Statistiques

Royaume du Maroc
Université Mohamed V - Souissi
**Ecole Nationale Supérieure d'Informatique
et d'Analyse des Systèmes**
1ère année

Rabat le: 22-06-2006

Contrôle en Statistiques inférencielles

(Durée: 1,5 heures)

$S^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

$S'^2 = \frac{n}{n-1} S^2$

Recommandations générales

- Lisez l'ensemble de l'énoncé avant de commencer à répondre.
- Soignez vos copies.
- Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Des essais en laboratoire sur 20 lampes miniatures servant de lampe témoin sur des panneaux de contrôle électronique utilisés dans diverses entreprises conduisent aux durées de vie du tableau suivant. On suppose que la durée de vie est distribuée normalement.

$X \sim N$

451	412	412	375
407	454	375	393
355	364	414	413
345	432	392	329
439	381	451	413

$E(X) = \frac{1}{20} \sum X_i$

1. Calculer l'estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne pour l'ensemble de la production.
2. Calculer la variance et l'écart type de l'échantillon. $\text{Var}\, X = \frac{1}{n} \sum x^2 - \bar{X}^2$
3. Estimer, à l'aide d'un intervalle ayant un niveau de confiance de 95% la durée de vie moyenne de toute la production.

Exercice 2

La hauteur maximale H de la crue annuelle d'un fleuve est observée car une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. On a modélisé la distribution de la variable H comme étant de Rayleigh, i.e. la densité de H est donnée par

$$\boxed{f_H(x) = \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad x > 0.}$$

où a est un paramètre inconnu.
Durant une période de 8 ans, on a observé les hauteurs de crue suivantes (en m):

$$2,5 \quad 2,9 \quad 1,8 \quad 0,9 \quad 1,7 \quad 2,1 \quad 2,2 \quad 2,8$$

1. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de a.
2. Une compagnie d'assurance estime qu'une catastrophe n'arrive en moyenne qu'au plus une fois tous les mille ans. Ceci peut-être justifié par les observations?

2006

Exercice 3

On considère n variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité:

$$\begin{cases} f_\theta(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ f_\theta(x) &= \alpha x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \theta \\ f_\theta(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x > \theta \end{cases}$$

(θ est un paramètre réel > 0).

1. Déterminer la valeur de α pour laquelle f_θ est bien une fonction de densité.
2. Donner la fonction de répartition F_{M_n} puis la fonction de densité f_{M_n} du maximum M_n des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n.
4. Montrer que M_n converge en probabilité vers θ.
5. Donner l'espérance et la variance de:
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
6. Montrer que Y_n converge vers $\frac{2}{3}\theta$, en précisant dans quel sens cette convergence a lieu.
7. Comparer les variances de M_n et de $Z_n = \frac{3}{2}Y_n$. A partir de vos résultats, quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ?
8. On considère l'erreur e_n commise en estimant θ par Z_n, $(e_n = Z_n - \theta)$.
   Comment peut-on approcher la loi de e_n quand n est grand?

F5

Indications: Aidez-vous par le tracé de graphiques. On utilisera la ou les valeurs utiles parmi les valeurs proposées:

- Pour la loi normale centrée réduite: $\Phi(u) = 0.988 \Rightarrow u = 2.225$, $\Phi(u) = 0.994 \Rightarrow u = 2.257$, $\Phi(u) = 0.975 \Rightarrow u = 1.960$, $\Phi(u) = 0.950 \Rightarrow u = 1.65$.
- Pour la loi de Student:
  Avec 19 degrès de liberté, on a $\Phi_T(t) = 0.975 \Rightarrow t = 2.093$, $\Phi_T(t) = 0.95 \Rightarrow t = 1.729$
  Avec 20 degrès de liberté, on a $\Phi_T(t) = 0.9 \Rightarrow t = 2.086$, $\Phi_T(t) = 0.95 \Rightarrow t = 1.725$
- Pour la loi χ^2_n:
  Avec 19 degrès de liberté, on a $\Phi_Z(t) = 0.025 \Rightarrow t = 8.907$, $\Phi_Z(t) = 0.05 \Rightarrow t = 10.117$, $\Phi_Z(t) = 0.975 \Rightarrow t = 32.852$, $\Phi_Z(t) = 0.95 \Rightarrow t = 30.144$.
  Avec 20 degrès de liberté, on a: $\Phi_Z(t) = 0.025 \Rightarrow t = 9.591$, $\Phi_Z(t) = 0.05 \Rightarrow t = 10.851$, $\Phi_Z(t) = 0.975 \Rightarrow t = 34.170$, $\Phi_Z(t) = 0.95 \Rightarrow t = 31.410$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^\theta \alpha x\,dx = 1$$

$$= \left[\frac{1}{2}\alpha x^2\right]_0^\theta = 1$$

$$\frac{1}{2}\alpha\theta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\theta^2}$$

Bonne chance
Prof. S. ACHCHAB