北京大学暑期课《ACM/ICPC竞赛训练》

北京大学信息学院 郭炜
guo_wei@PKU.EDU.CN
http://weibo.com/guoweiofpku

课程网页：http://acm.pku.edu.cn/summerschool/pku_acm_train.htm

ACM/ICPC中的数学

郭炜/林舒

一些数论基本定理

- (a + b) mod c =

  ((a mod c) + (b mod c)) mod c

- (a * b) mod c =

  ((a mod c) * (b mod c)) mod c

一些数论基本定理

- 消去律：若 gcd(c,p) = 1,则

  ac ≡ bc mod p => a ≡ b mod p

一些数论基本定理

消去律证明：

$ac \equiv bc \bmod p$ => $ac = bc + kp$ =>

$c(a-b) = kp$

c和p没有除1以外的公因子 =>

1) c能整除k 或 2) a = b

如果2不成立，则c|kp

c和p没有公因子 => c|k，所以k = ck'

=> c(a-b)=kp可以表示为c(a-b) =ck'p

因此a-b = k'p，得出$a \equiv b \bmod p$

快速幂取模

```
int PowMod(int a,int b,int c)
{//快速求 a^b % c ，要避免计算中间结果溢出
        int result = 1;
        int base = a%c;
        while(b) {
                if( b & 1)
                        result = (result * base)%c;
                base = (base * base) % c;
                b >>= 1;
        }
        return result;
}
```

等比数列二分求和取模

$S_n = a+a^2+...+a^n$

要求 S_n mod p

如果用公式算，可能溢出，因此用二分法求

1） 若 n是偶数

$S_n = a+...+a^{n/2} + a^{n/2+1} + a^{n/2+2} +...+ a^{n/2+n/2}$

$=(a+...+a^{n/2}) + a^{n/2}(a+...+a^{n/2})$

$=S_{n/2}+ a^{n/2}S_{n/2}$

$=(1+a^{n/2})S_{n/2}$

等比数列二分求和取模

2） 若n是奇数

$$S_n = a + ... + a^{(n-1)/2} + a^{(n-1)/2+1} + ...$$

$$+ a^{(n-1)/2+(n-1)/2} + a^{(n-1)/2+(n-1)/2+1}$$

$$= S_{(n-1)/2} + a^{(n-1)/2}(a + ... + a^{(n-1)/2}) + a^n$$

$$= (1 + a^{(n-1)/2}) S_{(n-1)/2} + a^n$$

等比数列二分求和取模

```
int PowSumMod(int a,int n,int p)
{// return (a+ a^2 + ... + a^n) Mod p;
    if( n == 1)
        return a%p;
    if( n %2 == 0)
        return (1+PowMod(a,n/2,p))*PowSumMod(a,n/2,p) % p;
    else
        return ((1+PowMod(a,(n-1)/2,p)) * PowSumMod(a,(n-1)/2,p)
                 + PowMod(a,n,p)) % p;
}
```

POJ3233 **Matrix Power Series**
矩阵快速幂+等比数列二分求和取模

给一个 $n \times n$ 的整数矩阵 A 和正整数 k,m，令

$S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$

求 $S \bmod m$ （S的每元素都 $\bmod m$）

n ($n \le 30$), k ($k \le 10^9$) and m ($m < 10^4$).

矩阵快速幂取模

```
struct Matrix
{
    T a[32][32];
    int r; //行列数
    Mat(int rr):r(rr) { }
    void MakeI() { //变为单位矩阵
        memset(a,0,sizeof(a));
        for(int i = 0;i < r; ++i)
            a[i][i] = 1;
    }

};
```

矩阵快速幂取模

```
Matrix Pow(const Matrix & m,int k,int p)
{   //求mᵏ mod p
    int r = m.r;
    Matrix result(r);
    result.MakeI(); //MakeI是将result变为单位矩阵
    Matrix base = m;
    while(k) {
        if( k & 1)
            result = Product(result,base,p); //result*base mod p
        k >>= 1;
        base = Product(base,base,p);
    }
    return result;
}
```

欧几里得算法求最大公约数

```
int Gcd(int a,int b)
{
  if( b == 0)
      return a;
  return Gcd(b,a%b);
}
```

最小公倍数：lcm(a,b) = a*b/gcd(a,b)

扩展欧几里得算法

ax+by=gcd(a,b) 有整数解(x,y)

<=>

bx+(a%b)y = gcd(a,b) 有整数解(x1,y1)，且

ax+by=gcd(a,b)中的

x = y1， y = x1-[a/b]*y1　　　[] 是去尾取整

因此，可以在求gcd(a,b)的同时，对 ax+by=gcd(a,b)求解

扩展欧几里得算法

```
int GcdEx(int a,int b,int &x ,int & y)
//求 ax+by=gcd(a,b)的整数解,返回gcd(a,b)
{
   if( b == 0) {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
   }
   int x1,y1;
   int gcd = GcdEx(b,a%b,x1,y1);
   x = y1;
   y = x1 - a/b * y1;
   return gcd;
}
```

扩展欧几里得算法

- ax+by=c 有整数解的充要条件是 gcd(a,b)|c

- 设 d = gcd(a,b)，k = c/d,
  ax+by = d的解是 (x1,y1) 则
  ax+by = c的解集是：
  x = k*x1 + t*(b/d)
  y = k*y1 – t*(a/d)　t为任意整数

扩展欧几里得算法求ax ≡ c(mod b)

- 求ax ≡ c (mod b) 等价于求 ax+by = c
- 设 d = gcd(a,b)， k = c/d,
  ax+by = d的解是 (x1,y1) 则

- 故ax≡c(mod b) 的解集是：
  x = k*x1 + t*(b/d)　　　t为任意整数
  其中模b不同的解共有 d 个，为：
  x = k*x1 + t*(b/d)　t=0,1,..d-1

扩展欧几里得算法求ax ≡ c(mod b)

- 求ax ≡ c (mod b) 的最小非负整数解：

  令 ans = k * x1;

  s = b/d;

  则 x = ans + t*s t为任意整数

  则最小非负整数解是：(ans%s + s)%s

扩展欧几里得算法求ax ≡ c(mod b)

x = ans + ts   t 为任意整数

对 ans 分以下情况讨论，最小的非负x值分别为：

1） s<= ans   则 t 应为负数，设为t = -n (n > 0)

则 最小非负x是： ans - n*s   n是最大的使该式子为非负的

2） 0<ans <s   则 t = 0 ， 答案是 ans

3） ans = 0 答案是 0

4） -s<ans<0   答案是 ans+s

5） ans < -s 答案是 ans + ns n是最小的使该式子为非负的

以上五种情况都和(ans%s+s)%s相同

扩展欧几里得算法求ax ≡ c(mod b)

规定，若a,b > 0

(-a) % b = (-a) + (a/b) * b   "/" C语言除法

-3 % 5 = -3
-7 % 5 = -2

例题： 百练2115 C Looooops

- 对下面的循环：

```
for (variable = A; variable != B; variable += C)
    statement;
```

A,B,C和variable都是K(K<=32)比特的无符号数,+=运算的结果也是K比特的无符号数，给定 A,B,C和K，问循环执行多少次。

例题： 百练2115 C Looooops

- 对下面的循环：

```
for (variable = A; variable != B; variable += C)
    statement;
```

A,B,C和variable都是K(K<=32)比特的无符号数,+=运算的结果也是K比特的无符号数，给定 A,B,C和K，问循环执行多少次（可能无穷多次）。

- 实际上就是求 $A + CX \equiv B \pmod{2^K}$ 的最小非负整数解
- $CX \equiv (B-A) \pmod{2^K}$

中国剩余定理

- 孙子定理，韩信点兵，隔墙算，鬼谷算，大衍求一术...
- "物不知数"问题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰：'二十三.' 术曰：三三数之剩二，置一百四十，五五数之剩三，置六十三，七七数之剩二，置三十，并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得. 凡三三数之剩一，则置七十，五五数之剩一，则置二十一，七七数之剩一，则置十五，即得."
  --孙子算经

中国剩余定理

- 设n组数(ai， bi)， 其中bi两两互素

- 求x使得

```
x = a1 mod b1
x = a2 mod b2
...
x = an mod bn
```

中国剩余定理

- 给定两两互质的正整数$n_1, n_2, ..., n_k$，要求找到最小的正整数x，满足方程组$x \equiv a_i \pmod{n_i}$　$(i=1,2...k)$

- 算法步骤：
  - 令$n=n_1 n_2 ... n_k$，$m_i=n/n_i$
  - 显然$\gcd(m_i, n_i)=1$，利用扩展欧几里德算法计算出x_i满足$m_i x_i \equiv 1 \pmod{n_i}$
  - $x = (a_1 x_1 m_1 + a_2 x_2 m_2 + ... + a_k x_k m_k) \bmod n$
  - 此方程组任意两个解模 n 同余，因此x就是最小的

中国剩余定理

- 此方程组任意两个解模 n 同余

证：

设有两个解 x1,x0 则：

$x1 \equiv a_i \pmod{n_i}$ (i=1,2...k)

$x0 \equiv a_i \pmod{n_i}$ (i=1,2...k)

=> $n_i | (x1-x0)$ (i=1,2...k)

$n_i | (x1-x0)$ 且n_i两两互质 =>

$n | (x1-x0)$ => $x1 \equiv x0 \pmod{n}$

中国剩余定理的一般情况

- 给定正整数$n_1, n_2, ..., n_k$(未必两两互质),要求找到x,满足$x \equiv a_i \pmod{n_i}$　$(i=1,2...k)$

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{n_2}$$

=> $x + u*n_1 = a1$ 且 $x - v*n_2 = a_2$

=> $n_1*u + n_2*v = (a_1-a_2)$

此关于u,v的方程，当且仅当 $\gcd(n_1,n_2) \mid (a_1-a_2)$时有解

中国剩余定理的一般情况

- 设用扩展欧几里得算法求得

  $n_1*u + n_2*v = (a_1-a_2)$

  根为 (u_0,v_0) 则：

则此方程解集为：

$u = u_0 + t*(n_2/gcd(n_1,n_2))$

$v = v_0 - t*(n_1/gcd(n_1,n_2))$ t为任意整数

- $x + u*n_1 = a_1$ =>

  x的解集为：$a_1 - u_0n_1 - tn_1n_2/gcd(n_1,n_2)$

  即：$x = a_1 - u_0n_1 - t*lcm(n_1,n_2)$ t为任意整数

中国剩余定理的一般情况

$x = a_1 - u_0 n_1 - t*lcm(n_1,n_2)$ t为任意整数

等价于将

$x \equiv a_1 (\bmod n_1)$

$x \equiv a_2 (\bmod n_2)$

合并为:

$x \equiv a_1 - u_0 n_1 \ (\bmod lcm(n_1,n_2))$

再继续两个方程并为一个，最后就能求得x的解空间

线性筛法求素数

- 朴素筛法求n以内的所有质数

  - 初始时容器内为2到n的所有数
  - 取出最小的数p，p一定是质数，删去除p外的所有p的倍数
  - 重复上述步骤直到向后找不到没被删掉的数

  - 缺陷：一个数可能被重复删去多次，影响效率

线性筛法求素数

- 改进：

对每个素数p 考虑所有i，若p小于等于i的最小素因子，则将i*p去掉

$i = q_1*q_2*...q_n$ q_i是素数, $q_1 >= p$

$i*p = p*q_1*q_2*...q_n$

i*p只会被删掉一次,只在考察p的时候被删，不会在考察q_1 q_2 q_n的时候被删

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
int main()  {
        int n;   cin >> n; //求n以内素数
        vector<int> prime;  vector<bool> isPrime(n+1);
        for(int i = 1;i <= n; ++i)
                isPrime[i] = true;
        for(int i = 2; i <= n; ++i) {
                if( isPrime[i]) //处理到i时它还没被删掉，则i为素数
                        prime.push_back(i);
                for(int j = 0;j < prime.size() ; ++j) {
                      if( i*prime[j] <= n)
                                isPrime[i*prime[j]] = false;
                      else break;
                      if( i % prime[j] == 0)// prime[j]是i的最小素因子
                                break;
                }
        }
        for(int i = 0;i < prime.size(); ++i)
                cout << prime[i] << endl;
        return 0;
}
```

欧拉函数和欧拉定理

- 欧拉函数：
  $\varphi(n)$ = 小于 n 且和 n 互质的正整数(包括1)的个数 (n为正整数)

- 完全余数集合：
  Zn = { 小于 n 且和 n 互质的数 }　　|Zn| ＝$\varphi(n)$

- 对于素数 p ，$\varphi(p) = p - 1$

欧拉函数和欧拉定理

- 两个不同素数 p，q， n=p*q，则

$$\varphi(n) = (p-1) * (q-1) = \varphi(p) * \varphi(q)$$

证：

Zn = {1, 2, 3, ... , n - 1} -
{p, 2p, ... , (q - 1) * p} -
{q, 2q, ... , (p - 1) * q}

$$\varphi(n) = (n-1) - (q-1) - (p-1)$$
$$= (p*q-p) - (q-1) = p(q-1) - (q-1)$$
$$= (p-1) * (q-1) = \varphi(p) * \varphi(q)$$

欧拉函数和欧拉定理

消去律：如果 $gcd(c,p) = 1$ ，则 $ac \equiv bc \bmod p \Rightarrow a \equiv b \bmod p$ 。

欧拉定理：互质的正整数a和n，有 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$

证：

(1) 令 $Zn = \{x_1, x_2, ..., x_{\varphi(n)}\}$ ，

$S = \{ax_1 \bmod n, ax_2 \bmod n, ... , ax_{\varphi(n)} \bmod n\}$ ，

则可证 $Zn = S$

① a与n互质且 x_i与 n 互质 => ax_i与n互质=> $ax_i \bmod n \in Zn$ 。

② 若 $i \neq j$ ，则$x_i \neq x_j$，且由 a，n互质可得 $ax_i \bmod n \neq ax_j \bmod n$（否则根据消去率，$x_i=x_j$）。

(2) $a^{\varphi(n)}x_1x_2...x_{\varphi(n)} \bmod n$

$\equiv (ax_1)(ax_2)...(ax_{\varphi(n)}) \bmod n$

$\equiv (ax_1 \bmod n)(ax_2 \bmod n)...(ax_{\varphi(n)} \bmod n) \bmod n$

$\equiv x_1x_2... x_{\varphi(n)} \bmod n$

因为 $x_i(1 \le i \le \varphi(n))$与n互质所以 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ （消去律）。

费马小定理

若正整数 a 与素数 p 互质，则有 $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ 。

$\varphi(p) = p - 1$，代入欧拉定理即证。

欧拉函数的公式

- (1) p为素数，正整数 $n = p^k$，则

$$\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$$

证：

小于 p^k 的正整数个数为 $p^k - 1$个，其中
和 p^k 不互质的正整数有$\{p, 2p, 3p..., (p^{k-1}-1)p\}$ 共计 $p^{k-1} - 1$ 个
所以 $\varphi(n) = p^k - 1 - (p^{k-1} - 1) = p^k - p^{k-1}$ 。

欧拉函数的公式

- (2) p,q是两个互质的正整数，n=pq则：

  $\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q)$

证：前面证过

- (3) 当b是质数，a%b=0，则:

  $\varphi(ab)=\varphi(a)b$

证：

设$a=kb^n$且$gcd(k,b)=1$，则$\varphi(a)=\varphi(k)\varphi(b^n)$，$\varphi(k)=\varphi(a)/\varphi(b^n)$

$$\varphi(ab) = \varphi(kb^{n+1}) = \varphi(k)\varphi(b^{n+1}) = (\varphi(a)/\varphi(b^n))*\varphi(b^{n+1})$$

$$= \varphi(a)*(\varphi(b^{n+1}) / \varphi(b^n))$$

$$= \varphi(a)*(b^{n+1}-b^n)/(b^n-b^{n-1}) \quad \text{根据 (1)}$$

$$=\varphi(a)b$$

欧拉函数的公式

- (4) 对任意n：

$$\varphi(n) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_n)$$

$n = p_1^{a1}p_2^{a2}\ldots p_n^{an}$ (p_i为素数).

证：

$\varphi(n) = \varphi(p_1^{a1})\varphi(p_2^{a2})\ldots\varphi(p_n^{an})$

$=(p_1-1)p_1^{(a1-1)}(p_2-1)p_2^{(a2-1)}\ldots(p_n-1)\ p_n^{(an-1)}$

$=(p_1^{a1}p_2^{a2}\ldots p_n^{an})(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)/(p_1p_2\ldots p_n)$

//=>对n>2 φ(n)为偶数

$=n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_n)$

欧拉函数的公式

➢递推式:质数p满足p|x,若p^2|x,则φ(x)=φ(x/p)*p,若p^2|x不成立则φ(x)=φ(x/p)*(p-1)

(1)若p^2|x不成立，因x/p和p互质，故:

φ(x)=φ(x/p)*φ(p)=φ(x/p)*(p-1)

(2)若p^2|x，因 p|(x/p)且p是质数,故

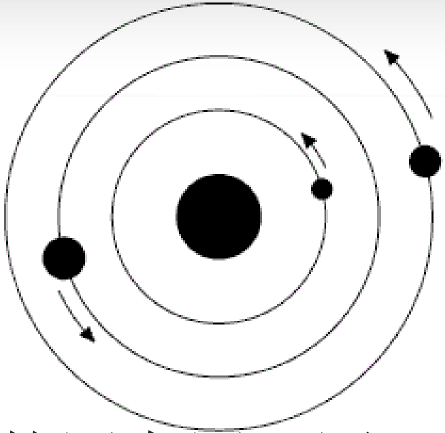
φ(x) = φ(x/p * p)=φ(x/p)*p

(当b是质数，a%b=0，则: φ(ab)=φ(a)b

用递推式求欧拉函数

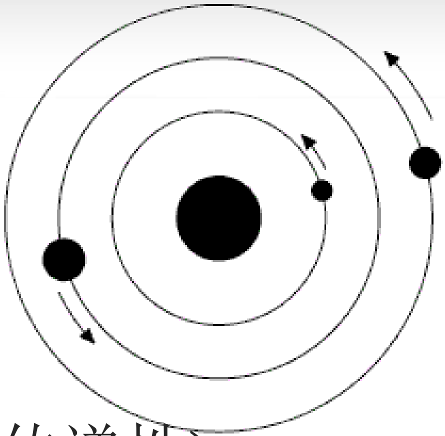
```
int euler(int n)   //求φ(n)
{//递推式:质数p满足p|x,若p²|x,则φ(x)=φ(x/p)*p,若p²|x不成立则
φ(x)=φ(x/p)*(p-1)
    int ret=1;
    for(int i=2;i*i<=n;i++){ //只要考虑sqrt(n)以内的素数
        if(n%i==0){//i若是合数则不可能满足此条件,因n里面已经不含小于i的素因子
            n/=i,ret*=i-1; //最后总会剩一个i,n/i不整除i
            while(n%i==0){
                n/=i,ret*=i;
            }
        }
    }
    if(n>1) ret*=n-1;//到此所有<= sqrt(最初的n)的因子都已经去掉。如果
还剩一个因子，该因子一定 > sqrt(最初的n)，则该因子只有一个
    return ret;
}
```

POJ3101 Astronomy



- 题目大意:
  - 有n个行星,它们的轨道是同一平面上的同向同心圆,且它们始终做匀速圆周运动,周期t_i已知
  - 所有卫星都处于过圆心的某条直线上的现象,称为卫星平行
  - 求相邻两次卫星平行现象的间隔时间,用分数表示

POJ3101 Astronomy



- 算法思路:
  - 所有卫星平行<=>任意两个卫星平行<=>相邻两个卫星平行(卫星平行具有传递性)
  - 两个卫星i,j平行的最小时间间隔t为它们的运行圈数差半圈，即$|t/t_i-t/t_j| = 0.5$,故 $t =|0.5/(1/t_i-1/t_j)|$
  - 写出相邻两个卫星平行的时间间隔$d_i=b_i/a_i$,则问题转化为求这n-1个分数的"最小公倍数"（b_i a_i互质）
  - 分母$p=gcd(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$,分子$q=lcm(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$,约分即得最终答案

POJ2142 The Balance

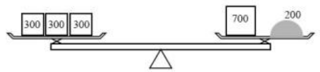


Figure 1: To measure 200mg of aspirin using three 300mg weights and one 700mg weight

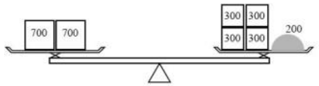


Figure 2: To measure 200mg of aspirin using four 300mg weights and two 700mg weights

- 题目大意:
  - 现有质量为a和b的砝码,数量不限
  - 要求在天平上称出质量为d的物品,天平左右均可放砝码
  - 求一种可行方案,要求:放置砝码数量尽可能少;数量相同时,总质量尽可能少

POJ2142 The Balance

- 问题转化:求ax+by=d的一组整数解(x,y),要求|x|+|y|尽可能小,若相等,则a|x|+b|y|尽可能小(x<0,表示砝码和物体放在同一侧)
- 先求出不定方程的一组特解(x_0,y_0),令m=gcd(a,b),a'=a/m,b'=b/m,则通解为x=x_0+b't,y=y_0-a't (a',b'>0,t为整数)
- |x|+|y|最小时, 要么x是最小正解，要么y是最小正解。比较一下这两种情况，取一种a|x|+b|y|更小的即可

扩展欧几里得算法

- ax+by=c 有解的充要条件是 gcd(a,b)|c

- 设 d = gcd(a,b)，k = c/d,
  ax+by = d的解是 (x1,y1) 则
  ax+by = c的解集是:
  x = k*x1 + t*(b/d)
  y = k*y1 - t*(a/d) t为任意整数

POJ2689 Prime Distance

- 给定区间[L,U],L和U可以很大,但区间长度不超过10^6 (1<=L< U<=2,147,483,647)
- 求这个区间中最近和最远的两对素数

POJ2689 Prime Distance

- 直接试除?耗费时间太长
- 直接筛法?耗费空间太大
- 区间长度不大->筛法+试除
- 先用筛法求出不大于sqrt(U)的所有素数,然后用这些素数一一试除

POJ2478 Farey Sequence

– 求所有分母不大于n的既约真分数个数

POJ2478 Farey Sequence

- 分母为x的既约真分数有φ(x)个
- 分母不大于n的既约真分数个数为φ(1)+φ(2)+...+φ(n)

POJ3696 The Luckiest number

- 定义:只含有数字8的数为幸运数
- 给定正整数L($1 \le L \le 2{,}000{,}000{,}000$).,求L的所有倍数中最小的幸运数的位数

POJ3696 The Luckiest number

- 定义:只含有数字8的数为幸运数
- 给定正整数L($1 \le L \le 2,000,000,000$).,求L的所有倍数中最小的幸运数的位数

The Luckiest number

- 设最终答案为x,则x满足$(10^x-1)/9*8\equiv 0 \pmod{L}$
- 化简上述式子:
  $\Rightarrow (10^x-1)*8\equiv 0 \pmod{9L} \Rightarrow 10^x-1\equiv 0 \pmod{9L/gcd(9L,8)}$
  $\Rightarrow 10^x\equiv 1 \pmod{9L/gcd(9L,8)}$
- 令$m=9L/gcd(9L,8)$,若$gcd(10,m)>1$,显然无解
- 若$gcd(10,m)=1$,由欧拉定理:$10^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$
- 不过,我们要求的是最小解,而$\varphi(m)$只是一个可行解
- 可以证明,最小解一定是$\varphi(m)$的一个约数
- 枚举$\varphi(m)$所有约数，用快速幂验证即可
- $10^k\equiv 1 \pmod{n}$ 则成立的最小 k 是$\phi(n)$的约数 这个性质竞赛中经常用到