Série 2 : Tests d'hypothèses

Cas 1 :

Dans une chaîne de production particulière, chaque boite pèse en moyenne 16 g. Le sous- ou le sur-remplissage est un problème sérieux et la chaîne de production sera fermée si l'un des deux cas se produit. Grâce aux données passées, on sait que σ est égal à 0.8 g. Un contrôleur de la qualité échantillonne 30 boites toutes les deux heures et décide de fermer ou non la chaîne de production pour ajustement.

1. Quelle est la règle de rejet pour un seuil de signification égal à 0.05 ?
2. Si la moyenne d'un échantillon $\bar{x}$ est égale à 16.32 g, quelle action recommanderiez-vous ?
3. Si la moyenne d'échantillon est égale à 15.82 g, quelle action préconiseriez-vous ?

1°

$H_0 : m = 16$

$H_1 : m \neq 16$

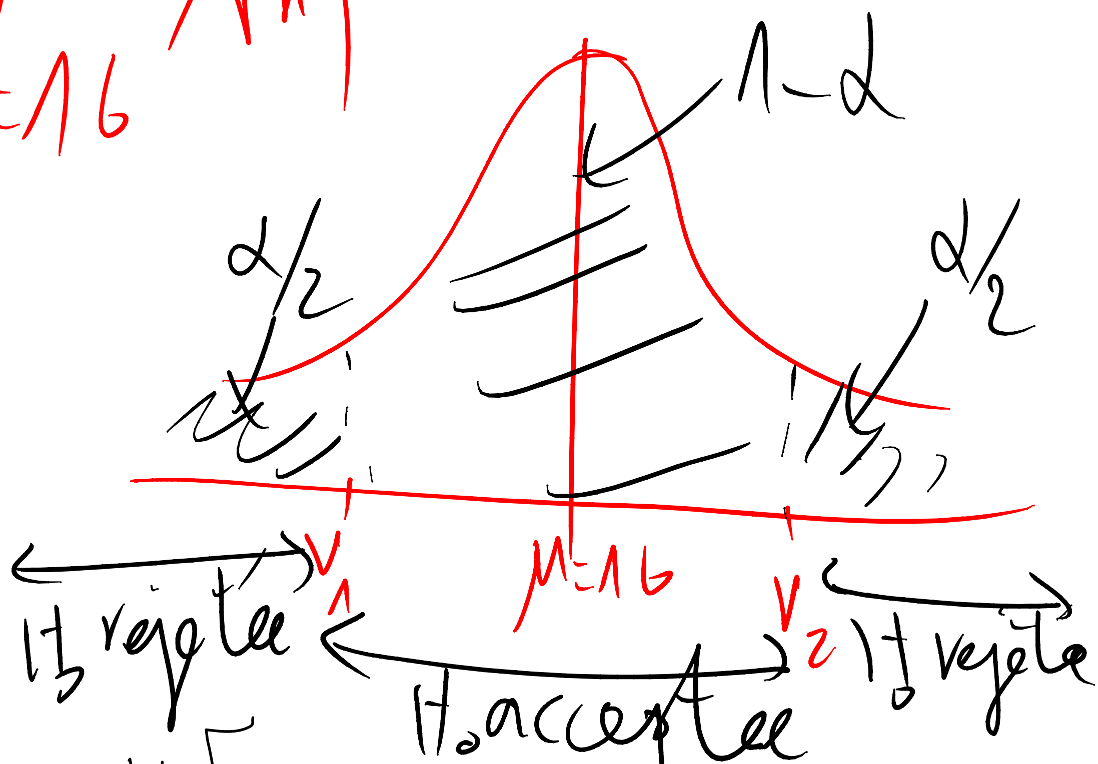
$\alpha = 5\%$

$\bar{X} \sim N(\mu ; \sigma/\sqrt{n})$

Sous $H_0 : \mu = 16$

$v_1 = 16 - a$

$v_2 = 16 + a$



$$1-\alpha = 0,95 = \mathbb{P}\left[v_1 < \bar{X} < v_2\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{-a\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\bar{X}-16}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right]$$

$$2\Pi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right)-1=0,95$$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}=1,96 \Rightarrow a=\frac{0,8\times 1,96}{\sqrt{30}}$$

$$\Rightarrow a \simeq 0,29$$

$v_1=15,71$; $v_2=16,29$

2°- $\bar{x}=16,32 \notin [v_1,v_2]$, Donc H_0 est rejeté

3°- $\bar{x}=15,82 \in [v_1,v_2]$; H_0 acceptée

Cas 2 :

Une opération particulière dans la chaîne de montage automobile nécessite, en moyenne, 2.2 minutes. A cause des effets du temps de montage d’une pièce à la fois sur les opérations d’assemblage précédentes et suivantes, il est important de conserver un temps moyen d’assemblage de 2.2 minutes. Un échantillon aléatoire de 45 pièces assemblées révèle un temps moyen de montage de 2.39 minutes, avec un écart type d’échantillon de 0.20 minute. Utiliser un seuil de signification égal à 0.02 et tester si l’opération requière en moyenne 2.2 minutes pour être exécutée.

H_0 : $m=2,2$

H_1 : $m\neq 2,2$

$\alpha=2\%$

Même raisonnement que Ex 1

Cas 3:

L'entreprise Simtech fabrique des tubes de verre pour l'entreprise Giscom. L'entreprise cliente exige que les lots expédiés par Simtech contiennent au plus 2% de défectueux. Les lots sont habituellement constitués de 5000 tubes de verre. Avant d'expédier les lots, Simtech effectue un contrôle en prélevant au hasard 200 tubes.

1. En utilisant un risque de α =0.05 de rejeter à tort un lot dont la proportion de défectueux est de 2% (ou mieux), quelle est la valeur critique de la proportion de défectueux dans un échantillon de taille n=200 qui ne doit pas être dépassée pour considérer un lot comme acceptable ?
2. On doit expédier un lot de 5000 tubes. Lors du contrôle final, on a observé 4 tubes de verre défectueux dans un échantillon de 200 tubes. Est-ce que ce lot peut être considéré comme acceptable d'après les exigences de Giscom ?
3. Giscom réceptionne des lots de Simtech en prélevant également 200 tubes et fait usage de la même règle de décision que Simtech. Quelles sont les chances sur 100 d'accepter un lot comportant 6% de tubes défectueux alors que Simtech certifie 2% de défectueux dans 95% des cas ? Comment appelle-t-on ce risque ?

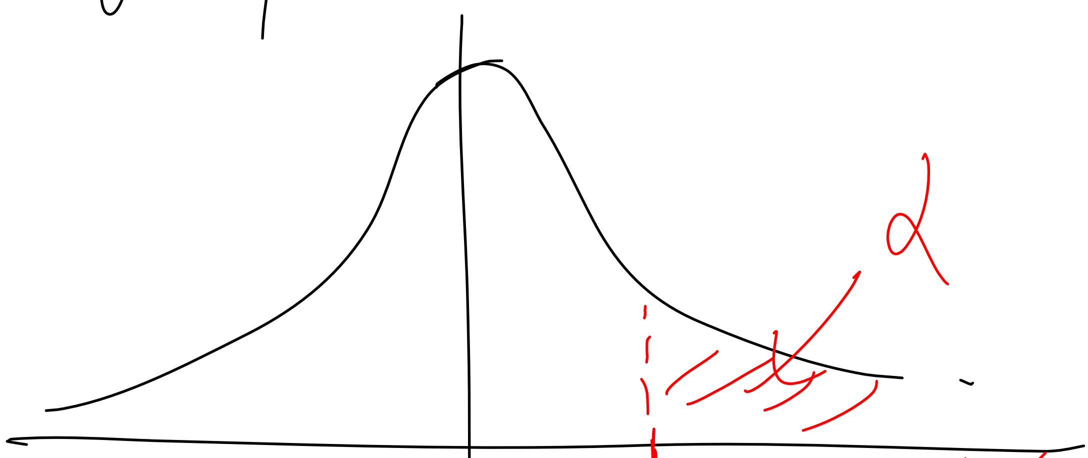
$$F_n \sim N\left(p \,;\, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$H_0 : p = 0{,}02$ $\quad n = 200$

$H_1 : p > 0{,}02$

$\alpha = 5\%$

Sous H_0 : $p = 0{,}02$



$V^* = 0{,}02 + a$ $\quad p = 0{,}02$ $\quad V^*$ $\quad H_0$ rejetée

H_0 acceptée

$$0{,}95 = \mathbb{P}\left[F_n < 0{,}02 + a\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{F_n - 0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{200}}} < \frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}\right]$$

$$0{,}95 = \Pi\left(\frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}} \simeq 1{,}645 \qquad a = 0{,}016$$

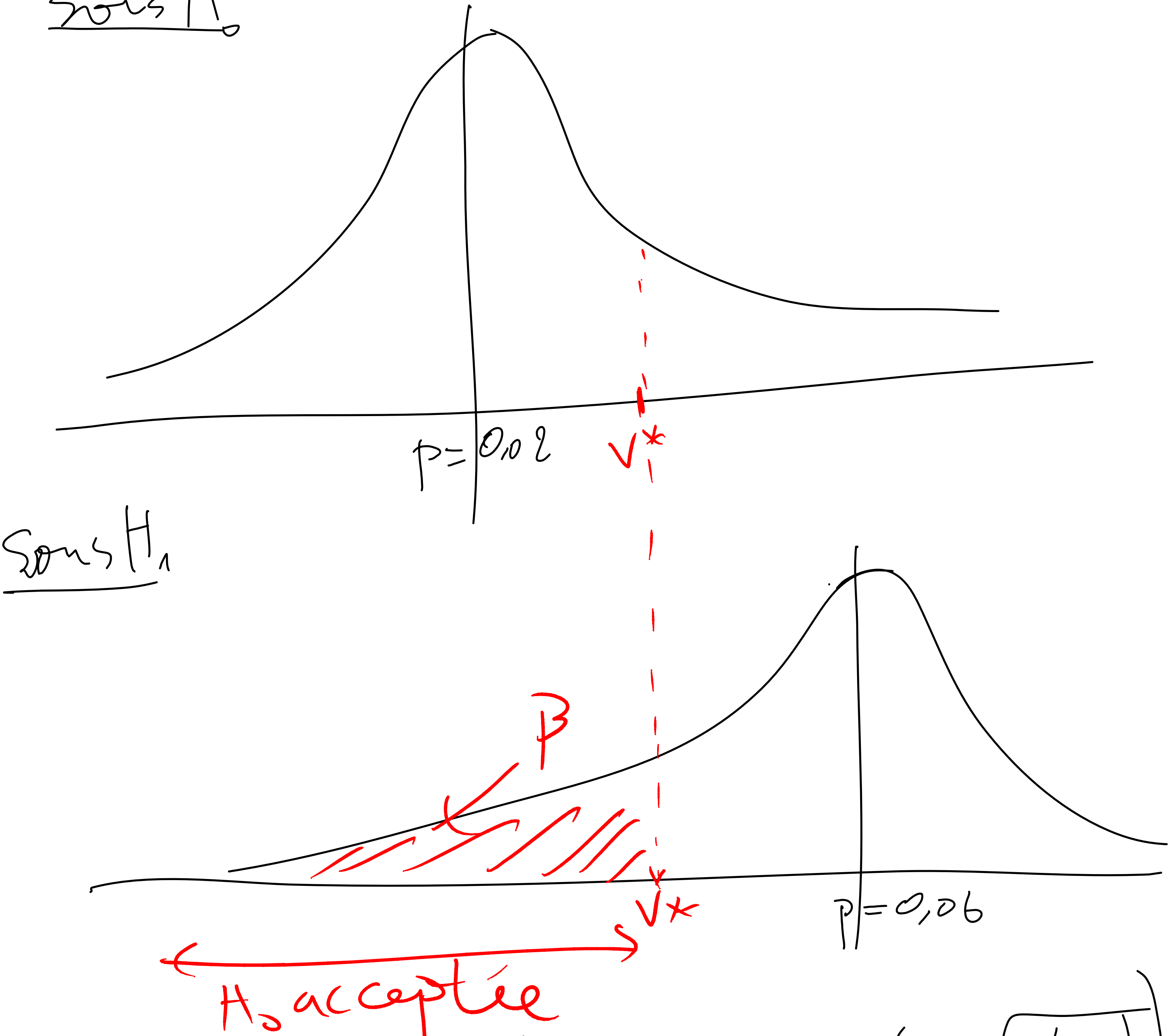
$$v^* = 3{,}6\,\%$$

2° $f_n = 2\,\%$ $\quad f_n < v^*$

Donc H_0 est acceptée (~~a~~ lot accepté)

3° Risque de 2ème espèce.

Sous H_0



$$\beta = \mathbb{P}\left[\bar{X} < V^*\right] \quad \text{où } \bar{X} \sim N\left(p\,;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \text{ et } p = 0{,}06$$

$$\text{et } V^* = 0{,}036$$

calcul simple à faire.

Cas 4:

Un fabriquant de fournitures électriques fabrique des résistances dont la valeur nominale doit être de 1000 ohms (ohm-mètre)). Pour vérifier le procédé de fabrication, on prélève un échantillon aléatoire de 64 résistances. On mesure ces résistances avec un ohmètre de précision et les calculs de la moyenne et l'écart-type conduisent aux valeurs suivantes :

$\bar{x}$ = 990 ohms, s= 100ohms.

1. En supposant que le risque de première espèce est fixé à 0.05, élaborer une règle de décision qui permettrait de tester l'hypothèse nulle selon laquelle le procédé est centré à 1000 ohms.
2. Est-ce que l'hypothèse de normalité de la population (l'ensemble des valeurs ohmiques de la fabrication) est requise pour l'élaboration de la règle de décision en a)
3. Selon les résultats de l'échantillon de 64 résistances, doit-on rejeter l'hypothèse selon laquelle le procédé est centré à 1000 ohms ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 : m=1000 ohms si le procédé opère en réalité à m= 1050 ohms ? Comment appelle-t-on ce risque ?