ENSIAS
$2^{\text{ème}}$ année: 2019/2020

Statistique
Mr S. ACHCHAB

Série:2

Echantillonnage et Estimation

Exercice 1

Un commerçant propose à sa clientèle six articles électroménagers. Considérons la population mère constituée par ces six articles codés ω_i ($i \in 1, ..., 6$). Soit X la variable qui représente "le nombre d'unités en stock de chaque article au moment de l'inventaire".

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
X	0	1	2	3	0	1

1. Détreminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer la moyenne $\mu = E(X)$ et la variance $\sigma^2 = Var(X)$, ainsi que σ^4 et le moment centré $\mu_4 = E((X-\mu)^4)$.

2. Dans cette population d'effectif $N = 6$, on tire avec remise des échantillons de taille $n = 2$. X_1 est le nombre d'unités en stock pour le premier article tiré et X_2 est le nombre d'unités en stock pour le second. On pose
$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2).$$
Détreminer les valeurs prises par $\overline{X}$ sur tous les échantillons possibles, en déduire sa loi, calculer l'espérance empirique $E(\overline{X})$ et la variance empirique $Var(\overline{X})$. Vérifier les résultats théoriques du cours.

3. On considère la statistique S^2 définie par
$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) - \overline{X}^2$$
Déterminer les valeurs prises par S^2 sur tous les échantillons de taille $n = 2$; en déduire sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Dans un pays les statistiques font ressortir que 64% des ménages possèdes une voiture de tourisme. Quelle est la probabilité que sur un échantillon au hasard de 225 ménages, la proportion de ceux qui possèdent une voiture soit:

(a) comprise entre 40% et 70%.

(b) supérieure à 60%.

(c) inférieure à 25%

Exercice 3

Un dispositif de signalisation lumineuse comporte trois lampes; celle qui en service est relayée automatiquement en cas de défaillance.
Quelle est la probabilité que l'ensemble fonctionne:

(a) plus de 5000 heures.

(b) moins de 4200 heures.

On sait que la durée de vie des lampes utilisée est une variable normale de moyenne 1500 heures et d'écart-type 150 heures.

Exercice 4

Un paquet de tabat produit par la régie des Tabac a un poids moyen de $50g$ et un écart-type de $2g$. En supposant que ce tabac soit livré par lots de mille paquets; quelle est la probabilité que la différence $A - B$ entre les poids de deux lots A et B excède $200g$.

Exercice 5

Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de réponses reçues chaque jour. On suppose que X suit une loi normale de paramètres μ et σ. Durant les 10 jours, on a obtenu

$$x_1 = 200, \quad x_2 = 240, \quad x_3 = 190, \quad x_4 = 150, \quad x_5 = 220$$

$$x_6 = 180, \quad x_7 = 170, \quad x_8 = 230, \quad x_9 = 210, \quad x_{10} = 210$$

Donner une estimation ponctuelle de μ et σ^2.

Exercice 6

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un n-échantillon de loi de Bernouilli $B(p)$ et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

1. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de p.
2. On cherche à estimer la variance $\sigma^2 = p(1-p)$. On propose l'estimateur

$$U_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n).$$

   (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

   (b) Montrer que U_n est un estimateur biasé de σ^2.

   (c) Donner un estimateur V_n sans bias de σ^2, fonction de U_n.

Exercice 7

A la veille d'une consultation électorale, on a interrogé cent électeurs constituant un échantillon au hasard. 64 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour le condidat Y.
Entre quelle limite, au moment du sondage, avec une probabilité de 0.95, la proportion du corps électoral favorable au condidat Y se situe-t-elle?

Exercice 8

Dans un centre de recrutement, on a mesuré la taille de 400 conscrits. Pour cet échantillon pris au hasard, la taille moyenne $\bar{x}$ est égale à 172 cm et l'écart-type estimé s est égal à 4 cm.
Construire un intervalle qui contienne avec une probabilité 0.99 la taille moyenne de l'ensemble des conscrits de ce centre de recrutement.

Exercice 9

Si l'écart-type de la durée de vie d'un modèle de lampe électronique est estimé à 100 heures, quelle doit être la taille de l'échantillon à prélever pour que l'erreur sur l'estimation de la durée de vie moyenne n'exède pas 20 heures et avec une probabilité

a) de 95%

b) de 99%