Cas 1

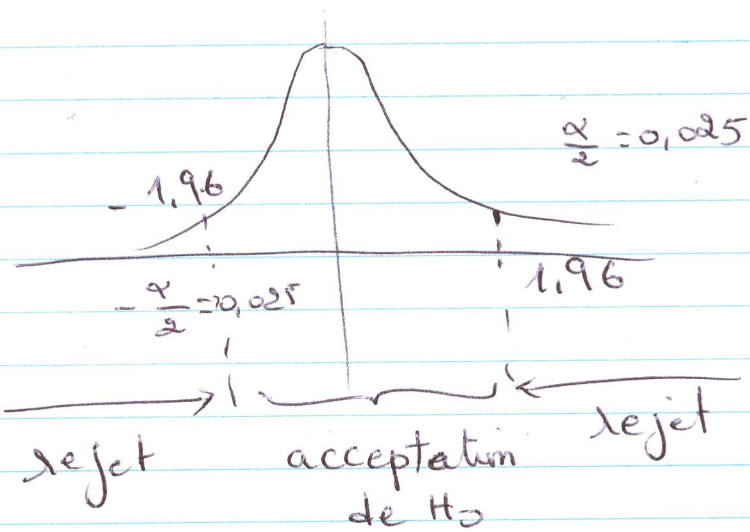
1) $H_0 : m = 16$; $H_1 : m \neq 16$ (test bilatéral

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

avec $\mu = 16$ $\sigma = 0{,}8$ $n = 30$

Niveau de confiance $\alpha = 5\% = 0{,}05$

- pour tester $H_0 : m = 16$ une statistique possible est $Z = \frac{\bar{x} - 16}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ $n \geq 30$
- niveau de probabilité $\alpha = 0{,}05$



* H_0 est rejetée si $Z \leq -1{,}96$ ou $Z \geq 1{,}96$
H_0 est acceptée si $-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96$

H_0 acceptée $\Leftrightarrow$ $V_1 < \bar{X} < V_2$

avec $V_1 = 16 - a$
$V_2 = 16 + a$

donc

$$P\left[V_1 < \bar{X} < V_2 \right] = 0{,}95 = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{-a\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X}-16}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} \right] = 0{,}95$$

$$2\Pi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} = 1{,}96 \Rightarrow a = \frac{0{,}8 \times 1{,}96}{\sqrt{30}}$$

$$a \simeq 0{,}29$$

donc $V_1 = 15{,}71$ $\quad V_2 = 16{,}29$

2) $\bar{X} = 16{,}32 > V_2$ donc H_0 est rejetée

3) $\bar{X} = 15{,}82$, $V_1 < \bar{X} < V_2 \rightarrow H_0$ est acceptée

Cas 2

$H_0 : m = 2,2$ $\qquad$ $H_1 : m \neq 2,2$

* $n = 45 \geq 30$ $\qquad$ $\sigma = 0,20$ $\qquad$ $\alpha = 0,02$

$V_1 = 2,2 - a$ $\qquad$ $V_2 = 2,2 + a$

$$\bar{X} \sim N\left(2,2 \, , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1 - \alpha = 0,98 = P\left[V_1 < \bar{X} < V_2\right]$$

$$= P\left[-\frac{a\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X} - 2,2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right]$$

$$= 2F\left[\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right] - 1 = 0,98$$

$$F\left[\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right] = 0,99$$

$$\frac{a\sqrt{n}}{\sigma} \simeq 2,33$$

$$a \simeq \frac{2,33 \times 0,2}{\sqrt{45}} \simeq 0,0694$$

$V_1 = 2,13$ $\qquad$ $V_2 = 2,267$

$\bar{x} = 2,39$ $\qquad$ $V_1 < \bar{x} < V_2$ $\qquad$ donc H_0 est accepte

Cas 3

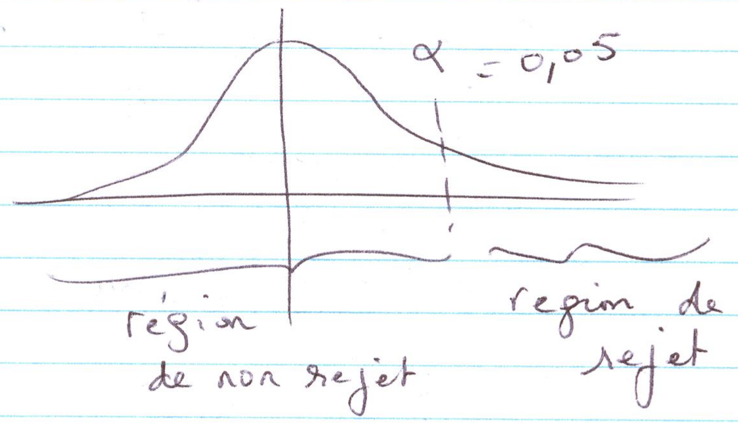
$p = 0,02$

$n = 200 \quad ; \quad \alpha = 0,05$

1) $F \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

$H_0 = \quad p = 0,02$

$H_1 : \quad p > 0,02$



H_0 est rejetée si $\quad z > 1,645$

$V^a = 0,02 + a$

$0,95 = P\left[F < 0,02 + a\right]$

$P\left[\frac{F - 0,02}{\sqrt{\frac{0,02 \quad 0,98}{200}}} < \frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0,02 \times 0,98}}\right] = 0,95$

$\Pi\left(\frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0,02 \times 0,98}}\right) = 0,95$

$\frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0,02 \times 0,98}} \simeq 1,645 \quad$ donc

$$a \simeq 1,65 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{200}} = \cancel{0,0098} \simeq 0,016$$

donc $v^* = 0,036 = 3,6\,\%$

2) 4 tubes défectueux dans 200 tubes

donc $f = \frac{4}{200} = 2\,\% < v^*$

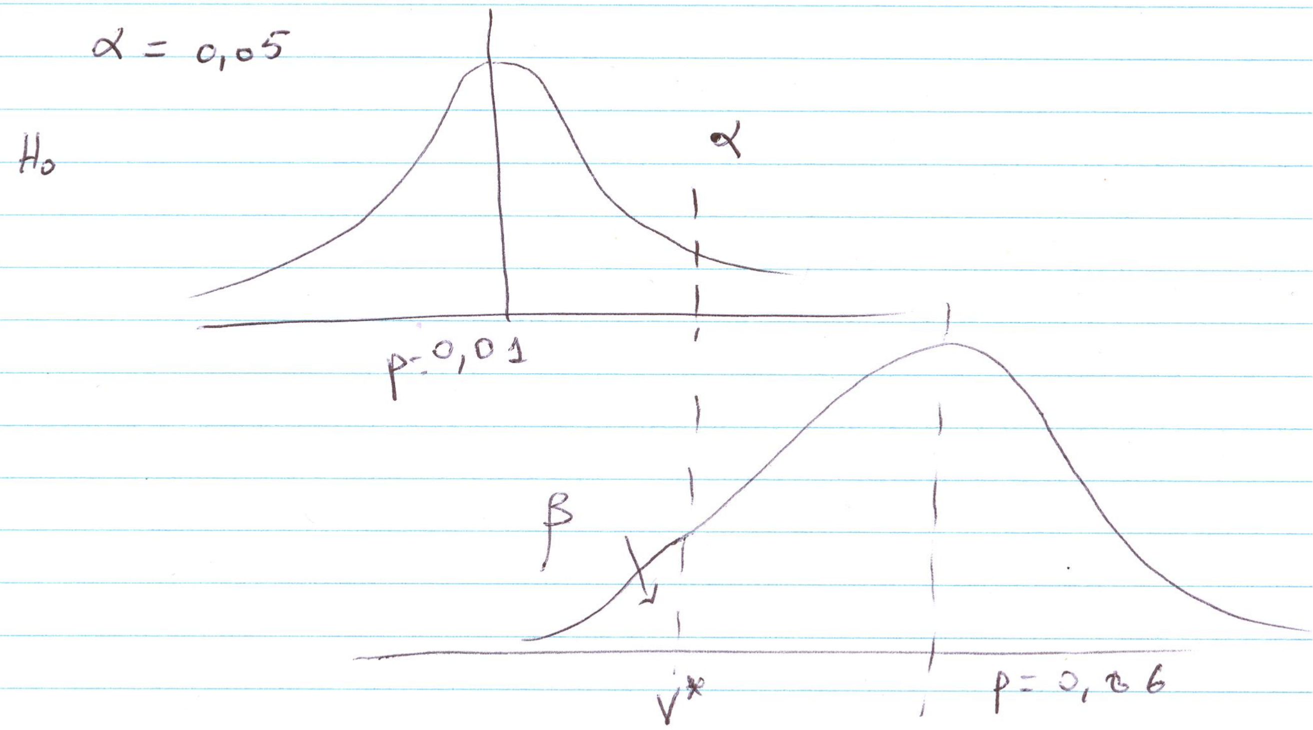
donc le lot peut être considéré comme acceptable

3) Erreurs de $2^{ème}$ espèce

H_0 : $p = 0,02$

$H_1 = p = 0,06$

$\alpha = 0,05$



$V^* = 0{,}036$ pour $p = 0{,}02$

β?

$$F \sim N\left(0{,}06 \, ; \underbrace{\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{200}}}_{0{,}0167}\right)$$

$$\beta = P\left[F \leqslant 0{,}036\right]$$

$$= P\left[\frac{F - 0{,}06}{\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{200}}} \leqslant 0{,}036\right]$$

$$= P\left[T \leqslant -1{,}429\right]$$

$$\beta = 1 - P\left[T < 1{,}429\right]$$

$$\beta \simeq 1 - 0{,}9236$$

$$\beta = 7{,}64\ \%$$