- Setp1 随机采样输入序列
- Step2 预测未来状态并评估每个样本的成本
- Setp3 计算每个样本序列的权重
- Setp4 获得最优控制输入序列

Setp1 随机采样输入序列

平均输入序列U，通常为前一步的最佳输入序列， 随机采样输入序列 V

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{T-1}) = U \in \mathrm{R}^{m\times T},\\
&(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{T-1}) = V \in \mathrm{R}^{m\times T},\\
&\mathbf{v}_t = \mathbf{u}_t + \epsilon_t,\\
&\epsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \Sigma).
\end{aligned}$$

Step2 预测未来状态并评估每个样本的成本

我们假设一个离散时间、连续状态的动作动力系统作为控制目标。X是系统状态，V是采样控制输入

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &\in \mathrm{R}^n,\\
\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t).
\end{aligned}$$

然后是采样序列的cost(目标是将cost降为最低),

$$S(V;\mathbf{x}_0)$$

,可以用以下公式进行评估:

$$\begin{aligned}
&S(V;\mathbf{x}_0) = C(\mathrm{H}(V;\mathbf{x}_0)),\\
&C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_T) = \phi(\mathbf{x}_T) + \sum_{t=0}^{T-1} c(\mathbf{x}_t),\\
&\mathrm{H}(V;\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{v}_1), \ldots)
\end{aligned}$$

$\phi(\mathbf{x}_T)$是终端成本，例如小车在跟踪轨迹时，位置偏移，速度偏移，角度偏移等
$\mathrm{H}(V;\mathbf{x}_0)$是滚动函数，不断接受初始状态和控制序列运用动力学模型生成整个预测的状态轨迹

Setp3 计算每个样本序列的权重

每个样本的权重是基与归一化推导出的，假设总共有K个样本序列，索引用K表示，cost较小的控制序列会得到更多的权重，反之亦然

$$w(V) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\left(S(V) + \lambda(1-\alpha) \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{u}_t^T \Sigma^{-1}(\mathbf{u}_t + \epsilon_t) - \rho\right)\right)$$

$$\eta = \sum_{k=1}^{K} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\left(S(U + \mathrm{E}_k) + \lambda(1-\alpha) \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{u}_t^T \Sigma^{-1}(\mathbf{u}_t + \epsilon_t^k) - \rho\right)\right)$$

$$\rho = \min_k \left(S(V_k) + \lambda(1-\alpha) \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{u}_t^T \Sigma^{-1}(\mathbf{u}_t + \epsilon_t^k)\right)$$

Setp4 获得最优控制输入序列

最后，下一步的最佳输入轨迹(i+1)给出了将加权样本序列添加到先前解中。

$$\mathbf{u}_t^{i+1} = u_t^i + \sum_{k=1}^{K} w(V_k)\epsilon_t^k$$