Решение Задачи 1

Если точка $A(a,b)$ совпадает с точкой $(0,0)$, то матрица поворота выглядит вот так

$ R = \left(\begin{array}{cc} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{array}\right) $

Давайте введум третью координату w как мы уже делали, и будем использовать перенос. Сначала перенесем плоскость так, чтобы точка A совподала с $(0,0)$ а потом повернем используя расширенную матрицу R. Останется лишь сдвинуть плоскость обратнаным переносом. В итоге получим, что поворот был вокруг точки A.

$ R(Расширенный) = \left(\begin{array}{ccc} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right), Точка\:X = \left(\begin{array}{c} x\\ y\\ 1\end{array}\right) $

Матрица S будет переносом в $(0,0)$, а $S^{'}$ будет обратным переносом. Тогда, $S^{'} = S^{-1},\:\: S = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right), \: S^{'} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

Вспоминаем,что применять матрицы к точке надо с право на лево и получаем

$T = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) * \left(\begin{array}{ccc} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) * \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \cos\varphi & \sin\varphi & a(1-\cos\varphi)-b\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & a\sin\varphi+b(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Решение Задачи 2

Для получения итогого поворота вокруг прямой мы сначала перенесем пространство так, чтобы точка A совподал с точкой $(0,0,0)$ потом мы сделаем смещение, чтобы прямая L совподала с осью координат z и тогда, можно будет применить знакомый нам поворот в плоскости xOy.

Матрица переноса нам уже знакома, тут она будет четырехмерная

$S = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$ слудовательно обратный перенос $S^{'} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Совмещение L с осью z это соответсвенно два поворота, один вокруг оси x на угол ψ и второй вокруг y на угол θ

Получаем $R_x(\psi) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} & -\frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}} & 0 \\ 0 & \frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

далее пользуясь тем, что $n^2 + m^2 + l^2 = 1$ получам матрицу $R_y(\theta) = \left(\begin{array}{cccc} \sqrt{n^2 + m^2} & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & \sqrt{n^2 + m^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Так как это матрицы поаоротов, то у них точно существуют обратные, но выписывать их мы не будем. Итоговый поворот будет выглядеть так.

$R_L(\varphi) = S^{'} * R_x^{-1}(\psi) * R_y^{-1}(\theta) * \left(\begin{array}{cccc} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) * R_y(\theta) * R_x(\psi) * S$

Решение Задачи 2

Возьмём кватернионы соответствующие поворотам

$\Lambda_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + e_x\sin\frac{\varphi}{2}, \: \Lambda_2 = \cos\frac{\varphi}{2} + e_y\sin\frac{\varphi}{2}, \: \varphi = \frac{\pi}{2}, \: e_x = \left(\begin{array}{ccc} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \: e_y = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) \: \Rightarrow \: \Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j), \: \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

Результирующий поворот будет их произведением в группе кватернионов

$\Lambda = \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + j)(1 + i) = \frac{1}{2}(1 + i + j - k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j - k) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\begin{array}{ccc} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right) \Rightarrow $

$\Rightarrow$ итоговый угол поворота будет $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, а векторная часть $\xi = \left(\begin{array}{ccc} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right)$