12.4 汉诺塔问题

在归并排序和构建二叉树中，我们都是将原问题分解为两个规模为原问题一半的子问题。然而对于汉诺塔问题，我们采用不同的分解策略。

> **Question**
>
> 给定三根柱子，记为 `A`、`B` 和 `C` 。起始状态下，柱子 `A` 上套着 n 个圆盘，它们从上到下按照从小到大的顺序排列。我们的任务是要把这 n 个圆盘移到柱子 `C` 上，并保持它们的原有顺序不变（如图 12-10 所示）。在移动圆盘的过程中，需要遵守以下规则。
>
> 1. 圆盘只能从一根柱子顶部拿出，从另一根柱子顶部放入。
> 2. 每次只能移动一个圆盘。
> 3. 小圆盘必须时刻位于大圆盘之上。

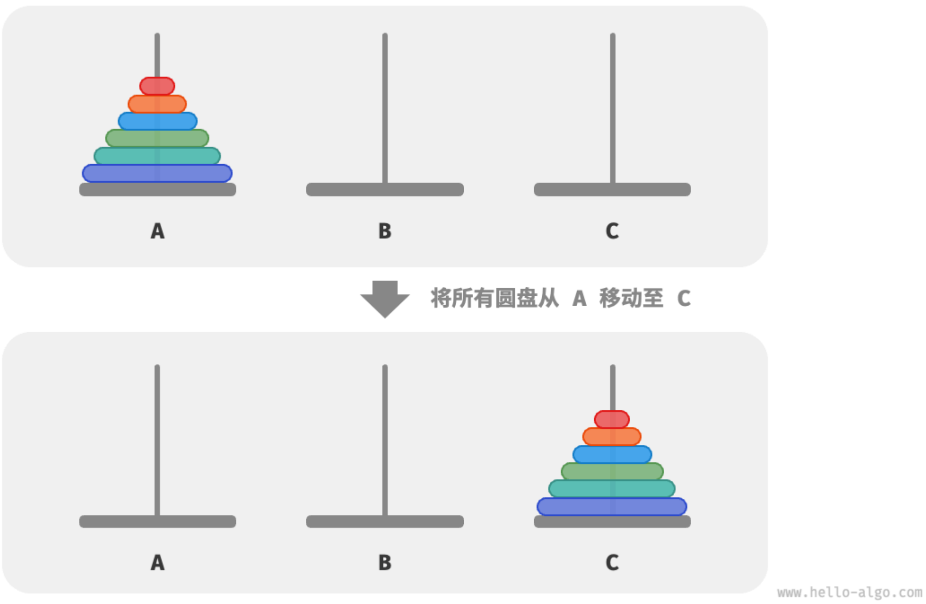


图 12-10 汉诺塔问题示例

我们将规模为 i 的汉诺塔问题记作 $f(i)$ 。例如 $f(3)$ 代表将 3 个圆盘从 `A` 移动至 `C` 的汉诺塔问题。

1. 考虑基本情况

如图 12-11 所示，对于问题 $f(1)$ ，即当只有一个圆盘时，我们将它直接从 `A` 移动至 `C` 即可。

<1>

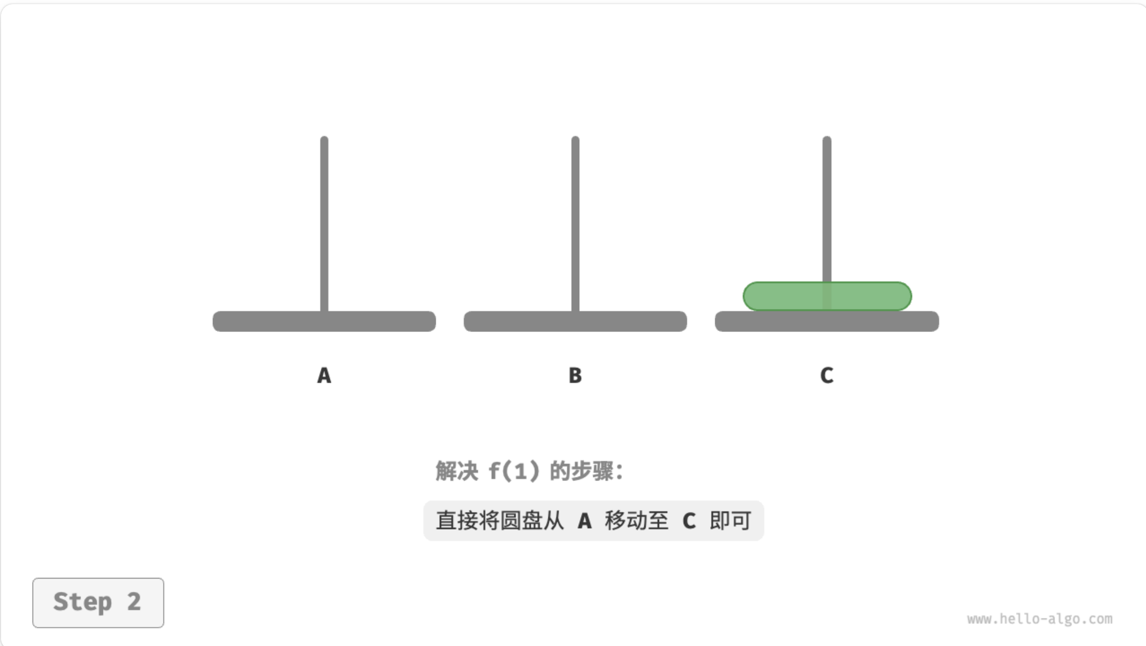
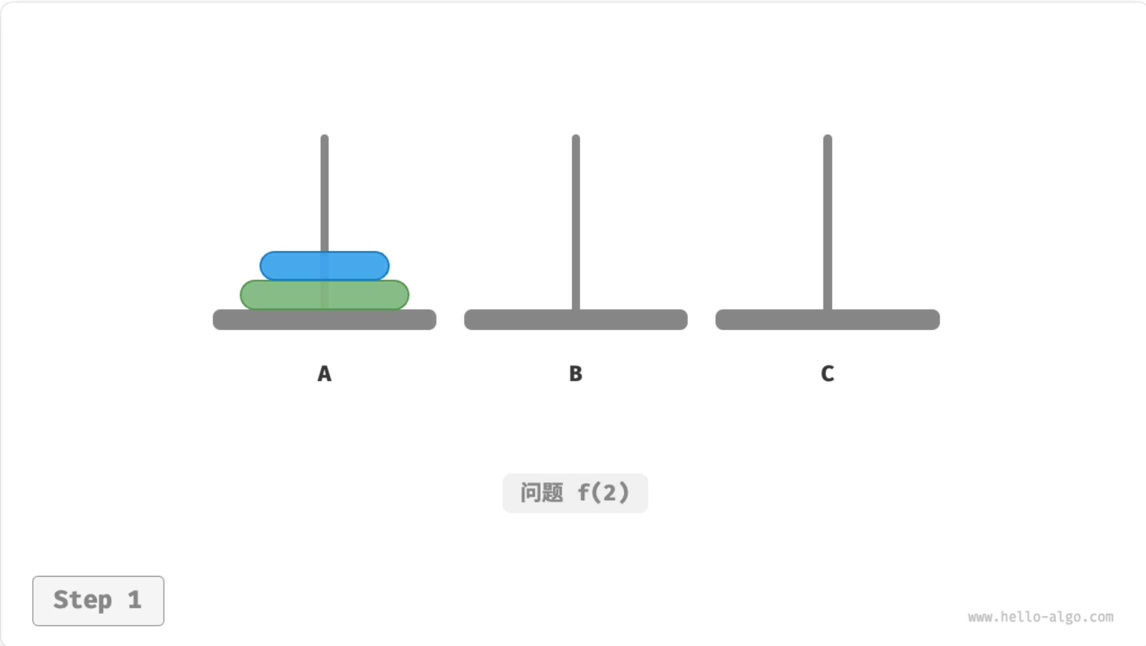


图 12-11 规模为 1 的问题的解

如图 12-12 所示，对于问题 $f(2)$ ，即当有两个圆盘时，**由于要时刻满足小圆盘在大圆盘之上，因此需要借助 `B` 来完成移动**。

1. 先将上面的小圆盘从 `A` 移至 `B` 。
2. 再将大圆盘从 `A` 移至 `C` 。
3. 最后将小圆盘从 `B` 移至 `C` 。

<1>



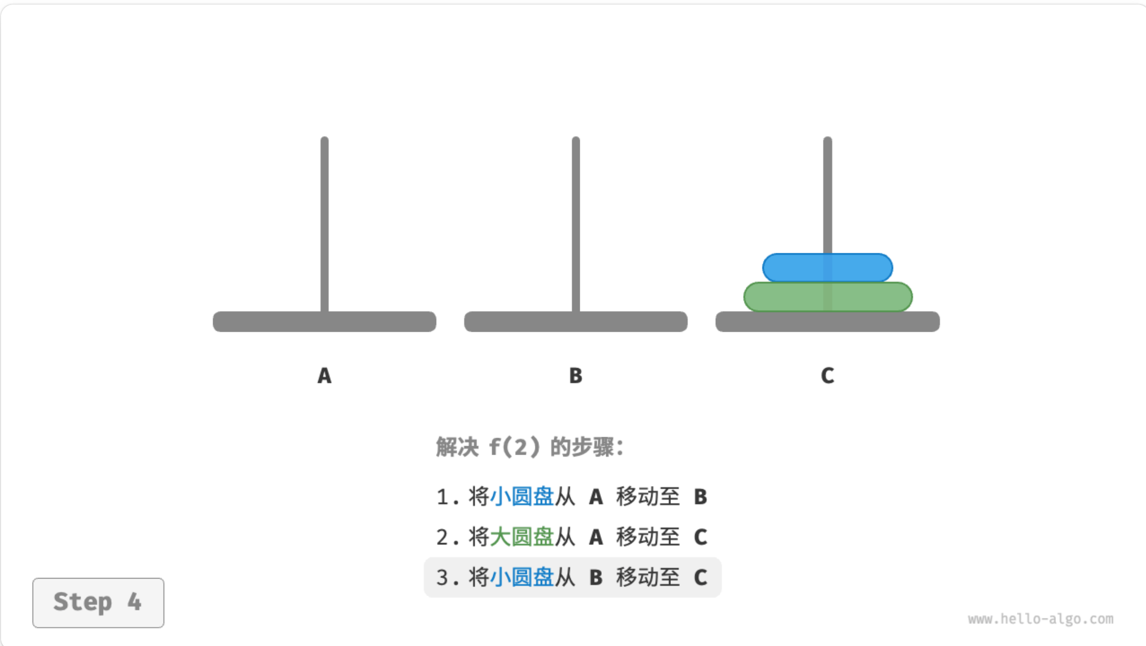


图 12-12 规模为 2 的问题的解

解决问题 $f(2)$ 的过程可总结为：**将两个圆盘借助 `B` 从 `A` 移至 `C`**。其中，`C` 称为目标柱、`B` 称为缓冲柱。

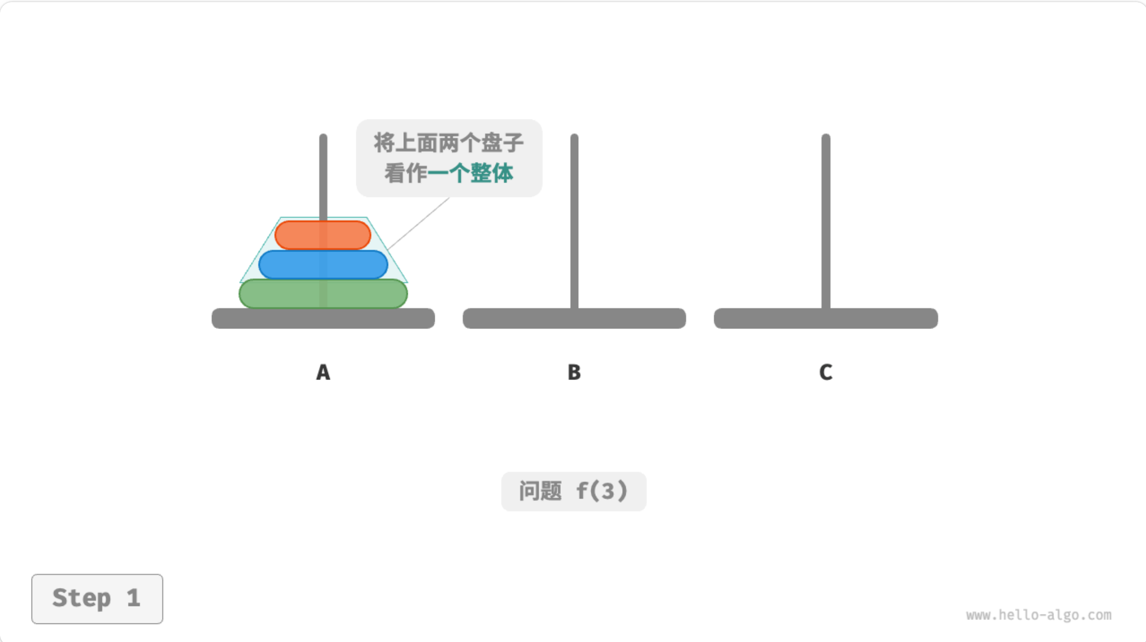
2. 子问题分解

对于问题 $f(3)$ ，即当有三个圆盘时，情况变得稍微复杂了一些。

因为已知 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的解，所以我们可从分治角度思考，**将 `A` 顶部的两个圆盘看作一个整体**，执行图 12-13 所示的步骤。这样三个圆盘就被顺利地从 `A` 移至 `C` 了。

1. 令 `B` 为目标柱、`C` 为缓冲柱，将两个圆盘从 `A` 移至 `B` 。
2. 将 `A` 中剩余的一个圆盘从 `A` 直接移动至 `C` 。
3. 令 `C` 为目标柱、`A` 为缓冲柱，将两个圆盘从 `B` 移至 `C` 。

<1>



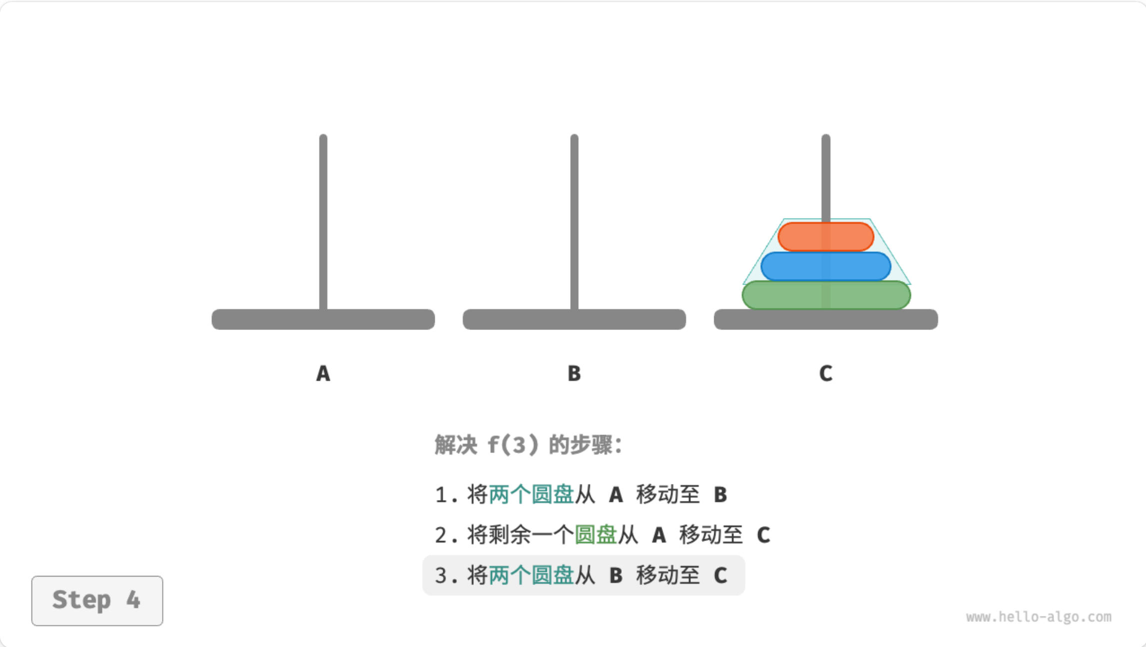


图 12-13 规模为 3 的问题的解

从本质上看，**我们将问题 $f(3)$ 划分为两个子问题 $f(2)$ 和一个子问题 $f(1)$** 。按顺序解决这三个子问题之后，原问题随之得到解决。这说明子问题是独立的，而且解可以合并。

至此，我们可总结出图 12-14 所示的解决汉诺塔问题的分治策略：将原问题 $f(n)$ 划分为两个子问题 $f(n-1)$ 和一个子问题 $f(1)$ ，并按照以下顺序解决这三个子问题。

1. 将 $n-1$ 个圆盘借助 `C` 从 `A` 移至 `B` 。
2. 将剩余 1 个圆盘从 `A` 直接移至 `C` 。
3. 将 $n-1$ 个圆盘借助 `A` 从 `B` 移至 `C` 。

对于这两个子问题 $f(n-1)$ ，**可以通过相同的方式进行递归划分**，直至达到最小子问题 $f(1)$ 。而 $f(1)$ 的解是已知的，只需一次移动操作即可。

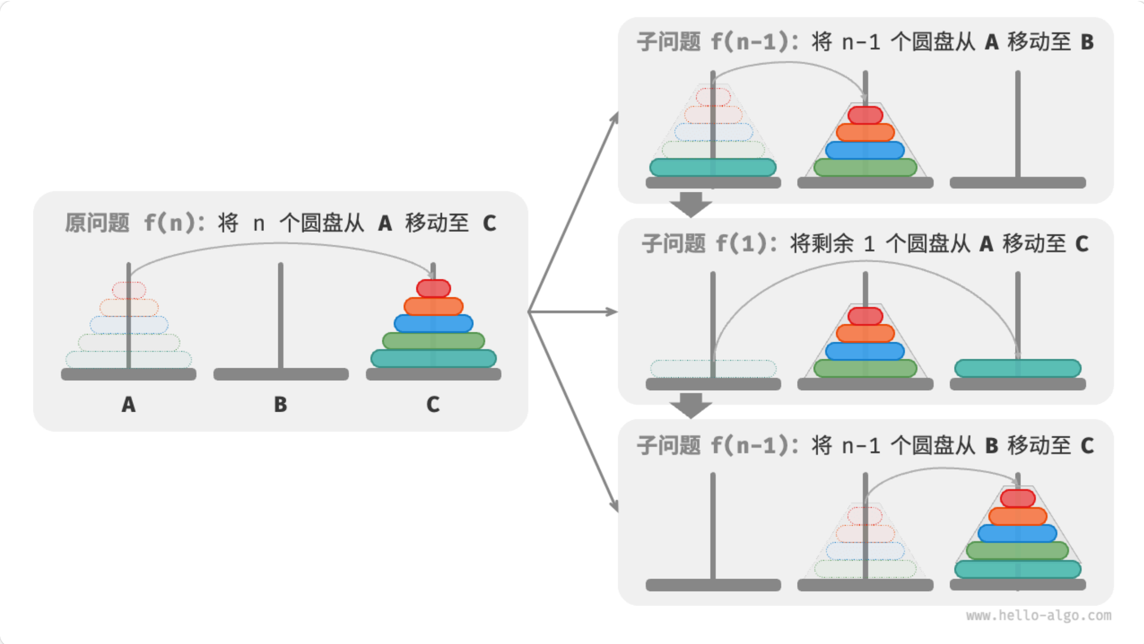


图 12-14 解决汉诺塔问题的分治策略

3. 代码实现

在代码中，我们声明一个递归函数 `dfs(i, src, buf, tar)` ，它的作用是将柱 `src` 顶部的 i 个圆盘借助缓冲柱 `buf` 移动至目标柱 `tar` ：

Python

hanota.py

```python
def move(src: list[int], tar: list[int]):
    """移动一个圆盘"""
    # 从 src 顶部拿出一个圆盘
    pan = src.pop()
    # 将圆盘放入 tar 顶部
    tar.append(pan)

def dfs(i: int, src: list[int], buf: list[int], tar: list[int]):
    """求解汉诺塔问题 f(i)"""
    # 若 src 只剩下一个圆盘，则直接将其移到 tar
    if i == 1:
        move(src, tar)
        return
    # 子问题 f(i-1) ：将 src 顶部 i-1 个圆盘借助 tar 移到 buf
    dfs(i - 1, src, tar, buf)
    # 子问题 f(1) ：将 src 剩余一个圆盘移到 tar
    move(src, tar)
    # 子问题 f(i-1) ：将 buf 顶部 i-1 个圆盘借助 src 移到 tar
    dfs(i - 1, buf, src, tar)

def solve_hanota(A: list[int], B: list[int], C: list[int]):
```

```python
    """求解汉诺塔问题"""
    n = len(A)
    # 将 A 顶部 n 个圆盘借助 B 移到 C
    dfs(n, A, B, C)
```

如图 12-15 所示，汉诺塔问题形成一棵高度为 n 的递归树，每个节点代表一个子问题，对应一个开启的 `dfs()` 函数，**因此时间复杂度为 $O(2^n)$ ，空间复杂度为 $O(n)$** 。

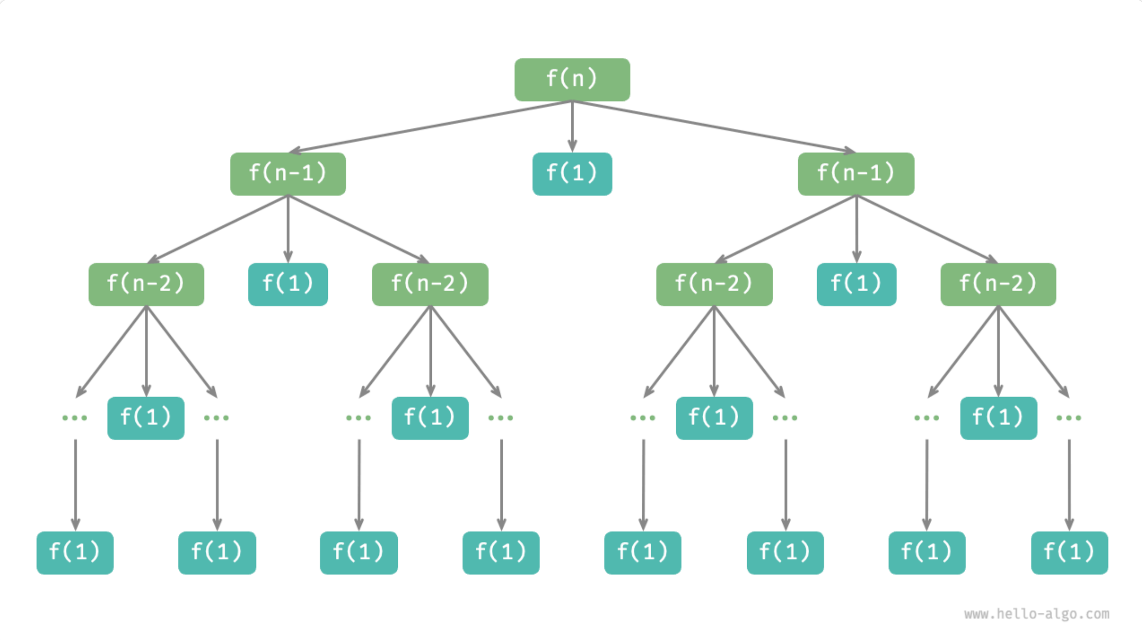


图 12-15 汉诺塔问题的递归树

> **Quote**
>
> 汉诺塔问题源自一个古老的传说。在古印度的一个寺庙里，僧侣们有三根高大的钻石柱子，以及 64 个大小不一的金圆盘。僧侣们不断地移动圆盘，他们相信在最后一个圆盘被正确放置的那一刻，这个世界就会结束。
>
> 然而，即使僧侣们每秒钟移动一次，总共需要大约 $2^{64} \approx 1.84 \times 10^{19}$ 秒，合约 5850 亿年，远远超过了现在对宇宙年龄的估计。所以，倘若这个传说是真的，我们应该不需要担心世界末日的到来。

上一页
← 12.3 构建树问题
下一页
12.5 小结 →

欢迎在评论区留下你的见解、问题或建议