ENSIAS **Statistique**

$1^{\text{ère}}$ année: 2010/2011 **S. Achchab**

SÉRIE:3
Estimation

Exercice 1

Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de réponses reçues chaque jour. On suppose que X suit une loi normale de paramètres μ et σ. Durant les 10 jours, on a obtenu

$$x_1 = 200, \quad x_2 = 240, \quad x_3 = 190, \quad x_4 = 150, \quad x_5 = 220$$

$$x_6 = 180, \quad x_7 = 170, \quad x_8 = 230, \quad x_9 = 210, \quad x_{10} = 210$$

Donner une estimation ponctuelle de μ et σ^2.

Exercice 2

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un n-échantillon de loi de Bernouilli $B(p)$ et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

1. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de p.
2. On cherche à estimer la variance $\sigma^2 = p(1-p)$. On propose l'estimateur

$$U_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n).$$

   (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

   (b) Montrer que U_n est un estimateur biasé de σ^2.

   (c) Donner un estimateur V_n sans bias de σ^2, fonction de U_n.

Exercice 3

A la veille d'une consultation électorale, on a interrogé cent électeurs constituant un échantillon au hasard. 64 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour le condidat Y.
Entre quelle limite, au moment du sondage, avec une probabilité de 0.95, la proportion du corps électoral favorable au condidat Y se situe-t-elle?

Exercice 4

Dans un centre de recrutement, on a mesuré la taille de 400 conscrits. Pour cet échantillon pris au hasard, la taille moyenne $\bar{x}$ est égale à 172 cm et l'écart-type estimé s est égal à 4 cm.
Construire un intervalle qui contienne avec une probabilité 0.99 la taille moyenne de l'ensemble des conscrits de ce centre de recrutement.

Exercice 5
Si l'écart-type de la durée de vie d'un modèle de lampe électronique est estimé à 100 heures, quelle doit être la taille de l'échantillon à prélever pour que l'erreur sur l'estimation de la durée de vie moyenne n'exède pas 20 heures et avec une probabilité

a) de 95%

b) de 99%

Exercice 6
Une machine fabrique des rondelles en série. Le diamètre d est une variable gaussienne dont l'écart-type est égale à 1 millimètre. On prélève au hasard un échantillon de neuf rondelles. Les mesures des diamètres, en millimètres, sont les suivantes:

20.1; 19.9; 20.0; 19.8; 19.7; 20.2; 20.1; 23.1; 22.8

1. Construire un intervalle qui contienne avec une probabilité de 0.95 la moyenne m de d.
2. Même question en supposant que l'écart-type de d a une valeur inconnue.
3. En utilisant les données numériques de 1), l'écart-type de d étant supposé inconnu, construire un intervalle qui contienne avec une probabilité de 0.9 la variance de d.

Exercice 7
Le chiffre d'affaire mensuel de l'entreprise TEX suit une loi normale de moyenne μ inconnue, mais dont l'écart type est évalué à 50 M Dh. Sur les 12 derniers mois, la moyenne des chiffres d'affaire mensuels a été de 200 M Dh.
Donner une estimation de μ par intervalle de confiance au niveau 0.98.

Exercice 8
Dans une station-service, on suppose que le montant des chèques "essence" suit une loi normale de paramètres μ et σ. On considère un échantillon de taille $n = 50$ et on obtient une moyenne de 130 Dh et un écart-type de 28 Dh.
Donner une estimation de μ par intervalle de confiance au niveau 0.95.

Exercice 9
Les salaires mensuels des employés d'une entreprise sont supposés suivre une loi normale de paramètres μ et σ.

a) Pour un échantillon de taille $n = 10$, on obtient une moyenne $m = 6500$ Dh et un écart-type $s = 900$ Dh. Donner un intervalle de confiance au niveau 0.95 pour μ.

b) Pour un échantillon de taille $n = 100$, on obtient une moyenne $m = 6200$ Dh et un écart-type $s = 850$ Dh. Donner un intervalle de canfiance au niveau 0.95 pour μ.

Exercice 10
On se propose d'étudier le corps électoral d'une région.

1. Lors d'un sondage sur un échantillon de 200 personnes, on a recueilli 84 intentions de vote en faveur du parti A. Soit p la proportion de votes pour A. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.

2. Avec un second échantillon de 100 personnes, on a obtenu 45 intentions de vote pour A. En réunissant les deux échantillons, donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.

3. Déterminer la taille n de l'échantillon qui permet d'obtenir un intervalle de confiance de largeur 0.02 sachant qu'une estimation ponctuelle de p a donné la valeur 0.4.

4. Pour mieux cerner la population votant pour A, on extrait un échantillon de n personnes ayant l'intention de voter pour A. On suppose que l'âge des individus suit une loi normale de paramètres μ et σ.

   (a) Le premier échantillon de taille $n = 15$ a donné une moyenne d'âge de 45 ans et un écart-type de 10 ans. Donner un intervalle de confiance pour μ au niveau 98%.

   (b) Le second échantillon de taille $n = 100$ a donné une moyenne d'âge de 47 ans et un écart-type de 9 ans. Donner un intervalle de confiance pour μ au niveau 98%.

   (c) En gardant l'échatillon de taille 100, donner un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau 95%.