Chapitre 1

Distributions statistiques et représentations graphiques

1.1 Vocabulaires

Le but de la statistique est de dégager la signification des données (numériques ou non) obtenues lors de l'étude d'un phénomène. Elle consiste à collecter, ordonner, réduire et résumer la masse des données statistiques et les interpréter. L'organisation, la description et la présentation des données sous forme de tableaux ou de graphiques sont l'objet de la "Statistique Descriptive". L'interprétation et les conclusions que l'on peut tirer d'un ensemble de données font l'objet de la "Statistique Inférentielle".

Population : C'est l'ensemble d'individus ou d'objets qui possèdent un ou plusieurs critères spécifiques en commun. Une population statistique est dite finie si l'on peut déterminer avec précision le nombre d'éléments qui la composent. Sinon, on parle de population infinie.

Exemples :

♣ Dans une étude sur l'emploi, la population peut être l'ensemble des personnes en âge de travailler.

♣ Dans une enquête sur la natalité, la population peut être l'ensemble des naissances qui ont eu lieu durant une période donnée.

Unité statistique : C'est tout élément d'une population objet d'une étude statistique.

Échantillon : L'étude d'une population entière est souvent très coûteuse et parfois impossible. En statistique, on se restreint à une partie de la population. Une telle partie est appelée "Échantillon" et doit être représentative de la population.

Exemple : Dans une étude sur l'âge moyen des nouveaux inscrits en première année, un échantillon peut être constitué en choisissant au hasard 15 étudiants parmi les nouveaux inscrits.

Variable : Elle sert à décrire l'aspect d'une population objet d'une étude statistique. On distingue deux types de variables :

- ◇ Les variables qualitatives dont les valeurs sont des mots ou des lettres.
- ◇ Les variables quantitatives dont les valeurs sont des nombres réels.

EXEMPLES : Dans l'exemple de l'étude sur l'emploi, on peut s'intéresser aux variables

- ♣ X = État civil d'un individu. Cette variable est qualitative et peut prendre l'une des valeurs ou modalités : célibataire, marié, divorcé, veuf... etc.
- ♣ Y= Âge de l'individu. Cette variable est quantitative et prend des valeurs numériques.

Une variable quantitative est dite continue si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre contient un intervalle. Autrement elle est dite discrète.

- ♣ U = L'âge d'un nouvel inscrit en première année. C'est une variable continue.
- ♣ V = Le nombre d'enfants dans une famille. C'est une variable discrète.

Distributions statistiques : Une distribution statistique est une présentation des données collectées dans des tableaux où figurent la variable, les effectifs et les fréquences relatives à chaque valeur ou ensembles des valeurs prises par cette variable.

Effectif : C'est le nombre d'unités statistiques de la population considérée ou de l'échantillon à l'étude dont la variable prend une même valeur (dans le cas d'une variable discrète), ou prend des valeurs dans un même intervalle (dans le cas d'une variable continue). L'effectif est noté n_i. La somme des effectifs est appelée la taille de la population ou de l'échantillon. On la note $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$.

EXEMPLES :

- ♣ Dans une étude sur le nombre d'enfants par famille, un échantillon de 12 familles a révélé les données suivantes : 2 ; 0 ; 0 ; 2 ; 0 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 0 ; 2 ; 2

  Distribution des effectifs :

x_i	0	1	2
n_i	4	2	6

- ♣ Dans une étude sur la durée d'attente (en mn) devant un arrêt de bus, un échantillon de 10 passagers choisis au hasard a donné :

  0 :50 ; 1 :09 ; 2 :08 ; 1 :25 ; 1 :18 ; 2 :29 ; 2 :00 ; 1 :59 ; 1 :18 ; 2 :45

  Distribution des effectifs :

x_i	n_i
]0, 1]	1
]1, 2]	5
]2, 3]	4

Fréquence : C'est la proportion de l'effectif d'une valeur de la variable par rapport à la taille totale de la population ou de l'échantillon. La fréquence est notée f_i et donnée par : $f_i = \frac{n_i}{n}$.

EXEMPLES :

♣ Distribution des élus selon le niveau d'instruction :

Niveau d'étude (x_i)	Effectif n_i	Fréquence f_i
Primaire	36	0.11
Secondaire	81	0.25
Universitaire	208	0.64
Total	325	1

♣ Distribution des élus selon l'âge :

Classe d'âge	Effectif n_i	Fréquence f_i
]30,40]	39	0.12
]40,50]	136	0.42
]50,60]	104	0.32
]60,70]	46	0.14
Total	325	1

Fréquence cumulée : C'est la proportion des unités statistiques de la population ou de l'échantillon qui possèdent une valeur inférieure ou égale à une valeur donnée x. Elle est notée $F(x)$ et donnée par

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} f_i.$$

EXEMPLE : Distribution du nombre d'accidents durant une année pour un échantillon de 1000 automobilistes.

x_i	n_i	f_i	$F(x_i)$
0	230	0.23	0.23
1	450	0.45	0.68
2	190	0.19	0.87
3	50	0.08	0.95
4	40	0.05	1
Total	1000	1	

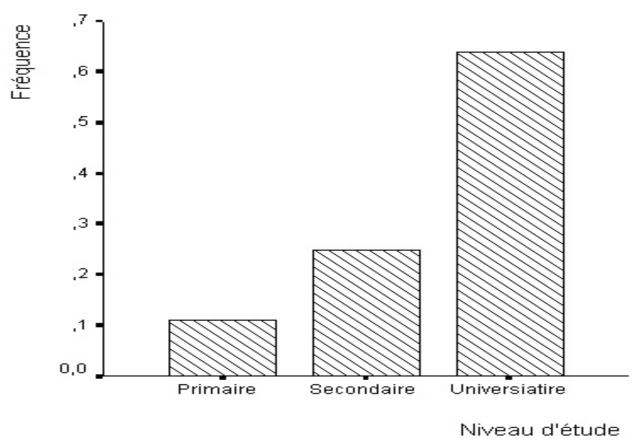
1.2 Représentations graphiques des données

1.2.1 Représentation d'une distribution de variable qualitative

Les tuyaux d'orgues :

Sur l'axe des abscisses on représente les modalités (**les valeurs de la variable**), alors que sur l'axe des ordonnées on représente les effectifs ou les fréquences (ou les pourcentages) selon que l'on désire tracer un diagramme des effectifs ou de fréquences (ou pourcentages).

EXEMPLE : Représentation du diagramme des fréquences pour le niveau d'étude des élus.



Représentation circulaire :

C'est une représentation où chaque modalité est représentée par une portion du disque. Si S est l'aire du disque, l'aire d'une portion est égale à $f \times S$, où f est la fréquence de la modalité correspondante.

EXEMPLE : Diagramme circulaire des pourcentages pour le niveau d'étude des élus.

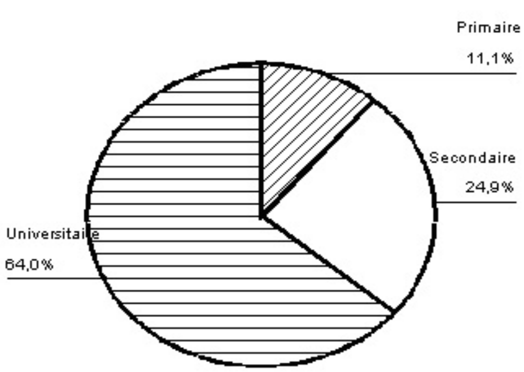


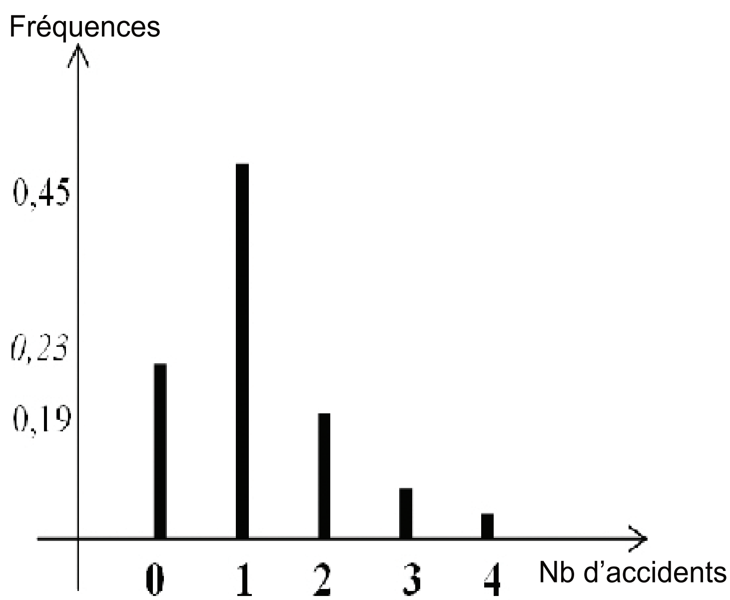
Diagramme circulaire de la frequence
du niveau d'étude des élus

1.2.2 Représentation d'une distribution de variable quantitative discrète

Diagramme en bâtons :

Sur l'axe des abscisses on représente les modalités (les valeurs de la variable), alors que sur l'axe des ordonnées on représente les effectifs ou les fréquences (ou les pourcentages) selon que l'on désire tracer un diagramme des effectifs ou de fréquences (ou pourcentages).

EXEMPLE : Représentation du diagramme des fréquences pour le nombre d'accidents durant une année pour un échantillon de 1000 automobilistes.



Courbe des fréquences cumulées :

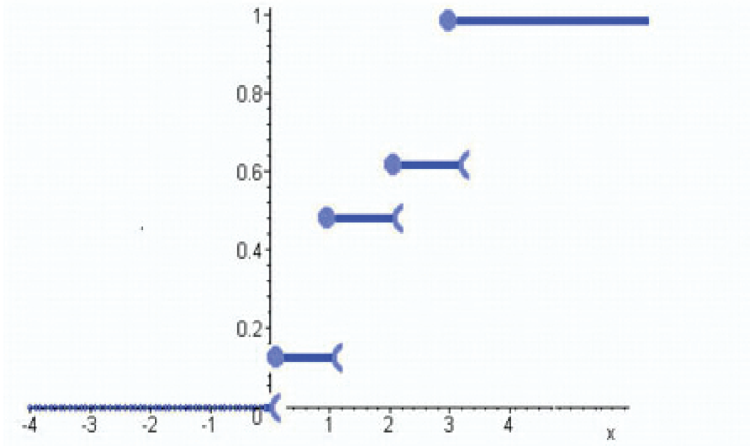
C'est une courbe en escaliers qui représente la fonction

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_i \text{ pour tout } i \\ \sum_{i:x_i \leq x} f_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE : Représentation de la courbe des fréquences cumulées pour le nombre d'accidents durant une année pour un échantillon de 1000 automobilistes.

1.3 Représentation d'une distribution de variable quantitative continue

Considérons une variable continue X dont les valeurs se situent dans un intervalle I. On divise cet intervalle en k classes disjointes $[a_i, a_{i+1}[$, $i = 1, \ldots, k$. On prendra toujours des classes de même amplitude $a =$



$a_{i+1} - a_i$ =constante. Pour tout i, on note n_i le nombre de valeurs de X dans la classe $[a_i, a_{i+1}[$ que l'on appelle l'effectif de cette classe. Le choix du nombre de classes est laissé au soin de l'utilisateur : Plus le nombre d'observations est grand plus le nombre de classes est élevé. On admet cependant, pour aider à la compréhension, que ce nombre devrait être entre 5 et 15. Pour dresser le tableau des distributions des effectifs (ou de fréquences) on pourra suivre les étapes suivantes :

Etape 1 : Déterminer k le nombre de classes à considérer dans l'étude.

Etape 2 : Calculer l'étendue : $e = X_{\max} - X_{\min}$, où $X_{\min}$ est la valeur minimale de X et $X_{\max}$ est sa valeur maximale.

Etape 3 : Diviser l'étendue par k, pour avoir une idée sur la valeur de l'amplitude des classes que l'on notera a. On alors $a \simeq e/k$.

Etape 4 : On construit alors les classes

$[X_{\min}, X_{\min} + a[, \; [X_{\min} + a, X_{\min} + 2a[, \ldots, [X_{\min} + (k-1)a, X_{\min} + ka[.$

Etape 5 : S'assurer que chaque observation appartient à une classe et une seule.

Exemple : Les données suivantes sont les poids (en kg) de 32 étudiants :

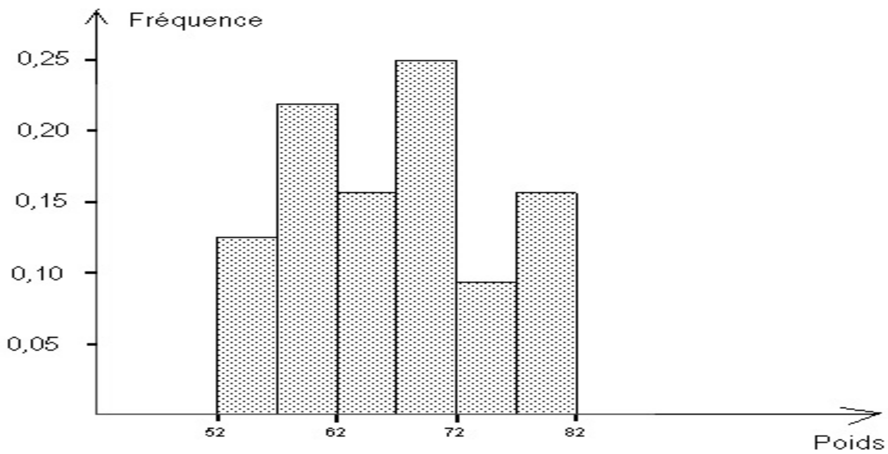
64; 59; 64, 62; 75; 60; 68; 63; 82; 70; 66; 55; 55; 75; 59; 60; 64; 72; 76; 55; 80; 82; 72; 78; 71; 72; 79; 70; 52; 68; 60; 61.

Supposons que l'on décide de considérer 6 classes. Nous avons $X_{\min} = 52$ et $X_{\max} = 82$. D'où $e = 82 - 52 = 30$ et $a = 30/6 = 5$. On a alors le tableau de distribution des fréquences suivant :

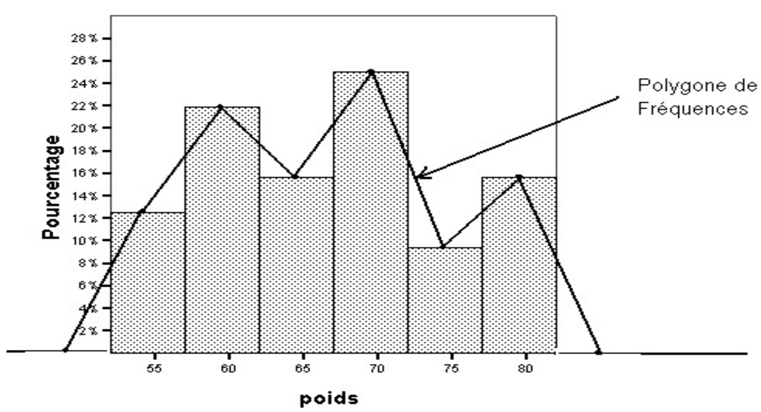
Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i
$[52, 57[$	4	$4/32$
$[57, 62[$	7	$7/32$
$[62, 67[$	5	$5/32$
$[67, 72[$	8	$8/32$
$[72, 77[$	3	$3/32$
$[77, 82[$	5	$5/32$

Histogramme : C'est peut-être la représentation graphique la plus utilisée pour les variables quantitatives. La construction d'un tableau de distribution des fréquences (ou des effectifs) est une étape préalable. Pour construire un histogramme on commence par placer la variable objet de l'étude sur l'axe horizontal et les fréquences (ou les effectifs) sur l'axe vertical. L'histogramme est alors formé par des rectangles dont les bases sont les classes et les hauteurs sont les fréquences (ou les effectifs) correspondantes.

EXEMPLE : Reprenons l'échantillon des poids des étudiants de l'exemple précédent. Ci-après nous avons l'histogramme des effectifs :



Polygone des fréquences : Le polygone des fréquences est une ligne brisée joignant les points (c_i, f_i), pour $i = 1, 2, \ldots, k$, où c_i est le milieu de la classe $]x_i, x_{i+1}]$ et f_i est sa fréquence.

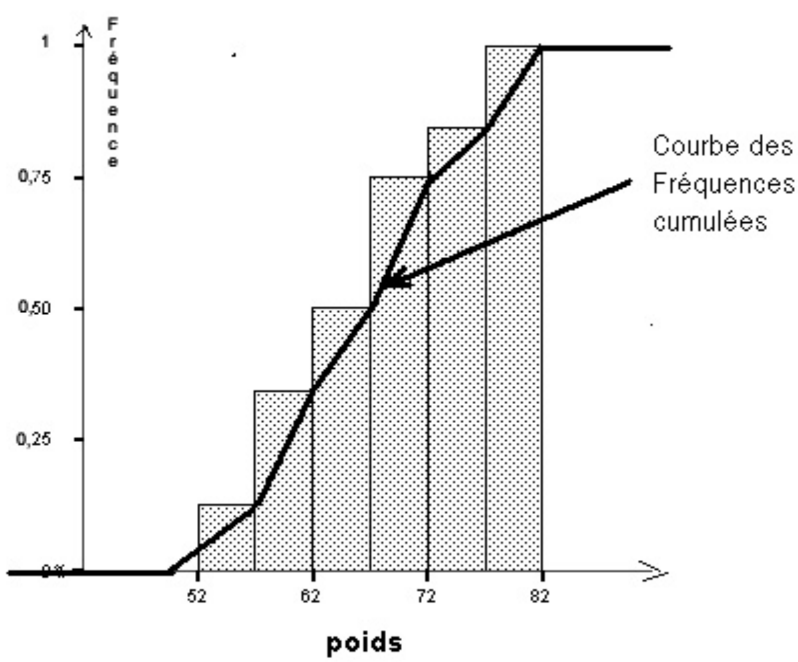


Polygone des fréquences cumulées : C'est une ligne brisée joignant les points $(x_{i-1}, F(x_i))$, pour $i = 2, \ldots k$, où $F(x_i) = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$.

Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulées $F(x_i)$
$[52, 57[$	4	$4/32$	$4/32$
$[57, 62[$	7	$7/32$	$11/32$
$[62, 67[$	5	$5/32$	$16/32$
$[67, 72[$	8	$8/32$	$24/32$
$[72, 77[$	3	$3/32$	$27/32$
$[77, 82[$	5	$5/32$	1
Total	32	1	

Ce tableau est une étape préalable pour le tracé du polygone des fréquences cumulées.

REMARQUE : On complète la courbe en joignant les points $(c_0, 0)$ et $(x_2, F(x_1))$, où c_0 est le centre de la classe fictive $]x_1 - a, x_1]$: $c_0 = x_0 - a/2$.



1.4 Exercices

Exercice 1. Indiquer le type des variables (qualitatives, quantitatives discrètes ou quantitatives continues) dans chacun des cas suivants :

a) L'état civil des habitants de Rabat.

b) La taille des étudiants de la première année.

c) Le nombre de pages d'un annuaire téléphonique.

e) Le poids d'un nouveau-né.

Exercice 2. Les données suivantes représentent le nombre d'articles vendus dans un magasin d'articles de sport durant les 20 derniers jours : 16 ; 17 ; 18 ; 15 ; 17 ; 14 ; 18 ; 17 ; 16 ; 15 ; 16 ; 15 ; 17 ; 18 ; 15 ; 17 ; 14 ; 17 ; 14 ; 16.

a- Identifier la variable et préciser son type.

b- Dresser le tableau de distribution des effectifs, fréquences, et fréquences cumulées.

c- Faire une représentation graphique et tracer le polygone des fréquences et la courbe des fréquences cumulées.

Exercice 3. Les téléspectateurs sont invités à évaluer une certaine émission en envoyant un simple message contenant l'une des lettres **A**, **B**, **C** ou **D** qui représentent respectivement "très bonne émission", "bonne émission", "mauvaise émission" et "très mauvaise émission". Ci après sont les évaluations de 32 téléspectateurs :

B, B, A, C, A, D, A, A, B, C, D, D, C, A, B, B, C, A, D, C, A, A, B, A, C, D, B, B, C, D, B, A.

a- Dresser le tableau de distribution des fréquences.

b- Faire deux représentations graphiques de la distribution des fréquences.

Exercice 4. Ci-après sont les durées d'attente (en mn après l'heure de rendez-vous) observées dans un cabinet de médecin durant une semaine : 2 ; 5 ; 10 ; 12 ; 4 ; 4 ; 5 ; 17 ; 11 ; 8 ; 9 ; 8 ; 12 ; 23 ; 6 ; 8 ; 7 ; 13 ; 18 ; 3. En utilisant les classes]0,4] ;]4,8], ...etc.

a- Dresser le tableau de distribution des effectifs et des fréquences.

b- Tracer le polygone des fréquences et la courbe des fréquences cumulées.

c- Quel est approximativement le pourcentage de patients qui doivent attendre au plus 9 mn après l'heure de leurs rendez-vous ?

Exercice 5. Dans une entreprise les employés peuvent commencer leur journée de travail à 7 :00, 7 :30, 8 :00, 8 :30, ou 9 :00. Les données suivantes représentent les heures auxquelles 20 employés ont commencé leur journée de travail.

7 :00	8 :30	9 :00	8 :00	7 :30	7 :30	8 :30	8 :30	7 :30	7 :00
8 :30	8 :30	8 :00	8 :00	7 :30	8 :30	7 :00	9 :00	8 :30	8 :00

a- Dresser le tableau de distribution des effectifs et des fréquences.

b- Faire une représentation graphique adéquate.

c- Quelle est l'heure que semble préfèrer la majorité des employés ?

Exercice 6. Les données suivantes sont les quantités de lait (en l) vendues par le laitier du quartier durant les 20 derniers jours d'un mois de Ramadan.

10.68	21.23	20.12	24.90	16.47	23.12	10.65	12.07	12.90	17.08
19.00	14.04	17.94	17.09	13.25	16.21	22.10	18.14	21.31	11.25

a- Dresser le tableau de distribution des fréquences des quantités de lait vendues par jour.

b- Construire l'histogramme des fréquences.

c- Tracer la courbe des fréquences cumulées.

d- Donner une valeur approchée de x telle que 45% des quantités de lait vendues soient inférieures ou égales à x.

Chapitre 2

Mesures de tendance centrale et de dispersion

2.1 Mesures de tendance centrale

La tendance centrale se propose de synthétiser l'ensemble d'une série statistique en faisant ressortir une position centrale de la valeur du caractère étudié. Nous nous intéresserons aux mesures de tendance centrale les plus connues :

Le mode, **la médiane** et **la moyenne**.

2.1.1 Le mode

C'est la valeur la plus fréquente dans un échantillon. On la notera m_d. Cette valeur n'est pas nécessairement unique. Une distribution peut être **unimodale**, **bimodale** ou **plurimodale**.

Exemples :

1- Considérons la distribution des notes d'un groupe d'étudiants :

x_i	8	9	10	11	12	13	14
n_i	2	7	12	17	11	6	3

On a $m_d = 11$. Cette distribution est unimodale.

2- Considérons la distribution des couleurs des voitures dans un parking

x_i	Rouge	Blanche	Verte	Jaune	Noire	Grise
n_i	2	7	5	7	5	7

Ici on a trois modes : Blanche, Jaune et Grise. Cette distribution est plurimodale.

Remarque : Le mode existe aussi bien pour des variables qualitatives que pour des variables quantitatives. On la détermine de la même manière pour une variable qualitative ou pour une variable quantitative discrète.

Cas d'une variable quantitative continue : Dans le cas d'une variable continue, les données sont regroupées en classes. Si les classes sont toutes de même amplitude, une classe modale est celle dont la fréquence est la plus élevée.

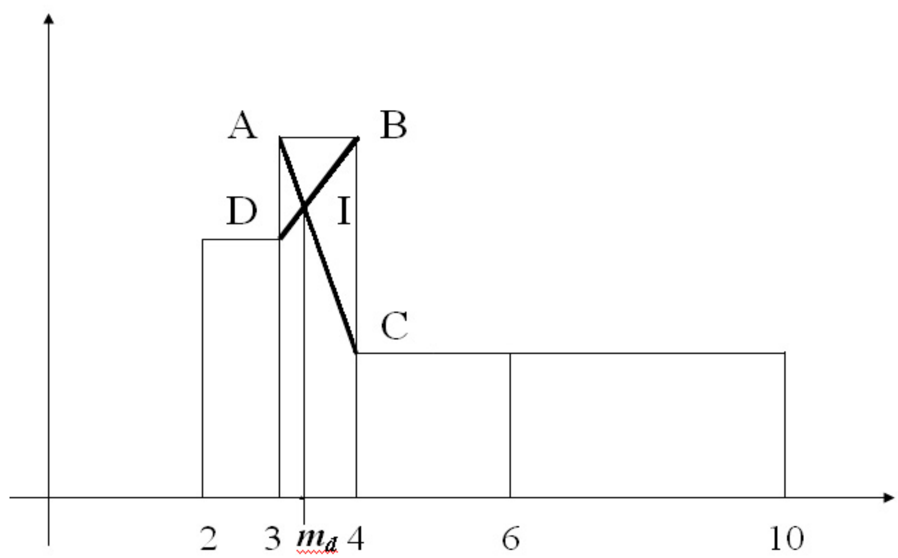
REMARQUE : Lorsque les classes ne sont pas de même amplitude, on doit corriger les effectifs avant de déterminer la classe modale. Le mode est déterminé par une interpolation linéaire.

Pour illustrer une telle interpolation, considérons l'exemple suivant.

EXEMPLE : Les salaires mensuels (en milliers de DH) du personnel d'une entreprise se répartissent comme suit :

Classe	Effectif	Effectif corrigé
$[2,\ 3[$	15	15
$[3,\ 4[$	20	20
$[4,\ 6[$	20	10
$[6, 10[$	24	6

Il est clair que [3,4[est "la classe modale".



A partir du système $\begin{cases} \dfrac{y_I - y_C}{x_C - x_I} = \dfrac{y_A - y_C}{a} \\ \dfrac{y_A - y_I}{x_C - x_I} = \dfrac{y_A - y_D}{a} \end{cases}$ on déduit que $\dfrac{y_A - y_C}{x_C - x_I} = \dfrac{(y_A - y_C) + (y_A - y_D)}{a}$, d'où

$$\frac{x_C - x_I}{y_A - y_C} = \frac{a}{(y_A - y_C) + (y_A - y_D)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{x_I = x_C - \frac{(y_A - y_C) \times a}{(y_A - y_C) + (y_A - y_D)}.}$$

Application :

$$m_d = 4 - \frac{(20 - 10) \times 1}{(20 - 10) + (20 - 15)} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

2.1.2 La médiane

La médiane est la valeur m qui partage les éléments de la série statistique, préalablement classés par ordre de valeurs croissantes, en deux groupes d'effectifs égaux : 50% des valeurs observées sont inférieures ou égales à m (et

50% sont supérieures ou égales à m).

REMARQUE : La médiane ne peut être calculée que pour des variables quantitatives.

Cas d'une variable quantitative discrète

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs prises par la variables. On les ordonne de la plus petite à la plus grande et on note $x_{(1)}$ la plus petite valeur, $x_{(2)}$ la deuxième valeur,..., $x_{(i)}$ la i$^{\text{ème}}$ et $x_{(n)}$ la plus grande valeur. Alors on a

$$m = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ & \\ (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)})/2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

EXEMPLES :

1- Considérons la distribution suivante

x_i	10	20	30	40	50	60
n_i	4	8	4	9	3	3

On a $n = 31$, d'où $\dfrac{n+1}{2} = 16$ et $m = x(16) = 30$.

2- Considérons la distribution suivante

x_i	10	20	30	40	50	60
n_i	3	8	4	9	3	3

On a $n = 30$, d'où $\dfrac{n}{2} = 15$ et $m = (x_{(15)} + x_{(16)})/2 = (30 + 40)/2 = 35$.

Cas d'une variable quantitative continue

La médiane est solution de l'équation $F(x) = 0,5$. Pour la déterminer, on commence par déterminer la classe médiane $]x_i - x_{i+1}]$ qui vérifie

$$F(x_i) \leq 0,5 \quad \text{et} \quad F(x_{i+1}) \geq 0,5.$$

La médiane m est ensuite déterminée à partir d'une interpolation linéaire.

EXEMPLE : Reprenons l'exemple de la distribution des salaires mensuels

Classe	f_i	$F(x_{i+1})$
[2, 3[	0,19	0,19
[3, 4[	0,25	0,44
[4, 6[	0,25	0,69
[6, 10[	0,31	1

La classe médiane est donc [4, 6[. Nous allons utiliser la courbe des fréquences cumulées pour déterminer m. On a

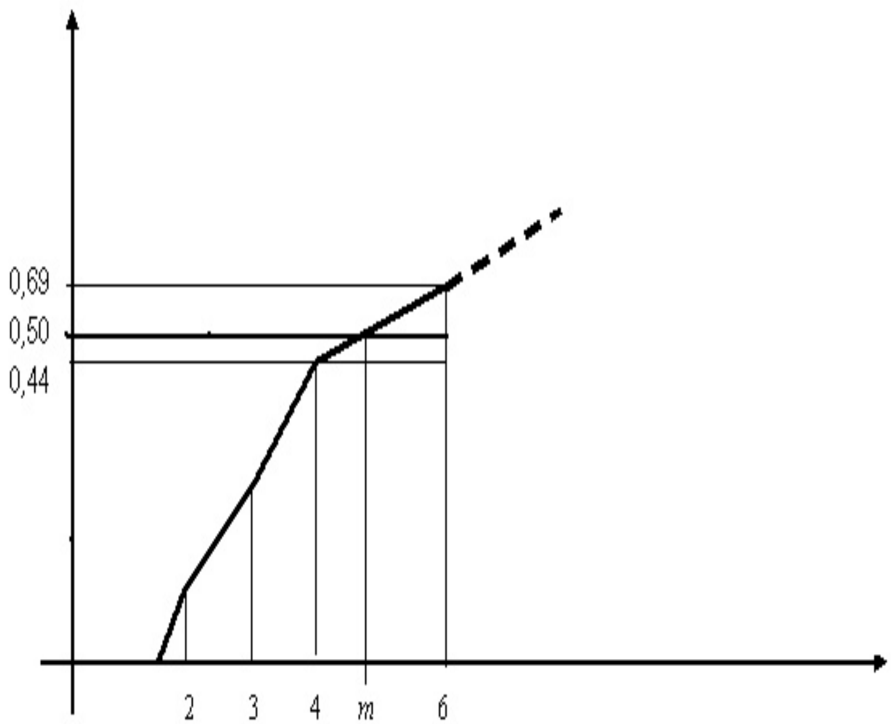
$$x_i \leq m \leq x_{i+1}$$

$$F(x_i) \leq 0,50 \leq F(x_{i+1})$$

On en déduit

$$\frac{m - x_i}{0,5 - F(x_i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{F(x_{i+1}) - F(x_i)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{m = x_i + \big(0,5 - F(x_i)\big)\frac{x_{i+1} - x_i}{F(x_{i+1}) - F(x_i)}}$$

Application : $m = 4 + (0,5 - 0,44)(6-4)/(0,69 - 0,44) = 4,48$.



2.1.3 Les moyennes

La moyenne est le résumé statistique le plus utilisé. Il existe trois types de moyennes :

Moyenne Arithmétique, **Moyenne Géométrique** et **Moyenne Harmonique**

Nous ne considérons dans ce cours que la moyenne arithmétique.

La moyenne arithmétique

Cas d'une variable quantitative discrète : La moyenne arithmétique, notée $\overline{x}$, est égale à la somme des valeurs distinctes de la variable multipliées par leurs effectifs respectifs divisée par la somme des effectifs.

$$\overline{x} = \frac{\sum_i n_i\, x_i}{n}, \quad \text{où } n = \sum_i n_i.$$

REMARQUE : 1) Dans la suite, le mot “moyenne” désignera la moyenne arithmétique.

2) Cas d'une variable quantitative continue, et lorsque les observations sont déja regroupées en classes, la moyenne arithmétique approximative est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{\sum_i n_i\, c_i}{n},$$

où c_i est le centre de la classe associée à l'effectif n_i.

EXEMPLE : Reprenons l'exemple de la distribution des salaires mensuels

$$\overline{x} = \frac{15 \times 2,5 + 20 \times 3,5 + 20 \times 5 + 24 \times 8}{15 + 20 + 20 + 24} = \frac{399.5}{79} \simeq 5,05.$$

Propriétés de la moyenne

♣ Comme la médiane, la moyenne n'est pas nécessairement l'une des valeurs de l'échantillon.

♣ Contrairement à la médiane, la moyenne est très sensibles aux valeurs extrêmes.

EXEMPLE : Considérons l'échantillon suivant :

$$18; \quad 22; \quad 20; \quad 19; \quad 26.$$

La médiane est égale à 20 alors que la moyenne est égale à 21. Imaginons qu'au moment de la saisie des donnée, au lieu de la valeur 26 on a écrit 62. Pour un tel échantillon, la médiane reste inchangée alors que la moyenne devient 28,2.

♣ Soient $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon et a une constante. Soient $y_1, \ldots, y_n$ et $z_1, \ldots, z_n$ les échantillons définis par $y_i = a\, x_i$ et $z_i = x_i + a$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors,

$$\overline{y} = a\,\overline{x} \qquad \text{et} \qquad \overline{z} = \overline{x} + a.$$

♣ Soient $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ deux échantillons, et $w_1, \ldots, w_n$ l'échantillon défini par $w_i = u_i + v_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}$.

2.2 Les mesures de dispersion

Les indicateurs de dispersion sont nombreux, les plus courants sont :

L'étendue, l'intervalle interquartile, la variance et **le coefficient de variation.**

L'étendue

Il mesure l'écart entre la plus petite valeur de la variable et la plus grande : $\boldsymbol{e} = x_{max} - x_{min}$, où x_{max} et x_{min} sont respectivement les valeurs maximale et minimale prises par la variable.

Les quartiles

On les note Q_1, Q_2 et Q_3 et ils sont tels que :

◇ $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$,

◇ 25% des observations sont inférieures ou égale à Q_1, 25% des observations sont entre Q_1 et Q_2, 25% des observations sont entre Q_2 et Q_3 et 25% des observations sont supérieures ou égale à Q_3.

Remarque : 1) Il est clair que $Q_2 = m$.

2) Les quartiles vérifient $F(Q_1) = 0.25$, $F(Q_2) = 0.50$ et $F(Q_3) = 0.75$.

Dans le cas de variables continues, Q_1 et Q_3 sont déterminés par interpolation comme nous l'avons déjà vu pour la médiane.

Exemple : Reprenons l'exemple de la distribution des salaires mensuels

Classe	f_i	$F(x_{i+1})$
]2, 3]	0,19	0,19
]3, 4]	0,25	0,44
]4, 6]	0,25	0,69
]6,10]	0,31	1

$$Q_1 = 3 + \frac{0,25 - 0,19}{0,44 - 0,19} \times (4-3) = 3,24 \quad \text{et}$$

$$Q_3 = 6 + \frac{0,75 - 0,69}{1 - 0,69} \times (10-6) = 6,19$$

Dans le cas de variables discrètes, on calcule des valeurs approximatives des quartiles en procédant comme suit :

1- On ordonne les observations $x_1, \ldots, x_n$ de la plus petite à la plus grande :

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(k)} \leq \ldots \leq x_{(n)}.$$

2- Pour $i = 1, 2$ ou 3, on calcule $\alpha_i = i\dfrac{n+1}{4}$.

3- Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note p_i le nombre entier vérifiant $p_i \leq \alpha_i < p_i + 1$.

Si $\alpha_i - p_i < 0.5$, alors $Q_i = x_{(p_i)}$ i.e ; Q_i est la $p_i^{\text{ème}}$ observation.

Si $\alpha_i - p_i > 0.5$, alors $Q_i = x_{(p_i+1)}$ i.e ; Q_i est la $(p_i+1)^{\text{ème}}$ observation.

Si $\alpha_i - p_i = 0.5$, alors $Q_i = \dfrac{x_{(p_i)} + x_{(p_i+1)}}{2}$ i.e ; Q_i est la moyenne de la $p_i^{\text{ème}}$ et la $(p_i+1)^{\text{ème}}$ observations.

Exemple : Calculons les quartiles pour l'échantillon suivant : 12, 14, 4, 10, 5, 7, 8, 11, 4, 13. En ordonnant ces 9 observations suivant l'ordre croissant, on obtient : 4, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14. D'où pour $i = 1, 2$ ou 3,

$$\alpha_1 = 1 \times \frac{10+1}{4} = 2.75, \quad \text{d'où} \quad Q_1 = x_{(3)} = 5,$$

$$\alpha_2 = 2 \times \frac{10+1}{4} = 5.5, \quad \text{d'où} \quad Q_1 = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{8+10}{2} = 9,$$

$$\alpha_3 = 3 \times \frac{10+1}{4} = 8.25, \quad \text{d'où} \quad Q_3 = x_{(8)} = 12.$$

L'intervalle interquartile :

C'est l'intervalle $[Q_1, Q_3]$. Il contient 50% des observations, le reste des observations se réparti avec 25% à gauche de Q_1 et 25% à droite de Q_3. On note **IRQ**$=Q_3 - Q_1$ la largeur de l'intervalle interquartile.

Exemple : Reprenons l'exemple de la distribution des salaires mensuels. L'intervalle [3,24, 6,19] est l'intervalle interquartile et IQR=6,19 - 3,24=2,85.

La variance et l'écart-type

La variance est un résumé statistique qui mesure la concentration (ou la dispersion) des observations autour de leur moyenne. Soient $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon et $\overline{x}$ sa moyenne. La variance, notée S_x^2, est définie par

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \overline{x})^2.$$

La racine de la variance, $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \overline{x})^2}$, est appelée "Écart-type".

Remarques : 1) On peut facilement montrer que $S_x^2 = \dfrac{1}{n-1}\Big(\sum_i x_i^2 - n\overline{x}^2\Big)$.

2) Dans le cas d'une variable continue et lorsque les observations sont regroupées en classes, une valeur approximative de la variance est donnée par

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i n_i (c_i - \overline{x})^2, \quad \text{où } c_i \text{ est le centre de la classe associée à l'effectif } n_i.$$

3) Lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre, on notera S^2 au lieu S_x^2 pour désigner la variance de $x_1, \ldots, x_n$.

Propriétés de la variance : Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux séries statistiques et a, b deux réels, alors

$$\diamond\, S_{x+a}^2 = S_x^2, \qquad \diamond\, S_{ax}^2 = a^2 S_x^2, \qquad \diamond\, S_{x+y}^2 = S_x^2 + S_y^2 - \frac{2}{n-1}\,\mathbb{C}ov(x,y),$$

où $\mathbb{C}ov(x,y) = \sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ désigne la covariance des séries $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$.

Le coefficient de variation

Tous les indicateurs de dispersion que nous avons vus jusqu'à présent dépendent de l'unité de mesure de la variable. Ils ne permettent donc pas de comparer la dispersion d'échantillons qui ne sont pas exprimés dans la même unité de mesure. Le coefficient de variation, lorsque les valeurs de la variable sont positives, permet cette comparaison . Il s'écrit

$$CV = \frac{S_x}{\overline{x}} \times 100\%.$$

Si $CV < 50$ alors la dispersion n'est pas importante. Si $CV > 50$ alors la dispersion est importante.

EXEMPLE : Dans une maternité on a relevé le poids (en kg) à la naissance de 47 nouveau-nés. Les données collectées sont résumées comme suit :

classe	n_i	C_i	n_iC_i	$C_i - x$	$(C_i - \overline{x})^2$	$n_i(C_i - \overline{x})^2$
]2,5 , 3,0]	8	2,75	22,00	-0,73	0,5329	4,2632
]3,0 , 3,5]	15	3,25	48,75	-0,23	0,0529	0,7935
]3,5 , 4,0]	20	3,75	75,00	0,27	0,0729	1,4580
]4,0 , 5,0]	4	4,50	18,00	0,52	0,2704	1,0816
Total	47		163,75			7,5963

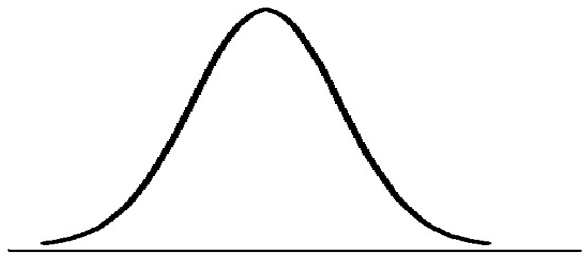
$$\overline{x} = \frac{163,75}{47} = 3,48 \quad S_x^2 = \frac{7,5963}{47-1} = 0,1651 \quad S_x = \sqrt{0,1651} = 0,4064 \quad \Rightarrow \boxed{CV = \frac{0,4064}{3,48} \times 100\% \simeq 12\%.}$$

Le coefficient de variation étant faible, le poids à la naissance est concentré autour de la moyenne.

2.3 Mesures de symétrie

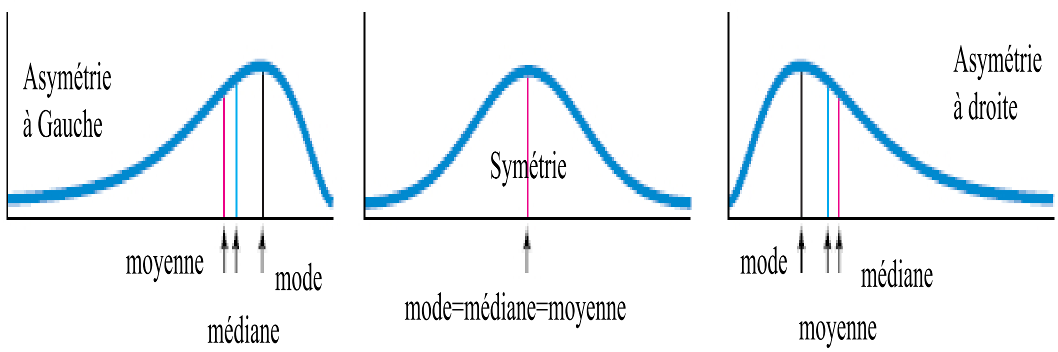
On dit qu'une distribution est **symétrique** si son histogramme (et donc son polygone des fréquences) est approximativement symétrique par rapport à la droite passant par la médiane.

Remarque : Une distribution est symétrique si le polygone des fréquences a la forme d'une cloche :

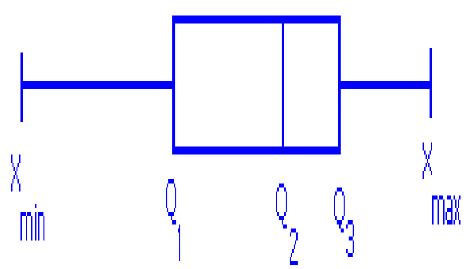


Une distribution qui n'est pas symétrique est dite **asymétrique à gauche** (respectivement **asymétrique à droite**) si la moitié gauche (respectivement à droite) de son histogramme est plus allongée que sa moitié droite (respectivement gauche).

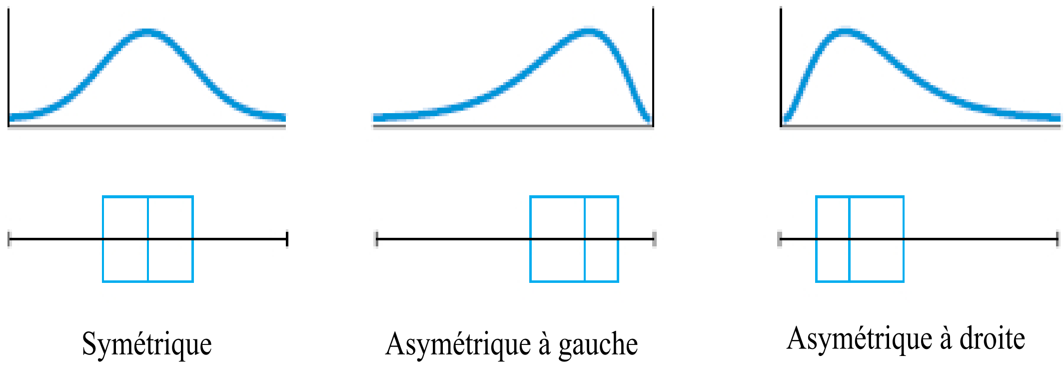
Les notions de symétrie et d'asymétrie sont illustrées dans la figure ci-dessous



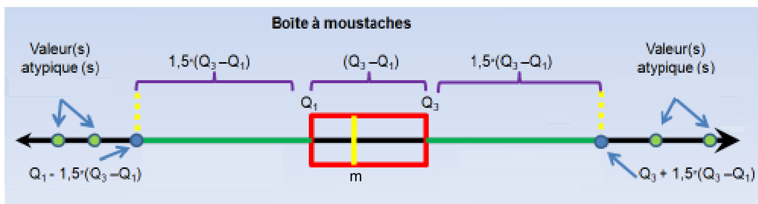
La boîte à moustaches C'est un graphe qui résume la distribution des observations à partir des cinq valeurs x_{min}; x_{max}; Q_1; Q_2 et Q_3 :



La boîte à moustaches peut nous renseigner sur la symétrie de la distribution des observations :



C'est également un bon outil pour la détection des valeurs extrêmes (ou atypiques) :



Les observations inférieures à $x = Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ ou supérieures à $x = Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$ sont considérées comme étant des valeurs atypiques.

2.4 Applications

Nous avons vu qu'il existe plusieurs mesures de positions et de dispersion. La moyenne est sans doute la mesure de position la plus répandue alors que la variance et l'écart-type sont les mesures de dispersion les plus utilisées. Nous allons voir comment en n'utilisant que la moyenne et l'écart-type, il est possible d'explorer des données. **Le théorème de Tchebychev** Il permet d'évaluer le pourcentage des données qui se trouvent à k écart-types de la moyenne, pour un entier k donné.

Théorème : Pour tout entier $k > 1$, au moins $(1 - 1/k^2)\%$ des observations d'une série de données, se trouvent à k écart-types de la moyenne de cette série.

Exemple : Les notes de 100 étudiants d'un contrôle de statistique ont une moyenne $\overline{x} = 14$ avec un écart-type $S = 1$. Combien d'étudiants ont eu une note entre 12 et 16 ?

Remarquons que $12 = \overline{x} - 2S$ et que $16 = \overline{x} + 2S$. Ainsi, d'après le théorème de Tchebychev, le pourcentage d'étudiants ayant obtenus une note entre 12 et 16 est supérieur ou égal à $(1 - 1/2^2)\% = 75\%$.

Le pourcentage garanti par le théorème de Tchebychev est mieux évalué sous la condition de symétrie.

Règle Empirique : Si la distribution des observation est symétrique, alors :

Approximativement 68% des valeurs sont à un écart-type de la moyenne.

Approximativement 95% des valeurs sont à deux écart-types de la moyenne.

Approximativement toutes les valeurs sont à trois écart-types de la moyenne.

Exercices

Exercice 1. La distribution du nombre d'enfants pour un échantillon de familles se présente comme suit :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	5	15	30	19	18	8	4	1

1- Déterminer le nombre de familles qui ont : au moins 3 enfants, au plus 4 enfants, moins de 5 enfants.

2- Évaluer le mode et la médiane de cette distribution statistique

Exercice 2. Les dépenses x (en DH) d'un échantillon de 100 clients d'un supermarché sont reportées dans le tableau suivant :

Dépense x	$430 < x \leq 440$	$440 < x \leq 450$	$450 < x \leq 470$	$470 < x \leq 480$	$480 < x \leq 500$
Effectif n_i	11	25	35	19	10

1- Construire l'histogramme, le polygone des fréquences et le polygone des fréquences cumulées.

2- Déterminer le mode, la médiane et la dépense moyenne d'un client de ce supermarché.

Exercice 3. Dans une région du Maroc, on dispose de l'information suivante concernant le nombre d'hommes et de femmes en état d'activité dans le domaine de l'agriculture pendant l'année 2004 :

Classe d'âge	]15,25]	]25,35]	]35,45]	]45,55]	]55,65]
Nombre d'hommes	1	798	611	580	10
Nombre de femmes	67	501	405	19	8

En classant les personnes actives de cette région selon leur sexe, pour chaque groupe

1- Calculer l'âge moyen, l'âge médian et l'écart-type des âges.

2- Quel est le groupe qui présente la variation la plus élevée ?

Exercice 4. Les salaires mensuels (en centaines de DH) des ouvriers d'une exploitation agricole se répartissent comme suit :

classe	]15, 16]	]16, 17]	]17, 18]	]18, 19]	]19, 20]	]20, 21]	]21, 22]
Effectif	3	20	9	8	5	3	2

Déterminer : l'étendue, les quartiles, l'intervalle interquartile, la moyenne, la variance et l'écart-type de cette distribution.

Exercice 5. Une diététicienne a mesuré la quantité de sucre (en centigrammes) contenue dans un gramme de céréale pour les 16 différentes céréales (Cheerios, Corn Flakes, Choco Pops ...etc) en vente dans un supermarché. Ci-après sont les mesures obtenues : 3; 17; 19; 20; 22; 23; 24; 25; 29; 30; 31; 34; 35; 37; 59; 68.

a- Déterminer les quartiles de cet échantillon.

b- Tracer la boîte à moustaches pour ces observations.

c- Préciser la nature symétrique ou asymétrique de la distribution de ces données.

d- Y a t-il de valeurs atypiques ? Si oui lesquelles ?

e- Quel est le pourcentage approximatif des observations qui sont à moins de 2 écart-types de la moyenne.

La diététicienne a décidé de reprendre les mesures une nouvelle fois, voici les résultats qu'elle a obtenus :

18.5; 19.0; 19.8; 19.5; 20.0; 20.0; 20.0; 20.7; 21.0; 21.5; 21.8; 22.0; 22.9; 22.7; 21.7; 23.0.

f- Reprendre les questions de a- à e-.

Chapitre 3

Éléments de Probabilités

Les origines de la théorie des probabilités remontent au $17^{\text{ème}}$ siècle lorsque les deux célèbres mathématiciens français Blaise Pascal et Pierre De Fermat tentaient de résoudre certains problèmes liés aux jeux du hasard. Des problèmes analogues à ceux qui ont été résolus par Pascal et De Fermat ont incité d'autres mathématiciens tels que Huygens, Bernoulli, De Moivre et d'autres à établir les bases d'une théorie mathématique des probabilités. De nos jours, la théorie des probabilités est une branche mathématique bien développée dont les domaines d'application sont aussi multiples que variés. Elle peut, par exemple, fournir des outils précieux pour le traitement des files d'attente, la modélisation de la propagation d'une épidémie, la prédiction de la météo ... etc.

Ce chapitre est une introduction aux calculs des probabilités où nous allons présenter les concepts fondamentaux qui sont nécessaires pour le développement des éléments de base de la statistique mathématique.

3.1 Méthodes de dénombrement

En théorie des probabilités, on est souvent devant des situations où il est indispensable de dénombrer les possibilités pour qu'un événement donné se réalise. Nous allons, dans ce paragraphe, étudier les méthodes de dénombrement les plus courantes.

Principe élémentaire de comptage

Considérons une expérience qui se réalise en n étapes. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note m_i le nombre de résultats possibles à la $i^{\text{ème}}$ étape.

Résultat Le nombre total des résultats possibles à la fin d'une telle expérience est égal à

$$m = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n.$$

Exemple : Dans un restaurant, un menu comprend une entrée (2 choix :une salade verte ou une soupe), un plat principal (3 choix : de la viande, du poulet ou du poisson) et un dessert (2 choix : une glace ou un fruit de saison). De combien de façons est-il possible de composer un menu ?

Il y a 2 possibilités de choix d'entrée, pour chaque choix d'entrée il y a 3 possibilités de choix de plat principal et pour chaque choix d'entrée et de plat principal il y 2 possibilités de choix de dessert. Ainsi, comme le montre la figure3.1 ci-dessous, le nombre de façons de composer un menu est égal à $2 \times 3 \times 2 = 12$.

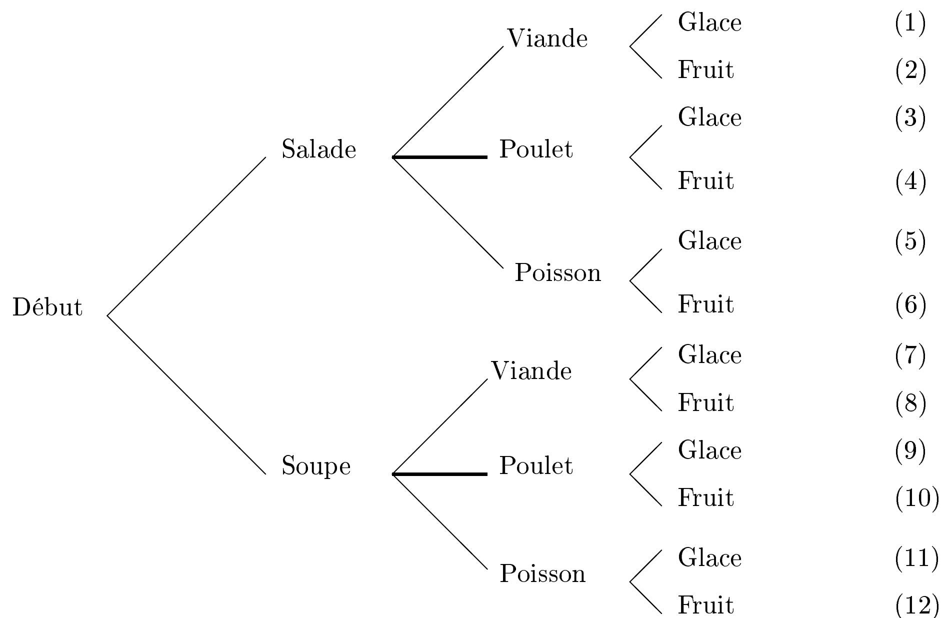


FIGURE 3.1 – Arbre des Menus

Permutations

Une permutation est un rangement ou classement ordonné de n objets.

Permutations sans répétitions

EXEMPLE : Les permutations sans répétitions possibles des lettres **A, B** et **C** sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA. Soient 6 permutations au total.

RÉSULTAT Le nombre de permutations de n objets distincts est égal à

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n.$$

Permutations avec répétitions

Le nombre de permutations lorsque certains objets sont indiscernables est inférieur au nombre de permutations lorsque tous les objets sont distincts.

EXEMPLE Les permutations possibles des lettres **A, A, B, B** et **B** sont : AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA.

Il n'est pas toujours facile d'énumérer toutes les possibilités et pourtant on a besoin de connaître leur nombre. Un moyen permettant de faire le calcul consiste à dénombrer toutes les permutations comme si toutes les lettres étaient distinctes ($5!=120$) puis diviser par le nombre de permutations possibles des lettres **A** ($2!=2$) et celui des lettres **B** ($3!=6$) puisque ces permutations ne sont pas discernables. Ainsi on a $\dfrac{120}{2 \times 6} = 10$ possibilités de ranger les lettres **A, A, B, B** et **B**.

RÉSULTAT Un ensemble **E** contient n_1 objets identiques de type T_1, n_2 objets identiques de type T_2 , ... et n_r objets identiques de type T_r. Le nombre de possibilités pour ranger les éléments de **E** est donné par

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}, \qquad \text{où } n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

Arrangements et Combinaisons

Considérons une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. L'expérience consiste à tirer p boules de cette urne. Quel est le nombre de résultats possibles ? Pour répondre à cette question, on distingue les différents cas de figures suivants :

a. Tirages avec remise :
  - a1. L'ordre des résultats est pris en considération.
  - a2. L'ordre des résultats n'est pas pris en considération.

b. Tirages sans remise :
  - b1. L'ordre des résultats est pris en considération.
  - b2. L'ordre des résultats n'est pas pris en considération.

Lorsque l'ordre des résultats est pris en considération, on parle d'arrangements. Lorsque l'ordre des résultats n'est pas pris en considération, on parle de combinaisons.

Arrangements avec répétitions

Avec n objets discernables $O_1, \ldots, O_n$, combien de $p-$uplets $(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_p})$, où les O_{i_j} ne sont pas forcément distincts, est-il est possible de former ?

Pour répondre à cette question, remarquons que la formation d'un $p-$uplet $(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_p})$, où les O_{i_j} ne sont pas forcément distincts, est une expérience qui se réalise en p étapes. À chaque étape, le nombre de possibilités est égale à n. Cela justifie donc, compte tenu du principe de comptage évoqué au paragraphe 3.1, le résultat suivant.

RÉSULTAT Le nombre d'arrangements avec répétitions de p objets choisis parmi n est égal à n^p.

EXERCICE Montrer que le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à n^p.

Arrangements sans répétitions

Avec n objets discernables $O_1, \ldots, O_n$, combien de $p-$uplets $(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_p})$, où les O_{i_j} sont tous distincts, est-il est possible de former ?

Remarquons que cela n'est possible que si $n \geq p$. On supposera alors qu'il en est ainsi quand c'est indispensable.

Ici, la formation d'un $p-$uplet $(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_p})$, où les O_{i_j} sont tous distincts, est une expérience qui se réalise en p étapes. Mais, à la $i^{\text{ème}}$ étape le nombre de réalisations possibles est égale à $n-(i-1)$. Cela justifie donc le résultat suivant.

Résultat Le nombre d'arrangements sans répétitions de p objets choisis parmi n, noté A_n^p, est donné par

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice Montrer que le nombre d'applications **injectives** d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à A_n^p.

Exercice Un entraîneur dispose d'un groupe de 20 joueurs. Combien d'équipes, de 11 joueurs chacune, est-il possible de former ? On suppose que chaque joueur est capable d'occuper n'importe quel poste sur le terrain.

Combinaisons sans répétitions

Exemple Reprenons l'exemple de l'urne contenant n boules numérotées de 1 à n parmi lesquelles on choisit, sans remise, p boules. Sans tenir compte de l'ordre d'apparition des numéros tirés, quel est le nombre de combinaisons possibles ?

On sait que si l'on tenait compte de l'ordre on aurait A_n^p cas possibles. Dans ce cas chaque groupe de p numéros engendre $p!$ combinaisons ordonnée. Pour obtenir le nombre de combinaisons non ordonnées, il suffit de diviser A_n^p par $p!$. Le problème revient à calculer le nombre de possibilités de choisir p boules parmi les n.

Résultat Le nombre de possibilités de choisir p objets parmi n objets distincts est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Applications : Montrer la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_p C_n^p\, a^p\, b^{n-p}.$$

Exercice Montrer que

$$\forall k \leq n+m, \quad C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i\, C_m^{k-i}.$$

Indication : Remarquer que $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m$ et identifier les coefficients de X^k dans les deux expressions.

Combinaisons avec répétitions

Dans ce paragraphe nous allons répondre à la question suivante :

Question Supposons que l'on effectue p tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Sans tenir compte de l'ordre, quel est le nombre combinaisons possibles ?

Dans chaque combinaison, la boule numéro i peut apparaître x_i fois, avec $0 \leq x_i \leq p$ et $\sum_{i=1}^n x_i = p$. Ainsi le nombre de combinaisons possibles est égal au nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = p$.

Ce problème classique peut également être présenté comme suit :

On dispose de p enveloppes identiques que l'on aimerait répartir dans n boîtes aux lettres numérotées de 1 à n. Notons x_i le nombre d'enveloppes dans la boîte numéro i, avec $0 \leq x_i \leq p$. Le nombre de répartitions possibles est égal au nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = p$. Pour bien illustrer la solution nous commençons par un exemple simple.

EXEMPLE Une personne est chargée de distribuer des prospectus aux habitants d'un quartier. A la fin de sa tournée, cette personne dispose encore de 6 prospectus qu'elle décide de distribuer au hasard dans les 4 boîtes aux lettres du dernier immeuble. De combien de façons est-il possible de répartir 6 prospectus dans les 4 boîtes ?

Numérotons les boîtes de 1 à 4 et soit x_i le nombre de prospectus dans la boîte numéro i.

Le quadruplet $(x_1, \ldots, x_4) = (2, 3, 0, 1)$ est une possibilité que nous schématisons par

$$\lfloor PP \quad | \, PPP \, | \qquad | \, P \quad \rfloor$$

où deux barres verticales symbolisent une boîte et P un prospectus. Le schéma

$$\lfloor PPPPP \, | \qquad\qquad | \qquad\qquad | \, P \qquad \rfloor$$

correspond donc à $(x_1, \ldots, x_4) = (5, 0, 0, 1)$.

D'une manière générale, on obtient une possibilité de répartir les 6 prospectus dans les 4 boîtes en permutant les P et les barres verticales. Pour calculer le nombre de solutions possibles, remarquons d'abord que l'on doit toujours avoir une barre à l'extrémités gauche et une autre à l'extrémité droite car elles délimitent respectivement la première et la dernière boîte. On ne doit donc permuter que les 3 barres verticales qui sont au milieu et les 6 P. D'après le résultat sur les permutations avec répétitions, le nombre de permutations possibles est égal à

$$\frac{(6 + (4 - 1))!}{(4 - 1)!\, 6!} = \mathrm{C}^6_{6+(4-1)}.$$

En utilisant les mêmes arguments, on peut prouver le résultat général suivant :

RÉSULTAT Le nombre de possibilités de répartir p objets identiques dans n cases est égal à C^p_{p+n-1}.

REMARQUE Nous avons déjà signalé que C^p_{p+n-1} est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = p$. Ce nombre représente également le nombre de résultats, sans tenir compte de l'ordre, de p tirages avec remises effectués dans une urnes contenants n objets distincts.

Jusqu'ici nous avons considéré le nombre de possibilités de diviser un ensemble de n éléments en 2 sous-ensembles : l'un contenant p éléments et l'autre $n - p$ éléments. Quel serait ce nombre si on divisait un ensemble de n éléments en r sous-ensembles contenants respectivement $p_1, \ldots, p_r$ éléments ? (où $p_1 + \ldots + p_r = n$.)

RÉSULTAT Le nombre de possibilités de diviser un ensemble à n éléments en r partitions contenant respectivement $p_1, \ldots, p_r$ éléments est donné par

$$C_n^{p_1,\ldots,p_r} = \frac{n!}{p_1! \ldots p_r!}.$$

Démonstration.

$$C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-p_1-p_2-\ldots-p_{r-1}}^{p_r} = C_n^{p_1,\ldots,p_r}$$

□

EXEMPLE De combien de façons est-il possibles de répartir 12 étudiants en équipes pour travailler sur 3 projets, sachant que pour le projet **A** on a besoin de 3 étudiants, pour le projet **B** on a besoin de 2 étudiants et pour le projet **C** on a besoin de 4 étudiants ?

On doit donc diviser l'ensemble des étudiants en 4 sous-ensembles. Trois équipes d'effectifs respectifs 3, 2 et 4 qui vont travailler sur les projets et une équipe des 3 étudiants restants qui ne vont travailler sur aucun projet. Le nombre de possibilités est donc :

$$C_{12}^{3,2,4,3} = \frac{12}{3!2!4!3!}.$$

APPLICATIONS Formule du binôme généralisée :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{p1+p2+\ldots+p_r=n} C_n^{p_1,\ldots,p_r} a_1^{p_1} \ldots a_r^{p_r}.$$

3.2 Expériences et événements aléatoires

Une expérience est dite aléatoire lorsque ses résultats dépendent du hasard. Même si l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est connu, il est impossible de prédire avec certitude une issue. Par exemple, on sait d'avance qu'en lançant un dé à six faces numérotées de 1 à 6, le résultat qui sera indiqué sur la face supérieure du dé est un chiffre entre 1 et 6. Et pourtant personne ne peut prédire avec certitude le résultat d'un lancer de dé (sauf si celui-ci est truqué auquel cas le résultat ne dépend pas du hasard !)

Définition 1. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est noté Ω. On l'appelle l'**ensemble fondamental** ou **univers des possibles**. Ses éléments sont notés ω.

EXEMPLES

1. Une expérience consiste à lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et noter le numéro marqué sur la face supérieure. L'ensemble fondamental relatif à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ici l'ensemble fondamental est fini.
2. Une expérience consiste à compter le nombre de lancers, d'un dé à 6 faces numérotées, nécessaires pour obtenir un **6** pour la première fois. Dans ce cas, on a $\Omega = \mathbb{N}^*$. Il s'agit ici d'un ensemble fondamental infini et dénombrable.
3. Une expérience consiste à mesurer le temps séparant deux appels consécutifs qui arrivent à un central téléphonique. Dans ce cas, on a $\Omega =]0, \infty[$. Il s'agit ici d'un ensemble fondamental infini et non dénombrable.

Définition 2. On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω. Les singletons sont appelés des **événements simples** ou **élémentaires**. Un événement contenant au mois deux éléments de Ω est appelé **événement composite**.

REMARQUE En tant que sous-ensembles de Ω, $\emptyset$ et Ω sont deux événements appelés respectivement l'**événement impossible** et l'**événement certain**.

EXEMPLES Une expérience consiste à lancer un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et noter le numéro marqué sur la face supérieure.

1. L'événement "obtenir le numéro 3" est un événement simple.
2. L'événement "obtenir un numéro pair", c'est à dire obtenir un 2, un 4 ou un 6, est un événement composite.
3. L'événement "obtenir le numéro 7" est un événement qui ne peut pas se réaliser. C'est un **événement impossible**.
4. L'événement "obtenir un numéro < 7" se réalise toujours. C'est un **événement certain**.

Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements (i.e. deux sous-ensembles de Ω).

1. Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, c'est l'**événement contraire** de A.
2. L'intersection de A et B ($A \cap B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, A et B se réalisent simultanément. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles**.
3. La réunion de A et B ($A \cup B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, au moins l'un des événements A et B se réalise.
4. Lorsque $A \subset B$, la réalisation de A implique la réalisation de B.

3.3 Bases axiomatiques des probabilités

Soient Ω un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Définition 3. On dit qu'une fonction $\mathbb{P} : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \to [0,1]$ est une **probabilité** si elle vérifie les axiomes suivants :

A1. $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$ et $\mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$,

A2. Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$, lorsque $i \neq j$) on a :

$$\mathbb{P}\Big\{\bigcup_n A_n\Big\} = \sum_n \mathbb{P}\{A_n\}.$$

Ci-après sont quelques propriétés qui découlent directement de la définition.

Propriétés.

a- L'axiome A2 reste bien entendu valable lorsque $(A_n)_n$ est une suite finie.

b- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbb{P}\{A\}$. En effet, comme $A \cup \overline{A} = \Omega$, le résultat découle des axiomes A1 et A2.

c- Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. Lorsque $B \subset A$ on a

$$\mathbb{P}\{B\} \leq \mathbb{P}\{A\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\{A \backslash B\} = \mathbb{P}\{A\} - \mathbb{P}\{B\}.$$

En effet, il suffit de remarquer que $A = B \cup (A \backslash B)$.

d- Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$\mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}.$$

Événements équiprobables

Pour certaines expériences, l'ensemble fondamental est fini ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$) et les événements simples ont la même probabilité :

$$\mathbb{P}\{\omega_1\} = \mathbb{P}\{\omega_2\} = \ldots = \mathbb{P}\{\omega_n\} = p \in [0,1].$$

On dit aussi que les ω_i sont **équiprobables**.

Comme $\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}$, on a la relation

$$\mathbb{P}\{\Omega\} = \mathbb{P}\{\omega_1\} + \ldots + \mathbb{P}\{\omega_n\} = n\,p \quad \text{ou encore} \quad p = \frac{1}{n}$$

RÉSULTAT Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un espace fondamental dont les éléments sont équiprobables. Alors pour tout $A \subset \Omega$ on a

$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)},$$

où Card(B) désigne le nombre d'éléments de l'ensemble B.

EXEMPLE Une urne contient 6 boules blanches et 5 boules noires. On en tire au hasard et sans remise 2 boules. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule blanche et une boule noire ?

Ce problème peut être traité

(1) En tenant compte de l'ordre dans lequel les deux boules sont tirées (dans ce cas on numérote les boules afin de pouvoir les distinguer), ou

(2) Sans tenir compte de l'ordre dans lequel les deux boules sont tirées.

Nous allons considérer les deux cas de figure et nous allons voir qu'ils conduisent au même résultat. Remarquons tout d'abord que puisque les tirages se font au hasard, toutes les boules ont la même chance d'être choisies. Nous sommes donc dans le cas d'événements élémentaires équiprobables.

(1) Lorsque l'ordre des tirages est pris en considération, il y a 11 possibilités de choisir la première boule et 10 possibilités de choisir la deuxième, et donc $\text{Card}(\Omega) = 11 \times 10 = 110$.

De plus il y a 6×5 possibilités de tirer une boules blanche puis une boule noire et 5×6 possibilités de tirer une boules noire puis une boule blanche. Notons A, A_1 et A_2 les événements définis par

$$\begin{aligned}
\text{A} &= \text{“ on tire une boule blanche et une boule noire”},\\
\text{A}_1 &= \text{“ la première boule tirée est blanche”},\\
\text{A}_2 &= \text{“ la première boule tirée est noire”}.
\end{aligned}$$

On a alors $\text{A}=\text{A}_1 \cup \text{A}_2$. D'où

$$\mathbb{P}\{\text{A}\} = \mathbb{P}\{\text{A}_1\} + \mathbb{P}\{\text{A}_2\} = \frac{30}{110} + \frac{30}{110} = \frac{6}{11}.$$

(2) Lorsque l'ordre n'est pas pris en considération, il y a $\text{C}_{11}^2 = 55$ possibilités de tirer deux boules et donc $\text{Card}(\Omega) = 55$. Le nombre de possibilités de choisir une boule blanche et une boule noire est égale à $\text{C}_6^1 \times \text{C}_5^1 = 30$. D'où la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire est égale à $\frac{30}{55} = \frac{6}{11}$.

3.4 Probabilités conditionnelles

Nous somme souvent amené à calculer une probabilité à la lumière d'une information supplémentaire concernant le résultat de l'expérience. On parle alors de probabilités conditionnelles.

EXEMPLE Une expérience consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à noter X le numéro sur la face supérieure. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soient B l'événement $\{X = 6\}$ et A l'événement $\{X > 4\}$. Comme tous les événements simples sont équiprobables nous avons

$$\mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}\{A\} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}\{A \cap B\} = \frac{1}{6}.$$

Supposons maintenant que le dé a été jeté et que nous savons que l'événement A s'est réalisé, quelle est la probabilité que B se réalise ? Désignons cette probabilité par $\mathbb{P}\{B/A\}$. Pour la calculer on considère comme nouvel ensemble fondamental $\Omega' = \{5,6\} = A$. Comme les éléments de Ω, ceux de Ω' sont également équiprobables et on a

$$\mathbb{P}\{B/A\} = \frac{1}{2} = \frac{\text{Card}(B\cap A)}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\frac{\text{Card}(B\cap A)}{\text{Card}(\Omega)}}{\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}\{B\cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}}.$$

Définition 4. Soient Ω un ensemble fondamental et E et F deux sous ensembles de Ω avec $\mathbb{P}\{F\} \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de E sachant F** et on note $\mathbb{P}\{E/F\}$ la quantité

$$\mathbb{P}\{E/F\} = \frac{\mathbb{P}\{E\cap F\}}{\mathbb{P}\{F\}}$$

REMARQUES

1. Comme $\mathbb{P}\{E/F\}$ désigne la probabilité que E se réalise sachant que F s'est réalisé, il est possible de lui donner un sens en convenant que $\mathbb{P}\{E/F\} = 0$ lorsque $\mathbb{P}\{F\} = 0$. Cela signifie que puisque F ne peut pas se réaliser, l'événement " E se sachant F " est impossible.
2. De la définition on déduit que
$$\mathbb{P}\{E\cap F\} = \mathbb{P}\{E/F\}\mathbb{P}\{F\}$$
3. Sur $\mathcal{P}(\Omega)$, on définit la fonction $\mathbb{P}_B$ par :
$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}_B\{A\} = \mathbb{P}\{A/B\}.$$
On peut facilement montrer que la fonction $\mathbb{P}_B$ est une **probabilité**.

3.5 Formule de BAYES

Soient Ω un ensemble fondamental et $A_1, A_2, \ldots A_n$ une partition de Ω (i.e. $\bigcup_i A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$) telle que, pour tout i, $\mathbb{P}\{A_i\} \neq 0$.

Théorème. [Théorème de Bayes] Pour tout $E \subset \Omega$, on a

$$\mathbb{P}\{E\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{E/A_i\} \times \mathbb{P}\{A_i\}, \qquad \text{(Formule de probabilité totale)},$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \mathbb{P}\{A_i/E\} = \frac{\mathbb{P}\{E/A_i\} \times \mathbb{P}\{A_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{E/A_j\} \times \mathbb{P}\{A_j\}} \qquad \text{(Formule de Bays)}.$$

EXEMPLE Une société d'assurance classe ses clients en 3 catégories ; HR : " client à haut risque ", MR : " client à moyen risque " et FR : " client à faible risque ". Sachant qu'un client est classé "HR" (respectivement "MR" et "FR"), la probabilité qu'il fasse une réclamation est de 0.30 (respectivement 0.15 et 0.05). Par ailleurs, les Clients classés "HR" représentent 10% des clients de la société. Alors que ceux classés "FR" représentent 70%.

a- Quelle est la probabilité qu'un client choisi au hasard fasse une réclamation ?

b- Si un client n'a fait aucune réclamation, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un " client à haut risque" ?

Soit Ω l'ensemble fondamental formé par tous les clients de la société. Notons A_1 l'ensemble des clients classés HR, A_2 l'ensemble des clients classés MR et A_3 l'ensemble des clients classés FR. Les événements A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω, et on a : $\mathbb{P}\{A_1\} = 0.10$, $\mathbb{P}\{A_3\} = 0.70$ et $\mathbb{P}\{A_2\} = 0.20$.
Notons B l'événement " le client fait une réclamation". On a

$$\mathbb{P}\{B/A_1\} = 0.30, \quad \mathbb{P}\{B/A_2\} = 0.15 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\{B/A_3\} = 0.05.$$

a- D'après le théorème de Bayes, $\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B/A_1\}\mathbb{P}\{A_1\} + \mathbb{P}\{B/A_2\}\mathbb{P}\{A_2\} + \mathbb{P}\{B/A_3\}\mathbb{P}\{A_3\}$.

b- On cherche $\mathbb{P}\{A_1/\overline{B}\}$. D'après le théorème de Bayes, $\mathbb{P}\{A_1/\overline{B}\} = \frac{\mathbb{P}\{\overline{B}/A_1\}\mathbb{P}\{A_1\}}{\mathbb{P}\{\overline{B}\}}$.

3.6 Événements indépendants

Intuitivement, deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucun effet sur la réalisation de l'autre. Dans ce paragraphe nous allons donner une définition précise et quelques propriétés de l'indépendance.

Définition. On dit que l'événement A est **indépendant** de l'événement B si

$$\mathbb{P}\{A/B\} = \mathbb{P}\{A\}.$$

EXEMPLE On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes bien mélangées. On désigne par A l'événement "la carte tirée est une dame" et par B l'événement "la carte tirée est un carreau". Alors A est indépendant de B. Pour le monter calculons $\mathbb{P}\{A/B\}$.
On a $\mathbb{P}\{A\} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$, $\mathbb{P}\{B\} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \dfrac{1}{52}$. D'où $\quad \mathbb{P}\{A/B\} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \dfrac{4}{52} = \mathbb{P}\{A\}$.

Propriétés.

1- L'événement A est indépendant de l'événement B si, et seulement si, $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \times \mathbb{P}\{B\}$. Cette caractérisation montre que Si A est indépendant de B alors B est indépendant de A. On dit que A et B sont indépendants.

3- Si A et B sont indépendants alors :

(a) A et $\overline{B}$ sont indépendants, (b) $\overline{A}$ et B sont indépendants et (c) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Supposons que A est indépendant de B_1 et de B_2. Pourrait-on conclure que A est indépendant de $B_1 \cap B_2$? La réponse est **non** en général comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE Une urne contient 4 boules; elles portent respectivement les nombres $1, 2, 3$ et 123. On tire une boule de l'urne et on considère les événements A : " on observe le chiffre 1 sur la boule tirée", B_1 : " on observe le chiffre 2 sur la boule tirée", et B_2 : " on observe le chiffre 3 sur la boule tirée". Ces événements sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants :
On a $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B_1\} = \mathbb{P}\{B_2\} = 1/2$. Il est facile de voir que $\mathbb{P}\{A \cap B_1\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B_1\}$, $\mathbb{P}\{A \cap B_2\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B_2\}$ et $\mathbb{P}\{B_1 \cap B_2\} = \mathbb{P}\{B_1\}\mathbb{P}\{B_2\}$. Mais $\mathbb{P}\{A \cap (B_1 \cap B_2)\} \neq \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B_1\}\mathbb{P}\{B_2\}$.

Cet exemple montre que pour que "A indépendant de B_1" et "A indépendant de B_2" impliquent que A est indépendant de $B_1 \cap B_2$, on a besoin d'une notion plus forte que l'indépendance 2 à 2.

Définition. On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}\Big\{\bigcap_{i \in I} A_i\Big\} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\{A_i\}.$$

Plus généralement, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les événements $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ sont mutuellement indépendants.

Souvent, par abus de langage et lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on laisse tomber le terme "mutuellement".

EXEMPLE Un système électrique a n composants qui tombent en panne indépendamment. Soient A_i l'événement "le i$^{\text{ème}}$ composant est défaillant", avec $\mathbb{P}\{A_i\} = p_i$. L'événement B "le système est défaillant" se produit si le courant ne peut pas passer d'un bout du système à l'autre. Calculer la probabilité que le système fonctionne selon que les composants sont montés en parallèle ou en série.
Si les composants sont montés en parallèle, alors

$$\mathbb{P}_P\{B\} = \mathbb{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} = \prod_{i=1}^{n} p_i, \text{ et donc } \mathbb{P}\{\text{le système fonctionne}\} = 1 - \mathbb{P}_P\{B\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Si les composants sont montés en série, alors

$$\mathbb{P}_S\{B\} = \mathbb{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} = 1 - \mathbb{P}\{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\} = 1 - \mathbb{P}\{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

D'où $\mathbb{P}\{\text{le système fonctionne}\} = 1 - \mathbb{P}_S\{B\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$.

Exercices

Exercice 1. Deux amis se trouvent dans la file à l'entrée d'un cinéma (sans être forcément l'un derrière l'autre.) On suppose que la file comporte 100 personnes alignées et que seuls les deux amis sont discernables.

a- Combien y a-t-il de cas possibles ?

b- Combien y a-t-il de cas où les deux amis sont séparés par 19 personnes exactement ?

Exercice 2. Un réseau téléphonique comporte des numéros à 6 chiffres.

a- Quelle est la capacité théorique de ce réseau ?

b- Quelle est le nombre de numéros comprenant

b1- Six chiffres différents ?

b2- Un chiffre apparaissant 2 fois et les autres 1 seule fois ?

b3- Deux chiffres apparaissant 2 fois et les autres 1 seule fois ?

Exercice 3. Dix lapins indiscernables sont répartis dans trois cages. Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de répartitions possibles :

1- Aucune restriction n'est faite.

2- Aucune cage ne doit rester vide.

3- Aucune cage ne doit rester vide et aucun lapin n'est isolé.

Exercice 4. Dans un jeu de 52 cartes bien mélangées, une main est formée de 5 cartes choisies au hasard. Calculer la probabilité que la main contienne

(a) 5 cartes différentes.

(b) Exactement 4 cartes d'un même genre.

(c) Exactement 3 cartes d'une même valeur (1, 2, 3 ... etc.)

Exercice 5. On dispose de 2 boîtes, l'une contenant 5 vis et l'autre contenant 5 écrous. On suppose que chacune des 5 vis va avec un écrou et un seul. On prend au hasard 3 vis et 3 écrous, calculer la probabilité que parmi les vis et les écrous choisis :

(a) Une seule vis va avec un écrou.

(b) Deux vis vont avec deux écrous.

(c) Aucune vis ne va avec un écrou.

Exercice 6. On dispose de deux sacs S_1 et S_2 contenant chacun 3 boules rouges et 7 noires. On tire au hasard une boule de S_1 et on la met dans S_2. Après avoir bien mélanger les boules dans S_2, on en tire une au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouges ?

Exercice 7. Les employés d'une entreprise sont répartis de la manière suivante :

	Ouvriers	Superviseurs	Cadres
Femmes	120	40	40
Hommes	380	160	60

1- Quelle est la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit de sexe féminin ?

2- Pour régler les affaires syndicales, une commission est formée d'un ouvrier, d'un superviseur et d'un cadre. On suppose que le choix des membres de la commission se fait au hasard.

a- De combien de façons est t-il possible de former une commission ?

b- Calculer la probabilité qu'une commission ne contiennent aucune femme ?

c- Sachant qu'une membre de la commission est une femme, quelle est la probabilité qu'elle soit un cadre ?

Exercice 8. Dans une usine les ouvriers forment trois groupes de relais : Le groupe G_1 travaille de 08 :00 à 16 :00, le groupe G_2 travaille de 16 :00 à 24 :00 et le groupe G_3 de 00 :00 à 08 :00. Chaque jour il y a 1% des articles produits par G_1, 2% des articles produits par G_2, et 5% des articles produits par G_3 qui sont défectueux. Supposons que tous les groupes produisent le même nombre d'articles.

1) Quel est le taux d'articles défectueux produits chaque jour ?

2) Un article, choisi au hasard dans la production du jour, est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par G_3 ?

Chapitre 4

Variables aléatoires discrètes

4.1 Introduction

Une variable aléatoire (**v. a.**) est une fonction dont les valeurs dépendent d'une expérience aléatoire. Le nombre total de "faces" obtenues après 5 lancers d'une pièces de monnaie, le nombre de boules rouges tirées après 3 tirages d'une urnes contenant N boules dont n sont rouges, le temps séparant deux appels consécutifs qui arrivent à un central téléphonique, ...etc. sont des exemples de v.a. Comme nous l'avons déjà vu en statistique descriptive, on peut distinguer deux types de variables aléatoires : Les v.a. discrètes et les v.a. continues. Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux v.a. discrètes et nous en donnerons des exemples parmi les plus célèbres. Les v.a. continues feront l'objet du chapitre suivant.

Dans toute la suite Ω désignera un espace fondamental, $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ une probabilité et S un ensemble fini ou dénombrable qui sera souvent identifié à une partie de $\mathbb{N}$.

4.2 Loi de probabilité d'une v.a.

Soit X une v.a. définie sur Ω à valeurs dans S, (i.e. une fonction $X : \Omega \to S$). Elle induit sur $\mathcal{P}(S)$ une fonction notée $\mathbb{P}_X$ et définie par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(S), \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\},$$

On peut facilement montrer que $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(S, \mathcal{P}(S))$.

Définition 5. La fonction $\mathbb{P}_X$ ainsi définie sur $\mathcal{P}(S)$ est appelée la **loi de probabilité** de X.

Par abus de langage, $\mathbb{P}_X$ est souvent appelée la **loi de** X.

Remarque En particulier on a

$$\sum_{x \in S} \mathbb{P}_X(x) = 1.$$

Exemple

◇ Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction constante $X : \Omega \to \{a\}$ est une v.a. aléatoire dite **dégénérée**.

◇ On lance une pièce de monnaie à deux faces : **P**ile et **F**ace. On considère comme succès l'événement "obtenir **F**". Supposons que la pièce est telle que la probabilité d'obtenir **F** est $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir **F** est $q = 1 - p$.

Soient X le nombre de succès observés après 1 lancer et Y le nombre de succès observés après 3 lancers **dont les résultats sont indépendants**. Ainsi on a :

1- X est une v.a. définie sur $\Omega = \{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$, à valeurs dans $S = \{0, 1\}$. De plus on a :

$$\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}\{X = 1\} = \mathbb{P}\{\mathbf{F}\} = p, \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}\{X = 0\} = \mathbb{P}\{\mathbf{P}\} = 1 - p.$$

2- Y est une v.a. définie sur Ω à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$ où

$$\Omega = \{(\mathbf{P},\mathbf{P},\mathbf{P}), (\mathbf{P},\mathbf{P},\mathbf{F}), (\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{P}), (\mathbf{F},\mathbf{P},\mathbf{P}), (\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{P}), (\mathbf{F},\mathbf{P},\mathbf{F}),(\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{F}), (\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})\}$$

L'événement $(\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{P})$, par exemple, signifie "obtenir successivement **P** puis **F** puis **P**. Par indépendance on a donc

$$\mathbb{P}\{(\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{P})\} = (1-p)\,p\,(1-p).$$

Nous sommes à présent en mesure de déterminer la loi de Y.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Y(0) &= \mathbb{P}\{Y = 0\} = \mathbb{P}\{(\mathbf{P},\mathbf{P},\mathbf{P})\} = (1-p)^3. \\
\mathbb{P}_Y(1) &= \mathbb{P}\{Y = 1\} = \mathbb{P}\{(\mathbf{F},\mathbf{P},\mathbf{P}), (\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{P}), (\mathbf{P},\mathbf{P},\mathbf{F})\} \\
&= 3(1-p)^2 p. \\
\mathbb{P}_Y(2) &= \mathbb{P}\{Y = 2\} = \mathbb{P}\{(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{P}), (\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{F}), (\mathbf{F},\mathbf{P},\mathbf{F})\} \\
&= 3(1-p)\,p^2. \\
\mathbb{P}_Y(3) &= \mathbb{P}\{Y = 3\} = \mathbb{P}\{(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})\} = p^3.
\end{aligned}$$

◇ Soient $X, Y : \Omega \to S$ sont deux v.a. et $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes. Alors : $a\,X + b\,Y$, $X\,Y$, X/Y (quand ça existe) sont des v.a.

REMARQUE Dans le cas d'une v.a. discrète X, $\mathbb{P}_X$ est également appelée **fonction masse de probabilité** de X (f.m.p).

4.3 Fonction de répartition

Soit $X : \Omega \to S$ une v.a. On appelle **fonction de répartition** de X (f.r.) et on note F_X la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}_X\{S \cap]-\infty, x]\} = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \leq x\}.$$

NOTATION : Pour simplifier les notations, on écrit $\{X \leq x\}$ pour désigner $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$.

La f.r. d'une v.a. X jouit des propriétés suivantes :

1- F_X est croissante et continue à droite, 2- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, et 3- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

EXEMPLE La f.r. F_Y, où Y est la v.a. de l'exemple précédent avec $p = 0.5$ est donnée par

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0.000 & \text{si } x < 0, \\ 0.125 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0.500 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0.625 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1.000 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

La figure 4.1, ci-dessous, montre le graphe de la f.r. F_Y.

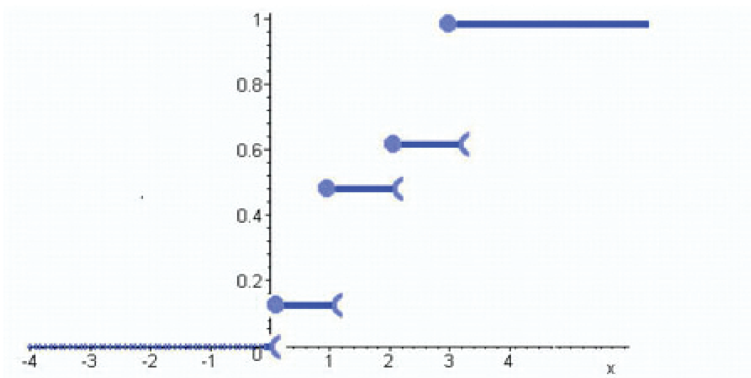


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de F_Y

4.4 Espérance mathématique

Définition 6. Soit $X : \Omega \to S$ une v.a. On appelle **espérance mathématique** ou **moyenne** de X et on note $\mathbb{E}[X]$ la quantité

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S} x \, \mathbb{P}_X(x).$$

EXEMPLE Soit X la v.a. dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(-3) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}_X(1) = \frac{3}{6}, \quad \mathbb{P}_X(2) = \frac{2}{6}.$$

Comme $\mathbb{P}_X(-3) + \mathbb{P}_X(1) + \mathbb{P}_X(2) = 1$, la v.a. X est à valeurs dans $S = \{-3, 1, 2\}$. Son espérance mathématique est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = -3 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Propriétés de l'espérance mathématique Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes et $X, Y : \Omega \to S$ deux v.a. Alors on a :

1- $\mathbb{E}[a] = a$.

2- $\mathbb{E}[a\,X + b\,Y] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$.

3- Soit X une v.a. à valeurs positives. Si $\mathbb{E}[X]=0$, alors $\mathbb{P}\{X>0\}=0$.

En effet, posons $\Omega_0=\{X>0\}$ et $S_0=X(\Omega_0)$. Comme $S_0\subset\mathbb{N}^*$, on a $s_0=\min\{s:s\in S_0\}>0$. D'autre part, on a

$$0\le\mathbb{P}\{X>0\}=\mathbb{P}_X(S_0)=\sum_{s\in S_0}\mathbb{P}\{X=s\}\le\sum_{s\in S_0}\frac{s}{s_0}\mathbb{P}\{X=s\}=\frac{1}{s_0}\sum_{s\in S_0}s\,\mathbb{P}\{X=s\}\le\frac{1}{s_0}\mathbb{E}[X]=0.$$

Indépendance des v.a. discrètes Deux v.a. $X,Y:\Omega\to S$ sont dites indépendantes si

$$\forall x,y\in S,\quad \mathbb{P}\{X=x,Y=y\}=\mathbb{P}_X(x)\,\mathbb{P}_Y(y),$$

où $\{X=x,Y=y\}=\{X=x\}\cap\{Y=y\}$.

Proposition 1. Soient $X,Y:\Omega\to S$ deux v.a. indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}[X\,Y]=\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Changement de variables Soient $X:\Omega\to S$ une v.a. et $f:S\to\mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y=f(X)$ est une v.a. et on a :

a- Pour tout $y\in f(S)$, on a
$$\mathbb{P}_Y(y)=\mathbb{P}_X(f^{-1}(y))=\mathbb{P}\{\omega\in\Omega:f(X(\omega))=y\}.$$

b- L'espérance de Y est donnée par
$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{y\in f(S)}y\,\mathbb{P}_Y(y)=\sum_{x\in S}f(x)\,\mathbb{P}_X(x).$$

EXEMPLE Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$ et dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(0)=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}_X(1)=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}_X(2)=\frac{1}{3},\quad \mathbb{P}_X(3)=\frac{1}{3}.$$

Alors

$$\mathbb{E}[X]=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\quad\text{et}$$
$$\mathbb{E}[X^2]=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}=4.5.$$

Notation : Conformément aux notations classiques, l'espérance d'une v.a. X sera notée μ_X.

4.5 Variance

Définition 7. Soit $X:\Omega\to S$ une v.a. On appelle **variance** de X et on note $\mathbb{V}ar[X]$ la quantité

$$\mathbb{V}ar[X]=\mathbb{E}\Big[(X-\mu_X)^2\Big].$$

REMARQUE La variance d'une v.a. aléatoire X est équivalente à la notion de variance d'un échantillon dans le sens où elle mesure la dispersion des valeurs de X par rapport à la moyenne μ_X. En particulier, lorsque $\mathbb{V}ar(X)=0$ on a $X\equiv\mu_X$.

Le résultat suivant est souvent utile pour calculer une variance.

Proposition 2. Soit $X:\Omega\to S$ une v.a., alors on a

$$\mathbb{V}ar(X)=\sum_{x\in S}(x-\mu_X)^2\,\mathbb{P}_X(x)=\mathbb{E}[X^2]-\mu_X^2.$$

Démonstration. Pour la première égalité, il suffit de considérer la fonction $f : S \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x - \mu_X)^2$ et poser $Y = f(X)$, de sorte que $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[Y]$. La deuxième égalité en découle par de simples calculs. □

EXEMPLE Reprenons la v.a. de l'exemple précédent.

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mu_X)^2 = 4.5 - \Big(11/6\Big)^2.$$

Propriétés de la variance

Proposition 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes et $X, Y : \Omega \to S$ deux v.a.

◊ $\mathbb{V}ar(a\,X + b) = a^2\,\mathbb{V}ar(X)$.

◊ $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2\mathbb{E}\big[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big]$.

Démonstration.

◊ Posons $Y = a\,X + b = f(X)$, avec $f(x) = ax + b$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[Y^2\big] &= \sum_{x\in S} (f(x))^2\,\mathbb{P}_X(x) = a^2 \sum_{x\in S} x^2\,\mathbb{P}_X(x) + b^2 \sum_{x\in S} \mathbb{P}_X(x) + 2ab \sum_{x\in S} x\,\mathbb{P}_X(x)\\ &= a^2\,\mathbb{E}\big[X^2\big] + b^2 + 2ab\,\mu_X.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\mu_Y^2 = (a\,\mu_X + b)^2 = a^2\,\mu_X^2 + 2ab\,\mu_X + b^2.$$

D'où, $\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}\big[Y^2\big] - \mu_Y^2 = a^2\Big(\mathbb{E}\big[X^2\big] - \mu_X^2\Big) = a^2\,\mathbb{V}ar(X)$.

◊ On a $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{E}\Big[\big((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y)\big)^2\Big]$. Il suffit donc de développer le carré et d'appliquer les propriétés de linéarité de l'espérance mathématique pour avoir le résultat. □

Définition 8. Soient X, $Y : \Omega \to S$ deux v.a. La quantité $\mathbb{E}\Big[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\Big]$ s'appelle la covariance de X et Y.

Corollaire 1. Si X, $Y : \Omega \to S$ sont deux v.a. **indépendantes**, alors $\mathbb{E}\Big[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\Big] = 0$ et

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{V}ar(a\,X + b\,Y) = a^2\mathbb{V}ar(X) + b^2\mathbb{V}ar(Y).$$

Ce dernier résultat, dans le cas de plusieurs v.a., s'énonce :

Corollaire 2. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to S$ sont des v.a. **indépendantes** alors

$$\mathbb{V}ar(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}ar(X_1) + \ldots + \mathbb{V}ar(X_n).$$

4.6 Exemples de Lois de v.a. discrètes

Loi de Bernoulli C'est celle d'une v.a. résultat d'une expérience à deux issues possibles :“succès” représenté par “1” et “échec” représenté par “0”.

Définition 9. On dit qu'une v.a. X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ et on note $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ si sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_X(0) = 1 - p.$$

Proposition 4. Soit $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = p(1-p).$$

Exercice Démontrer la Proposition 4.

Loi Binômiale Une expérience à deux issues possibles est répétées n fois dans les mêmes conditions de sortes que leurs résultats sont mutuellement indépendants. Notons $p \in [0,1]$ la probabilité du "succès" et, pour $i = 1, \ldots, n$, X_i le résultat de la i$^{\text{ème}}$ expérience, i.e.

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad X_i \sim \text{Bernoulli}(p).$$

De plus ces v.a. sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli(p).
Avec ces notations, si X désigne le nombre total de succès alors $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Il est alors facile de calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}ar[X]$ avant même de calculer $\mathbb{P}_X$. En effet on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = np,$$
$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{V}ar(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}ar(X_1) + \mathbb{V}ar(X_2) + \ldots + \mathbb{V}ar(X_n) = np(1-p).$$

La v.a. X est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, déterminons sa loi $\mathbb{P}_X$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A_i l'événement "le résultat de la i$^{\text{ème}}$ expérience et un succès" et $\overline{A_i}$ son complémentaire. Par indépendance on a

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}\} = p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

L'événement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}$ signifie en particulier qu'il y a eu k succès et $n-k$ échecs. Le nombre des différents événements de ce genre est égale au nombre de possibilités de choisir k expériences parmi n. Ils sont tous de même probabilité et leur réunion est égale à l'événement $\{X = k\}$. Ainsi on a

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Définition 10. On dit qu'une v.a. $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ suit une loi binômiale de paramètres n et p et on note $X \sim \text{Binmiale}(n, p)$ si

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}_X(k) = C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Loi Multinômiale C'est une généralisation immédiate de la loi Binômiale. Considérons une expérience dont les résultats possibles $R_1, R_2, \ldots, R_k$ peuvent se réaliser avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_k$. On répète cette expérience n fois et on note x_i le nombre de fois où le résultat R_i se réalise, pour $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Il est clair que

$$\forall \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Résultat Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ et $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_k)$ l'événement "Obtenir x_i fois le résultat R_i, pour $i = 1, 2, \ldots, k$". Alors

$$\mathbb{P}\{\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_k)\} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}.$$

Exemple On jette 6 fois deux pièces équilibrées. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois " 2 Faces", une fois " 2 Piles" et trois fois " 1 Pile et 1 Face".
On définit les résultats d'un lancer des 2 pièces suivants :

R_1=" Obtenir 2 Faces", R_2=" Obtenir 2 Piles" et R_3=" Obtenir 1 Face et 1 Pile".

$$\text{On a alors,}\quad \mathbb{P}\{R_1\} = \frac{1}{4} = p_1, \quad \mathbb{P}\{R_2\} = \frac{1}{4} = p_2, \quad \text{et } \mathbb{P}\{R_3\} = \frac{1}{2} = p_3.$$

Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note x_i le nombre de fois l'événement R_i a été observé. Alors on a

$$\mathbb{P}\{\mathbf{A}(2,1,3)\} = \frac{6!}{2!1!\,3!}\,(0.25)^2\,(0.25)^1\,(0.5)^3.$$

Loi de Poisson La loi de Poisson est un modèle approprié pour certains types de v.a. qui comptent le nombre de réalisation d'un événement "rare" pendant un intervalle de temps ou d'espace donné. On peut citer comme exemples : Le nombre de particules émises par une substance radioactive durant un laps de temps donné, le nombre d'accidents par jour sur un tronçon d'autoroute ...etc.

Définition 11. On dit qu'une v.a. X suit une loi de poisson de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{P}\text{oisson}(\lambda)$ si sa loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

REMARQUE Le paramètre λ représente le taux moyen d'événements par unité de temps (ou d'espace).

Proposition 5. Soit X une v.a. qui suit une loi de $\mathcal{P}\text{oisson}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = \lambda.$$

Démonstration. D'après la définition de l'espérance on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda}\,k\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda}\,k^2\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda \sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda \sum_{k\geq 1} (1 + (k-1))\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda\Big(\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} j\frac{\lambda^j}{j!}\Big) = \lambda(1+\lambda).\text{D'où}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \lambda.$$

□

Proposition 6. Soient X_1 et X_2 deux v.a. **indépendantes** et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{P}\text{oisson}(\lambda_1) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{P}\text{oisson}(\lambda_2).$$

Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}\text{oisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

EXEMPLE Les clients arrivent à un guichet automatique au taux moyen de 1.9 clients par minute.

1- Calculer la probabilité qu'au cours d'une minute donnée, le nombre de clients qui arrivent au guichet est égal à 5.

2- Calculer la probabilité qu'au cours d'un intervalle de 3 minutes, le nombre de clients qui arrivent au guichet est égal à 8.

Solution :

1- Soit X le nombre de clients qui arrivent au guichet au cours d'une minute. C'est une v.a. qui suit une loi de $\mathcal{P}$oisson$(\lambda = 1.9)$. Ainsi $\mathbb{P}\{X = 5\} = \dfrac{e^{-1.9}\,(1.9)^5}{5!}$.

2- Soit Y le nombre le nombre de clients qui arrivent au guichet au cours d'un intervalle de 3 minutes. C'est une v.a. qui suit une loi de $\mathcal{P}$oisson$(\lambda' = 3\lambda = 5.7)$. D'où $\mathbb{P}\{Y = 8\} = \dfrac{e^{-5.7}\,(5.7)^5}{5!}$.

4.7 Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson

La loi de Poisson peut être obtenue comme la limite d'une loi Binômiale lorsque le nombre de répétitions n tend vers l'infini et la probabilité de succès p tend vers 0 de sorte que le produit $np = \lambda$ reste constant. Soit X une v.a. qui suit la loi Binômiale(n, p). Pour tout $k \in \{0, 1, \dots n\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\,(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{\lambda}{n} \to 0, \qquad \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{n^k} \to 1, \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, \quad \text{et} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1. \quad \text{D'où } \mathbb{P}_X(k) \to \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}.$$

RÉSULTAT L'approximation d'une loi de Binômiale(n, p) par une une loi de $\mathcal{P}$oisson$(\lambda = np)$ est d'autant meilleure que n est grand et p est petit.

En règle générale l'approximation est satisfaisante lorsque $n \geq 25$ et $p \leq 0.05$.

EXEMPLE On lance deux dés équilibrés 100 fois et on note X le nombre de fois où l'on a obtenu un double 6. Il est clair que $X \sim$Binômiale$(100, 1/36)$. Comme $n \geq 25$ et $p = 1/36 = 0.0278 \leq 0.05$, on peut faire l'approximation de la loi de X par la loi de $\mathcal{P}$oisson$(\lambda = 2.78)$. Le tableau suivant donne $\mathbb{P}_X(k)$ et son approximation pour différentes valeurs de k.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(k)$	0.0596	0.1705	0.2414	0.2255	0.1564	0.0858
Approximation	0.0620	0.1725	0.2397	0.2221	0.1544	0.0858
k	6	7	8	9	10	11
$\mathbb{P}_X(k)$	0.0389	0.0149	0.0050	0.0015	0.0004	0.0001
Approximation	0.0398	0.0158	0.0055	0.0017	0.0005	0.0001

Exercices

Exercice 1. Dans une expérience aléatoire, vous piquez 5 cartes au hasard sans remise d'un jeu de 52 cartes. Soit les événements suivants : A = "obtenir une main de 4 cœurs et un trèfle", B = "obtenir une main contenant une paire et trois autres cartes de valeurs différentes", et C = "obtenir une main contenant deux paires et une autre carte". Décrivez les événements A∩B, B∪C et A∩$\overline{C}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont les valeurs possibles forment l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}\{x_i\}$	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

.

Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{V}ar(X)$ et $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$.

Exercice 3. Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui n'ouvrent pas. On note X "le nombre d'essais pour ouvrir la porte".

1- Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}ar(X)$.

Exercice 4. On tire, sans remise, deux boules au hasard d'une urne contenant 8 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges. Supposons que l'on gagne 2DH pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1DH pour chaque boule blanche tirée. On désigne par X le montant du gains net. Déterminer la loi de X, sa moyenne et sa variance.

Exercice 5. Un examen à choix multiples comporte 20 questions. Pour chaque question, on propose 6 réponses (numérotées de 1 à 6) dont une seule est juste. Un étudiant décide de répondre au hasard à chaque question. Pour cela il lance son dé (supposé être équilibré) et choisit la réponse dont le numéro est le résultat du lancer.

1- Quelle est la probabilité que le nombre de réponses juste soit égal à 3.

2- Déterminer le nombre moyen de réponses justes.

3- Quelle est la probabilité que la réponse à la $10^{\text{ème}}$ question soit la première réponse juste ?

Exercice 6. Dans un lot de 100 "systèmes d'alarme", il y a 20 systèmes qui sont défectueux. On choisit au hasard un échantillon de 5 systèmes pour les tester. Notons Y le nombre de systèmes défectueux dans cet échantillon.

a) Déterminer la loi de Y.(On calculera $\mathbb{P}\{Y = k\}$ pour $k = 0, 1, \dots, 5$.)

b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins 2 systèmes défectueux.

c) Tracer le graphe de F_Y, la fonction de répartition de Y.

Exercice 7. Dans une chaîne de production, 95% des articles ne présentent aucun défaut de fabrication, 3% présentent un défaut de " type 1", 2% présentent un défaut de " type 2". Un contrôleur de qualité prélève 20 articles pour inspection. Calculer la probabilité qu'il trouve au moins 2 articles qui présentent un défaut de "type 1" ou au moins 2 articles qui présentent un défaut de "type 2".

Exercice 8. Un manufacturier sait que 2% des articles qu'il produit sont défectueux. Il choisit au hasard un échantillon de 30 articles pour inspection. Quelle est la probabilité qu'il trouve au plus 5 articles défectueux ?

Exercice 9. Dans une compagnie d'assurance on reçoit en moyenne 5 réclamations par jour. On suppose que le nombre de réclamations par jour est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

a- Calculer la probabilité que le nombre de réclamations durant un jour donné soit inférieur à 3.

b- Calculer la probabilité que le nombre de réclamations reçues au cours d'une semaine soit inférieur ou égal à 4.

c- Calculer la probabilité que la compagnie reçoive 4 réclamations par jour exactement 3 fois au cours des 5 prochains jours.

Chapitre 5

Variables Aléatoires Continues

Au chapitre précédent nous avons considérer des v.a. à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Dans de nombreux cas les résultats possibles d'une expérience aléatoire forment un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. La durée de vie d'une composante électronique, le poids d'un individu, la distance parcourue par un taxi un jour donné ...etc. sont des exemples de telles v.a.

Dans toute la suite Ω désignera un espace fondamental et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

5.1 Loi de probabilité

Soit X une v.a. définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme dans le cas discret, nous avons la notion de fonction de répartition.

Définition 12. La fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}\Big\{X \leq x\Big\},$$

s'appelle la fonction de répartition (f.r.) de X.

Comme dans le cas discret, on a

1- F_X est croissante et continue à droite, 2- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, et 3- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

De plus on a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\Big\{a < X \leq b]\Big\} = F_X(b) - F_X(a).$$

Lorsque la fonction F_X est dérivable, il existe une fonction f_X telle que $F_X' = f_X$ et on a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\Big\{a < X \leq b]\Big\} = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 13. La fonction f_X, lorsqu'elle existe, s'appelle la *fonction densité de probabilité* (**fdp**) de X.

La fdp f_X, d'une v.a. X, est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 1. Lorsque la fdp f_X existe, la f.r. F_X est continue et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\{X = x\} = 0.$$

La loi de probabilité d'une v.a. X est parfaitement déterminée si l'on connaît sa f.r. F_X ou sa fdp f_X.

Indépendance des v.a. continues

Deux v.a. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont dites indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq x\}\,\mathbb{P}\{Y \leq y\},$$

où $\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$. Si, de plus, les lois des v.a. X et Y sont continues de densités f_X et f_Y, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(s)\, f_Y(t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t.$$

Plus généralement, les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1\} \ldots \mathbb{P}\{X_n \leq x_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i \leq x_i\}.$$

De plus, si les lois sont continues de densités f_{X_i}, alors

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\} = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(s_1) \ldots f_{X_n}(s_n)\, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n.$$

5.2 Espérance Mathématique et variance

La notion d'espérance mathématique que nous avons déjà rencontrée dans le cas de v.a. discrètes s'étend de manière naturelle aux v.a. continues :

Définition 14. Soit X une v.a. continue et f_X sa fdp. Alors la quantité $\mathbb{E}[X]$ définie par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, \mathrm{d}x$$

s'appelle l'espérance mathématique de X. On l'appelle également moyenne de X et on la note μ_X

L'espérance mathématique d'une v.a. continue possède les mêmes propriétés qu'une v.a. discrètes : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes et $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. Alors on a :

1- $\mathbb{E}[a] = a$.

2- $\mathbb{E}[a\,X + b\,Y] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$.

3- Si f_X est la fdp de X et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Proposition 7. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}[X\,Y] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Définition 15. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle variance de X, lorsqu'elle existe, et on note $\mathbb{V}ar(X)$ la quantité donnée par

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mu_X)^2\Big] = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mu_X\big)^2.$$

Remarque 2. La variance d'une v.a. continue jouit des mêmes propriétés que celle d'une v.a. discrète : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes et $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a.

◊ $\mathbb{V}ar(a\,X + b) = a^2\,\mathbb{V}ar(X)$.

◊ $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2\mathbb{E}\big[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big]$.

◊ Si les v.a. X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$.

5.3 Exemples de lois de v.a. continues

5.3.1 Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$

Définition 16. On dit qu'une v.a. X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$ et on note $X \sim \mathcal{U}\mathrm{niforme[a, b]}$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

Proposition 8. Si $X \sim \mathcal{U}\mathrm{niforme[a, b]}$ alors on a

- ◇ Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}\{X \in A \cap [a, b]\}$.
- ◇ La f.r de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

- ◇ L'espérance et la variance de X sont données par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, r dx = \frac{a+b}{2}.$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

RÉSULTAT : Si $X \sim \mathcal{U}\mathrm{niforme[a, b]}$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5.3.2 Loi Normale

La loi normale est sans doute la plus célèbre de toutes les lois de probabilité.

Définition 17. On dit que Z suit la loi normale (ou gaussienne) standard et on note $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ si sa fdp est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}.$$

Dans toute la suite Z désignera une v.a. qui suit la loi normale standard.

La fr F_Z est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $F_Z(z)$ est égale à la surface délimitée par l'axe $x'ox$, la courbe de la fonction f_Z et la droite $x = z$. Les valeurs de ces surfaces ne peuvent être calculées q'approximativement par des méthodes numériques. Ces valeurs approximatives dont disponibles dans tables. Une telle table est donnée à la fin du chapitre.

Remarque 3. Il existe des tables qui donnent $F_Z(z)$ pour les différentes valeurs de z. Comme la fdp de Z est une fonction paire, donc admettant un graphe symétrique par rapport à l'axe y'oy, on a :

a- $F_Z(0) = \mathbb{P}\{Z \leq 0\} = 0.5$. D'où $\mathbb{P}\{Z \leq z\} \leq 0.5 \Longleftrightarrow z \leq 0$.

b- Pour tout $z \geq 0$, $F_Z(-z) = \mathbb{P}\{Z \leq -z\} = \mathbb{P}\{Z \geq z\} = 1 - F_Z(z)$.

c- Pour tout $z \geq 0$, $\mathbb{P}\{|Z| \geq z\} = 2\mathbb{P}\{Z \leq -z\} = 2\mathbb{P}\{Z \geq z\}$.

d- Pour tout $z \geq 0$, $\mathbb{P}\{|Z| \leq z\} = 1 - \mathbb{P}\{|Z| \geq z\} = 1 - 2\mathbb{P}\{Z \leq -z\} = 1 - 2\mathbb{P}\{Z \geq z\}$.

Ainsi une table de de la loi normale standard permet de calculer $\mathbb{P}\{a \leq Z \leq b\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. En effet

$$\mathbb{P}\{a \leq Z \leq b\} = \mathbb{P}\{Z \leq b\} - \mathbb{P}\{Z \leq a\}.$$

Les deux derniers termes sont disponibles sur une table de la loi normale standard.

Il existe d'autres lois normales qui peuvent être obtenues à partir de la loi normale standard. Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Il est clair que $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$. Déterminons la loi de $X = \sigma Z + \mu$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\Big\{Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big\} = F_Z\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad \text{d'où} \\ f_X(x) &= \frac{1}{\sigma}\, f_Z\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big). \end{aligned}$$

Définition 18. On dit qu'une v.a. X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fdp est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Remarque 4. On peut facilement vérifier que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 10. Soit $X \sim \mathcal{N}(23, 1.5^2)$. Calculer $\mathbb{P}\{20 \leq X \leq 25\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{20 \leq X \leq 25\} &= \mathbb{P}\Big\{\frac{20-23}{1.5} \leq Z \leq \frac{25-23}{1.5}\Big\} \\ &= \mathbb{P}\{-2 \leq Z \leq 1.33\} = \mathbb{P}\{Z \leq 1.33\} - \mathbb{P}\{Z \leq -2\} \\ &= \mathbb{P}\{Z \leq 1.33\} - (1 - \mathbb{P}\{Z \leq 2\}) \\ &= 0.9082 - (1 - 0.8772) = 0.8854 \end{aligned}$$

Proposition 9. Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, et $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes données. Alors

$$a\, X_1 + b \sim \mathcal{N}(a\mu_1, (a\sigma_1)^2).$$

Si $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ est une v.a. **indépendante** de X_1, alors

$$a\, X_1 + b\, X_2 \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2).$$

Remarque 5. Le second résultat de la proposition précédente peut être énoncé, pour plus de deux v.a., comme suit : Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombre réels. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i\, X_i + b_i) \text{ suit une loi normale de moyenne } \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i \text{ et de variance } \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2.$$

En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon issu d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2/n\big).$$

Au paragraphe suivant nous allons voir que ce dernier résultat reste approximativement valable lorsque la taille de l'échantillon est assez large.

5.4 Théorème Central Limite (TCL)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi de probabilité de moyenne μ et de variance $\sigma^2 \in]0, \infty[$. D'après les propriétés de l'espérance et de la variance, on a $\mathbb{E}\big[\overline{X}\big] = \mu$ et $\mathbb{V}ar\big(\overline{X}\big) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Le théorème central limite s'énonce

$$\text{Pour } n \text{ assez grand, } \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \simeq Z.$$

En terme de probabilités, lorsque n est assez grand, cela s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\Big\{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\Big\} \simeq \mathbb{P}\{Z \leq x\}.$$

Remarque 6. En pratique nous allons considérer que n est assez grand lorsque $n \geq 25$.

Exemples d'Application

Remarque 7. Soit X une v.a. qui suit une loi $\mathcal{B}$inômiale(n, p). Nous savons que X peut s'écrire comme somme de n v.a. indépendantes et de même loi de $\mathcal{B}$ernoulli(p), i.e. $X = X_1 + \ldots + X_n$. D'où, si $n \geq 25$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big\} \simeq \mathbb{P}\Big\{Z \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big\}.$$

Exemple 1. Dans un lot de "systèmes d'alarme" 4% sont défectueux. On en choisit au hasard 100 pour inspection. Calculer de deux façons la probabilité que 8 systèmes soient déclarés défectueux.

Notons X, le nombre de systèmes défectueux. Il est clair que $X \sim \mathcal{B}$inmiale$(100, 0.04)$. En utilisant le TCL, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = 8\} = \mathbb{P}\{7.5 \leq X \leq 8.5\} &= \mathbb{P}\Big\{\frac{7.5 - 4}{\sqrt{100(0.04)(0.96)}} \leq \frac{X - 4}{\sqrt{100(0.04)(0.96)}} \leq \frac{8.5 - 4}{\sqrt{100(0.04)(0.96)}}\Big\} \\
&\simeq \mathbb{P}\{1.79 \leq Z \leq 2.30\} = \mathbb{P}\{Z \leq 2.30\} - \mathbb{P}\{Z \leq 1.79\} \\
&= 0.9892 - 0.9632 = 0.0260
\end{aligned}$$

Remarque 8. Pour l'approximation d'une loi discrète par une loi continue, il est nécessaire de recourir à un facteur de correction : $\{X = k\} = \{k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5\}$.

Exemple 2. La durée de téléchargement d'un fichier disponible sur le Web est une v.a. de moyenne 142 secondes avec un écart type de 10 secondes. Un échantillon de 49 durées de téléchargement est choisi au hasard.

a- Quelle est la probabilité que la durée moyenne des téléchargements de cet échantillon soit supérieure à 138 secondes ?

b- Il y a 95% de chance que la durée moyenne des téléchargements de cet échantillon soit inférieure à x secondes. Déterminer x.

a- Notons $X_1, \ldots, X_{49}$ les durées des téléchargements observées et $\overline{X}$ leur moyenne. D'après le TCL,

$$\frac{\overline{X} - 142}{10}\sqrt{49} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

d'où

$$\mathbb{P}\{\overline{X} > 138\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{\overline{X} - 142}{10}\sqrt{49} > \frac{138 - 142}{10}\sqrt{49}\Big\} \simeq \mathbb{P}\{Z > -2.8\} = 1 - \mathbb{P}\{Z < 2.8\} = 0.9974$$

b- On cherche x tel que $\mathbb{P}\{\overline{X} < x\} = 0.95$. D'après le TCL, une valeur approximative de x est donnée par

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{\overline{X} - 142}{10}\sqrt{49} < \frac{x - 142}{10}\sqrt{49}\Big\} \simeq \mathbb{P}\{Z < \frac{x - 142}{10}\sqrt{49}\} = 0.95$$

D'après la table de la loi normale, on a $\dfrac{x - 142}{10}\sqrt{49} \simeq 1.645$. D'où, $x = 142 + \dfrac{10}{\sqrt{49}}\,1.645$.

Exercices

Exercice 1. On suppose que les salaires des ouvriers d'une certaine entreprise sont répartis d'une manière uniforme entre 2500 DH et 4500 DH par mois.

a- Quelle est la probabilité qu'un ouvrier choisi au hasard reçoive un salaire entre 2800 et 4200 DH ?

b- Quel est le salaire moyen d'un ouvrier dans cette entreprise ?

Exercice 2. La durée de vie d'un transistor au silicium est une v.a. notée X dont la fonction de répartition notée F_X est donnée par

$$F_X(t) = 1 - \exp\Big(-\frac{t}{2}\Big) \quad \text{si } t \geq 0 \quad \text{et} \quad F_X(t) = 0 \text{ si } t < 0.$$

a- Déterminer la fonction densité de probabilité, notée f_X.

b- Calculer la durée de vie moyenne d'un tel transistor.

c- Calculer la variance de la durée de vie d'un tel transistor.

d- Le transistor est mis en service à $t_0 = 0$. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore à $t > 0$?

Exercice 3. Soit X une v.a. qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 3$ et de variance $\sigma^2 = 9$ et soit Y une v.a. qui suit une loi Binômiale$(n = 10, p = 0,4)$. On suppose que les v.a. X et Y sont indépendantes. Déterminer $\mathbb{V}ar(2X - Y)$, la variance de $2X - Y$.

Exercice 4. Soit X une v.a. à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ dont la fdp f_X est donnée par $f_X(x) = 1 - |x|$.

a- Déterminer la f.r. de X. b- Calculer $\mathbb{P}\{u \leq X \leq v\}$, où u et v sont deux réels donnés avec $(u \leq v)$.

c- On définit la v.a. $Y = a\,X + b$, $(a > 0$ et $b \in \mathbb{R})$. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{V}ar(Y)$.

Exercice 5. Un fabriquant d'ordinateurs affirme que X, la durée de vie de chacun de ses ordinateurs, suit une loi normale de moyenne $\mu = 7$ ans et d'écart-type $\sigma = 3$ ans. En cas de panne survenant durant les 3 premières années suivant l'achat d'un de ses ordinateurs le fabriquant le remplace sans aucune discussion.

1) Calculez le pourcentage d'ordinateurs remplacés durant les 3 premières années suivant l'achat.

2) Calculez la probabilité que la durée de vie d'un de ces ordinateurs dépasse 9 ans.

3) Une société a acheté un lot de 4 ordinateurs chez ce fabriquant. Quelle est la probabilité que

   a- Aucun de ces ordinateurs n'est remplacé durant les 3 premières années suivant l'achat ?

   b- La durée de vie totale de ces ordinateurs soit supérieure à 31 ans ?

Exercice 6. D'après un magazine spécialisé, la durée d'une visite à *Yahoo.com* est une v.a. qui suit une loi normale de $\mu = 5.7$ minutes avec un écart-type de $\sigma = 0.5$ minutes.

a- Quelle est la probabilité qu'une visite à *Yahoo.com* dure plus de 9 minutes ?

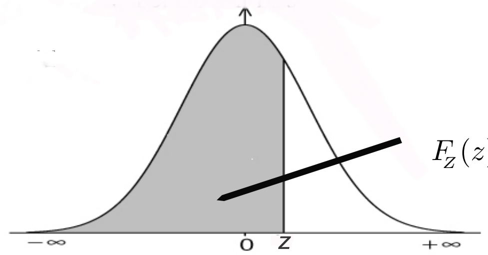
b- Déterminer d de sorte 20% seulement des visites sont de durées inférieures à d.

c- Déterminer deux nombres d_1 et d_2, symétriques par rapport à la durée moyenne d'une visite, de sorte 20% seulement des visites ont leurs durées entre d_1 et d_2. va

Exercice 7. Le temps, en minutes, nécessaire pour effectuer un contrôle de routine sur une voiture est une v.a. normale de moyenne $\mu = 56$ et de variance $\sigma^2 = 64$. Le contrôle commence dès que la voiture soit déposée. Un client qui dépose sa voiture pour un contrôle est informé qu'elle sera prête une heure plus tard.

a- Quelle est la probabilité qu'un client qui vient chercher sa voiture, 1 heure après l'avoir déposée, ne la trouve pas prête ?

b- Quel est le temps de contrôle requis pour que 97.5% des clients qui reviennent chercher leurs voitures les trouvent prêtes ?



$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x.$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

FIGURE 5.1 – Table de la loi normale standard. Exemple : $F_Z(1.82) = 0.96562$