18/02/15

on va chercher à estimer m. $\nearrow$ σ (écart-type) connu

$\downarrow$

intervalle de confiance

$$\mathbb{P}\left[\bar{X}_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$X_1, \ldots, X_n$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\to$ on le trouve à partir de la table de la loi centrée réduite.

$$\mathbb{P}\left[-t_\alpha < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < +t_\alpha\right] = 1-\alpha$$

$$2\Pi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$$

$$\Pi(t_\alpha) = 1 - \alpha/2$$

$\downarrow$

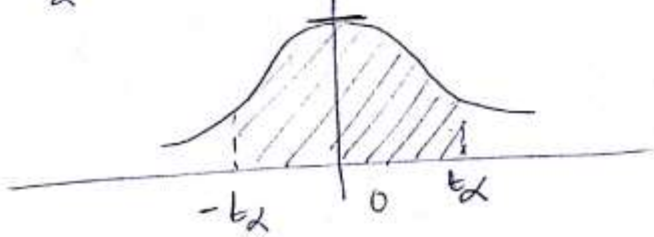
σ inconnu

$$\mathbb{P}[a < m < b] = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - m}{S/\sqrt{n-1}} \sim T(n-1)$$

$$S^* = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \bar{X})^2\right)^{1/2}$$

$$(1) \Rightarrow \mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{\bar{X}_n - b}{S/\sqrt{n-1}}}_{-t_\alpha} \leq \frac{\bar{X}_n - m}{S/\sqrt{n-1}} < \underbrace{\frac{\bar{X}_n - a}{S/\sqrt{n-1}}}_{+t_\alpha}\right] = 1 - \alpha$$



$$b = \bar{X}_n + t_\alpha S/\sqrt{n-1} \qquad a = \bar{X}_n - t_\alpha \times S/\sqrt{n-1}$$

$n = 17$, $\alpha = 0{,}05$ $\qquad$ $t_\alpha = 2{,}1199$ (table de Student)

∇

$$F(t_\alpha) = 1 - \alpha/2$$

$n \to \infty$ (Au-delà de 30, c'est valable)

la loi de Student peut être rapprochée par la loi centrée réduite

$$X \sim L(m, \sigma)$$

Th. Central Limite :

X v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n. échantillon aléatoire.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n \to +\infty}{\sim} N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

si vs avez un échantillon dont la taille ≥ 30,

vs êtes ds le cadre de l'app du TCL.

$$\bar{X}_n \sim N(m, \sigma/\sqrt{n})$$

$$\mathbb{P}[a < m < b] = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{\bar{X}_n - b}{\sigma/\sqrt{n}}}_{-t_\alpha} < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{\bar{X}_n - a}{\sigma/\sqrt{n}}}_{+t_\alpha}\right] = 1 - \alpha$$

si σ inconnu avec $n \geq 30$, la sol est de faire une estimat° ponctuelle de σ par S^*

Exo ①

le resp du dep RH d'une E a établi que les résultats à un test mesurant les compétences manuelles de la main d'oeuvre affectée à des tâches d'assemblage de pièces complexes sont distribuées d'après une loi normale $m = 72$, $\sigma^2 = 36$

1 - P (un employé sélectionné au hasard a un résultat inférieur à 63 au test) ?

2 - Echantillon aléatoire de 25 employés a subi le test.

i - distribut° de la moy. d'échantillon ?

ii - moy et écart-type de la distribut° de la moy ?

3 - P (m de cet échantillon < 63) ?

4 - P (m " " entre 69 et 75) ?

5 - P (écart entre la m de cet échan. et celle de la populat° soit > à 3) ?

Solution

$X \sim N(72, 6)$

1 - $\mathbb{P}[X < 63] = \mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{X-72}{6}}_{Z} < \frac{63-72}{6}\right]$

$= \mathbb{P}[Z < -1,5]$

$= \Pi(-1,5)$

$= 1 - \Pi(1,5)$

$= 1 - 0,93319 = 0,06691$

2 - $\bar{X} \sim N(72, \frac{6}{5})$ $N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

3 - $\mathbb{P}[\bar{X} < 63] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X} - 72}{1,2} < \frac{(63)}{} - \frac{9}{1,2}\right]$

$= \Pi(-7,5) = 1 - \Pi(7,5) \simeq 0$

5 - $\mathbb{P}[|\bar{X_n} - m| > 3] = 1 - \mathbb{P}[|\bar{X_n} - m| < 3]$

$= 1 - \mathbb{P}[-3 < \bar{X_n} - m < 3]$

$= 1 - \mathbb{P}\left[-2,5 \leq \frac{\bar{X_n} - m}{1,2} \leq 2,5\right]$

$= 1 - (2\Pi(2,5) - 1)$

$= 2 - 2\Pi(2,5)$

Exercice (2)

si $\bar{X}$ est la moy d'un éch. aléa. de taille n tiré d'une pop. normale de moy μ et de var $\sigma^2 = 100$, déterminer n tq.

a - $P(\mu - 10 < \bar{X} < \mu + 10) = 0,9544$

b - $P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) = 0,9544$

c - $P(\mu - 2 < \bar{X} < \mu + 2) = 0,9544$

Sol $\qquad X \sim N(\mu, 10)$

a - n ?

$\mathbb{P}(\mu - 10 < \bar{X}_n < \mu + 10) = 0,9544$

$\downarrow$ on peut la réecrire sous la forme

$P(|\bar{X}_n - \mu| < 10) = 0,9544$

$$\bar{X_n} \sim N\left(\mu, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(-\sqrt{n} < \frac{\bar{X_n} - \mu}{10/\sqrt{n}} < \sqrt{n}\right) = 0,9544$$

$2\Pi(\sqrt{n}) - 1 = 0,9544$

$\Pi(\sqrt{n}) = \frac{1,9544}{2} = 0,9772$

D'après la table $N(0,1)$, $\sqrt{n} \simeq 2$ i.e $n = 4$

b) $\Pi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0,9772 \rightarrow n \simeq 16$

c) $\Pi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,9772 \rightarrow n \simeq 100$

Exo 3

Un contrôle final a été effectué sur une prod. de 5000 lampes fluo, 14 jrs après fabricat° pr en vérifier des fuites possibles. 100 lampes ont été choisies au hasard. Sur les 100 lampes observées, 8 ont présenté une fuite de gaz.

a) Quelle est l'estimat° ponctuelle de la vraie proport° de lampes de la product° qui présentent une fuite de gaz ?

b) Estimer par intervalle de confiance la proport° de lampes de toute la product° qui présentent une fuite de gaz au niveau de confiance de 95% ?

c) Quelle est la marge d'erreur statistique associée à l'estimat° de p au niveau de confiance de 95% ?

Sol

a) X : Etat d'une lampe.

$$X = \begin{cases} 1 : \text{si la lampe présente une fuite} \\ 0 : \text{sinon.} \end{cases}$$

$X \sim B(p)$

$X_1, X_2, \ldots, X_{100} \qquad X_i \sim B(p)$

$F_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: Fréquence empirique

$f_n = 0{,}08$

(la vraisemblance)

$p \to$ pb qu'une lampe qlcque soit défectueuse. (quelconque)

on utilisera comme estimateur la freq. empirique.

L'estimat° ponctuelle de p est $f_n = 0{,}08$.

b- a, b ?

$$\mathbb{P}[a < p < b] = 0{,}95 \quad (*)$$

D'après le T.C.L : ($n = 100$ puisque) so we can use it !

$$F_n \sim N\left(p, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

$$F_n \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$(*) \to \mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{f_n - b}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{-t_\alpha} < \frac{f_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \underbrace{\frac{F_n - a}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{t_\alpha}\right] = 0{,}95$$

L'intervalle de confiance s'écrit alors :

$$a = f_n - t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$b = f_n + t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

n étant suffisament grand alors. $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ peut être estimée par. $\sqrt{f_n(1-f_n)}$

Finalement, l'intervalle de confiance :

$$a = f_n - t_\alpha \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}},$$

$$b = f_n + t_\alpha \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}$$

où $f_n = 0{,}08$ et $t_\alpha = 1{,}96$

c - $\cancel{t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

$$\mathbb{P}\left[|F_n - p| < t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = 0{,}95$$

$$M = t_\alpha \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}$$

04/03/2015 Statistiques

$X \sim L(m, \sigma)$

$X \sim N(m, \sigma)$

* Estimat° I.C m

→ σ est connue $\left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\right)$

→ σ est inconnu $\left(\frac{\bar{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} \sim T(n-1)\right)$

$(n \geq 30,$ TCL $\frac{\bar{x}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1))$

Ss la condition: $X \sim N(m, \sigma)$
(phénomène suit la loi normale)

* Estimat° IC de σ^2
→ m est connue
→ m inconnue

a, b ? tq $\mathbb{P}[a < \sigma^2 < b] = 1 - \alpha$

estimateur
- convergence
- biais (nul)
- variance (min)

$T_n \longrightarrow \sigma^2$

estimateur pour σ^2:

- $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$

convergent mais avec biais.

$\left(E(S_n^2) = \frac{n}{n-1} \sigma^2 \right)$

↓

$S_n^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$

$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2$

$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$

↳ meilleur estimateur possible de σ^2 (car je connais m)

• param. théorique
↳ porte sur la populat° entière.

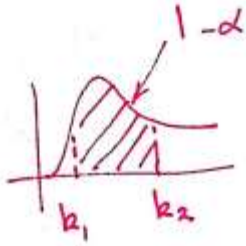
• param. empirique
↳ calculé à partir d'un échantillon

$$\frac{nT_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2$$

$\frac{X_i - m}{\sigma} \sim N(0,1)$ et indépendantes

$$\frac{nT_n}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$ (ki 2 à n d° de liberté)

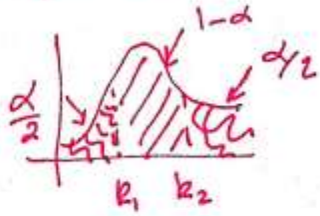
$$\mathbb{P}[a < \sigma^2 < b] = 1 - \alpha \qquad (*)$$



(*) devient :

$$\mathbb{P}\Big[\underbrace{\frac{nT_n}{b}}_{k_1} < \frac{n * T_n}{\sigma^2} < \underbrace{\frac{nT_n}{a}}_{k_2}\Big] = 1 - \alpha$$

on suppose que le risque α est sym. donc :



En supp que le risque est symétrique,

on obtient,

$$\mathbb{P}\left[\frac{nT_n}{\sigma^2} < k_1\right] = \frac{\alpha}{2} = \beta$$ pas le mm sens que le α du tableau.

$$\mathbb{P}\left[\frac{nT_n}{\sigma^2} \cancel{<} > k_2\right] = \frac{\alpha}{2}$$

$n = 20, \quad 1 - \alpha = 0,95$

↳ $\mathbb{P}\left[\frac{nT_n}{\sigma^2} < k_1\right] = 0,025 \quad \rightarrow k_1 = 9,59$

$$\mathbb{P}\left[\frac{nT_n}{\sigma^2} < k_2\right] = 0,975$$

$\rightarrow k_2 = 34,17$

$\mathbb{P}[P < k] = \beta$

$\longrightarrow \beta$

$\updownarrow$ ddl

$n = k$

* m inconnue :

$$n.\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

$$\sim \chi^2(n-1)$$

$$n.\frac{S^2}{\sigma^2} = L - R \quad \text{où} \quad L \sim \chi^2(n) \text{ et } R \sim \chi^2(1)$$

Pb de départ

a, b ? tq $\mathbb{P}[a < \sigma^2 < b] = 1-\alpha$

$\Rightarrow$ l'expression devient :

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{nS^2}{b}}_{k_1} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \underbrace{\frac{nS^2}{a}}_{k_2}\right] = 1-\alpha$$

$k_1 = 8,91$

Exercice 4

On veut contrôler par sondage l'exactitude d'un stock commercial comprenant plusieurs milliers d'articles. Déterminer la taille d'échantillon requise si l'on considère qu'une marge d'erreur inférieure ou égale à 2% est acceptable dans l'exactitude de l'inventaire, avec un niveau de confiance de 95,44 %.

$\Rightarrow$ n ?

$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - m| < 0,02] = 0,9544 \quad (*)$

~~Aune~~ Aucune loi de proba n'est évoquée

$\Downarrow$

TCL

avec $n >$

si $n > 30$ T.C.L $\bar{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$(*) \Rightarrow \mathbb{P}\left[-\frac{0,02\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0,02\sqrt{n}}{\sigma}\right] = 0,9544$$

$$2\Pi\left(\frac{0,02\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0,9544$$

$$\Pi\left(\frac{0,02\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,9772$$

D'après la table $N(0,1)$: $\frac{0,02\sqrt{n}}{\sigma} \simeq 2$

* si $n < 30$, il faut absolument connaître la loi de X (le phénomène de base auquel on fait face)

Exercice (5)

Une entreprise utilise une matière isolante dans l'assemblage de certains appareils de mesure de contrôle industriel. Ces composantes isolantes sont achetées d'un fournisseur américain et doivent respecter une certaine épaisseur. Lors d'un contrôle de réception, on a mesuré l'épaisseur d'un échantillon de vingt composantes :

Epaisseur en mm				
5,6	5,9	6,2	6,1	6,6
5,9	5,9	5,6	6,2	5,8
5,5	5,6	6,0	6,3	6,2
5,9	6,2	6,0	6,2	6,3

1 - Calculer l'épaisseur moyenne de cet échantillon.

2 - Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

3 - Calculer la variance et l'écart-type de l'épaisseur des composantes isolantes.

4 - Un lot est considéré comme acceptable si l'épaisseur moyenne observée dans un échantillon de 20 est inférieur à 5,8 et supérieur à 6,8.

Questions résolues via Excel :

1 - 6 mm

2 - max (~~étendue~~ plage) - min (plage) = 1,1

3 - var.P(plage) = 0,078

(~~[illegible]~~) ecartypep (plage) = 0,28

4 - Oui (moyenne entre les 2 bornes).

5 - Donner une estimation par intervalle de confiance de m et σ^2 au niveau 95 %

N.B : L'épaisseur de la matière isolante est supposée suivre la loi normale.

$\Rightarrow \quad \dfrac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

(donnez directement l'expression de l'intervalle de confiance mais rappelez les conditions)

a, b ?

tq $\mathbb{P}[a < \bar{x}_n < b] = 0,95 \quad (*)$

$a = \bar{x}_n - r \qquad b = \bar{x}_n + r \qquad \bar{x}_n = 6$

$(*)$ devient : $\mathbb{P}\left[\dfrac{\bar{x}_n - b}{S^*/\sqrt{n}} < \dfrac{\bar{x}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} < \dfrac{\bar{x}_n - a}{S^*/\sqrt{n}}\right] = 0,95$

$$\mathbb{P}\left[-\frac{r\sqrt{n}}{S^*} < \frac{\bar{x}_n - m}{S/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{r\sqrt{n}}{S^*}}_{t_\alpha}\right] = 0,95$$

ddl $= 19$ (taille échantillon $= 20 - 1$)

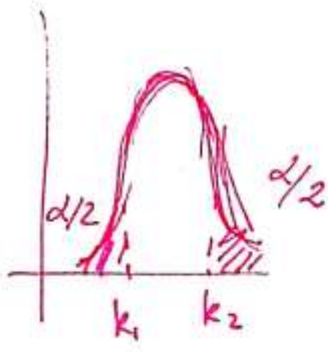
$\dfrac{r\sqrt{n}}{S^*} = 2,0930$ (D'après la table de student)

[on calcule $S^* = 0,29$ (Excel : ecartype(plage))]

où $n = 20$, $S^* \simeq 0,29$

Estimation de σ ?

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



$$\mathbb{P}\left[k_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < k_2\right] = 0,95$$

En supposant que le risque soit symétrique :

$$\mathbb{P}\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} < k_1\right] = 0,025$$

$$\mathbb{P}\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} < k_2\right] = 0,975$$

D'après la table $\chi^2(n)$ $\quad k_1 = 8,91$

$k_2 = 32,85$

$$P\left[\frac{nS^2}{k_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{k_1}\right] = 0,95$$

où $\quad n = 20 \quad S^2 = 0,078$ (Calculé ds la qst 2)

$k_1 = 8,91 \quad k_2 = 32,85.$

11/03/2015

porte sur tte la product°.

①

(moyenne théorique)

Test d'hypothèses

$m = 7$ mm

la prod. ne peut jamais être parfaitement uniforme

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ X_i = diamètre de la pièce i.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_i X_i$ $\bar{x}_n = 6,97$ mm.

Est-ce que le ~~producteur~~ contrôleur qualité peut accepter cette product° ?

La réponse n'est pas systématique. Il faudra suivre la démarche "Test d'hypothèses"

$n = 100$

① * n : Fixer la taille de l'échantillon.

② * Formuler l'hypothèse nulle

H_0 : $m = 7$ mm (Conformité)

③ * Formuler l'hypothèse alternative

H_1 : $m \neq 7$ mm (Non conformité)

④ * Fixer le niveau du risque tolérable (acceptable) α (risque de première espèce)

$\alpha = 5\% = 0,05$

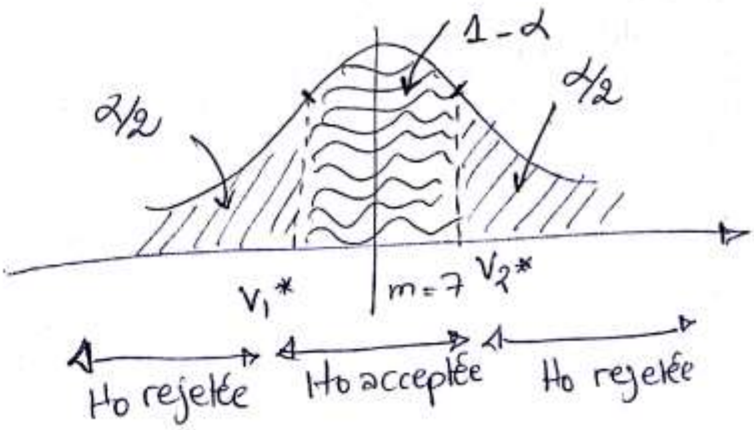
Applicat° :

$n = 100$

on peut donc appliquer le TCL

$\bar{X}_n \sim N(m, \sigma/\sqrt{n})$

Sous H_0



$V_1^* = m - r$

$V_2^* = m + r$

⚠ $V_1^* \neq m - \alpha m$

$$1-\alpha = 0,95 = \mathbb{P}\left[V_1^* < \bar{x} < V_2^* \right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{-r\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{r\sqrt{n}}{\sigma} \right]$$

$$= 2\,\Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1$$

$$\Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,975$$

D'après la table $N(0,1)$: $\frac{r\sqrt{n}}{\sigma} = 1,96$

$$r = \frac{1,96 \times 0,15}{10} = 0,0294$$

$$V_1^* = 6,9706 \qquad V_2^* = 7,0294$$

$$\bar{X}_n \notin [V_1^*, V_2^*]$$

On vient de faire un test bilatéral car on avait à calculer deux valeurs critiques (V_1^*, V_2^*).

		Réalité	
		H_0 vraie	H_1 vraie
Décision prise	H_0 acceptée	décision correcte avec $1-\alpha$ comme probabilité	Erreur de $2^{ème}$ espace ac proba β.
	H_1 acceptée	Erreur de $1^{ère}$ espèce ac proba α	décision correcte avec $1-\beta$ comme probabilité

Les nouveaux pneus fabriqués par une Société, sont conçus pour parcourir, en moyenne, au moins 28000 km. Les tests effectués sur un échantillon de 30 pneus sélectionnés aléatoirement ont fourni une moy. d'éch. de 27500 km et ($\sigma \neq 1000$) un écart-type de 1000 km. En utilisant un seuil de significat° de 0,05, effectuez un test pour pouvoir dire s'il y a suffisamment de preuves pour rejeter l'affirmat° d'une moyenne supérieure ou égale à 28 000 km.

Sol

$n = 30$ $\qquad \alpha = 5\%$

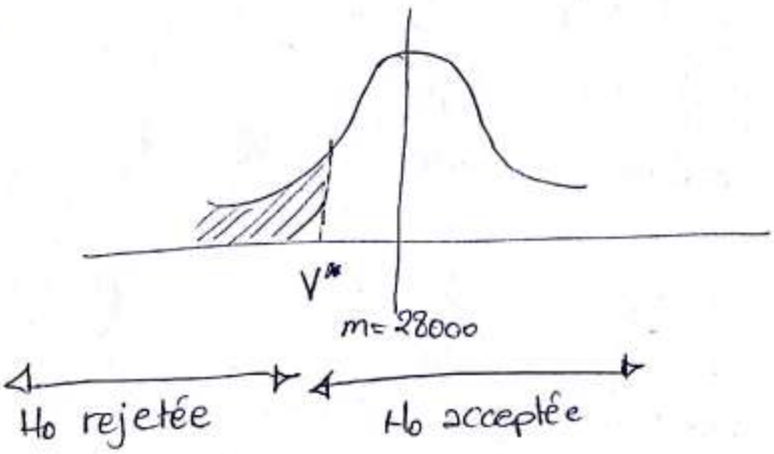
$H_0 : m = 28000$ "conformité"

$H_1 : m < 28000$ "Non conformité"

en aura à chercher une seule valeur critique.

T.C.L : $\quad \bar{X}_n \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

sous H_0



$$\alpha = 0,05 = \mathbb{P}[\bar{X}_n < V^*]$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < -\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \Pi\left(-\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) \qquad \sigma \simeq S^* = 1000$$

$$\Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,95$$

$\Big(X_i \sim N(m, \sigma)$ ~~où σ inconnu~~$\Big)$

D'après la table $N(0,1)$

$$\frac{r\sqrt{n}}{\sigma} \simeq 1,65$$

$$r = \frac{1650}{\sqrt{30}} = 301,24$$

$$V^* = 27698,76 \text{ km}$$

$$\bar{X} = 27500\cancel{0}$$

$$\bar{X} < V^*$$

donc l'Entreprise a menti :D

[Exercice (2)

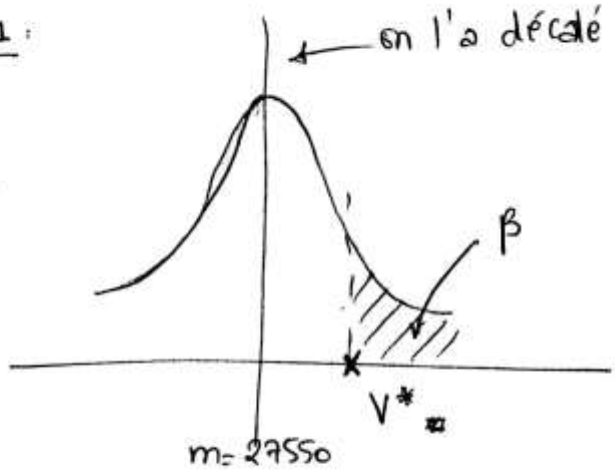
La résistance d'un composant électronique doit être, en moy, de 400 ohms. Un échantillon de 16 composants, prélevé d'un grand lot, conduit aux résultats suivants :]

On s'intéresse à l'erreur de $2^{ème}$ espèce.
vous avez une prod. centrée en réalité
$m = 27550$ km

vous avez reçu un échantillon et vous l'avez accepté par erreur.

$$\bar{X}_n \sim N(27550, \, 5/\sqrt{n})$$

Sous H1 :



$$\beta = \mathbb{P}[x > \cancel{(27415)} \; V^*]$$

Suite Exercice 2 :

392	396	386	389
388	387	403	397
401	391	400	402
394	406	406	400

On considère que la distribut° de la résistance est celle d'une loi normale.

1 - Peut-on considérer, au seuil de signification $\alpha = 0,05$, que le lot respecte la norme de 400 ohms ?

2 - Avec les résultats de cet échantillon, calculer un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance de 95 % de contenir la vraie moyenne. Est-ce que cet intervalle contient la norme spécifiée ?

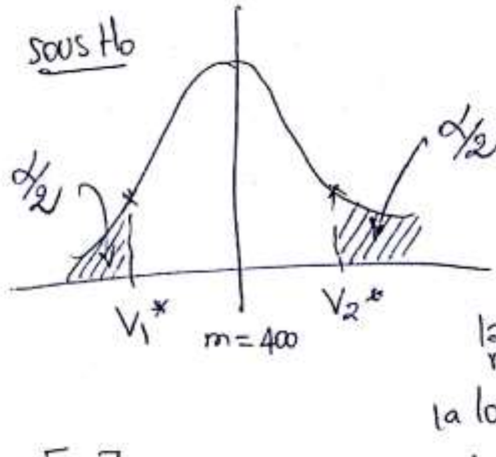
Sol $\bar{X} = 396,125$

$S^* = 6,74$

$n = 16$ $\qquad \alpha = 5\%$ (1%/1)

- H_0 : $m = 400$ "conformité"
- H_1 : $m \neq 400$ "non conformité"

On a : $\dfrac{\bar{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} \sim T_{(n-1)}$



instead of la loi centrée réduite, on utilise la loi de Student.
Au lieu de σ, on utilise S.

$1 - \alpha = 0,95$

$= \mathbb{P}\left[V_1^* < \bar{X}_n < V_2^* \right]$

$= \mathbb{P}\left[\dfrac{-r\sqrt{n}}{S^*} < \dfrac{\bar{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} < \dfrac{r\sqrt{n}}{S^*} \right]$

D'après la table de Student :

$$\frac{r\sqrt{n}}{S^*} = 2,1315$$

$$r = \frac{2,1315 \times 6,74}{4}$$

$$V_1^* = 396,41$$

$$V_2^* = 403,59$$

$$\bar{X} \notin [V_1^*, V_2^*]$$

Décision : rejeter H_0.

2) a, b ?

tq $\mathbb{P}[a < m < b] = 95\%$

$$\mathbb{P}\Big[\underbrace{\frac{\bar{X}_n - b}{S^*/\sqrt{n}}}_{-u_\alpha} < \frac{\bar{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{\bar{X}_n - a}{S^*/\sqrt{n}}}_{+u_\alpha}\Big] = 0,95$$

(ou bien supposer que $a = \bar{X}_n - k$, $b = \bar{X}_n + k$)

D'après la table de Student :

$$\frac{\bar{X}_n - b}{S^*/\sqrt{n}} = -2,1315$$

$$\frac{\bar{X}_n - a}{S^*/\sqrt{n}} = 2,1315$$

25/03/2015

$H_0 : m = m_0$

$H_1 : m \neq m_0 \Rightarrow$ Test bilatéral

$m < m_0 \quad , \quad m > m_0 \Rightarrow$ Test unilatéral

α : risque de $1^{ère}$ espèce (rejeter H_0 à tort (product° acceptable))

β : " " $2^{ème}$ " (accepter un lot défectueux)

→ risque fournisseur

→ " client

Exercice 5

Une E fabrique des petites pompes à air utilisées pour gonfler certains jouets ou articles de sport. D'après la fiche technique, les pompes doivent développer, en moyenne, une pression de 1,75 kg/cm². Toutefois, p^rs plaintes ont été soumises à l'E par les détaillants d'articles de sport, invoquant que les pompes étaient incapables de développer une telle pression.

L'E a donc décidé d'apporter certaines modifications techniques dans la conception de ses pompes. Pour vérifier si les changements apportés avaient eu une influence appréciable sur la pression développée par les pompes, on a prélevé, au hasard de la product°, 25 pompes dont les pressions développées se lisent comme suit :

1,69	1,74	1,78	1,79	1,83
1,73	1,76	1,74	1,79	1,77
1,76	1,79	1,76	1,71	1,75
1,79	1,85	1,85	1,81	1,74
1,77	1,82	1,81	1,76	1,79

En considérant que la pression développée par les pompes est distribuée normalement, est-ce que l'E peut affirmer suite aux modificat° apportées, qu'en moyenne, les pompes développent une pression supérieure à celle précisée sur la fiche technique ?
Utiliser $\alpha = 0,01$ et indiquer votre démarche.

Sol

$$\bar{X} = 1,7752 \text{ kg / cm}^2$$

$H_0 : \quad m \geq 1,75$ (Amélioration)

$H_1 : \quad m \leq 1,75$

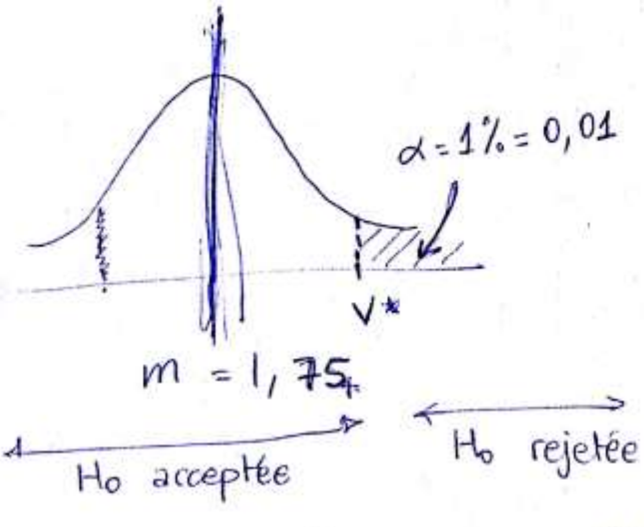
Pour l'autre groupe, ils avaient commis l'erreur de prendre,
$H_0 : \quad m = 1,75$
$H_1 : \quad m < 1,75$
on doit accepter le lot.
on n'a pas besoin de valeur critique
(puisque $\bar{x} > m$)

~~Sous H1~~
on peut également supposer que,

$H_0 : \quad m = 1,75$ (stagnation ou détérioration)

$H_1 : \quad m > 1,75$ (Amélioration)

Sous Ho



X : "Pression / pompes"

$X \sim N(m, \sigma)$
où σ inconnu.

On a $\dfrac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} \sim T_{(n-1)}$

$$\mathbb{P}[\bar{X} < V^*] = 0,99$$

$$\mathbb{P}\left[\frac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} < \frac{r\sqrt{n}}{S^*} \right] = 0,99 = F\left(\frac{r\sqrt{n}}{S^*} \right)$$

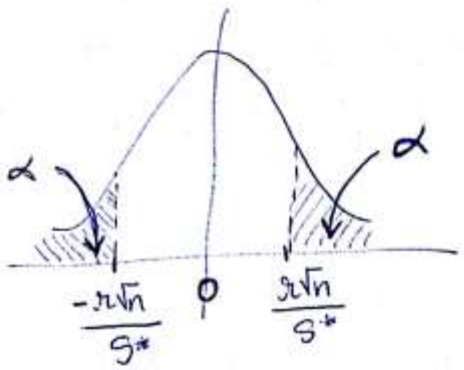


table de la loi de Student nous donne t_α ? tq
$\mathbb{P}[-t_\alpha < T < t_\alpha] = 1 - \alpha$

$$\mathbb{P}\left[-\frac{r\sqrt{n}}{S^*} < \frac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} < \frac{r\sqrt{n}}{S^*} \right] = 1 - 2\alpha = 0,98$$

D'après la table de Student

$$\frac{r\sqrt{n}}{S^*} = 2,4922 \Rightarrow r = \frac{2,4922}{S^*}\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow r \simeq 0,02$$

Autrement dit, la valeur critique est :

$$V^* = 1,77 \text{ Kg/cm}^2$$

$V^* < \bar{X}$ (~~donc on peut~~)

(Ho rejetée : on considère qu'il y a eu une amélioration significative)

Exercice 6

Une usine fabrique des pièces circulaires dont le diamètre doit être, en moyenne, de 5 cm avec un écart-type $\sigma = 0,24$ cm. Un échantillon aléatoire de taille $n = 36$ est prélevé occasionnellement de la production et le diamètre de chaque pièce de l'échantillon est mesuré.

Si le diamètre moyen obtenu d'un échantillon de taille $n=36$ est inférieur à 4,92 cm ou supérieur à 5,08 cm, le procédé de fabrication doit être vérifié et réajusté à la valeur centrale requise, soit 5 cm ; si le diamètre moyen se situe à l'intérieur de l'intervalle $[4,92\ ;\ 5,08]$, on considère que le procédé opère correctement et il n'y a pas lieu d'intervenir.

1. Avec ce processus de contrôle, quel est le risque d'arrêter inutilement le procédé de fabrication alors qu'il opère à $m=5$ cm ? Comment appelle-t-on ce risque ?

2. Quelles sont les chances sur 100 de conclure que le procédé opère correctement lorsque $m=5$ cm ?

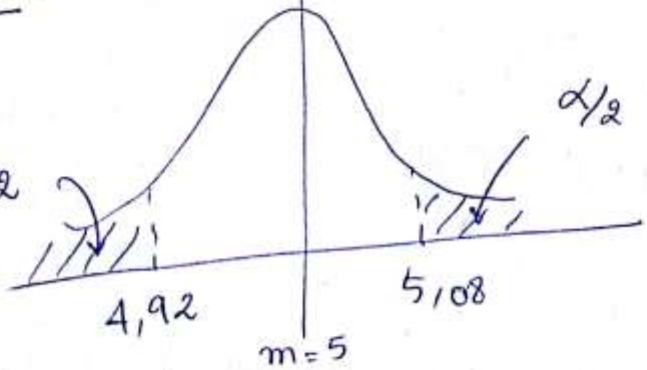
3. Quelle est la probabilité de conclure que le procédé opère correctement alors qu'en réalité, il est centré à 5,05 cm ? Comment appelle-t-on ce risque ?

<u>Sol</u>

* $H_0 : m = 5$ cm
* $H_1 : m \neq 5$ cm

1) $\alpha = ?$ $\qquad \alpha = \mathbb{P}\,[V_1^* < \bar{X} < V_2^*]$

<u>Sous H_0</u>



D'après la loi T.C.L

$$\bar{X} \sim N\left(m, \sigma/\sqrt{n}\right)$$

où $\sigma = 0,24$

$$\bar{X} \sim N(5 ; 0,04)$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left[-\frac{0,08}{0,04} < \frac{\bar{x}-m}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0,08}{0,04}\right]$$

$$= 2\Pi(2) - 1$$

fct° de répartit°

$$\alpha = 2 - 2\Pi(2)$$

D'après la table de la loi centrée réduite

$$= 2 - 2 \times 0,97725$$

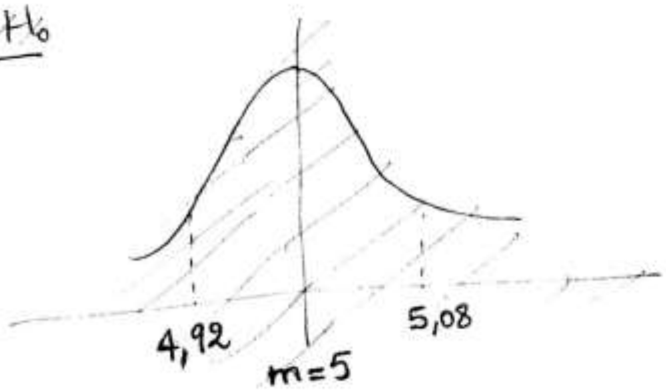
$$= 0,045$$

$$\alpha \simeq 4,5\,\%$$

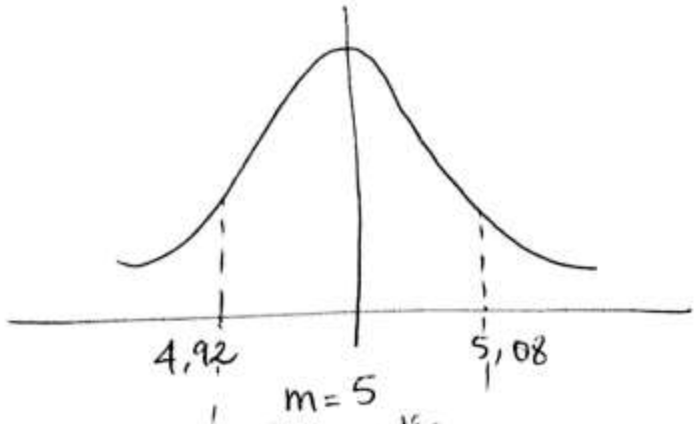
α est un risque de 1ère espèce.

2) $1-\alpha = 95,5\,\%$

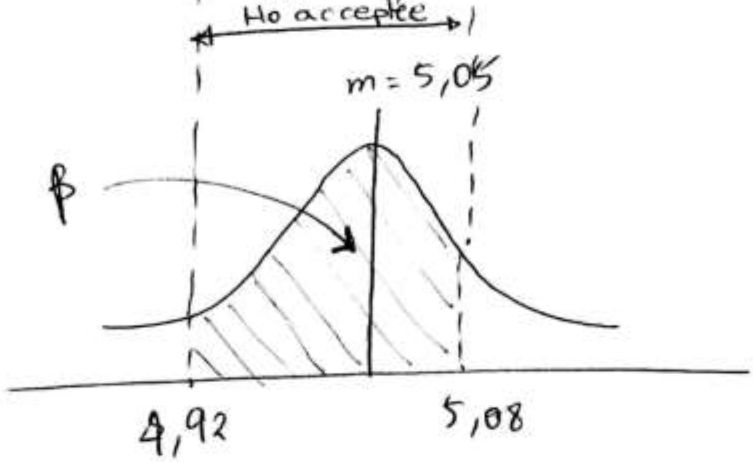
3/ <u>sous H_0</u>



Sous H_0



Sous H_1



$$\bar{X} \sim N(5,05 \; ; \; 0,04)$$

$$\beta = \mathbb{P}\left[4,92 < \bar{X} < 5,08\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[-3,25 < \frac{\bar{X} - 5,05}{0,04} < 0,75\right]$$

$$= \Pi(0,75) - \Pi(-3,25)$$

$$= -1 + \Pi(3,25) + \Pi(0,75)$$

$$\beta = 0,77337$$

$$\beta = 77,33\,\%$$

Exercice

Une machine automatique est utilisée pour effectuer le remplissage d'un certain contenant. La machine doit être ajustée pour assurer que le poids moyen des contenants soit de 450g avec un écart-type $\sigma = 20\,g$. On veut mettre un plan d'échantillonnage qui permettrait de satisfaire les exigences suivantes :

i) Si la machine centrée à 450 g, on veut être en mesure de ne pas rejeter cette hypothèse 99 fois sur 100.

ii) D'autre part, si la machine est centrée à 425g ou 475g, on veut que le risque associé au non-rejet de l'hypothèse nulle $H_0 : m = 450\,g$ soit au plus de 4% dans chaque cas.

1. Déterminer la taille d'échantillon par le plan de contrôle à mettre en oeuvre.
2. Déterminer, en préservant le risque α, les valeurs critiques de la moyenne de l'échantillon.
3. Donner une description du plan de contrôle à mettre en oeuvre.

Sol i) $H_0 : m = 450\,g$, $H_1 : m \neq 450\,g$ ii) $\beta = 4\%$

1) n ?

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left[V_1^* < \bar{X} < V_2^*\right] \quad , \quad V_1^* = m - r, \quad V_2^* = m + r$$

on suppose que $n \geq 30$

$$TCL \to \bar{X_n} \sim N(m, \sigma/\sqrt{n}) \quad \text{où } \sigma = 20g$$

$$0{,}99 = \mathbb{P}\left[-\frac{r\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X} - n}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right]$$

$$2\Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}99$$

$$\Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}995$$

D'après la table : $\frac{r\sqrt{n}}{\sigma} \simeq 2{,}58$

$$r\sqrt{n} = 20 \times 2{,}58$$

$m = 475\,g$

$$\bar{X} \sim N(4{,}75 ; \sigma/\sqrt{n})$$

$$0{,}04 = \mathbb{P}\left[V_1^* < \bar{X} < V_2^*\right]$$

$$V_1^* = 450 - r, \quad V_2^* = 450 + r$$

$$0{,}04 = \mathbb{P}\left[\frac{-r-25}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - 475}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{r-25}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

$$= \Pi\left(\frac{r-25}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Pi\left(\frac{-r-25}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

(il faudra refaire le même raisonnement pour $m = 425$)

01/04/15

$H_0 : m = m_0$ $\qquad$ $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1 : m \neq m_0$ $\qquad$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (Test bilatéraL)

$m < m_0$ $\qquad$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$

$m > m_0$ $\qquad$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (Test unilatéral)

Exercice 1

Une machine auto fabrique des supports métalliques de diverses longueurs. La longueur requise peut être réglée facilement à l'aide d'un simple ajustement. La long. est distribuée selon une loi normale. Pour assurer que la prod. présente une homogénéité raisonnable, on a établi que la var de la long. des tiges ne doit pas excéder 0,36 mm².

La fabricat° a été interrompue pour permettre une réparation importante au bras d'ajustement servant à la coupe des supports. La product° étant reprise, on veut s'assurer que la var de la longueur des tiges n'excède pas la norme requise.

Un échan. de 20 supports prélevé au hasard de la prod. donne, comme variance de la longueur $S^2 = 0,42$ mm²

L'hyp. selon laquelle σ^2 n'excède pas 0,36 mm² est-elle acceptable au seuil de significat° $\alpha = 0,05$?

Sol

$n = 20$ $\qquad$ $X \sim N(m, \sigma)$ $\quad$ (m inconnue)

norme $\quad \sigma^2 \leq 0,36 \text{ mm}^2$

$S^2 = 0,42 \text{ mm}^2$

• $\alpha = 5\%$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

m connue

$T = \frac{1}{n} \sum (X_i - m)^2$

$\frac{nT}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$

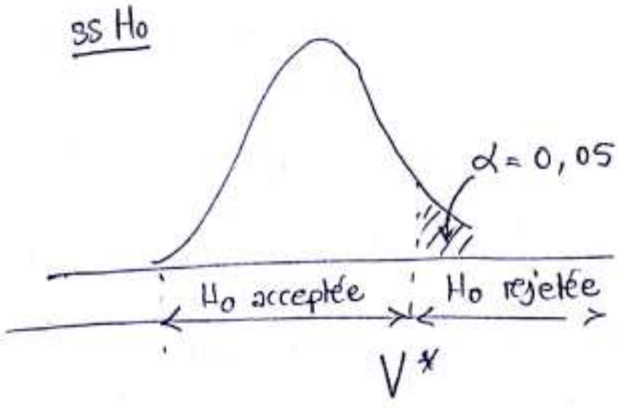
$H_0 : \quad \sigma^2 = 0,36 \quad (<)$

$H_1 : \quad \sigma^2 > 0,36$

$\alpha = 5\% \quad , \quad n = 20$

D'après la table de X_2

$V^* = 30,14$



$$\frac{20 \times 0,42}{0,36} = 23,33$$

Exercice (2)

Les résultats à un test d'aptitude pour un échantillon de 10 individus sont les suivants.

78 60 64 82 80 66 74

61 68 57

Tester, au seuil de signification $\alpha = 0,05$, les hypothèses suivantes.

$H_0 : \quad \sigma^2 = 100$

$H_1 : \quad \sigma^2 > 100$

Sol

D'après la table.

$V^* = X^2_{(9)} = 16,92$

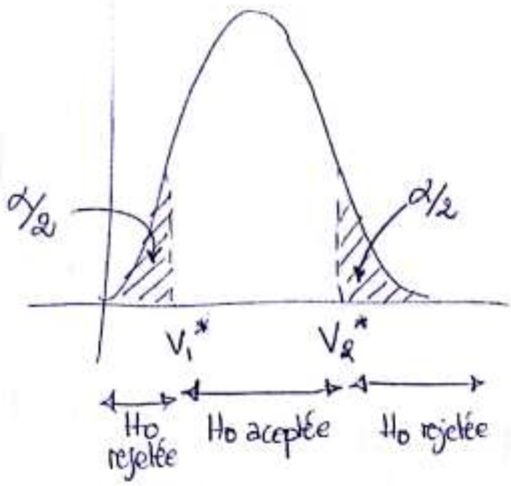
Sur Excel, on a calculé la variance de l'échantillon. $(S^2 = 72)$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = 7,2 < V^*$$

donc on est dans la partie où il va falloir accepter Ho.

Good to know

lorsque le d° de liberté ↗ et dépasse 30, la loi de $X^2_{(n)}$ peut être approchée par $N(n, n^2)$



$$V_1^* = \chi^2_{(\underset{\alpha/2}{0,025}\,;\,9)} = 2,70$$

$$V_2^* = \chi^2_{(\underset{1-\frac{\alpha}{2}}{0,975}\,;\,9)} = 19,02$$

Exercice

La Mauricienne, compagnie d'assurances générales, veut améliorer le tps de rép. du personnel affecté au service d'indemnisat°. Les clts ont accès au service à l'aide d'un numéro 800 et l'info est gérée à l'aide d'une BD.

Selon la responsable du serv, le tps moy de rép. à l'aide de cette BD est de 14s. Un nv prog. de gestion de BD a été mis en appli depuis qlq semaines et on aimerait vérifier s'il y a ~~a~~ eu une diminut° significative du tps moy de rép du personnel. Un échantillon aléatoire de 50 appels a permis d'obtenir les résultats ci-contre concernant le tps de réponse.

Temps de réponse				
13,37	13,09	13,48	13,64	13,51
13,59	13,50	13,43	13,45	13,01
13,32	13,27	13,61	13,60	13,26
13,38	13,52	13,41	13,78	13,68
13,86	13,04	13,47	13,40	13,59
13,37	13,66	13,78	13,40	13,52
13,28	13,59	13,26	13,49	13,83
13,42	13,38	13,83	13,53	13,46
13,80	13,30	13,81	13,80	13,08
13,67	13,49	13,70	13,40	13,40

a) Préciser les hyp. statistiques appropriées ici.

b) Est-ce que l'hyp. de normalité du tps de rép. est requise ici pour exécuter le test d'hyp?

c) Déterminer la règle de décision à adopter pr un éch. de taille $n = 50$ et un seuil de significat° $\alpha = 0,01$ selon les hyp. stat. (suivi) précisées en a. Etablir la règle en utilisant la val critique de la moy. d'éch.

d) Peut-on conclure que ce nv prog de gestion de BD a permis de réduire de façon significative le tps moy de rép? Justifier

a) H_0 : $m = 145$ (Non amélioration)

H_1 : $m < 145$ (Amélioration)

b)

(Taille de l'échantillon est suffisament grande pour se ramener à la loi normale.)

La normalité du tps de rép. n'est pas requise car la taille de l'échantillon est suffisamment gde pour utiliser le TCL.

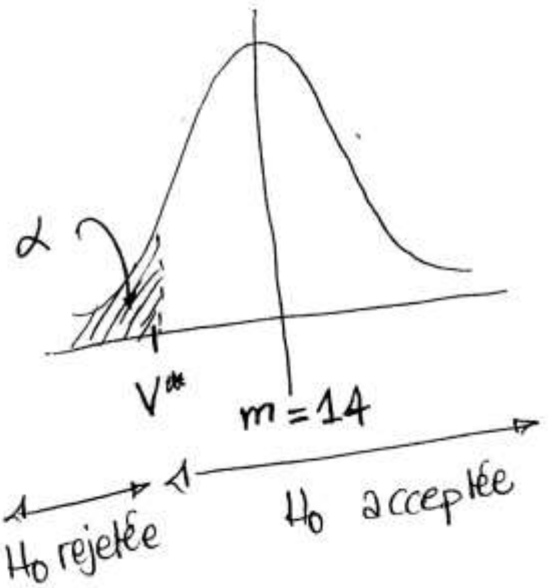
c) La régle de décision est la suivante :

* Si $\bar{X} \geq V^*$, H_0 acceptée (Pas d'amélioration)
* Si $\bar{X} < V^*$, H_0 rejetée (L'amélioration est établie)

$n = 50$ d'après le TCL,

$$\bar{X} \sim N(m, \sigma/\sqrt{n})$$

où $\sigma \simeq S^*$ $(n \geq 30)$



Il suffit d'exprimer le α.

$$\alpha = 0,01 = \mathbb{P}\left[\bar{X} < V^*\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} < -\frac{r\sqrt{n}}{S^*}\right]$$

$$= \Pi\left(-\frac{r\sqrt{n}}{S^*}\right)$$

$$= 1 - \Pi\left(\frac{r\sqrt{n}}{S^*}\right)$$

$S^* = 0,21$

$r \simeq 0,07$

(D'après)

D'où finalement $V^* = 13,93$ s.

$\bar{X} = 13,51$ s

$\bar{X} < V^* \Rightarrow H_0$ rejetée

$\Rightarrow H_1$ acceptée donc il y a eu une amélioratᵒ nette du tps de rép.

Exercice

Chaque année, le HCP publie diverses stats sur le chômage, dont le nbre d'individus qui sont sans emploi et la durée moyenne de l'inactivité. En novembre 2008, selon le département américain des stats. sur l'emploi, la durée moy nationale d'inactivité était de 14,6 semaines.

Le ministère de l'emploi a demandé une étude sur la situation, en terme de chômage dans la région du grand Casa. Un éch. de 150 hab. de la ville, sans emploi, contient des données sur l'âge et le nbre de sem. d'inactivité. Une partie des données collectées en Nov 2008 est reproduite ci-dessus

Age	Semaines	Age	Sem.
56	22	25	5
35	19	40	20
22	7	25	12
57	37	25	1
40	18	59	33
22	11	49	26
48	6	33	13
48	22		

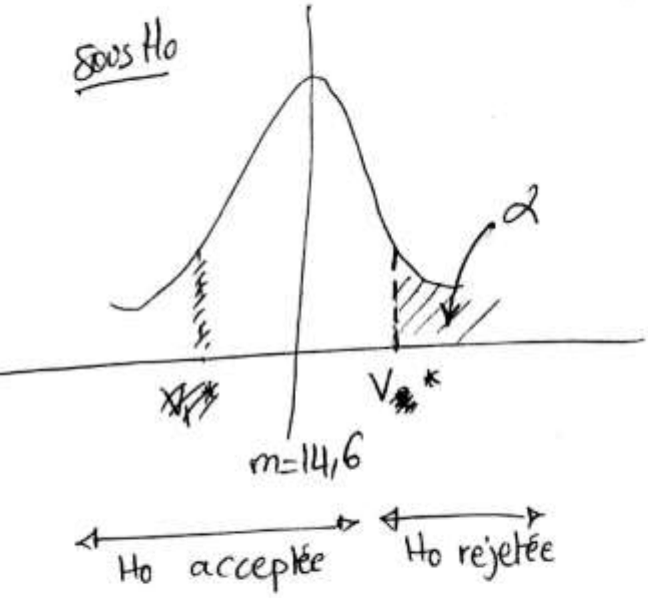
1. Utiliser les stats. descriptives pour résumer les données.
2. Effectuer un test d'hyp. pour déterminer si la durée moy. de chômage à Casa est sup. à la durée moy. nationale égale à 14,6 sem. Utiliser un seuil de significat° de 0,01. Quelle est votre conclusion ?
3. Y a-t-il une relat° entre l'âge d'un chômeur et le nbre de semaines de chômage ? Expliquer.

Sol

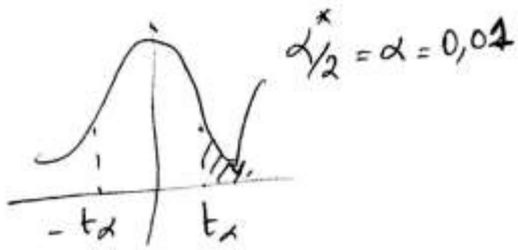
2. Soit X la var. aléatoire "Nbre de semaines passées au chômage"

$$X \sim N(m, \sigma) \quad (\sigma \text{ inconnu})$$

- $H_0 : \quad m = 14,6$
- $H_1 : \quad m > 14,6$
- $\alpha = 0,01$



$$\frac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} \sim T_{(n-1)} \atop (14)$$



$$\mathbb{P}\left[-t_\alpha < T_n < t_\alpha\right]$$

$$\mathbb{P}\left[-t_\alpha < \frac{\bar{X} - m}{S^*/\sqrt{n}} < t_\alpha\right]$$

$$= 1 - 0,002$$

$$= 0,998$$

D'après la table de Student :

$$t_\alpha = 2,6245$$

où $\quad t_\alpha = \dfrac{r\sqrt{n}}{S^*}$

TD : Statistiques

ENSIAS
2ème année: 2012/2013

Statistique 2

SÉRIE:1
Echantillonnage et Estimation

Exercice 1
Dans un pays les statistiques font ressortir que 64% des ménages possèdent une voiture de tourisme.
Quelle est la probabilité que sur un échantillon au hasard de 225 ménages, la proportion de ceux qui possèdent une voiture soit:

(a) comprise entre 40% et 70%.

(b) supérieure à 60%.

(c) inférieure à 25%

Exercice 2
A la veille d'une consultation électorale, on a interrogé cent électeurs constituant un échantillon au hasard. 54 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour le condidat Y.
Entre quelle limite, au moment du sondage, avec une probabilité de 0.95, la proportion du corps électoral favorable au condidat Y se situe-t-elle?

Exercice 3
Dans un centre de recrutement, on a mesuré la taille de 400 conscrits. Pour cet échantillon pris au hasard, la taille moyenne $\bar{x}$ est égale à 172 cm et l'écart-type estimé s est égal à 4 cm.
Construire un intervalle qui contienne avec une probabilité 0.99 la taille moyenne de l'ensemble des conscrits de ce centre de recrutement.

Exercice 4
Si l'écart-type de la durée de vie d'un modèle de lampe électronique est estimé à 100 heures, quelle doit être la taille de l'échantillon à prélever pour que l'erreur sur l'estimation de la durée de vie moyenne n'exède pas 20 heures et avec une probabilité

a) de 95%

b) de 99%

Exercice 5
Une machine fabrique des rondelles en série. Le diamètre d est une variable gaussienne dont l'écart-type est égale à 1 millimètre. On prélève au hasard un échantillon de neuf rondelles.
Les mesures des diamètres, en millimètres, sont les suivantes:

$$20.1; \quad 19.9; \quad 20.0; \quad 19.8; \quad 19.7; \quad 20.2; \quad 20.1; \quad 23.1; \quad 22.8$$

1. Construire un intervalle qui contienne avec une probabilité de 0.95 la moyenne m de d.
2. Même question en supposant que l'écart-type de d a une valeur inconnue.

3. En utilisant les données numériques de 1), l'écart-type de d étant supposé inconnu, construire un intervalle qui contienne avec une probabilité de 0.9 la variance de d.

Exercice 6

Le chiffre d'affaire mensuel de l'entreprise TEX suit une loi normale de moyenne μ inconnue, mais dont l'écart type est évalué à 50 M Dh. Sur les 12 derniers mois, la moyenne des chiffres d'affaire mensuels a été de 200 M Dh.

Donner une estimation de μ par intervalle de confiance au niveau 0.98.

Exercice 7

Dans une station-service, on suppose que le montant des chèques "essence" suit une loi normale de paramètres μ et σ. On considère un échantillon de taille $n = 50$ et on obtient une moyenne de 130 Dh et un écart-type de 28 Dh.

Donner une estimation de μ par intervalle de confiance au niveau 0.95.

Exercice 8

Les salaires mensuels des employés d'une entreprise sont supposés suivre une loi normale de paramètres μ et σ.

a) Pour un échantillon de taille $n = 10$, on obtient une moyenne $m = 6500$ Dh et un écart-type $s = 900$ Dh. Donner un intervalle de confiance au niveau 0.95 pour μ.

b) Pour un échantillon de taille $n = 100$, on obtient une moyenne $m = 6200$ Dh et un écart-type $s = 850$ Dh. Donner un intervalle de canfiance au niveau 0.95 pour μ.

Exercice 9

On se propose d'étudier le corps électoral d'une région.

1. Lors d'un sondage sur un échantillon de 200 personnes, on a recueilli 84 intentions de vote en faveur du parti A. Soit p la proportion de votes pour A. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.

2. Avec un second échantillon de 100 personnes, on a obtenu 45 intentions de vote pour A. En réunissant les deux échantillons, donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.

3. Déterminer la taille n de l'échantillon qui permet d'obtenir un intervalle de confiance de largeur 0.02 sachant qu'une estimation ponctuelle de p a donné la valeur 0.4.

4. Pour mieux cerner la population votant pour A, on extrait un échantillon de n personnes ayant l'intention de voter pour A. On suppose que l'âge des individus suit une loi normale de paramètres μ et σ.

   (a) Le premier échantillon de taille $n = 15$ a donné une moyenne d'âge de 45 ans et un écart-type de 10 ans. Donner un intervalle de confiance pour μ au niveau 98%.

   (b) Le second échantillon de taille $n = 100$ a donné une moyenne d'âge de 47 ans et un écart-type de 9 ans. Donner un intervalle de confiance pour μ au niveau 98%.

   (c) En gardant l'échatillon de taille 100, donner un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau 95%.

13/03/2015

Exercice 5

$d \longrightarrow$ Loi Normale $\quad \sigma_d = 1$ mm

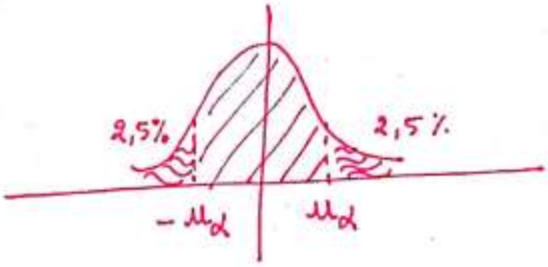
$$\bar{X} \longrightarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = 20{,}63 \text{ mm}$$

$$P\left(\bar{X} \in \left[m - U_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + U_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha = 95\%$$

$$IC \left[\bar{X} - U_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + U_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$X \longrightarrow N(m, \sigma) \qquad aX + b \longrightarrow N$$



$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha = 0{,}95$$

$$P(U < U_\alpha) = 0{,}975$$

D'après la table : $\quad U_\alpha = 1{,}96$

$$IC \left[\bar{X} - \frac{1{,}96}{3}, \bar{X} + \frac{1{,}96}{3}\right]$$

loi.normale.standard.inverse(proba)

$\downarrow$ nous donne

l'abscisse

2) σ_d est inconnu

$$S^* = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right]^{1/2} = 1{,}32 \text{ mm}$$

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}} \rightarrow T(n-1) \Big/ I.C : \left[\bar{X} - t_\alpha \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}}\right]$$

$$P(-t_\alpha < T_{(n-1)} < t_\alpha) = 1-\alpha$$

table $\rightarrow t_\alpha = 2,262$

$$P(T_{(n-1)} < t_\alpha) = 0,975$$

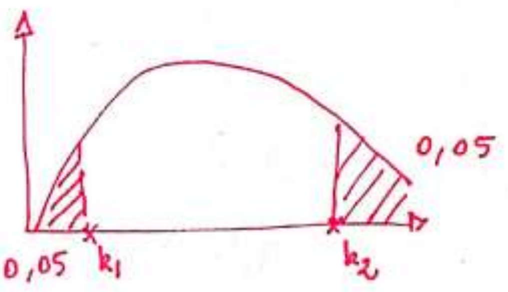
loi.student.inverse.N(0,975)

$$S = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\bar{X}-m}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

3) $$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim X^2_{(n-1)}$$

$$P\left(k_1 < \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} < k_2\right) = 1-\alpha = 0,9 \quad (*)$$



choix possible: $P(X^2_{(n-1)} < k_2) = 0,9$

$$P(X^2_{(n-1)} > k_2) = 0,05$$

$$P(X^2_{(n-1)} < k_1) = 0,05$$

table $k_1 = 2,73$ $\quad k_2 = 15,51$

$(*) \rightarrow P(0,9 < \sigma^2 < 5,14) = 0,9$

Exercice 6

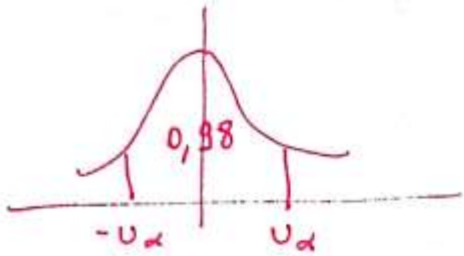
$X \to N(\mu, \sigma)$ $\sigma = 50$ Mdh

$\bar{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$n = 12 \to \bar{x} = 200$ Mdh , $1 - \alpha = 0,98$

I C $[\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

table $\to$ $u_\alpha = 2,33$



$P(U < u_\alpha) = 0,98 + 0,01 = 0,99$

Exercice 7

$X \to N(\mu, \sigma)$ σ : inconnu

$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}} \to T(n)$ $n = 50$

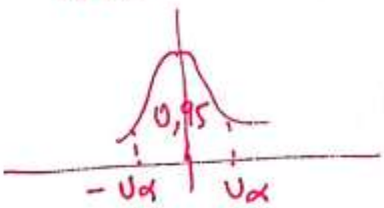
I.C $[\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}]$

$\bar{x} = 130$, $S = 28$

$n = 50$, $n > 30 \to T_n \sim N(0,1)$

table : $t_\alpha \approx u_\alpha = 1,96$

$P(U < u_\alpha) = 0,975$



Ex. 5.2 I.C $[19,618 , 21,642]$ $t_\alpha = 2,306$

Ex.

$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \longrightarrow T_{(n-1)} \qquad n = 10, \quad 1 - \alpha = 0{,}95$$

$$I.C \quad \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \, , \, \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

$$\bar{x} = 6500 \text{ dh} \quad , \quad S = 900 \text{ dh}$$

$$\text{table} \quad t_\alpha = 2{,}262$$

2) $I.C \quad \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \, , \, \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$

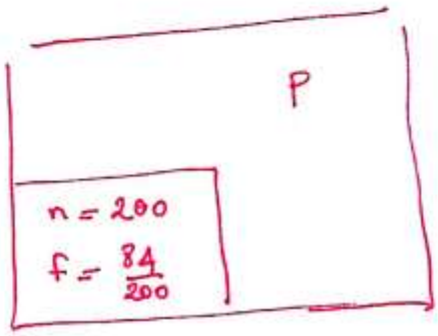
$$\bar{x} = 6200 \text{ dh} \qquad s = 850 \text{ dh}$$

$$n = 100 \qquad t_\alpha \simeq u_\alpha = 1{,}96$$

Ex 9

p : Proportion de Ite la populat°

f : " de l'échantillon de taille 200



$$\text{T.C.L} \qquad f : N\left(p \, , \, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$P : \left[f \cancel{\pm} u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \, , \, f + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

$$1 - \alpha = 0{,}95$$

$$\text{table} \rightarrow u_\alpha = 1{,}96$$

$$f = \frac{84}{200} = 0{,}42$$

20/03/2015

Exercice 9

2) (ⓑ) $n_1 = 200 \longrightarrow f_1 = \frac{84}{200}$

$n_2 = 100 \longrightarrow f_2 = \frac{45}{100}$

$n = 300 \longrightarrow f = \frac{84+45}{300} = 0{,}43$

$I_c : [f - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} , f + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$

$\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0{,}0285$

$1 - \alpha = 0{,}95$

table : $u_\alpha = 1{,}96$

3) p : Proportion de la population

Echantillon : n , f : proportion de l'échantillon , $n > 30$

TCL $\longrightarrow$ $F \to N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$

$P\left(F \in [p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} , p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]\right) = 1 - \alpha$
$= 0{,}95$

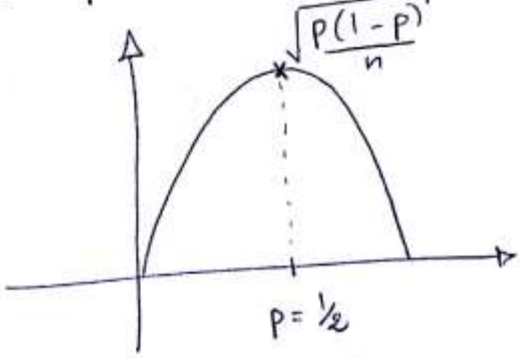
Largeur de l'I.C : $2 u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

table $\to u_\alpha = 1{,}96$

$1{,}96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}01$

$n = 1{,}96^2 \, p(1-p) = 1{,}96^2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 9220$

Si n est fixe



$P(p - u_\alpha < F < p + u_\alpha) = 0{,}95$

4) X : age des personnes qui vont voter pour A.

$$X : N(\mu, \sigma)$$

a) $n = 15$, $\bar{X} = 45$ ans, $s = 10$ ans, $1 - \alpha = 98\%$

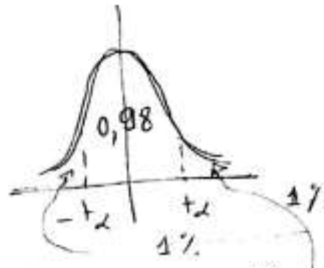
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \longrightarrow T(n-1)$$

I.C $\left[\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$

estimat° biaisée d'où le $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$

b) $n = 100$, $\bar{x} = 47$ ans, $s = 9$, $1 - \alpha = 0,98$

I.C $\left[\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$



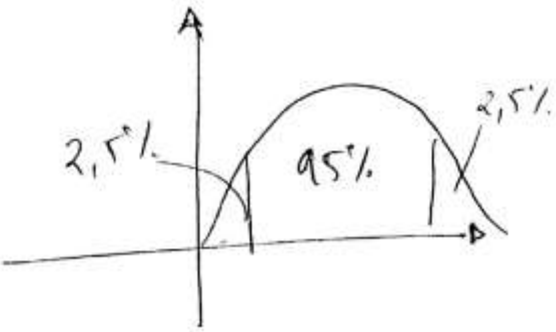
$P(T < t_\alpha) = 0,99$

c) $n = 100$, $s^2 = 9^2 = 81$, $1 - \alpha = 95\%$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \longrightarrow X^2(n-1)$$

$$P\left(\ell_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \ell_2 \right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{nS^2}{\ell_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\ell_1} \right)$$



$$Z = \sqrt{2X} - \sqrt{2\mu - 1} \longrightarrow N(0,1)$$

$P(X < \ell_2)$

$$P\left(\sqrt{2X} - \sqrt{2\mu-1}\right) < \overbrace{\sqrt{2\ell_2} - \sqrt{2\mu-1}}^{1,06} \Big) = 0,975$$

0,025

$-1,96$

$$\sqrt{2 \ell_2} - \sqrt{2\mu - 1} = 1,96$$

$$\sqrt{2\ell_2} = 1,96 + \sqrt{2\mu - 1}$$

$$\ell_2 = \frac{\left(1,96 + \sqrt{2\mu - 1}\right)^2}{2} \qquad \mu = 99$$

$$\ell_1 = \frac{\left(-1,96 + \sqrt{2\mu - 1}\right)^2}{2}$$

table $\ell_1 = 73,36$ $\ell_2 = 128,42$

Série 2 : Tests d'hypothèses

Cas 1 :

Dans une chaîne de production particulière, chaque boite pèse en moyenne 16 g. Le sous- ou le sur-remplissage est un problème sérieux et la chaîne de production sera fermée si l'un des deux cas se produit. Grâce aux données passées, on sait que σ est égal à 0.8 g. Un contrôleur de la qualité échantillonne 30 boites toutes les deux heures et décide de fermer ou non la chaîne de production pour ajustement.

1. Quelle est la règle de rejet pour un seuil de signification égal à 0.05 ?
2. Si la moyenne d'un échantillon $\bar{x}$ est égale à 16.32 g, quelle action recommanderiez-vous ?
3. Si la moyenne d'échantillon est égale à 15.82 g, quelle action préconiseriez-vous ?

Cas 2 :

Une opération particulière dans la chaîne de montage automobile nécessite, en moyenne, 2.2 minutes. A cause des effets du temps de montage d'une pièce à la fois sur les opérations d'assemblage précédentes et suivantes, il est important de conserver un temps moyen d'assemblage de 2.2 minutes. Un échantillon aléatoire de 45 pièces assemblées révèle un temps moyen de montage de 2.39 minutes, avec un écart type d'échantillon de 0.20 minute. Utiliser un seuil de signification égal à 0.02 et tester si l'opération requière en moyenne 2.2 minutes pour être exécutée.

Cas 3:

L'entreprise Simtech fabrique des tubes de verre pour l'entreprise Giscom. L'entreprise cliente exige que les lots expédiés par Simtech contiennent au plus 2% de défectueux. Les lots sont habituellement constitués de 5000 tubes de verre. Avant d'expédier les lots, Simtech effectue un contrôle en prélevant au hasard 200 tubes.

1. En utilisant un risque de α =0.05 de rejeter à tort un lot dont la proportion de défectueux est de 2% (ou mieux), quelle est la valeur critique de la proportion de défectueux dans un échantillon de taille n=200 qui ne doit pas être dépassée pour considérer un lot comme acceptable ?
2. On doit expédier un lot de 5000 tubes. Lors du contrôle final, on a observé 4 tubes de verre défectueux dans un échantillon de 200 tubes. Est-ce que ce lot peut être considéré comme acceptable d'après les exigences de Giscom ?
3. Giscom réceptionne des lots de Simtech en prélevant également 200 tubes et fait usage de la même règle de décision que Simtech. Quelles sont les chances sur 100 d'accepter un lot comportant 6% de tubes défectueux alors que Simtech certifie 2% de défectueux dans 95% des cas ? Comment appelle-t-on ce risque ?

Cas 4:

Un fabriquant de fournitures électriques fabrique des résistances dont la valeur nominale doit être de 1000 ohms (ohm-mètre)). Pour vérifier le procédé de fabrication, on prélève un échantillon aléatoire de 64 résistances. On mesure ces résistances avec un ohmètre de précision et les calculs de la moyenne et l'écart-type conduisent aux valeurs suivantes :

$\bar{x}$ = 990 ohms, s= 100ohms.

1. En supposant que le risque de première espèce est fixé à 0.05, élaborer une règle de décision qui permettrait de tester l'hypothèse nulle selon laquelle le procédé est centré à 1000 ohms.
2. Est-ce que l'hypothèse de normalité de la population (l'ensemble des valeurs ohmiques de la fabrication) est requise pour l'élaboration de la règle de décision en a)
3. Selon les résultats de l'échantillon de 64 résistances, doit-on rejeter l'hypothèse selon laquelle le procédé est centré à 1000 ohms ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 : m=1000 ohms si le procédé opère en réalité à m= 1050 ohms ? Comment appelle-t-on ce risque ?

Cas 5 :

La résistance d'un composant électronique doit être, en moyenne, de 400 ohms. Un échantillon de 16 composants, prélevé d'un grand lot, conduit aux résultats suivants :

392	396	386	389
388	387	403	397
401	391	400	402
394	406	406	400

On considère que la distribution de la résistance est celle d'une loi normale.

1. Peut-on considérer, au seuil de signification $\alpha = 0{,}05$, que le lot respecte la norme de 400 ohms ?

2. Avec les résultats de cet échantillon, calculer un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance de 95% de contenir la vraie moyenne. Est-ce que cet intervalle contient le norme spécifiée ?

Cas 6:

Une entreprise fabrique des dispositifs électroniques dont la durée de vie moyenne est de 800 heures. La durée de vie des dispositifs est distribuée normalement avec un écart type $\sigma = 50$ heures. Pour vérifier la qualité des dispositifs, un échantillon de 25 dispositifs est soumis à un essai de fiabilité et on adopte la règle de décision suivante :

Les dispositifs sont de qualité inacceptable si la durée de vie moyenne est de 25 dispositifs est inférieur à 783,55 heures ; on les considère de qualité acceptable si la durée de vie moyenne est supérieure ou égale à 783,55 heures.

1. Quelles sont les hypothèses statistiques que l'on veut tester avec cette règle de décision ?

2. Quelle est la probabilité de rejeter à tort un lot de dispositifs de qualité acceptable ?.

3. Quel est le risque de deuxième espèce pour chacune des valeurs suivantes de μ : 750, 760, 770, 780, 800.

4. Le responsable du contrôle a décidé de modifier son plan de contrôle en prélevant 36 dispositifs de la production (au lieu de 25). Quelle règle de décision doit il alors adopter pour tester les hypothèses spécifiques en 1)

Série (2) Tests d'hypothèses

Cas 1

$\mu = 16\,g \,, \quad \sigma = 0{,}8$

Echantillon : $n = 30$ $\qquad \bar{X} \xrightarrow{T.C.L} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$P(\bar{X} \in [\mu - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} \in [16 - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, 16 + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]) = 0{,}95$$

$$P(\bar{X} \in [15{,}7137 , 16{,}2862]) = 0{,}95$$

Si $\bar{x} = 16{,}32\,g \longrightarrow$ Arrêt de la production

Si $\bar{x} = 15{,}82\,g \longrightarrow$ Poursuite " " "

$\alpha = 5\%$

$P(U < u_\alpha) = 0{,}975$

table $\longrightarrow u_\alpha = 1{,}96$

Cas 2

Ho : $\mu = 2\,mm$

$n = 45 \,, \quad \bar{x} = 2{,}2\,mm \,, \quad s = 0{,}2\,mm \,, \quad n > 30$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \longrightarrow T(n-1)$$

$$P(\mu - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n+1}} < \bar{X} < \mu + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n+1}}) = 1 - \alpha = 98\%.$$

table, $t_\alpha = 2,325$

$$P(2,1298 < \bar{X} < 2,2701) = 0,98$$

$$\bar{X} \notin [2,2198 \ , \ 2,2701]$$

H_0 : $\mu = 2,2m$ est rejetée au seuil de signification de 2%

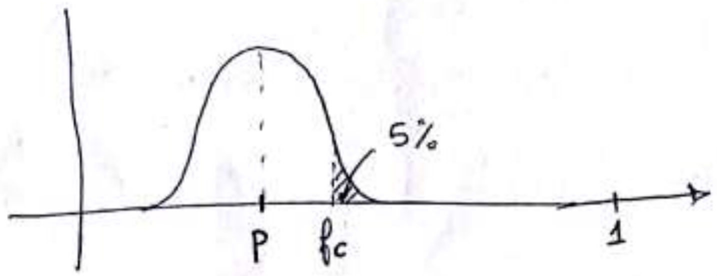
27/03/2015

Cas 3

$n = 200$ F : proportion des tubes défectueux dans l'échantillon

p : " " " " " toute la product°

$$TCL \rightarrow F \rightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$



$$P(F > f_c) = 0,05$$

$$P(F < f_c) = 1 - 0,05$$

$$P\left(\frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{f_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,95$$

$$\text{table} \Rightarrow \frac{f_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = 1,645$$

$$f_c = p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,036$$

I.A : $[0 ; 0,036]$

2) $n = 200$, $F = \frac{4}{200} = 0,02$

Le lot est acceptable au seuil de 5 % car $F < f_c$.

3) H_1 : $p = 6\%$. H_0 : $p = 2\%$

$$\underbrace{P(AH_0/H_1)}_{\text{accepter } H_0 \text{ sachant } H_1} = p(F < f_c /_{p=6\%}) = P\left(\frac{F-0,06}{\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{n}}} < \frac{f_c - 0,06}{\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{F-0,06}{\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{n}}} < -1,429\right) = 1 - 0,9236$$

$$= 7,64\%$$

Cas 4 H_0 : $\mu = 1000$ ohms

$n = 640$ ohms $\bar{x} = 990$ ohms , $S = 100$ ohms

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) , n \geq 30$$

$\alpha = 5\%$

$$P\left(-t_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < t_\alpha\right) = 1 - \alpha = 0,95$$

I.A : $\left[\mu - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} , \mu + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = [975,30 ; 1024,69]$

table $t_\alpha = 1,96$

$\bar{x} \in IA$ donc H_0 n'est pas rejeté au seuil de 5%.

3) $H_1 : \mu = 1050$ ohms

$$P(AH_0 / H_1)$$

$$P(975,30 < \cancel{\bar{X}} < 1024,69 / m = 1050)$$

$$P\left(\frac{975 - 1050}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < \frac{\bar{X} - 1050}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < \frac{1024,69 - 1050}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\right)$$

$$= P\left(-5,92 < \frac{\bar{X} - 1050}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < -2,0086\right)$$

$$= F(-2,0086) - \underbrace{F(-5,92)}_{\simeq 0}$$

$$= 1 - 0,9772$$

$$= 2,28\ \%$$

<u>Cas 5</u> La distribution de la résistance est une loi normale.

L'écart-type est inconnu

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \longrightarrow T_{(n-1)}$$

1) $H_0 : m = 400$ ohms , $\alpha = 5\%$

$$P\left(-t_\alpha < \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < t_\alpha\right) = 1 - \alpha = 0,95$$

table $t_\alpha = 2,131$

$$\bar{X}_n = \frac{\Sigma x_i}{16} \quad , \quad S = \left[\frac{\Sigma (x_i - \bar{x}_n)^2}{16} \right]^{1/2} .$$

$$\text{I.A.} \quad \left[m - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} , m + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

$$= [396,408 \ ; \ 403,591]$$

$\bar{x}_n \notin$ I.A. donc l'échantillon ne vérifie pas H_0 au seuil de 5 %.

$$\bar{X}_n = 396,125 \text{ ohms} \qquad S = 6,5276 \text{ ohms}$$

2) I.C $\left[\bar{x} - t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \ , \ \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$ $\quad 1-\alpha = 0,95$

I.C $[392,533 \ ; \ 399,716]$

Remarque : 400 ohms $\notin$ I.C.

Cas 6

La durée de vie des disp. est une loi normale $N(m, \sigma)$

$$m = 800 \text{ h} \quad , \quad \sigma = 50 \text{ h}$$

$$n = 25 \qquad \bar{x} \longrightarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$P(\bar{X} \geq 783,55)$

$$P\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{783,55 - m}{\sigma/\sqrt{n}}}_{-1,645} \right) \underset{\text{table}}{=} 0,95$$

$H_0 : \quad m = 800$ au niveau ~~de~~ $\alpha = 1 - 0,95 = 5\%$

2) $P(\overline{AH_0} / H_0) = P(\bar{X} < 783,55) = 1 - 0,95 = 5\%$

3) $H_1 : \quad m = m_1 \quad , \quad \beta = P(AH_0 / H_1)$

$$= P(\bar{X} > 783,55 / m = m_1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{783,55 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Si $m_1 = 750$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{X} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} < 3,355\right) = 3,9 \times 10^{-4}$$

Si $m_1 = 760$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{X} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} < 2,355\right) = 9,2 \times 10^{-3}$$

Si $m_1 = 770$

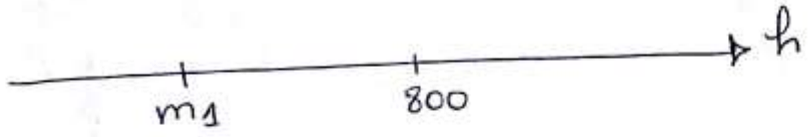
$$\beta = P\left(\frac{\bar{X} - 770}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,355\right) = 8,77 \times 10^{-2}$$

Si $m_1 = 780$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{X} - 780}{\sigma/\sqrt{n}} < 0,355\right) = 0,361$$

Si $m_1 = 800$

$$P(\overline{AH_0} / H_0) = 1 - \alpha = 0,95$$



4) $n = 36$ $\bar{X} \longrightarrow N(m, \sigma/\sqrt{n})$, $\alpha = 5\%$

$$P\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} > U_\alpha\right) = 0,95$$

table: $U\alpha = -1,6448$

$$P\left(\bar{X} > m + U\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

$$P(\bar{X} > 786,29) = 0,95$$

$$m + U\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 786,29\ h$$

fct° qui permet d'extraire

token = strtok(buff, ":")

séparateur qu'il faut utiliser entre les champs

```
char * token;
token = strtok (buff, ":");
   while (token != NULL) {
          token = strtok (NULL, ":");
          ...
          }
```