravdivost vstupujících výroků) se nazývá **tautologie.***

PODMNOŽINA

Jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B, říkáme, že množina A je podmnožinou množiny B. Zapisujeme symbolem $A \subset B$ ($\subset$ je tzv. inkluze)

SJEDNOCENÍ, PRŮNIK, ROZDÍL, DISJUNKTIVNÍ MNOŽINA

- ***Sjednocení** množin A,B je množina $A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$*
- ***Průnik** množin A,B je množina $A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$*
- ***Sjednocení** množin A,B je množina $A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$*
- ***Rozdíl** množin A,B je množina $A - B = \{x;\ x \in A \vee x \notin B\}$*
- *Množiny A,B jsou **disjunktivní**, jestliže nemají žádný společné prvek.*

ZOBRAZENÍ MNOŽINY A DO MNOŽINY B

*Podmnožinou f kartézského součinu A x B se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**, jestliže ke každému x z množiny A existuje právě jedno y z množiny B takové, že $[x, y] \in f$. Zobrazení f množiny A do množiny B značíme symbolem $f: A \longrightarrow B$*

DEFINIČNÍ OBOR A OBOR HODNOT

- *Množina A je **definiční obor** zobrazení f, značí se D(f)*
- *Množina $\{f(x);\ x \in A\}$ je **obor** zobrazení f, značí se H(f)*

REÁLNÁ FUNKCE

*Zobrazení f libovolné množiny A do množiny reálných čísel (tj. $f: A \longrightarrow R$) se nazývá **reálná funkce.***

REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

*Zobrazení f podmnožiny reálných čísel do množiny reálných čísel (tj. $f: A \longrightarrow R, kde\ A \subset R$) se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**.*

*Zatímco f budeme značit funkci, tak f(x) budeme značit **funkční hodnotu funkce f v bodě x**.*

REÁLNÁ POSLOUPNOST

*Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel (tj. $a: N \longrightarrow R$) se nazývá **reálná posloupnost**.*

REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

*Zobrazení f: $A \rightarrow R$, kde $A \subset R$, tj. zobrazení podmnožiny reálných čísel do množiny reálných čísel se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**.*

ROSTOUCÍ, KLESAJÍCÍ, NEROSTOUCÍ, NEKLESAJÍCÍ, PROSTÁ, OMEZENÁ SHORA A OMEZENÁ FUNKCE

Funkce f je na množině $M \subset D(f)$:

(1) ***rostoucí**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$*
(2) ***klesající**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$*
(3) ***nerostoucí**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$*
(4) ***neklesající**, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$*
(5) ***prostá,** jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$*
(6) ***omezená shora (resp. zdola),** existuje-li reálná konstanta K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$ (resp. $f(x) \geq K$)*
(7) ***omezená**, existuje-li reálná konstanta K tak, že pro každé $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$*

Pozn. Rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce jsou tzv. ***monotónní.***

SUDÁ, LICHÁ, PERIODICKÁ FUNKCE

Funkce f je na množině $M \subset D(f)$*:*

(1) ***sudá****, jestliže pro každé* $x \in M$ *je* $-x \in M$ *a platí* $f(-x) = f(x)$

(2) ***lichá****, jestliže pro každé* $x \in M$ *je* $-x \in M$ *a platí* $f(-x) = -f(x)$

(3) ***periodická****, jestli existuje kladné číslo p takové, že pro každé* $x \in M$ *je* $x \pm p \in M$ *a platí* $f(x+p) = f(x)$*. Číslo p se nazývá perioda funkce f.*

Pozn. Sudé funkce jsou souměrné podle osy y, liché funkce jsou souměrné podle počátku.

SOUČET, ROZDÍL, SOUČIN A PODÍL FUNKCÍ, SLOŽENÁ FUNKCE

Nechť f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné.

(1) *Funkce f + g definovaná předpisem (f + g)(x) = f(x) + g(x) se nazývá* ***součet funkcí f a g***

(2) *Funkce f – g definovaná předpisem (f – g) (x) = f(x) – g(x) se nazývá* ***rozdíl funkcí f a g***

(3) *Funkce f . g definovaná předpisem (f . g) (x)= f(x) . g(x) se nazývá* ***součin funkcí f a g****.*

(4) *Funkce* $\frac{f}{g}$ *definovaná předpisem* $\frac{f}{g}\,(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *se nazývá* ***podíl funkcí f a g***

(5) *Funkci f [g] definovaná předpisem f [g] (x) = f(g(x)) říkáme* ***složená funkce*** *z vnější funkce f a vnitřní funkce g (superpozice funkcí f a g)*

INVERZNÍ FUNKCE

Pokud je funkce f prostá v D(f), pak k ní existuje ***inverzní funkce*** f^{-1} *definovaná vztahem*

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Platí:

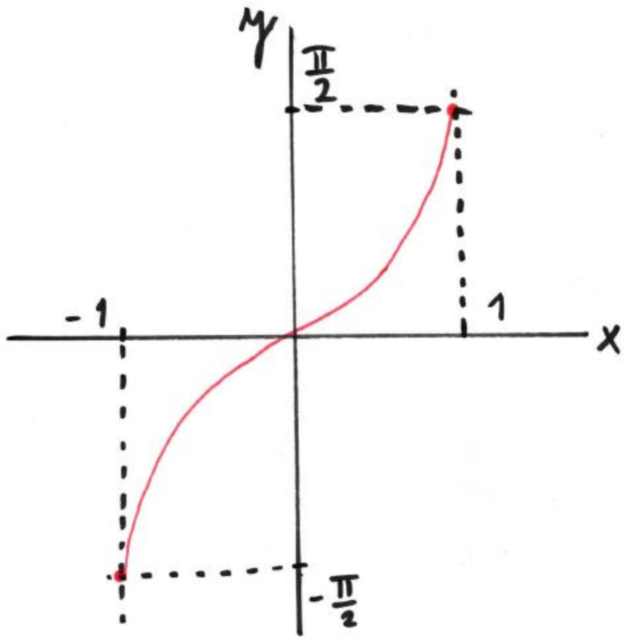
(1) $D(\mathrm{f}^{-1}) = H(f),\ H(\mathrm{f}^{-1}) = D(f)$

(2) *Grafy funkcí f a* f^{-1} *jsou symetrické podle přímky* $y = x$

DEFINICE FUNKCE ARCSINX

Inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ *se nazývá* ***arkussinus****, značí se arcsin.*

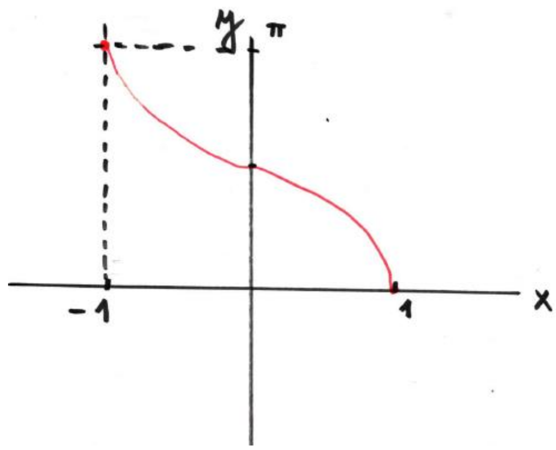
- *Definiční obor funkce:* $D(f) =< -1,1 >$
- *Obor hodnot funkce:* $H(f) =< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$
- *Graf funkce*



DEFINICE FUNKCE ARCCOSX

Inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $< 0, \pi >$ *se nazývá* ***arkuskosinus****, značí se arccos.*

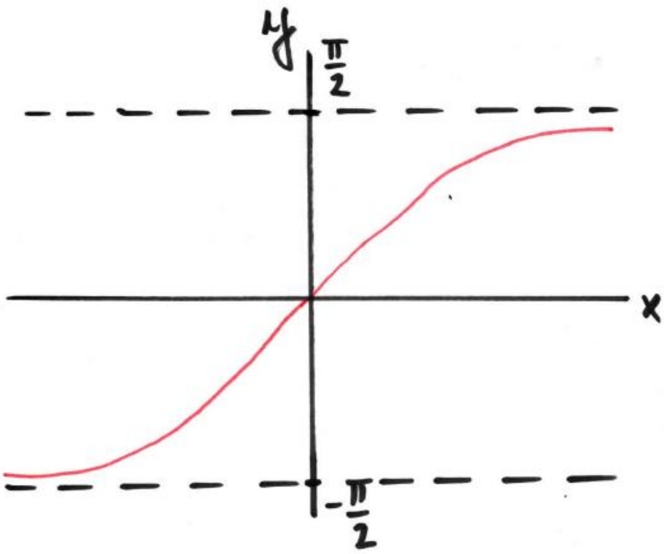
- *Definiční obor funkce:*
  $D(f) =< -1,1 >$
- *Obor hodnot funkce:*
  $H(f) =< 0, \pi >$
- *Graf funkce*



DEFINICE FUNKCE ARCTG X

Inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *se nazývá* ***arkustangens****, značí se arctg.*

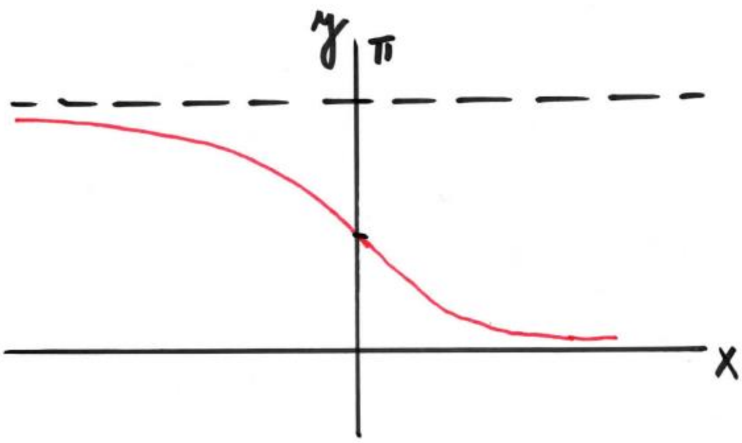
- *Definiční obor funkce:* $D(f) = R$
- *Obor hodnot funkce:* $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- *Graf funkce*



DEFINICE FUNKCE ARCCOTG X

Inverzní funkce k funkci kotangens na intervalu $(0, \pi)$ *se nazývá* ***arkuskotangens****, značí se arccotg.*

- *Definiční obor funkce:* $D(f) = R$
- *Obor hodnot funkce:* $H(f) = (0, \pi)$
- *Graf funkce*



Poznámka: Funkce arcsinx, arccosx, arctgx a arccotgx se nazývají ***cyklometrické funkce****.*

ZÁKLADNÍ FUNKCE

Funkce $c, x, \sqrt[n]{x}, e^x, \ln x$, goniometrické a cyklometrické funkce jsou tzn. ***základní funkce***

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Funkce, které vzniknou ze základních funkcí sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním se nazývají ***elementární funkce****.*

MATICOVÁ ALGEBRA

VEKTOR

Vektory *chápeme jako uspořádané n-tice reálných čísel, které budeme zapisovat ve tvaru $(a_1, \dots, a_n)$*

ROVNOST VEKTORŮ

Vektory $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ z V_n jsou si rovny, jestliže jsou ***si rovny*** *odpovídající souřadnice těchto vektorů, tj.*

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \ (i = 1, \dots n)$$

SOUČET VEKTORŮ

Součet vektorů *$a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ definujeme vztahem*

$$a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

REÁLNÝ NÁSOBEK VEKTORU

Reálný násobek *vektoru $a = (a_1, \dots, a_n)$ definujeme vztahem*

$$ca = (ca_1, \dots, ca_n)$$

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

Říkáme, že vektor x je ***lineární kombinací*** *vektoru $x_1, \dots, x_r$, jestliže existují reálná čísla $c_1, \dots, c_r$ taková, že platí*

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_r x_r.$$

Čísla $c_1, \dots, c_r$ se nazývají ***koeficienty lineární kombinace****. Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule, se nazývá* ***triviální****.*

SKALÁRNÍ SOUČIN

Skalární součin vektorů $x = (x_1, \dots, x_n)$*,* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *je reálné číslo, které je definováno vztahem*

$$xy = x_1 . y_1 + \cdots + x_n . y_n .$$

Vektory a,b jsou tzv. ***ortogonální (kolmé),*** *protože jejich skalární součin je roven 0.*

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

Vektory $x_1, \dots, x_r$ se nazývají ***lineárně závislé****, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj. jestliže existují reálná čísla $c_1, \dots, c_r$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že $c_1 x_1 + \; \dots . + c_r \, x_r = o$. V opačném případě jsou nezávislé.*

NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA LINEÁRNÍ ZÁVISLOSTI VEKTORŮ

Vektory $x_1, \dots . \, x_r$ jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

MATICE

Uspořádané schéma reálných čísel $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$ *se nazývá* ***matice typu m x n****.*

ROVNOST MATIC

Matice A, B typu m x n jsou ***si rovny*** *(značíme A = B), jestliže pro všechny i=1,…,m a j=1,…n je*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

NULOVÁ MATICE

Matice O typu m x n, pro jejíž prvky platí $a_{ij} = 0 \; (i = 1, \dots, m), j = 1, \dots, n)$ *se nazývá* ***nulová matice****.*

ČTVERCOVÁ MATICE

*Matice typu n x n se nazývá **čtvercová matice** řádu n.*

JEDNOTKOVÁ MATICE

Čtvercová matice J řádu n, pro jejíž prvky platí $j_{ik} = 1\ pro\ i = k, \quad j_{ik} = 0\ pro\ i \neq k\ (i = 1, \dots, n); k = 1, \dots, n)$ *se nazývá **jednotková matice řádu n**.*

HODNOST MATICE

*Maximální počet lineárně nezávislých řádku matice A se nazývá **hodnost matice**.*

Pozn. Hodnost matice A budeme značit $h(A)$*. Hodnost nulové matice* $h(O) = 0$*. Jestliže A se nerovná O, pak* $h(A) \in N$*, přičemž platí: Je-li A matice typu m x n, pak*

$$h(A) \leq min\{m, n\}$$

TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

*Matice A typu m x n se nazývá **trojúhelníková,** když* $m \leq n$ *a pro* $i = 1, \dots, m$ *je* $a_{ii} \neq 0$ *a* $a_{ij} = 0$ *pro* $j < i$.

Pozn. Trojúhelníková matice má na hlavní diagonále nenulové prvky a pod hlavní diagonálou samé nuly.

VĚTA O HODNOSTI TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE

Je-li A^{Δ} *trojúhelníková matice typu m x n, pak její hodnost je rovna počtu řádků matice* $A^{\Delta}, tj. h(A^{\Delta}) = m$

VĚTA O ELEMENTÁRNÍCH ŘÁDKOVÝCH ÚPRAVÁCH MATICE

*Hodnost matice se nezmění, pokud v ní uděláme následující tzv. **elementární řádkové úpravy**:*

(1) Zaměníme pořadí řádků matice
(2) Vynásobíme libovolný řádek matice nenulovým reálným číslem
(3) Přičteme k libovolnému řádku matice lineární kombinaci ostatních
(4) Vynecháme řádek matice, který je lineární kombinací ostatních.

TRANSPONOVANÁ MATICE A JEJÍ HODNOST

Matice A´, která vznikne z A tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, se nazývá matice ***transponovaná k matici A****.*

Věta: Jestliže v matici A zaměníme pořadí sloupců, pak takto vzniklá matice má s maticí A stejnou hodnost.

VĚTA O HODNOSTI TRANSPONOVANÉ MATICE

Jsou – li A a A ´navzájem transponované matice, pak hodnost matice A je rovna hodnosti matice A´, tj. h (a)=h (A´).

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ....$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Koeficienty u neznámých $a_{ij}(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ *a pravé strany rovnic* $b_1, \dots ., b_m$ *jsou daná reálná čísla.*

MATICE SOUSTAVY

Matici, jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých, tj. matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots . & , a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots & , a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & , a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se nazývá ***matice soustavy*** *(S)*

ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY

Přidáme-li k matici soustavy navíc sloupec pravých stran rovnice soustavy, dostaneme matici

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}, & a_{12}, \dots . & , a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, \dots & , a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & , a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

Které říkáme ***rozšířená matice soustavy(S)****.*

FROBENIOVA PODMÍNKA

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení tehdy a jen tedy, když hodnost matice soustavy je rovna ***hodnosti rozšířené matice soustavy****.*

VĚTA O POČTU ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Předpokládejme, že soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých. Potom platí:

(a) *Jestliže h=n, pak má soustava (S)* ***právě jedno řešení***

(b) *Jestliže h<n, pak má soustava (S)* ***nekonečně mnoho řešení****, přičemž za n-h neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.*

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Dosadíme-li za volitelné neznámé konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení soustavy, které se nazývá ***partikulární řešení soustavy****.*

ZÁKLADNÍ ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Partikulární řešení soustavy, ve kterém jsou volitelné neznámé rovny nule, se nazývá ***základní řešení soustavy****.*

VĚTA O EKVIVALENTNÍCH SOUSTAVÁCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jestliže v rozšířené matici soustavy (S) uděláme jakékoli elementární řádkové úpravy, dostaneme matici, které odpovídá ekvivalentní soustava lineárních rovnic.

GAUSSOVA A JORDANOVA METODA

Gaussova eliminační metoda *– převedeme soustavu rovnici na trojúhelníkový tvar*

Jordanova eliminační metoda*:*

1. *Rozšířenou matici soustavy převedeme na trojúhelníkový tvar*
2. V trojúhelníkové matici odspodu nulujeme prvky nad hlavní diagonálou
3. *Na hlavní diagonále takto upravené matice vytvoříme jedničky*
4. *Výsledné matici přiřadíme ekvivalentní soustavu, kterou snadno vyřešíme.*

Pozn. Pokud máme řešit soustavu lineárních rovnic pomocí Jordánovy metody a vyjde nekonečně mnoho řešení, pak za volitelné neznámé dáme nuly a získáme tzn. Bazické proměnné.

HOMOGENNÍ SOUSTAVA

V homogenní soustavě jsou všechny pravé strany rovnic rovny nule, tudíž soustava má tvar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

… … … … … … … … … … … … … … ….

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Pozn. Homogenní soustava má vždy řešení.

VĚTA O POČTU ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY

Homogenní že soustava lineárních rovnic (Z) má vždy řešení. Označíme-li h hodnost matice soustavy a n je počet neznámých, potom platí:

(a) *Jestliže h=n, pak má homogenní soustava **jediné řešení** x=(0,…,0).*
(b) *Jestliže h<n, pak má homogenní soustava **nekonečně mnoho řešení**, přičemž za n-h neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.*

SOUČET MATIC

Nechť A, B jsou matice typu m x n. Matice X typu m x n, pro jejíž prvky platí $x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots; n)$ *se nazývá **součet matic A, B** a značí se A+B.*

REÁLNÝ NÁSOBEK MATICE

Nechť A je matice typu m x n, c je reálné číslo. Matice X typu m x n, pro jejíž prvky platí $x_{ij} = ca_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots; n)$ *se nazývá **reálný násobek matice A** a značí se cA.*

SOUČIN MATIC

Nechť A je matice typu m x n, B je matice typu n x p. Matice X typu m x p, pro jejíž prvky $x_{ij} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots; n)$ *platí* $x_{ij} = skalární\ součin\ i - tého\ řádku\ matice\ A\ a\ j - t = ho\ sloupce\ matice\ B.$ *se nazývá **součin matic** A,B a značí se AB.*

Pozn. Násobení matic není komutativní, tj. existují matice A, B *takové, že* $AB \neq BA$.

VĚTA O ASOCIATIVITĚ NÁSOBENÍ MATIC

Pro každé tři matice A typu m x n, B typu n x p a C typu p x q platí

$$A(BC) = (AB)C$$

VĚTA O DISTRIBUTIVITĚ MATICOVÝCH OPERACÍ

(a) *Pro každé tři matice A typu m x n, B typu n x p a C typu n x p platí*

$$A(B + C) = AB + AC$$

(b) *Pro každé tři matice A typu m x n, B typu n x p a C typu n x p platí*

$$(B + C)A = BA + CA$$

REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ MATICE

*Matice A se nazývá **regulární,** jestliže je čtvercová a má lineárně nezávislé řádky. Čtvercová matice, jejíž řádky jsou lineárně závislé, se nazývá **singulární**.*

INVERZNÍ MATICE

*Nechť A je čtvercová matice. Matice X, pro kterou platí AX = J se nazývá **inverzní matice k matici A**.*

VĚTA O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI INVERZNÍ MATICE

Inverzní matice k matici A existuje tehdy a jen tedy, když A je regulární. Je-li A regulární matice, pak inverzní matice k matici A je určena jednoznačně.

VĚTA O NAVZÁJEM INVERZNÍCH MATICÍCH

Je-li A regulární matice, pak matice k ní inverzní A^{-1} je opět regulární a platí $(A^{-1})^{-1} = A$.

MATICOVÉ ROVNICE

- *Jestliže A je regulární matice řádu n, B je libovolná matice typu n x p, pak maticové rovnice AX=B má právě jedno řešení* $X = A^{-1}B$.
- *Jestliže A je regulární matice řádu n, B je libovolná matice typu n x p, pak maticové rovnice XA=B má právě jedno řešení* $X = BA^{-1}$.

VĚTA O MATICOVÉM ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Jestliže matice A je regulární, pak soustava lineárních rovnic Ax=b má právě jedno řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

DETERMINANT

***Determinant** je reálné číslo, které je jednoznačně přiřazeno každé čtvercové matici.*

Determinant čtvercové matice A řádu n budeme značit det A nebo zapisovat ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots. & , a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots & , a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & , a_{nn} \end{vmatrix}$$

DETERMINANT PRVNÍHO ŘÁDU

***Determinant prvního řádu** je definován vztahem* $|a_{11}| = a_{11}$

DEFINICE DETERMINANTU 2. A 3. ŘÁDU

***Determinant druhého řádu –** Je definován vztahem* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$

Pozn. Od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále

Determinant třetího řádu *– Je definován vztahem* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} * a_{33} +$

$a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{21} * a_{32} * a_{13} - (a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{23} * a_{32} * a_{11})$

VÝPOČET DETERMINANTŮ VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Determinant čtvrtého a vyššího řádu se dají počítat rozvojem nebo převodem na trojúhelníkový tvar matice.

VĚTA O ROZVOJI DETERMINANTU

Jestliže A je čtvercová matice řádu n, pak pro i=1,…,n platí:

$det\ A = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}, kde\ M_{ij}$ *je subdeterminant, který vznikne z determinant matice A po vynechání i-tého řádku a j-tého sloupce.*

VĚTA O DETERMINANTU TRANSPONOVANÉ MATICE

Jsou-li A a A´navzájem transponované čtvercové matice, pak det A = det A´.

VĚTA O ŘADOVÝCH ÚPRAVÁCH DETERMINANTU

Pro řadové úpravy determinantu platí:

(a) Násobíme- li libovolnou řadu determinantu číslem c, potom se číslem c násobí celý determinant.
(b) Vyměníme – li navzájem v determinantu dvě rovnoběžné řady, pak determinant změní znaménko.
(c) Přičteme-li k některé řadě determinantu libovolnou lineární kombinaci řad s ní rovnoběžných, pak se hodnota determinantu nezmění.

VĚTA O DETERMINANTU TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE

Je-li čtvercová matice A trojúhelníková, pak její determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

VĚTA O DETERMINANTU REGULÁRNÍ MATICE

Čtvercová matice A je regulární tehdy a jen tehdy, když její determinant je různý od nuly.

Pozn. Matice A je singulární tehdy a jen tehdy, když její determinant je roven nule.

CRAMEROVO PRAVIDLO

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$*Jestliže matice soustavy A je regulární, pak má soustava právě jedno řešení, které se dá zapsat ve tvaru*

$$x_j = \frac{det\ A_j}{det\ A} \quad (j = 1, \dots, n),$$

kde A_j *je matice, která vznikne z matice soustavy A po náhradě j-tého sloupce sloupcem pravých stran rovnic soustavy.*

CHARAKTERISTICKÁ (VLASTNÍ) ČÍSLA MATICE

Nechť A je čtvercová matice. Komplexní číslo λ *vyhovující rovnici*

$$det(A - \lambda J) = 0$$

se nazývá ***charakteristické (vlastní) číslo*** *matice A. Rovnice* $det(A - \lambda J) = 0$ *se nazývá* ***charakteristická rovnice*** *matice A.*

VĚTA O CHARAKTERISTICKÝCH ČÍSLECH SYMETRICKÉ MATICE

Je-li A čtvercová symetrická matice, pak všechna její charakteristická čísla jsou reálná.

LIMITY

REÁLNÁ POSLOUPNOST

Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel (tj. $a: N \longrightarrow R$*) se nazývá* ***reálná posloupnost****.*

ZOBECNĚNÁ REÁLNÁ ČÍSLA

Množina $R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ *se nazývá* ***rozšířená číselná osa****, prvky množiny* R^* *se nazývají* ***zobecněná reálná čísla****, prvky* $\pm\infty$ *jsou tzv. nevlastní body.*

Definujeme na množině zobecněných reálných čísel R^*

ROSTOUCÍ, KLESAJÍCÍ, NEROSTOUCÍ A NEKLESAJÍCÍ POSLOUPNOST

Nechť (a_n) je reálná posloupnost.

(a) *Říkáme, že posloupnost (a_n) je **rostoucí,** jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$*

(b) *Říkáme, že posloupnost (a_n) je **klesající**, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$*

(c) *Říkáme, že posloupnost (a_n) je **neklesající,** jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$*

(d) *Říkáme, že posloupnost (a_n) je **nerostoucí,** jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$*

DEFINOVANÉ VÝRAZY

Na množině zobecněných reálných čísel R^* definujeme

(a) $-\infty < a < +\infty$ *pro každé* $a \in R$

(b) $a + \infty = +\infty + a = \infty$ *pro každé* $a > -\infty$

(c) $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ *pro každé* $a < +\infty$

(d) $a.(\pm\infty) = (\pm\infty).a$

- $\pm\infty$ *pro* $a > 0$
- $\mp\infty$ *pro* $a < 0$

(e) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro každé $a \in R$

NEDEFINOVANÉ VÝRAZY

Nedefinované výrazy:

- $\infty - \infty$
- $0.\pm\infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{a}{0}, kde\ a \in R^*$

OKOLÍ BODU

(a) ***Otevřený interval*** $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$*, kde* $\varepsilon > 0$*, se nazývá okolí bodu* $a \in R$

(b) *Interval* $(\lambda, +\infty), kde\ \lambda \in R,$ *se nazývá **okolí bodu*** $+\infty$

(c) *Interval* $(-\infty, \lambda), kde\ \lambda \in R,$ *se nazývá **okolí bodu*** $-\infty$

POSLOUPNOST

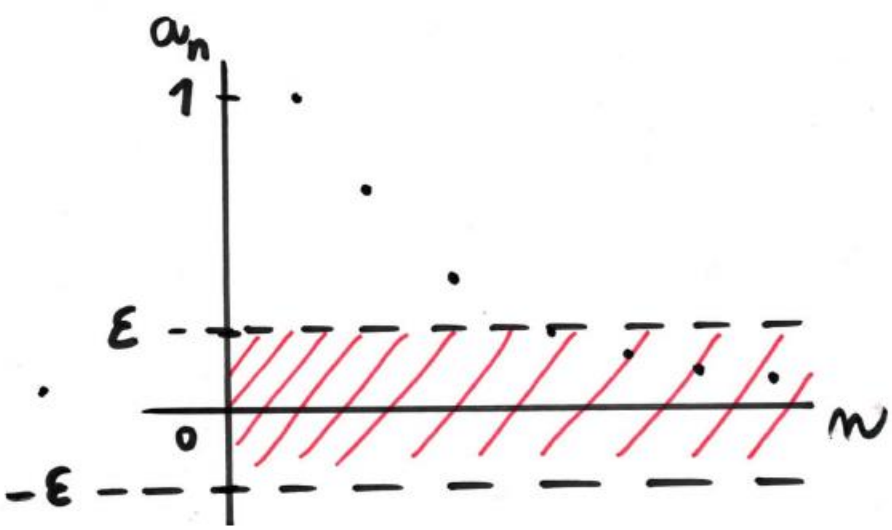
*Zobrazení množiny přirozených čísel N do množiny reálných čísel R se nazývá **reálná posloupnost**.*

VYBRANÁ POSLOUPNOST

*Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel (indexů). Pak posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti (a_n).*

LIMITA POSLOUPNOSTI

Říkáme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in R^*$, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti a_n od jistého indexu n_0 počínaje.



Obrázek 1: Limita posloupnosti lim 1/n=0

Pozn.

- Pokud $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$, říkáme, že posloupnost (a_n) má **vlastní limitu**
- Pokud $\mathrm{a} = \pm\infty$, říkáme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu**

VĚTA O JEDNOZNAČNOSTI LIMITY

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

+ věta o lim typu $\frac{a}{0}$

VĚTA O LIMITĚ KONSTANTNÍ

Je-li (a_n) ***konstatní posloupnost****, tj.* $a_n = a$ *pro* $n \in N$*, pak existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

VĚTA O LIMITĚ VYBRANÉ POSLOUPNOSTI

Jestliže posloupnost (a_n) *má limitu, pak každé posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu.*

VĚTA O LIMITĚ ARITMETICKÝCH OPERACÍ

Nechť (a_n) *a* (b_n) *jsou reálné posloupnosti. Pak platí*

(a) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

(b) $\lim(a_n * b_n) = \lim a_n * \lim b_n$

(c) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

Pokud existují $\lim a_n, \lim b_n$ *a operace na pravé straně vztahů jsou definovány.*

VĚTA O LIMITĚ SEVŘENÉ POSLOUPNOSTI

Nechť $(a_n), (b_n), (c_n)$ *jsou reálné posloupnosti. Jestliže od jistého indexu* n_0 *počínaje* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *a* $\lim a_n = \lim c_n$ *pak existuje* $\lim b_n$ *a platí* $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$.

SPOJITOST FUNKCE

Nechť funkce f je definována v okolí bodu c. Říkáme, že ***funkce f je spojitá*** *v bodě c, jestliže pro každou posloupnost* (x_n) *obsaženou v D(f) platé: když* $x_n \to c$*, pak* $f(x_n) \to f(c)$

JEDNOSTRANNÁ SPOJITOST

Pokud definici spojitosti omezíme jen na posloupnost (x_n)*, které konvergují k bodu c zprava* $(x_n \geq c \text{ pro } n \in N)$*, resp. zleva* $(x_n \leq c \text{ pro } n \in N)$*, definuje tzv.* ***jednostrannou spojitost funkce****.*

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÉ A OBOUSTRANNÉ SPOJITOSTI

Funkce f je spojitá v bodě c, právě když je v bodě c spojitá zleva i zprava.

SPOJITOST V INTERVALU J

*Říkáme, že funkce f je **spojitá v intervalu** J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu J a v krajních bodech (pokud patří do intervalu) je spojitá zprava, resp. zleva.*

SPOJITOST ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

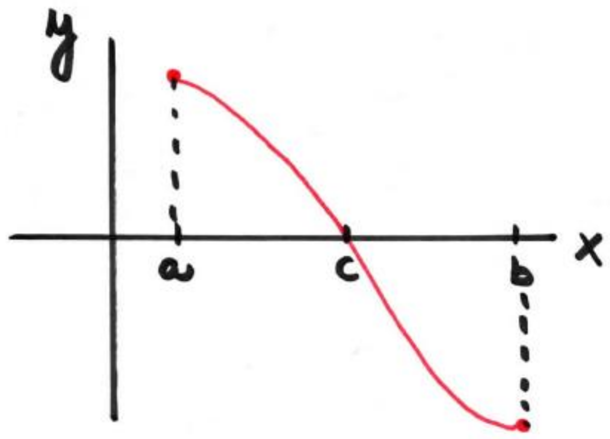
Každá elementární funkce je spojitá v libovolném intervalu, na kterém je definována.

WEIERSTRASSOVA VĚTA

Funkce spojitá v uzavřeném intervalu <a,b> má v tomto intervalu maximum i minimum.

BOLZANOVA VĚTA

*Je-li funkce f spojitá v intervalu <a,b> a f(a)*f(b)<0, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že f(c)=0.*



Obrázek 2: Bolzanova věta

PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU C

Okolí bodu $c \in R^*$, ve kterém vynecháme bod c, se nazývá prstencové okolí bodu c.

LIMITA FUNKCE

*Nechť funkce f je definována v prstencovém okolí bodu $c \in R^*$. Říkáme, že **funkce f má v bodě v bodě c limitu** $a \in R^*$, jestliže pro každou posloupnost (x_n) obsaženou v D(f)-c platí: když $x_n \to c$, pak $f(x_n) \to a$.*

JEDNOSTRANNÉ LIMITY FUNKCE F V BODĚ

Analogicky jako jednostrannou spojitost definujeme jednostranné limity funkce. Limitu funkce f v bodě c zprava (resp. zleva) značíme $\lim_{x\to c+} f(x)\ resp.\ \lim_{x\to c-} f(x)$.

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÝCH LIMIT A OBOUSTRANNÉ LIMITY

Limita funkce f v bodě $c \in R$ *existuje právě když existují obě jednostranné limity funkce f v bodě c a jsou si rovny. Pak platí z* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x)\ resp.\ \lim_{x\to c-} f(x)$.

VĚTA O VZTAHU SPOJITOSTI A LIMITY FUNKCE

Funkce f j v bodě c spojitá právě když $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

VĚTA O JEDNOZNAČNOSTI LIMITY FUNKCE

Funkce f má v bodě c nejvýše jednu limitu.

VĚTA O LIMITĚ SLOŽENÉ FUNKCE

Nechť f [g] je ***složená funkce*** *z vnější funkce f a vnitřní g. Jestliže* $\lim_{x\to c} g(x) = d$ *a vnější funkce f má v bodě d limitu, pak* $\lim_{x\to f} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to d} f(y)$*,pokud existuje levá strana.*

VĚTA O LIMITĚ ARITMETICKÝCH OPERACÍ FUNKCE

Nechť f a g jsou funkce jedné proměnné. Pak platí

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) \pm\ g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm\ \lim_{x\to c} g(x)$

(b) $\lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x)$

(c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

Pokud existují $\lim_{x\to c} f(x)$ *,* $\lim_{x\to c} g(x)$ *a operace na pravé straně vztahů jsou definovány.*

VĚTA O LIMITĚ SEVŘENÉ FUNKCE

Nechť f, g a h jsou funkce jedné proměnné, $c \in R^*$*. Jestliže v prstencovém okolí bodu c je*

$$f(x) \le g(x) \le h(x)\ a\ \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$$

Pak existuje $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ a platí

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x)$$

VĚTA O LIMITĚ FUNKCE TYPU A/0

Jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ je typu "$\frac{a}{0}$", kde $a \neq 0$ a funkce f je v prstencovém okolí bodu c kladná (resp. záporná), pak $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Pozn. Toto tvrzení platí i pro jednostranné limity, pro které se především používá. Symbolicky $\frac{a}{0} = \pm\infty$

DERIVACE

DERIVACE FUNKCE V BODĚ

*Nechť funkce f je definována v okolí bodu c. Číslo $f'(c)$, definované vztahem $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ se nazývá **derivace funkce f v bodě c**.h*

GEOMETRICKÁ INTERPRETACE DERIVACE

Derivace funkce f v bodě c je rovna směrnici tečny grafu funkce f v bodě [c,f(c)], tj. f´(c)= $\mathrm{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá tato tečna s kladnou poloosou x.

JEDNOSTRANNÉ DERIVACE FUNKCE F V BODĚ C

Pomocí jednostranných limit definujeme analogicky jednostranné derivace funkce f v bodě c. Značíme $f'_+(c), resp. f'_-(c)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě c zprava, resp. zleva.

Máme tedy $f'_+(c) = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, resp. $f'_-(c) = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

VĚTA O VZTAHU JEDNOSTRANNÉ A OBOUSTRANNÉ DERIVACE

Derivace funkce f v bodě c existuje právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě c a jsou si rovny. Pak platí $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.

DERIVACE FUNKCE F

*Funkce f´, definovaná předpisem $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se nazývá **derivace funkce f**.*

VĚTA O VZTAHU DERIVACE A SPOJITOSTI FUNKCE

Má-li funkce f v bodě c derivaci, pak je v bodě c spojitá.

VĚTA O DERIVACI OPERACÍ A SUPERPOZICE (SLOŽENÉ FUNKCE)

Platí:

(a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(b) $(f.g)' = f'g + fg'$

(c) $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

(d) $(f[g])' = f'[g].g'$

Pokud existuje pravá strana vztahů.

DRUHÁ DERIVACE

Funkce f´´ definovaná vztahem f´´=(f´)´ se nazývá ***druhá derivace funkce f.***

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Jestliže limita podílu funkce $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *je typu* "$\frac{0}{0}$" *nebo* "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", *pak*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pokud limita na pravé straně vztahu existuje.

VZTAH LIMITY FUNKCE A LIMITY POSLOUPNOSTI

Protože reálná posloupnosti je speciální příklad reálné funkce jedné reálné proměnné, platí:

Jestliže existuje $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, *pak existuje i limita posloupnosti* $(f(n))$ *a platí*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

EXTRÉMY FUNKCE

Nechť M je podmnožina definičního oboru funkce f. Jestliže pro všechna $x \in M$ *platí* $f(x) \leq f(c)$, *resp.* $f(x) \geq f(x)$, *říkáme, že funkce f má v bodě c* ***maximum (resp. minimum)*** *na množině M. Maximum a minimum jsou tzv. extrémy funkce.*

LOKÁLNÍ A ABSOLUTNÍ EXTRÉM

Pokud množina M je jen okolí bodu C, hovoříme o tzv. ***lokálních extrémech funkce****. Když M = D(f), má funkce f v bodě c absolutní extrém.*

NUTNÁ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM

Má-li funkce f ve vnitřním bodě $c \in D(f)$ *lokální extrém, pak* $f'(c) = 0$ *nebo* $f'(c)$ *neexistuje.*

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM

Nechť c je vnitřní bod D(f), ve kterém f´(c)= 0. Jestliže $f''(c) > 0$ $(resp. f''(c) < 0)$ *pak funkce f má v bodě c lokální minimum (resp. lokální maximum).*

EXTRÉMY NA UZAVŘENÉM INTERVALU

K hledání extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu používáme dvě věty – Weierstrassovu větu a nutnou podmínku pro lokální extrém.

VĚTA O VÝZNAMU 1. DERIVACE PRO PRŮBĚH FUNKCE

Nechť f je spojitá funkce v intervalu J. Jestliže

$$f'(x) > 0, resp. f'(x) < 0 \text{ ve vnitřních bodech } x \in J,$$

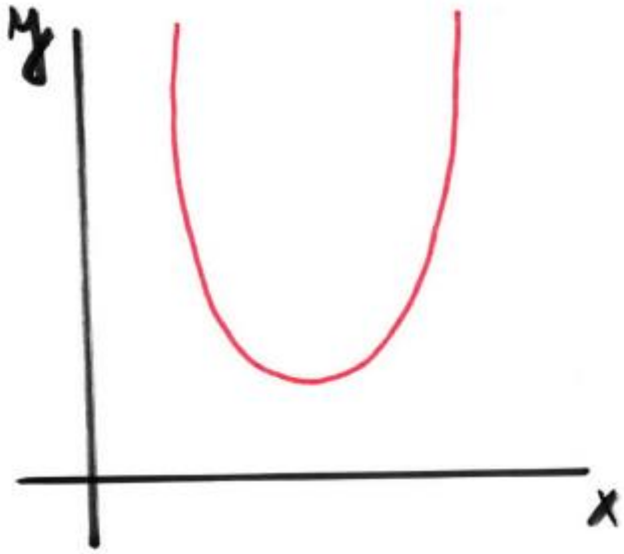
pak funkce f je ***rostoucí (resp. klesající)*** *v intervalu J.*

VĚTA O VÝZNAMU 2. DERIVACE PRO PRŮBĚH FUNKCE

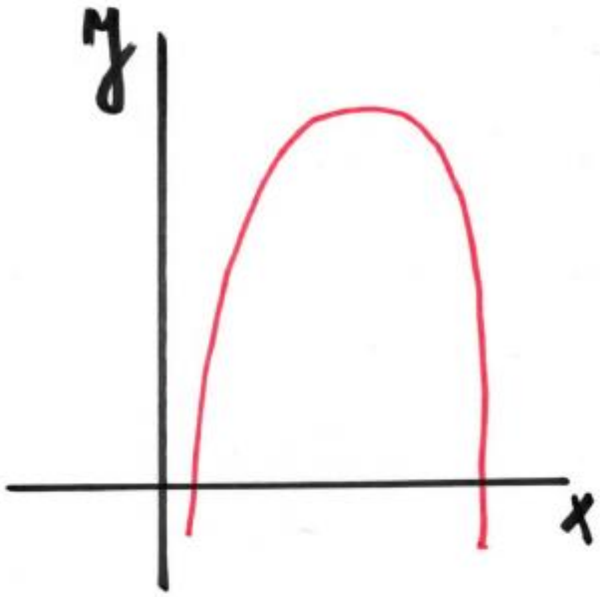
Nechť f je spojitá funkce v intervalu J. Jestliže

$$f''(x) > 0, resp. f''(x) < 0 \text{ ve vnitřních bodech } x \in J,$$

pak funkce f je ***konvexní (resp. konkávní)*** *v intervalu J.*



Obrázek 3: Graf konvexní funkce



Obrázek 4: Graf konkávní funkce

INFLEXE

*Nechť funkce f má v bodě c derivaci. Jestliže se funkce v bodě c mění z konkávní na konvexní nebo naopak, říkáme, že má v bodě c inflexi. Bodu c pak říkáme **inflexní bod** funkce f.*

PRŮBĚH FUNKCE

Zjišťujeme:

(a) Definiční obor funkce

(b) Spojitost funkce v definičním oboru

(c) Sudost, lichost, periodičnost funkce

(d) Nulové body funkce a intervaly, ve které je kladná, resp. záporná

(e) Intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, resp. klesající a lokální extrém

(f) Intervaly, ve kterých je funkce konvexní, resp. konkávní a inflexní body

(g) Limity v krajních bodech definičního oboru

TAYLORŮV POLYNOM (POUZE 4MM106)

Nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n-tého ($n \in N$)*. Polynom* T_n *daný vztahem*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se nazývá ***Taylorův polynom funkce f v bodě a****.*

VĚTA O LAGRANGEOVĚ TVARU ZBYTKU (POUZE 4MM106)

Má-li funkce f v okolí bodu a derivaci řádu n+1, potom existuje číslo c mezi body a a x takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Pozn. Lagrangeův tvar zbytku má stejný tvar jako další člen Taylorova polynomu s tím, že derivace je v bodě c (nikoli v bodě a).

INTEGRÁLY

PRIMITIVNÍ FUNKCE

Funkce F, pro kterou platí

$F'(x) = f(x)$ *pro všechna* $x \in J$*, se nazývá* ***primitivní funkce k funkci f*** *v intervalu J.*

Primitivní funkce k funkci f v intervalu J může, ale nemusí existovat. Jednoduchou postačující podmínkou existence primitivní funkce je spojitost funkce.

Jestliže f je elementární funkce a interval $J \subset D(f)$*, pak k funkci f v intervalu J existuje primitivní funkce.*

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE PRIMITIVNÍ FUNKCE

Jestliže je funkce f spojitá v intervalu J, pak k ní v tomto intervalu existuje primitivní funkce.

MNOŽINA PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

Pokud primitivní funkce k funkci f (x) existuje, tak je jich nekonečně mnoho řešení a všechny se lidí aditivní konstantou (integrační konstanta).

Jestliže F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J, pak také každá funkce G=F+c, kde $c \in R$*, je primitivní funkce k funkci f v intervalu J.*

NEURČITÝ INTEGRÁL

Libovolnou primitivní funkci k funkci f v intervalu J budeme značit

$\int f \text{, } resp. \int f(x)dx$ *a říkat jí neurčitý integrál funkce f.*

Pozn. dx značí, že funkci f integrujeme podle x.

VĚTA O INTEGRACI SOUČTU FUNKCÍ A REÁLNÉHO NÁSOBKU FUNKCE

Jestliže existují integrály $\int f \; a \; \int g$ *v intervalu J a* $k \in R$*, pak při vhodné volbě integračních konstant je*

$$\int(f+g) = \int f + \int g \text{ a } \int kf = k\int f$$

VĚTA O INTEGRACI PER PARTES

Jestliže existují derivace f' *a* g' *a integrál* $\int f'g$ *v intervalu J, pak při vhodné volbě integračních konstant je*

$$\int f * g' = f * g - \int f' * g$$

VĚTA O INTEGRACI SUBSTITUCÍ

Jsou-li f, g funkce a $f[g]$ *jejich superpozice, pak při vhodné volbě integračních konstant platí*

$\int f[g] * g' = (\int f)[g]$ *pokud tyto integrály existují.*

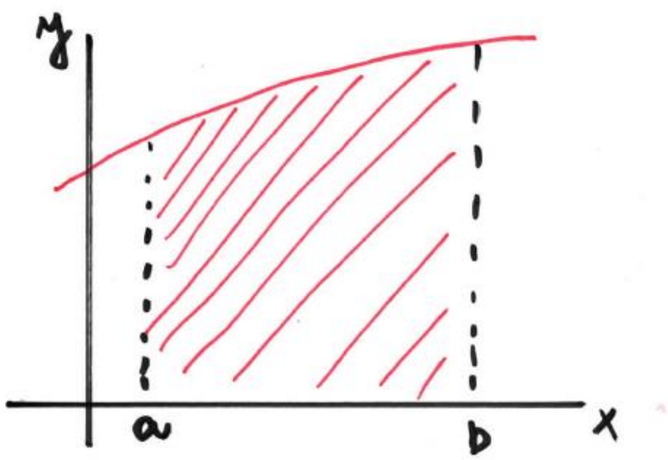
NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL A JEHO GEOMETRICKÁ INTERPRETACE

Nechť k funkci f existuje v intervalu <a,b> primitivní funkce F. Reálné číslo $\int_a^b f$ *, resp.* $\int_a^b f(x)dx$*, definované vztahem*

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$*, se nazývá* ***Newtonův určitý integrál funkce f od a do b****.*

GEOMETRICKÁ INTERPRETACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Je-li funkce f v intervalu <a,b> spojitá a nezáporná, pak určitý integrál $\int_a^b f$ *je roven obsahu plochy omezené grafem funkce f, osou x a přímkami* $x = a, x = b$



Obrázek 5: Geometrická interpretace určitého integrálu

Pozn. Jestliže funkce f je v intervalu <a,b> záporná (resp. nekladná), pak obsah plochy omezené grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a, x = b$ *je* $\int_a^b -f = -\int_a^b f$

Určitý integrál $\int_a^b f$ *je reálné číslo. Toto číslo nezávisí na volbě primitivní funkce, neboť platí: Jestliže v definici určitého integrálu použijeme místo primitivní funkce funkce G=F+c dostaneme:*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

VĚTA O EXISTENCI URČITÉHO INTEGRÁLU

Pokud k funkci f existuje na intervalu <a,b> primitivní funkce, tak existuje určitý integrál.

VĚTA O ADITIVITĚ URČITÉHO INTEGRÁLU

Jestliže existuje integrál $\int_a^b f$ a $c \in (a, b)$*,pak platí* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Pozn:

(a) *Z geometrické interpretace určitého integrálu plyne, že* ***pro sudou funkci*** *f je* $\int_0^a f = \int_{-a}^0 f$. *Odtud podle věty o aditivitě určitého integrálu platí: Je-li funkce f sudá a existuje integrál* $\int_{-a}^a f$*, pak* $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

(b) *Z geometrické interpretace určitého integrálu plyne, že* ***pro lichou funkci*** *f je* $\int_0^a f = -\int_{-a}^0 f$. *Odtud podle věty o aditivitě určitého integrálu platí: Je-li funkce f lichá a existuje integrál* $\int_{-a}^a f$*, pak* $\int_{-a}^a f = 0$

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Nechť funkce f není v bodě a definována (resp. a = $-\infty$*) a v intervalu (a,b> k ní existuje primitivní funkce. Integrál* $\int_a^b f$ *,resp.* $\int_{-\infty}^b f$*, definovaný vztahem*

$$\int_a^b f = \lim_{c\to a+}\int_c^b f\,,resp.\int_{-\infty}^b f = \lim_{c\to -\infty}\int_c^b f\,,$$

se nazývá ***nevlastní integrál funkce f vlivem dolní meze****.*

Pozn. Nevlastní integrál f vlivem horní meze (funkce f není v bodě b definována, resp. b=∞)

vztahem $\int_a^b f = \lim\limits_{c \to b-} \int_a^c f\ , resp. \int_a^\infty f = \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f\ ,$

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Zobrazení f: $A \to R$*, kde* $A \subset R^2$*, tj. zobrazení podmnožiny* R^2 *do množiny reálných čísel, se nazývá* ***reálná funkce dvou reálných proměnných.***

OKOLÍ BODU V ROVINĚ

Nechť $A = [a_1, a_2] \in R^2$*. Kartézský součin otevřených intervalu*

$$(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon)\ x\ (\ a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon), kde\ \varepsilon > 0$$

se nazývá ***okolí bodu A****.*

VNITŘNÍ A HRANIČNÍ BODY

Nechť $M \subset\ R^2$*. Bod* $A \in\ R^2$ *se nazývá*

(a) ***Vnitřní bod*** *množiny M, jestliže existuje jeho okolí, které je podmnožinou M*

(b) ***Hraniční bod*** *množiny M, jestliže v každém jeho okolí je bod, který patří i nepatří do množiny M.*

MNOŽINA OTEVŘENÁ, UZAVŘENÁ, OMEZENÁ, KOMPAKTNÍ

Nechť $M \subset\ R^2$*. Množina M se nazývá*

(a) ***Otevřená****, jestliže neobsahuje žádný hraniční bod*

(b) ***Uzavřená****, jestliže obsahuje všechny své hraniční body*

(c) ***Omezená****, jestliže je podmnožinou okolí nějakého bodu.*

(d) ***Kompaktní****, jestliže je uzavřená a omezená.*

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Všechny funkce v kapitole Funkce dvou proměnných jsou elementární. Platí pro ně stejné věty, jako pro elementární funkce jedné proměnné.

VĚTA O SPOJITOSTI ELEMENTÁRNÍ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Každá elementární funkce dvou proměnných je spojitá ve svém definičním oboru.

ZOBECNĚNÁ WEIERSTRASSOVA VĚTA

Funkce (dvou proměnných) spojitá v neprázdné kompaktní množině má na této množině maximum a minimum.

Důležitá pro vyšetřování extrémů funkce dvou proměnných (zaručuje existenci extrémů).

PARCIÁLNÍ DERIVACE

Nechť f je funkce dvou proměnných. Funkce dvou proměnných $\partial_x f$,resp. $\partial_y f$ definovaná předpisem $\partial_x f(x,y) = f'_1(x), resp. \partial_y f(x,y) = f'_2(y)$ se nazývají ***parciální derivace funkce f podle x (resp. y)****. Funkce f_1 $(resp. f_2)$ je zúžení funkce f na funkce jedné proměnné x (resp. y).*

ZÚŽENÍ FUNKCE

Jestliže ve funkci dvou proměnných zvolíme jednu proměnnou pevně (dáme za ni nějaké číslo = konstantu), dostaneme funkci jedné proměnné, které říkáme zúžení funkce.

PARCIÁLNÍ DERIVACE FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH V BODĚ

Nechť f je funkce dvou proměnných, $C = [c_1, c_2]$ je vnitřní bod D(f) a f_1 $(resp. f_2)$ je zúžení funkce f definované předpisem $f_1(x) = f(x, c_2), resp. f_2(y) = f(c_2, y)$. Číslo $\partial_x f(C), resp. \partial_y f(C)$, definované vztahem

$$\partial_x f(C) = f_1'(c_1), resp. \partial_y f(C) = f_2'(c_2)$$

se nazývá ***parciální derivace funkce f podle x (resp. y) v bodě C.***

DRUHÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE

Nechť f je funkce dvou proměnných. Funkce dvou proměnných $\partial_{xx} f, \partial_{xy} f, \partial_{yx} f, \partial_{yy} f$ definované vztahy $\partial_{xx} f = \partial_x(\partial_x f), \partial_{xy} f = \partial_y f(\partial_x f), \ \partial_{yx} f = \partial_x f\left(\partial_y f\right), \partial_{yy} f = \partial_y f(\partial_y f)$ se nazývají ***druhé parciální derivace funkce f****.*

Pozn. Smíšené druhé parciální derivace $\partial_{xy} f$ a $\partial_{yx} f$ jsou stejné. To obecně neplatí, ale pokud jsou všechny druhé parciální derivace funkce f spojité, pak $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$

DERIVACE FUNKCE F V BODĚ C

Nechť f je funkce dvou proměnných, C=[c1,c2] je vnitřní bod D(f), f´© definovaný vztahem

$$f'(c) = (\partial_x f(C), \partial_y f(c))$$

*se nazývá **derivace funkce f v bodě C.***

LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

*Nechť M je podmnožina definičního oboru funkce dvou proměnných f. Jestliže pro všechna $X = [x, y] \in M$ platí $f(X) \leq f(C), resp. f(X) \geq f(C)$, říkáme, že funkce f má v bodě $C = [c_1, c_2]$ maximum (resp. minimum) na množině M. Maximum a minimum funkce jsou tzv. **extrémy funkce**.*

*Pozn. Pokud množina M je jen okolí bodu C, hovoříme o tzv. **lokálních extrémech funkce**. Když M = D(f), má funkce f v bodě C absolutní extrém.*

NUTNÁ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Má-li funkce dvou proměnných ve vnitřním bodě $C \in D(f)$ lokální extrém a existuje derivace $f'(C)$, pak $f'(C) = (0,0)$

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA PRO LOKÁLNÍ EXTRÉM FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť C je vnitřní bod D(f), ve kterém $f'(C) = (0,0)$ a funkce dvou proměnných f má v okolí bodu C spojité druhé parciální derivace. Označme

$$D_1 = \partial_{xx} f(C), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \partial_{xx} f(C) & \partial_{xy} f(C) \\ \partial_{yx} f(C) & \partial_{yy} f(C) \end{vmatrix}$$

(a) *Jestliže $D_2>0$ a $D_1>0$, pak funkce f má v bodě C **lokální minimum**.*
(b) *Jestliže $D_2>0$ a $D_1<0$, pak funkce f má v bodě C **lokální maximum**.*
(c) *Jestliže $D_2<0$, pak funkce f **nemá v bodě C lokální extrém**.*

VÁZANÉ EXTRÉMY PRO FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť f a g jsou funkce dvou proměnných, $M = \{[x,y] \in D(f), g(x,y) = 0\}$. *Extrémy funkce f v množině M se nazývají* ***vázané extrémy****, rovnici* $g(x,y) = 0$ *říkáme vazební podmínka.*

NUTNÁ PODMÍNKA PRO VÁZANÝ EXTRÉM

Má- li funkce dvou proměnných f při vazební podmínce $g(x,y) = 0$ *v bodě C vázaný extrém a funkce f, g mají v okolí bodu C spojité parciální derivace, pak* $\begin{vmatrix} \partial_x f(C) & \partial_y f(C) \\ \partial_x g(C) & \partial_y f(C) \end{vmatrix} = 0.$

Pozn. Determinant v předchozí větě se nazývá Jacobiho determinant funkcí f,g.

METODA LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ (PRO DVĚ PROMĚNNÉ)

Použití především u funkce tří a více proměnných v situacích, kdy se nedá použít dosazovací metoda ani Jacobián.

Nechť f a $g_1, \dots, g_k$ *jsou funkce r proměnných, k<r. Vázané extrémy funkce f při vazebních podmínkách* $g_1(x_1, \dots, x_r) = 0, \dots, g_r(x_1, \dots, x_r) = 0$ *můžeme najít pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů následujícím způsobem:*

(1) *Vytvoříme Lagrangeovu funkci, která je definovaná vztahem* $L(x_1, \dots, x_r{}' = f(x_1, \dots, x_r) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_r) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_r)$*, kde lambdy jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory.*

(2) *Podezřelé body z vázaného extrému funkce f najdeme řešením soustavy*

$$\partial_1 L(x_1, \dots, x_r) = 0$$
$$\partial_r L(x_1, \dots, x_r) = 0$$
$$g_1(x_1, \dots, x_r) = 0$$
$$g_k(x_1, \dots, x_r) = 0$$

Kde $\partial_i L$ *je parciální derivace Lagrangeovy funkce podle* $x_i (i = 1, \dots, r)$

(3) *Pokud je množina bodů vyhovující vazebním podmínkám kompaktní, dokončíme řešení pomocí zobecněné Weierstrassovy věty, jinak můžeme použít odpovídající postačující podmínku.*

VÝPOČET ABSOLUTNÍCH EXTRÉMŮ SPOJITÉ FUNKCE NA KOMPAKTNÍ MNOŽINĚ S VNITŘNÍMI BODY

Extrémy spojité funkce na neprázdné kompaktní množině existují podle zobecněné Weierstrassovy věty. Postup je následující:

(a) Najdeme podezřelé body z extrému uvnitř množiny (nutná podmínka pro lokální extrém funkce dvou proměnných)
(b) Najdeme podezřelé body z extrému na hranici množiny (dosazovací metoda, nutná podmínka pro vázaný extrém, metoda Lagrangeových multiplikátorů)
(c) Vypočteme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech a vybereme z nich největší a nejmenší.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU

*Rovnice pro neznámou funkci y jedné reálné proměnné x, ve které se vyskytují také její derivace y', y'',…, $y^{(n)}$ se nazývá **diferenciální rovnice n-tého řádu**.*

OBECNÉ A PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

***Obecné řešení** = všechna řešení diferenciální rovnice*

***Partikulární řešení** = konkrétní řešení vzhledem k počáteční podmínce*

POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

*Z vět o obecném řešení lineární diferenciální rovnice a zkrácené lineární diferenciální rovnice plyne, že (Ln) má nekonečně mnoho řešení. Pro rovnice tohoto typu platí: Jestliže k lineární diferenciální rovnici n-tého řádu přidáme tzv. **počátečních podmínek**, pak řešení této rovnice je jednoznačné.*

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU S KONSTATNNÍMI KOEFICIENTY

Nechť $p_1, \dots, p_n$ jsou reálná čísla, q je spojitá funkce v otevřeném intervalu J. Rovnice

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x)$$

*se nazývá **lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**.*

*Rovnice $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ je tzv. **zkrácená lineární diferenciální rovnice** (Zn)*

VĚTA O OBECNÉM ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

***Obecné řešení lineární diferenciální rovnice** je součet partikulárního řešení této rovnice a obecného řešení odpovídající rovnici zkrácené.*

Pozn. Můžeme ji psát jako Obecné řešení (Ln) = partikulární řešení (Ln) + obecné řešení (Zn)

VĚTA O OBECNÉM ŘEŠENÍ ZKRÁCENÉ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obecné řešení zkrácené lineární rovnice n-tého řádu (Zn) je lineární kombinace lineárně nezávislých řešení této rovnice.

ZKRÁCENÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

***Zkrácená lineární diferenciální rovnice prvního řádu** má tvar $y' + py = 0$, tj. $y' = -py$. Řešením rovnice lze najít ve tvaru $y = e^{\lambda x}, kde\ \lambda$ je konstanta. Po dosazení do rovnice $y' = \lambda . e^{\lambda x}$ dostaneme $e^{\lambda x}(\lambda + p) = 0$. Odtus $\lambda + p = 0$. Tato rovnice se **nazývá charakteristická rovnice diferenciální rovnice**. Rovnice má jediné řešení $\lambda = -p$, takže $y = e^{-px}$. Řešením je tedy $y = c . e^{-px}$.*

Pozn. Na kurzu jsme pro tento tvar měli vzoreček $y = c . e^{\lambda x}$. Je to stejné, protože z rovnice $\lambda + p = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -p$.

x možné počty řešení

ZKRÁCENÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

***Zkrácená lineární diferenciální rovnice druhého řádu** má tvar $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, tj. $y' = -py$. Řešením rovnice lze najít ve tvaru $y = e^{\lambda x}, kde\ \lambda$ je komplexní konstanta. Máme $y' = \lambda . e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}$. Po dosazení do rovnice dostaneme $e^{\lambda x} . (\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0$. Odtud $\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0$. To je charakteristická rovnice diferenciální rovnice. Rovnice je kvadratická, protože budeme rozlišovat 3 typy:*

*(a) **Diskriminant charakteristické rovnice D>0** – Rovnice má dva reálné kořeny λ_1, λ_2, takže máme funkce $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$.*

- *Lema: Má- li charakteristická rovnice diferenciální rovnice dva reálné kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

(b) ***Diskriminant charakteristické rovnice D=0*** *– Diskriminant má jeden reálný dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = \lambda$, takže funkce $y_1 = e^{\lambda x}$ je řešením rovnice. Dosazením do rovnice dostaneme další řešení $y_2 = xe^{\lambda x}$.*

- *Lema: Má- li charakteristická rovnice diferenciální rovnice jeden reálný dvojnásobní kořen λ, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

(c) ***Diskriminant charakteristické rovnice D<0*** *– Rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Dosazením dokážeme, že funkce $y_1 = e^{ax} cosbx, y_2 = e^{ax} sinbx$ jsou řešením rovnice.*

- *Má- li charakteristická rovnice diferenciální rovnice dva komplexně sdružené kořeny $a \pm ib$, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = e^{ax} cosbx + e^{ax} sinbx$, kde c_1, c_2 jsou reálná čísla.*

ŘEŠENÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFCIENTY

K nalezení obecného řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty potřebujeme kromě zkráceného řešení ještě najít partikulární řešení rovnice.

- *Lema: Má-li pravá strana lineární rovnice s konstantními koeficienty tvar $q(x) = e^{\rho x}. Pm(x)$, kde $\rho \in R$ a Pm je polynom stupně m, pak partikulární řešení se dá najít ve tvaru $y = e^{\rho x}. x^r. (a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0)$ kde r je násobnost čísla ρ jako kořene příslušné charakteristické rovnice.*

ZDROJE

Klůfa, J. (2016). Matematika pro Vysokou školu ekonomickou. Praha: Ekopress