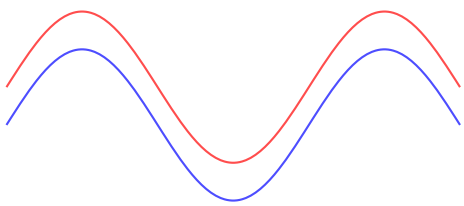
L'Univers Électromagnétique Dévoilé

Du Wi-Fi à la Lumière des Étoiles :
Comment Maxwell a Unifié Notre Monde Technologique



Onde électromagnétique

*"**La question fascinante :** Comment des phénomènes aussi différents que votre téléphone, la lumière du soleil, les rayons X de l'hôpital, et les ondes radio peuvent-ils être exactement la même chose ? **Comment est-ce possible ?**"*

Une aventure mathématique et physique accessible à tous

Table des matières

1 L'Énigme du Quotidien : Votre Réveil Technologique

Le Mystère de votre Matinée

Imaginez votre réveil ce matin :

Votre smartphone reçoit des messages via les **ondes radio**

Vous allumez la lumière - des **photons** éclairent la pièce

Votre Wi-Fi transmet des données à **300 millions m/s**

Votre écran affiche des couleurs grâce aux **ondes électromagnétiques**

Votre radio capte de la musique transmise par **modulation de fréquence**

La réponse tient en **quatre équations mathématiques** découvertes par un physicien écossais nommé James Clerk Maxwell au XIXe siècle. Ces équations révèlent que :

La Grande Révélation

Votre smartphone, la lumière, les rayons X, et les ondes radio sont tous des manifestations d'un même phénomène : les ondes électromagnétiques !
Mathématiquement, toute onde électromagnétique s'écrit :

$$\boxed{E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz-\omega t)} dk}$$

où chaque composante voyage à la vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s.

2 Les Héros Méconnus : Histoire d'une Révolution

2.1 Les Précurseurs : Quand l'Électricité était Magique

Les Observations Antiques (VIe siècle av. J.-C.)

Thalès de Milet découvre qu'en frottant de l'ambre (*elektron* en grec), elle attire de petits objets.
Problème mathématique : Comment quantifier cette force ?
Réponse moderne : La loi de Coulomb (découverte 2300 ans plus tard !)

$$\boxed{F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

où $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

Benjamin Franklin (1706-1790) : L'Électricité Domestiquée

Franklin invente le concept de **charge positive** et **négative**. Il prouve que la foudre est électrique avec son expérience du cerf-volant.
Insight mathématique : Conservation de la charge

$$\boxed{\sum q_i = \text{constante}}$$

Application moderne : Votre smartphone stocke de l'énergie grâce à cette conservation !

2.2 L'Eurêka Moment : Oersted et la Découverte Révolutionnaire

Hans Christian Oersted (1820) : L'Expérience qui Change Tout

L'expérience : Oersted fait passer un courant électrique dans un fil près d'une boussole.
Observation stupéfiante : L'aiguille de la boussole dévie !
Conclusion révolutionnaire : *L'électricité produit du magnétisme !*

Modélisation mathématique : Si un courant I circule dans un fil, il crée un champ magnétique $\mathbf{B}$:

Loi de Biot-Savart

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Pour un fil infini, cela donne :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (perméabilité du vide).

Application concrète : C'est exactement le principe de votre chargeur sans fil ! Un courant alternatif crée un champ magnétique variable qui induit de l'électricité dans votre téléphone.

2.3 Faraday : Le Génie de l'Intuition

Michael Faraday (1831) : La Découverte Réciproque

Question de Faraday : "Si l'électricité produit du magnétisme, est-ce que le magnétisme peut produire de l'électricité ?"
L'expérience : Il bouge un aimant à travers une bobine de fil.
Résultat magique : Un courant électrique apparaît dans le fil !

Mathématiquement, Faraday découvre que le **flux magnétique variable** induit un champ électrique :

Loi de Faraday - Version Intégrale

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

où $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ est le flux magnétique.
En forme différentielle :

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial}}$$

Applications révolutionnaires :

— **Générateurs électriques :** Dans les centrales électriques

— **Transformateurs :** Pour ajuster la tension électrique

— **Moteurs électriques :** Dans votre voiture électrique

— **Induction :** Votre plaque de cuisson à induction

3 Maxwell : L'Architecte de l'Unification

3.1 Le Problème : Une Incohérence Mathématique

Vers 1860, les physiciens disposaient de plusieurs lois :

$$\text{Loi de Gauss : } \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\text{Pas de monopole magnétique : } \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\text{Loi de Faraday : } \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\text{Loi d'Ampère (originale) : } \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{4}$$

Le Problème Mathématique Crucial

Maxwell remarque une **incohérence** : la loi d'Ampère viole l'équation de continuité !
Équation de continuité : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
Problème : Si on prend la divergence de la loi d'Ampère :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Mais $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ toujours ! Donc on devrait avoir $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, ce qui contredit la conservation de la charge.

3.2 La Géniale Solution de Maxwell : Le Courant de Déplacement

L'Innovation de Maxwell

Maxwell ajoute un terme à la loi d'Ampère :

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

Le terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est appelé **courant de déplacement**.

Vérification mathématique : Maintenant, prenons la divergence :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5}$$

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \tag{6}$$

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \tag{7}$$

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
Cohérence restaurée !

4 Les Quatre Équations de Maxwell : Le Code de l'Univers

Les Équations de Maxwell - La Beauté Mathématique Pure

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss électrique)}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Gauss magnétique)}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday)}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ampère-Maxwell)}$$

4.1 Décodage Mathématique Détaillé de Chaque Équation

4.1.1 Équation 1 : Loi de Gauss Électrique

$\nabla \cdot$ E

Signification physique : Les charges électriques sont les "sources" du champ électrique.
Forme intégrale :

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Dérivation intuitive :

1. Une charge ponctuelle q crée un champ $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
2. Le flux à travers une sphère : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{r^2} dA = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Application concrète : Votre écran tactile fonctionne grâce à cette équation ! Votre doigt modifie localement ρ, ce qui change $\mathbf{E}$ et est détecté par les capteurs.

4.1.2 Équation 2 : Loi de Gauss Magnétique

$\nabla \cdot$ B

Signification physique : Il n'existe pas de "monopoles magnétiques" - pas de charges magnétiques isolées.
Forme intégrale :

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0}$$

Conséquence mathématique : Toute ligne de champ magnétique est fermée ! Les champs **B** forment toujours des boucles.

Application : C'est pourquoi les aimants ont toujours un pôle Nord ET un pôle Sud. Votre aimant de frigo ne peut pas avoir qu'un seul pôle !

4.1.3 Équation 3 : Loi de Faraday

$\nabla \times \mathbf{E}$

Signification physique : Un champ magnétique qui varie dans le temps induit un champ électrique "tourbillonnaire".
Dérivation intuitive :

1. Le flux magnétique : $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
2. Si $\mathbf{B}$ varie, $\frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$
3. La variation de flux induit une force électromotrice : $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
4. Cette f.e.m. correspond à : $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
5. Par le théorème de Stokes : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A}$

Applications révolutionnaires :

- **Générateurs :** Rotation d'aimants → électricité
- **Transformateurs :** Ajustement des tensions
- **Chargeurs sans fil :** Votre smartphone !

4.1.4 Équation 4 : Loi d'Ampère-Maxwell (La Plus Importante !)

$\nabla \times \mathbf{B}$

Signification révolutionnaire :

- Un courant électrique $\mathbf{J}$ induit un champ magnétique (terme d'Ampère)
- Un champ électrique variable $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ induit AUSSI un champ magnétique (terme de Maxwell) !

Dérivation du terme de Maxwell :

1. Équation de continuité : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
2. Loi de Gauss : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$
3. Substitution : $\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
4. Réarrangement : $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$
5. Donc : $\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0$

5 La Découverte Stupéfiante : L'Équation d'Onde

5.1 La Dérivation Historique Complète

Maxwell combine ses équations et fait une découverte qui révolutionne la physique :

Dérivation de l'Équation d'Onde - Étape par Étape

Étape 1 : Partir de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Étape 2 : Prendre le rotationnel des deux côtés

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

Étape 3 : Utiliser l'équation d'Ampère-Maxwell (dans le vide : $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Étape 4 : Substituer

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Étape 5 : Utiliser l'identité vectorielle $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
Dans le vide : $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, donc :

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Équation d'onde finale :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

5.2 L'Épiphanie de Maxwell

Comparons avec l'équation d'onde générale $\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$:

La Vitesse Mystérieuse

Maxwell identifie : $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0$
Donc : $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$
Calcul numérique :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{10}$$
$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \tag{11}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} \tag{12}$$
$$v \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{13}$$

C'est exactement la vitesse de la lumière !

Conclusion révolutionnaire de Maxwell : *"La lumière est une onde électromagnétique !"*

6 Les Paquets d'Ondes : Quand les Mathématiques Rencontrent la Réalité

6.1 Au-delà de l'Onde Plane : La Vraie Lumière

Dans la réalité, la lumière n'est jamais parfaitement monochromatique. Elle est constituée de **paquets d'ondes** :

La Solution Générale - Paquet d'Ondes

$$\boxed{E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz-\omega t)} dk}$$

où :

— $A(k)$: amplitude complexe pour chaque nombre d'onde k

— $\omega = ck$: relation de dispersion dans le vide

— Chaque terme $e^{i(kz-\omega t)}$ est une onde plane monochromatique

6.2 Vérification Mathématique Rigoureuse

Montrons que cette solution satisfait l'équation d'onde :

Démonstration Complète

Étape 1 : Calculer $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)(ik)e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{14}$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)(ik)^2 e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{15}$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} A(k)k^2 e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{16}$$

Étape 2 : Calculer $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)(-i\omega)e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{17}$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)(-i\omega)^2 e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{18}$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\omega^2 e^{i(kz-\omega t)}dk \tag{19}$$

Étape 3 : Vérifier l'équation d'onde

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]dk \tag{20}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}\left[-k^2 + \frac{(ck)^2}{c^2}\right]dk \tag{21}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}[-k^2 + k^2]dk \tag{22}$$
$$= 0 \quad \checkmark \tag{23}$$

Conclusion : Pourvu que $\omega = ck$, tout paquet d'ondes est solution de l'équation de Maxwell !

7 Interprétation Physique : Décoder la Réalité

7.1 Que Signifie Réellement $A(k)$?

Le Spectre Électromagnétique dans votre Poche

Votre smartphone utilise différents paquets d'ondes :

1. Wi-Fi (2.4 GHz) :

— $f = 2.4 \times 10^9$ Hz

— $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{2.4\times10^9} = 0.125$ m $= 12.5$ cm

— $A(k)$ concentré autour de $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = 50.3$ rad/m

2. Lumière visible (500 nm) :

— $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m

— $f = \frac{c}{\lambda} = 6 \times 10^{14}$ Hz

— $A(k)$ concentré autour de $k_0 = 1.26 \times 10^7$ rad/m

3. Rayons X (0.1 nm) :

— $\lambda = 0.1 \times 10^{-9}$ m

— $f = 3 \times 10^{18}$ Hz

— $A(k)$ concentré autour de $k_0 = 6.28 \times 10^{10}$ rad/m

7.2 Applications Concrètes des Paquets d'Ondes

7.2.1 1. Fibres Optiques et Internet

Comment Internet Voyage dans la Lumière

Principe : L'information numérique module $A(k)$

Multiplexage WDM (Wavelength Division Multiplexing) :

$$E_{total}(z,t) = \sum_{i=1}^{N} \int A_i(k) e^{i(kz-\omega t)} dk$$

où chaque canal i utilise une plage de longueurs d'onde différente.

Exemple concret :

— Canal 1 : $\lambda_1 = 1530$ nm $\rightarrow k_1 = 4.11 \times 10^6$ rad/m

— Canal 2 : $\lambda_2 = 1535$ nm $\rightarrow k_2 = 4.09 \times 10^6$ rad/m

— Canal 3 : $\lambda_3 = 1540$ nm $\rightarrow k_3 = 4.08 \times 10^6$ rad/m

Débit : Chaque canal peut transporter 10 Gbit/s !

7.2.2 2. Écrans et Affichage Couleur

Comment votre Écran Crée les Couleurs

Principe RGB : Superposition de trois paquets d'ondes

$$E_{cran}(z,t) = \int A_R(k)e^{i(kz-\omega t)}dk + \int A_G(k)e^{i(kz-\omega t)}dk + \int A_B(k)e^{i(kz-\omega t)}dk$$

Spectres typiques :

— **Rouge :** $A_R(k)$ centré sur $\lambda = 650$ nm

— **Vert :** $A_G(k)$ centré sur $\lambda = 530$ nm

— **Bleu :** $A_B(k)$ centré sur $\lambda = 470$ nm

Blanc : $A_R = A_G = A_B$ (intensités égales)
Jaune : $A_R + A_G$ (rouge + vert)

7.2.3 3. Lasers : Cohérence et Applications

Laser vs Lumière Ordinaire

Lumière ordinaire (ampoule) :

$$A(k) = \text{fonction large et irrégulière}$$

$\Rightarrow$ Spectre étendu, phases aléatoires
Laser :

$$A(k) = A_0\delta(k-k_0)$$

$\Rightarrow$ Quasi-monochromatique, phase cohérente
Laser pulsé ultrarapide :

$$A(k) = A_0 \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}\right]$$

$\Rightarrow$ Large spectre $\rightarrow$ impulsion très courte
Principe d'incertitude temps-fréquence :

$$\boxed{\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}}$$

Pulse ultra-court $\Rightarrow$ large spectre nécessaire !

8 Les Applications Révolutionnaires Modernes

8.1 Télécommunications Sans Fil

5G et Au-delà

Fréquences 5G :

— **Sub-6 GHz :** 3.5 GHz $\rightarrow \lambda = 8.6$ cm

— **mmWave :** 28 GHz $\rightarrow \lambda = 1.07$ cm

— **Futur 6G :** 100-300 GHz $\rightarrow \lambda = 1 - 3$ mm

Modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) :

$$E(z,t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{i(kz-(\omega_0+n\Delta\omega)t)}$$

où chaque sous-porteuse n transporte des données indépendantes.
Avantage : Résistance aux interférences et débits élevés !

8.2 Médecine et Imagerie

IRM et Spectroscopie Médicale

Résonance Magnétique Nucléaire :
Les noyaux d'hydrogène dans votre corps résonnent à la fréquence de Larmor :

$$\omega_L = \gamma B_0$$

où $\gamma = 2.675 \times 10^8$ rad/(s · T) pour l'hydrogène.
Dans un IRM 3T :

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = \frac{2.675 \times 10^8 \times 3}{2\pi} = 127.7 \text{ MHz}$$

Application des paquets d'ondes : Les séquences d'impulsions RF sont des paquets d'ondes soigneusement conçus pour exciter sélectivement différents tissus.

8.3 Énergie Renouvelable

Cellules Photovoltaïques

Principe : L'énergie des photons solaires excite les électrons
Énergie d'un photon :

$$E = \hbar\omega = \hbar ck = \frac{hc}{\lambda}$$

Spectre solaire : Maximum vers $\lambda = 500$ nm

$$E_{photon} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda[\text{m}]} \text{ eV} = \frac{1.24}{500} = 2.48 \text{ eV}$$

Silicium : Gap énergétique $E_g = 1.1$ eV
$\Rightarrow$ Les photons $E > E_g$ peuvent créer des paires électron-trou !

9 Vers l'Avenir : Applications Émergentes

9.1 Communication Quantique

Cryptographie Quantique et Onde de Matière

Principe : Utiliser les propriétés quantiques des photons (ou plus généralement des quanta de champ) pour encoder et transmettre de l'information de manière inviolable par les lois de la mécanique quantique.
État d'un photon (polarisation) :

$$|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle,$$

où $|H\rangle$ et $|V\rangle$ représentent les polarisations horizontale et verticale, et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
Paquet d'ondes quantique (champ) :

$$E(z,t) = \int A(k)\, \hat{a}^\dagger(k)\, e^{i(kz-\omega t)}\, dk\, |\text{vide}\rangle,$$

où $\hat{a}^\dagger(k)$ est l'opérateur de création d'un photon d'impulsion d'onde k.

Quand on passe aux particules (électron, photon traité en onde de matière) :
Équation de Schrödinger dépendante du temps (1D, particule libre $V(x) = 0$) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}.$$

Solution générale (superposition d'ondes planes) :

$$\psi(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega(k)\,t)}\, dk, \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m},$$

où $A(k)$ est l'amplitude en espace des impulsions (transformée de Fourier de $\psi(x,0)$).

Densité de probabilité :

$$P(x,t) \;=\; |\psi(x,t)|^2.$$

Exemple pratique : paquet d'ondes gaussien (centré en x_0 et k_0 à $t=0$).
Choisissons à $t=0$:

$$\psi(x,0) \;=\; \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/4} \exp\Big(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}\Big)\, e^{ik_0 x},$$

normé tel que $\int |\psi(x,0)|^2 dx = 1$.

La solution analytique à temps arbitraire t (particule libre) s'écrit :

$$\psi(x,t) \;=\; \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1+i\dfrac{\hbar t}{2m\sigma_x^2}}} \exp\left\{ ik_0(x-x_0) - i\omega_0 t - \frac{(x-x_0-v_g t)^2}{4\sigma_x^2\left(1+i\dfrac{\hbar t}{2m\sigma_x^2}\right)} \right\},$$

avec

$$\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}, \qquad v_g = \frac{\hbar k_0}{m}$$

(le *vitesse de groupe* du paquet).

La largeur effective (variance) du paquet évolue comme

$$\sigma_x(t) \;=\; \sigma_x \sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_x^2}\right)^2}.$$

Ainsi la densité de probabilité reste gaussienne :

$$P(x,t) \;=\; |\psi(x,t)|^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x(t)} \exp\left[-\frac{(x-x_0-v_g t)^2}{2\sigma_x(t)^2}\right].$$

Interprétations importantes :

— Le paquet se déplace globalement à la vitesse $v_g = \hbar k_0/m$ (transport de l'enveloppe).

— Le paquet s'**élargit** avec le temps — dispersion quantique due à la dépendance quadratique $\omega(k) \propto k^2$.

— La normalisation est conservée : $\int P(x,t)\, dx = 1$ pour tout t.

— La relation de dispersion $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ fixe la vitesse de phase et la vitesse de groupe :

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}, \qquad v_{\text{g}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}.$$

Remarque pour la communication quantique : Pour les photons réels (champ électromagnétique quantifié), la description exacte passe par la théorie quantique des champs (opérateurs $\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k)$). Toutefois, l'intuition du paquet d'ondes, de la relation de dispersion et de la propagation d'enveloppe est directement utile pour comprendre la transmission d'états quantiques (p.ex. qubits encodés en polarisation, en temps de réception, ou en phase).

9.2 Métamatériaux et Invisibilité

Indices de Réfraction Artificiels

Relation de dispersion modifiée :

$$\omega = \frac{ck}{n_{eff}(\omega)}$$

où n_{eff} peut être négatif !
Applications :

- Lentilles parfaites
- Capes d'invisibilité
- Antennes ultra-compactes

9.3 Intelligence Artificielle Photonique

Calcul Optique

Principe : Utiliser la lumière pour les calculs d'IA
Transformation de Fourier optique :

$$\mathcal{F}[f](k) = \int f(x)e^{-ikx}dx$$

réalisée instantanément par une lentille !
Avantages :

- Vitesse : proche de c
- Parallélisme massif
- Faible consommation

10 Conclusion : L'Héritage de Maxwell

L'Équation qui Connecte Tout

$$\boxed{E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz-\omega t)} dk}$$

Cette simple équation décrit :

— La lumière du soleil qui réveille votre réveil

— Le signal Wi-Fi qui connecte votre smartphone

— Les rayons X qui diagnostiquent vos fractures

— Les ondes radio qui transmettent votre musique

— Les lasers qui lisent vos DVD

— La fibre optique qui vous connecte au monde

10.1 Les Leçons de cette Révolution

1. L'Unification est Puissante

Maxwell a montré que des phénomènes apparemment distincts obéissent aux mêmes lois fondamentales. Cette leçon inspire encore la physique moderne dans sa quête d'une "théorie du tout".

2. Les Mathématiques Révèlent la Réalité

Les équations de Maxwell ont prédit l'existence des ondes électromagnétiques avant leur découverte expérimentale. Les mathématiques ne sont pas qu'un outil : elles révèlent la structure profonde de l'univers.

3. Une Découverte Engendre Mille Applications

De la découverte fondamentale de Maxwell aux smartphones modernes, chaque avancée technologique repose sur cette compréhension unifiée de l'électromagnétisme.

10.2 Votre Nouvelle Vision du Monde

La prochaine fois que vous :

Utilisez votre smartphone → Pensez aux paquets d'ondes à 2.4 GHz

Allumez la lumière → Visualisez $A(k)$ étalé sur tout le spectre visible

Naviguez sur Internet → Imaginez les photons encodés voyageant dans la fibre

Faites une radio → Réalisez que ce sont des ondes EM haute énergie

Admirez un arc-en-ciel → C'est la décomposition naturelle de $A(k)$!

La Beauté de l'Univers

"Dans l'univers de Maxwell, votre smartphone qui reçoit un message, la lumière des étoiles qui voyage pendant des millions d'années, et l'arc-en-ciel après la pluie obéissent tous à la même équation fondamentale."
"Cette unité profonde de la nature, révélée par quatre équations élégantes, reste l'une des plus belles découvertes de l'esprit humain."

Aujourd'hui, alors que nous développons la 6G, l'informatique quantique, et l'intelligence artificielle photonique, nous ne faisons qu'explorer de nouvelles applications de cette vérité découverte par Maxwell il y a plus de 150 ans :

L'électricité, le magnétisme et la lumière ne font qu'un.

Ce document a été conçu pour rendre accessible l'une des plus grandes révolutions de la physique. Chaque équation raconte une histoire, chaque application moderne honore l'héritage de Maxwell. La science n'est pas qu'une collection de faits : c'est une aventure intellectuelle qui transforme notre vision du monde et notre quotidien.

HAMMOUDA Ahmed Mustapha