14.6 编辑距离问题

编辑距离，也称 Levenshtein 距离，指两个字符串之间互相转换的最少修改次数，通常用于在信息检索和自然语言处理中度量两个序列的相似度。

Question

输入两个字符串 s 和 t ，返回将 s 转换为 t 所需的最少编辑步数。

你可以在一个字符串中进行三种编辑操作：插入一个字符、删除一个字符、将字符替换为任意一个字符。

如图 14-27 所示，将 `kitten` 转换为 `sitting` 需要编辑 3 步，包括 2 次替换操作与 1 次添加操作；将 `hello` 转换为 `algo` 需要 3 步，包括 2 次替换操作和 1 次删除操作。

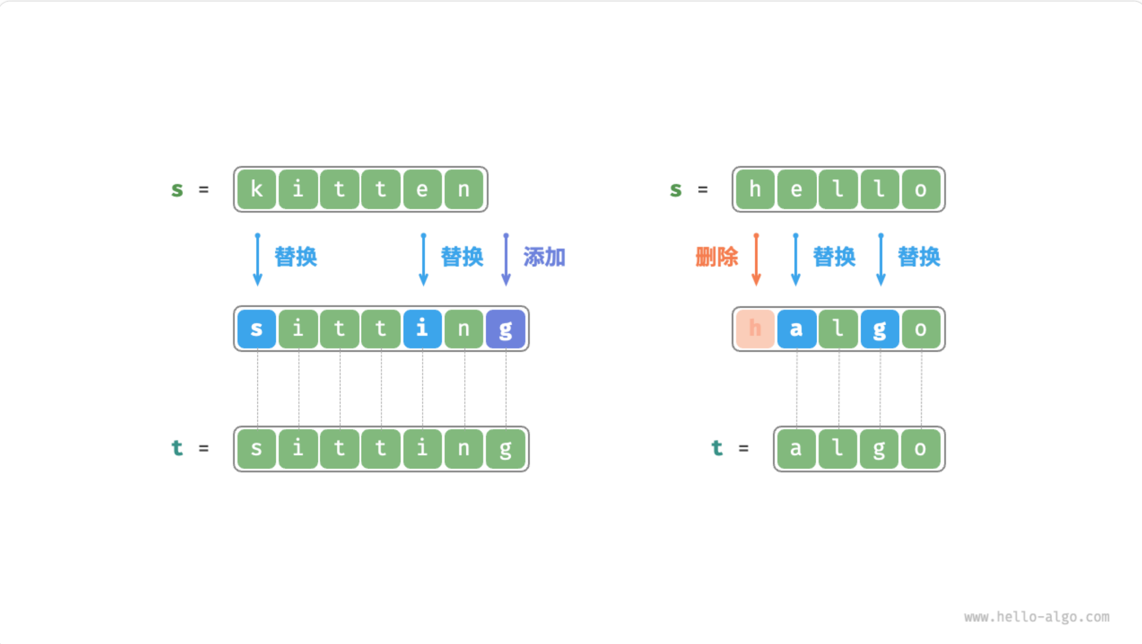


图 14-27 编辑距离的示例数据

编辑距离问题可以很自然地用决策树模型来解释。字符串对应树节点，一轮决策（一次编辑操作）对应树的一条边。

如图 14-28 所示，在不限制操作的情况下，每个节点都可以派生出许多条边，每条边对应一种操作，这意味着从 `hello` 转换到 `algo` 有许多种可能的路径。

从决策树的角度看，本题的目标是求解节点 `hello` 和节点 `algo` 之间的最短路径。

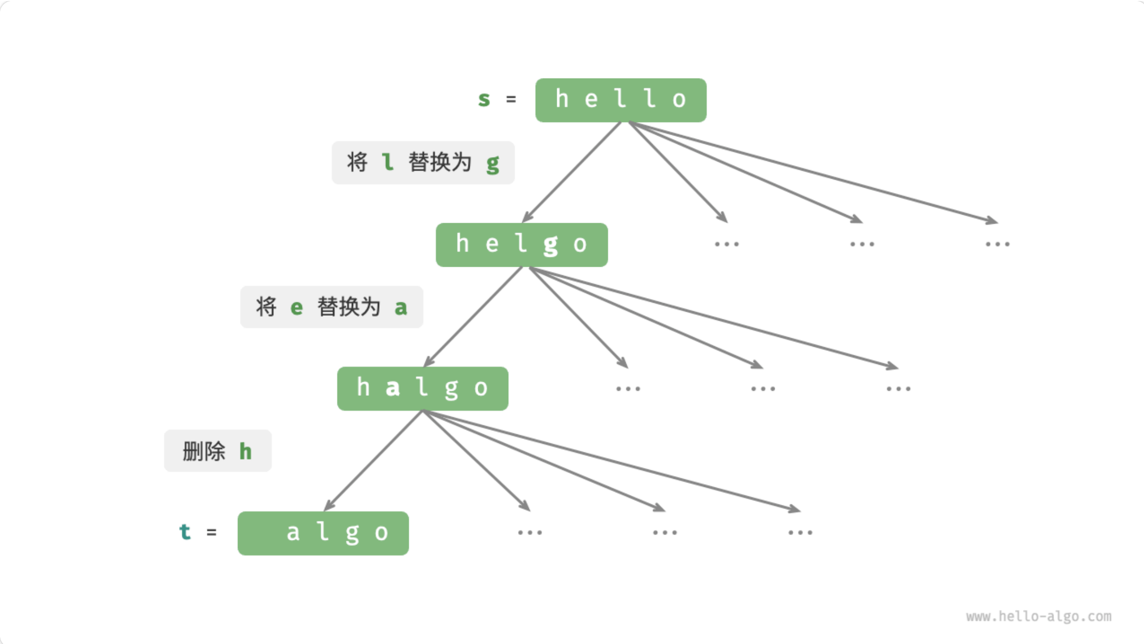


图 14-28 基于决策树模型表示编辑距离问题

1. 动态规划思路

第一步：思考每轮的决策，定义状态，从而得到 dp 表

每一轮的决策是对字符串 s 进行一次编辑操作。

我们希望在编辑操作的过程中，问题的规模逐渐缩小，这样才能构建子问题。设字符串 s 和 t 的长度分别为 n 和 m ，我们先考虑两字符串尾部的字符 $s[n-1]$ 和 $t[m-1]$ 。

- 若 $s[n-1]$ 和 $t[m-1]$ 相同，我们可以跳过它们，直接考虑 $s[n-2]$ 和 $t[m-2]$ 。
- 若 $s[n-1]$ 和 $t[m-1]$ 不同，我们需要对 s 进行一次编辑（插入、删除、替换），使得两字符串尾部的字符相同，从而可以跳过它们，考虑规模更小的问题。

也就是说，我们在字符串 s 中进行的每一轮决策（编辑操作），都会使得 s 和 t 中剩余的待匹配字符发生变化。因此，状态为当前在 s 和 t 中考虑的第 i 和第 j 个字符，记为 $[i,j]$ 。

状态 $[i,j]$ 对应的子问题：**将 s 的前 i 个字符更改为 t 的前 j 个字符所需的最少编辑步数。**

至此，得到一个尺寸为 $(i+1)\times(j+1)$ 的二维 dp 表。

第二步：找出最优子结构，进而推导出状态转移方程

考虑子问题 $dp[i, j]$ ，其对应的两个字符串的尾部字符为 $s[i-1]$ 和 $t[j-1]$ ，可根据不同编辑操作分为图 14-29 所示的三种情况。

1. 在 $s[i-1]$ 之后添加 $t[j-1]$ ，则剩余子问题 $dp[i, j-1]$ 。
2. 删除 $s[i-1]$ ，则剩余子问题 $dp[i-1, j]$ 。
3. 将 $s[i-1]$ 替换为 $t[j-1]$ ，则剩余子问题 $dp[i-1, j-1]$ 。

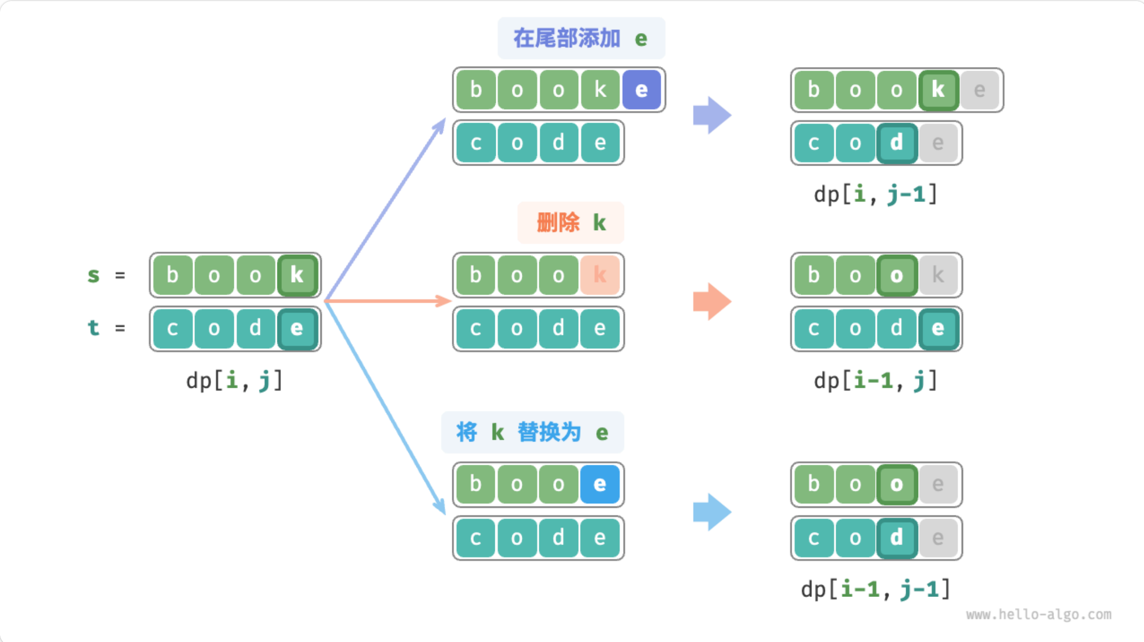


图 14-29　编辑距离的状态转移

根据以上分析，可得最优子结构：$dp[i, j]$ 的最少编辑步数等于 $dp[i, j-1]$、$dp[i-1, j]$、$dp[i-1, j-1]$ 三者中的最少编辑步数，再加上本次的编辑步数 1 。对应的状态转移方程为：

$$dp[i, j] = \min(dp[i, j-1], dp[i-1, j], dp[i-1, j-1]) + 1$$

请注意，**当 $s[i-1]$ 和 $t[j-1]$ 相同时，无须编辑当前字符**，这种情况下的状态转移方程为：

$$dp[i, j] = dp[i-1, j-1]$$

第三步：确定边界条件和状态转移顺序

当两字符串都为空时，编辑步数为 0 ，即 $dp[0, 0] = 0$ 。当 s 为空但 t 不为空时，最少编辑步数等于 t 的长度，即首行 $dp[0, j] = j$ 。当 s 不为空但 t 为空时，最少编辑步数等于 s 的长度，即首列 $dp[i, 0] = i$ 。

观察状态转移方程，解 $dp[i, j]$ 依赖左方、上方、左上方的解，因此通过两层循环正序遍历整个 dp 表即可。

2. 代码实现

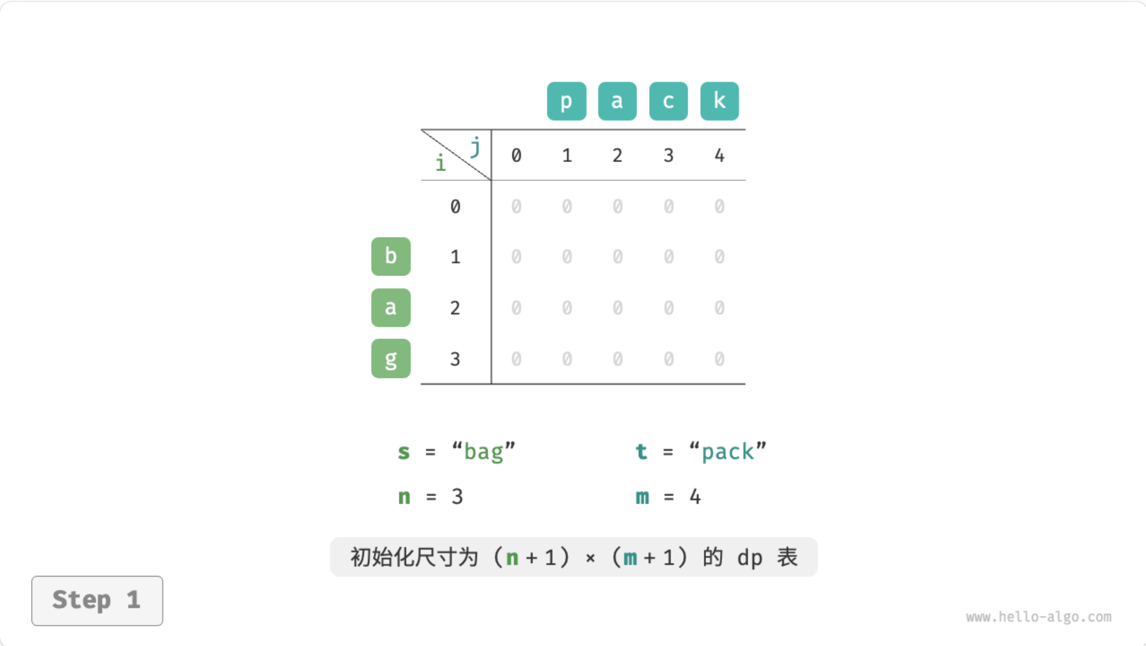
Python

edit_distance.py

```python
def edit_distance_dp(s: str, t: str) -> int:
    """编辑距离：动态规划"""
    n, m = len(s), len(t)
    dp = [[0] * (m + 1) for _ in range(n + 1)]
    # 状态转移：首行首列
    for i in range(1, n + 1):
        dp[i][0] = i
    for j in range(1, m + 1):
        dp[0][j] = j
    # 状态转移：其余行和列
    for i in range(1, n + 1):
        for j in range(1, m + 1):
            if s[i - 1] == t[j - 1]:
                # 若两字符相等，则直接跳过此两字符
                dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1]
            else:
                # 最少编辑步数 = 插入、删除、替换这三种操作的最少编辑步数 + 1
                dp[i][j] = min(dp[i][j - 1], dp[i - 1][j], dp[i - 1][j -
1]) + 1
    return dp[n][m]
```

如图 14-30 所示，编辑距离问题的状态转移过程与背包问题非常类似，都可以看作填写一个二维网格的过程。

<1>



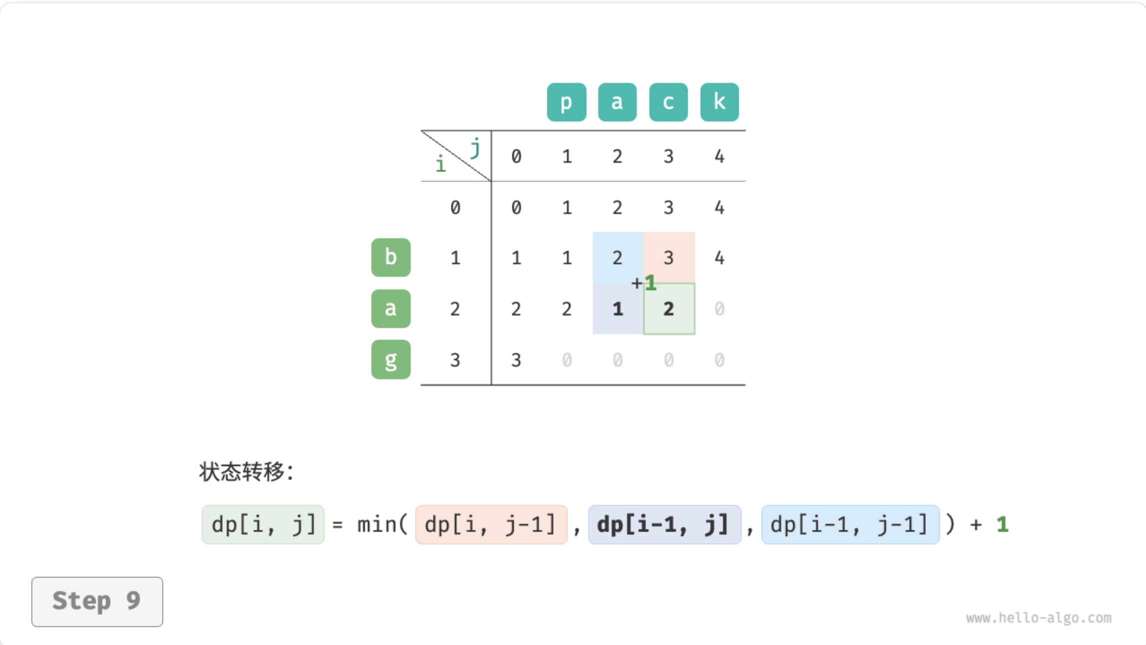


图 14-30 编辑距离的动态规划过程

3. 空间优化

由于 $dp[i,j]$ 是由上方 $dp[i-1,j]$、左方 $dp[i,j-1]$、左上方 $dp[i-1,j-1]$ 转移而来的，而正序遍历会丢失左上方 $dp[i-1,j-1]$ ，倒序遍历无法提前构建 $dp[i,j-1]$ ，因此两种遍历顺序都不可取。

为此，我们可以使用一个变量 `leftup` 来暂存左上方的解 $dp[i-1,j-1]$ ，从而只需考虑左方和上方的解。此时的情况与完全背包问题相同，可使用正序遍历。代码如下所示：

Python

edit_distance.py

```python
def edit_distance_dp_comp(s: str, t: str) -> int:
    """编辑距离：空间优化后的动态规划"""
    n, m = len(s), len(t)
    dp = [0] * (m + 1)
    # 状态转移：首行
    for j in range(1, m + 1):
        dp[j] = j
    # 状态转移：其余行
    for i in range(1, n + 1):
        # 状态转移：首列
        leftup = dp[0]  # 暂存 dp[i-1, j-1]
        dp[0] += 1
        # 状态转移：其余列
        for j in range(1, m + 1):
            temp = dp[j]
            if s[i - 1] == t[j - 1]:
                # 若两字符相等，则直接跳过此两字符
                dp[j] = leftup
            else:
                # 最少编辑步数 = 插入、删除、替换这三种操作的最少编辑步数 + 1
                dp[j] = min(dp[j - 1], dp[j], leftup) + 1
            leftup = temp  # 更新为下一轮的 dp[i-1, j-1]
    return dp[m]
```

上一页
14.5 完全背包问题

下一页
14.7 小结

34 个表情

👍 15 😄 4 🎉 4 ❤️ 5 🚀 6

11 条评论 · 12 条回复 – *由 giscus 提供支持*

最早 **最新**

输入 预览 Aa

登录后可发表评论

使用 GitHub 登录

RENHJa 4 月 1 日

hi！ 请问 `dp[i][j] = min(min(dp[i][j - 1], dp[i - 1][j]), dp[i - 1][j - 1]) + 1;` 为什么用了两层min？在状态转移方程中不是求 `dp[i][j - 1], dp[i - 1][j], dp[i - 1][j - 1]`）三者的最小值吗，那样不是只用一层min就行了吗？

↑ 1

2 条回复

RENHJa 4 月 1 日

是不是因为min这个函数最多只能两个参数?

echo1937 4 月 15 日

JDK的标准库只支持传入两个数字。

👍 1

h-kayotin 3 月 28 日

hi，大佬。我遇到一个问题。

输入两个字符串x,y，他们组成n*m的矩阵，计算从(0,0)到(n,m)的最短距离。如果x[i-