10.1 二分查找

二分查找（binary search）是一种基于分治策略的高效搜索算法。它利用数据的有序性，每轮缩小一半搜索范围，直至找到目标元素或搜索区间为空为止。

Question

给定一个长度为 n 的数组 `nums` ，元素按从小到大的顺序排列且不重复。请查找并返回元素 `target` 在该数组中的索引。若数组不包含该元素，则返回 -1 。示例如图 10-1 所示。

图 10-1 二分查找示例数据

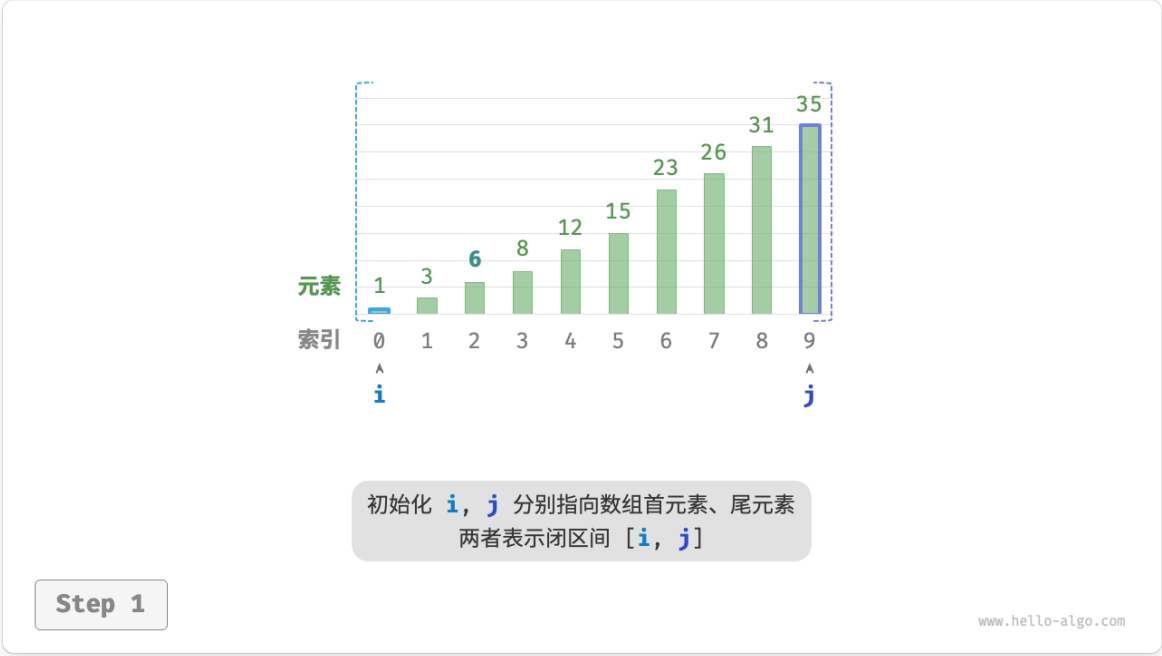
如图 10-2 所示，我们先初始化指针 $i = 0$ 和 $j = n - 1$ ，分别指向数组首元素和尾元素，代表搜索区间 $[0, n - 1]$ 。请注意，中括号表示闭区间，其包含边界值本身。

接下来，循环执行以下两步。

1. 计算中点索引 $m = \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ ，其中 $\lfloor \rfloor$ 表示向下取整操作。
2. 判断 `nums[m]` 和 `target` 的大小关系，分为以下三种情况。
    a. 当 `nums[m] < target` 时，说明 `target` 在区间 $[m + 1, j]$ 中，因此执行 $i = m + 1$ 。
    b. 当 `nums[m] > target` 时，说明 `target` 在区间 $[i, m - 1]$ 中，因此执行 $j = m - 1$ 。
    c. 当 `nums[m] = target` 时，说明找到 `target` ，因此返回索引 m 。

若数组不包含目标元素，搜索区间最终会缩小为空。此时返回 -1 。

<1>


元素
索引
1
3
6
8
12
15
23
26
31
35
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
i
j
初始化 i, j 分别指向数组首元素、尾元素
两者表示闭区间 [i, j]
Step 1
www.hello-algo.com

<2>


元素
索引
1
3
6
8
12
15
23
26
31
35
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
i
m
j
循环二分查找:
1. 计算中点 m = (i + j) / 2
Step 2
www.hello-algo.com

<3>

图 10-2　二分查找流程

值得注意的是，由于 i 和 j 都是 `int` 类型，**因此 $i+j$ 可能会超出 `int` 类型的取值范围**。为了避免大数越界，我们通常采用公式 $m = \lfloor i + (j - i) / 2 \rfloor$ 来计算中点。

代码如下所示：

Python

binary_search.py

```python
def binary_search(nums: list[int], target: int) -> int:
    """二分查找（双闭区间）"""
    # 初始化双闭区间 [0, n-1] ，即 i, j 分别指向数组首元素、尾元素
    i, j = 0, len(nums) - 1
    # 循环，当搜索区间为空时跳出（当 i > j 时为空）
    while i <= j:
        # 理论上 Python 的数字可以无限大（取决于内存大小），无须考虑大数越界问题
        m = (i + j) // 2  # 计算中点索引 m
        if nums[m] < target:
            i = m + 1  # 此情况说明 target 在区间 [m+1, j] 中
        elif nums[m] > target:
            j = m - 1  # 此情况说明 target 在区间 [i, m-1] 中
        else:
            return m  # 找到目标元素，返回其索引
    return -1  # 未找到目标元素，返回 -1
```

C++

binary_search.cpp

```cpp
/* 二分查找（双闭区间） */
int binarySearch(vector<int> &nums, int target) {
    // 初始化双闭区间 [0, n-1] ，即 i, j 分别指向数组首元素、尾元素
    int i = 0, j = nums.size() - 1;
    // 循环，当搜索区间为空时跳出（当 i > j 时为空）
    while (i <= j) {
```

图 10-3 两种区间定义

10.1.2 优点与局限性

二分查找在时间和空间方面都有较好的性能。

- 二分查找的时间效率高。在大数据量下，对数阶的时间复杂度具有显著优势。例如，当数据大小 $n = 2^{20}$ 时，线性查找需要 $2^{20} = 1048576$ 轮循环，而二分查找仅需 $\log_2 2^{20} = 20$ 轮循环。
- 二分查找无须额外空间。相较于需要借助额外空间的搜索算法（例如哈希查找），二分查找更加节省空间。

然而，二分查找并非适用于所有情况，主要有以下原因。

- 二分查找仅适用于有序数据。若输入数据无序，为了使用二分查找而专门进行排序，得不偿失。因为排序算法的时间复杂度通常为 $O(n \log n)$，比线性查找和二分查找都更高。对于频繁插入元素的场景，为保持数组有序性，需要将元素插入到特定位置，时间复杂度为 $O(n)$，也是非常昂贵的。
- 二分查找仅适用于数组。二分查找需要跳跃式（非连续地）访问元素，而在链表中执行跳跃式访问的效率较低，因此不适合应用在链表或基于链表实现的数据结构。
- 小数据量下，线性查找性能更佳。在线性查找中，每轮只需 1 次判断操作；而在二分查找中，需要 1 次加法、1 次除法、1 ~ 3 次判断操作、1 次加法（减法），共 4 ~ 6 个单元操作；因此，当数据量 n 较小时，线性查找反而比二分查找更快。

上一页 第 10 章 搜索
下一页 10.2 二分查找插入点