SÉRIE:1
Echantillonnage

Exercice 1
Un commerçant propose à sa clientèle six articles électroménagers. Considérons la population mère constituée par ces six articles codés ω_i ($i \in 1, ..., 6$). Soit X la variable qui représente "le nombre d'unités en stock de chaque article au moment de l'inventaire".

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
X	0	1	2	3	0	1

1. Détreminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer la moyenne $\mu = E(X)$ et la variance $\sigma^2 = Var(X)$, ainsi que σ^4 et le moment centré $\mu_4 = E((X-\mu)^4)$.
2. Dans cette population d'effectif $N = 6$, on tire avec remise des échantillons de taille $n = 2$. X_1 est le nombre d'unités en stock pour le premier article tiré et X_2 est le nombre d'unités en stock pour le second. On pose
$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2).$$
Détreminer les valeurs prises par $\overline{X}$ sur tous les échantillons possibles, en déduire sa loi, calculer l'espérance empirique $E(\overline{X})$ et la variance empirique $Var(\overline{X})$. Vérifier les résultats théoriques du cours.
3. On considère la statistique S^2 définie par
$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) - \overline{X}^2$$
Déterminer les valeurs prises par S^2 sur tous les échantillons de taille $n = 2$; en déduire sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 2
Dans un pays les statistiques font ressortir que 64% des ménages possèdent une voiture de tourisme. Quelle est la probabilité que sur un échantillon au hasard de 225 ménages, la proportion de ceux qui possèdent une voiture soit:

(a) comprise entre 40% et 70%.

(b) supérieure à 60%.

(c) inférieure à 25%

Exercice 3
Un dispositif de signalisation lumineuse comporte trois lampes; celle qui en service est relayée automatiquement en cas de défaillance.
Quelle est la probabilité que l'ensemble fonctionne:

(a) plus de 5000 heures.

(b) moins de 4200 heures.

On sait que la durée de vie des lampes utilisée est une variable normale de moyenne 1500 heures et d'écart-type 150 heures.

Exercice 4

Etant donné un échantillon aléatoire de m éléments indépendants, extrait d'une population gaussienne de moyenne μ et décart-type σ. Montrer que la quantité $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}$ suit une loi de student à $n-1$ degrès de liberté.

Exercice 5

Lorsque une machine est bien réglée, elle produit des pièces dont le diamètre moyen est 25 mm. Deux heures après un réglage de la machine, on a prélevé au hasard un échantillon de neuf pièces. Les diamètres ont pour mesure, en millimètres: 22, 23, 21, 25, 24, 23, 22, 26, 21.
Que peut-on conclure, avec une probabilité de 95% quant à la qualité du réglage da la machine, après deux heures de fonctionnement?
(On admettra que le diamètre des pièces est une variable gaussienne).

Exercice 6[1]

Les éléments d'une population statistique X, ont été numérotés de 1 à N. On tire au sort avec remise n numéros. L'échantillon ainsi obtenu à pour moyenne $\overline{X}$.

(i) Montrer que $E(\overline{X}) = \mu$ et $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(ii) On suppose que le tirage des n numéros est effectué sans remise; établir que:

$$E(\overline{X}) = \mu \qquad \text{et} \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}.$$

Exercice 7

Un paquet de tabat produit par la régie des Tabac a un poids moyen de $50g$ et un écart-type de $2g$. En supposant que ce tabac soit livré par lots de mille paquets; quelle est la probabilité que la différence $A - B$ entre les poids de deux lots A et B excède $200g$.

Exercice 8[1]

1. On suppose que les poids de 3000 étudiants de l'Université Mohammed V suivent une loi normale de moyenne 68.0 kilogrammes et d'écart-type 3.0 kilogrammes. Si l'on extrait 80 échantillons de 25 étudiants chacun, quelle est la moyenne et l'écart-type théoriques de la distribution d'échantillonnage des moyennes pour
   (a) un échantillonnage non exhaustif ?
   (b) un échantillonnage exhaustif ?
2. Pour combien d'échantillons peut-on s'attendre à trouver une moyenne
   (a) comprise entre 68.0 Kg et 68.3 Kg?
   (b) inférieure à 66.4 Kg ?

[1] Ces exercices sont donnés sous forme de devoir libre et doivent être rendu dans la 2^{eme} semaine de chaque série de TD