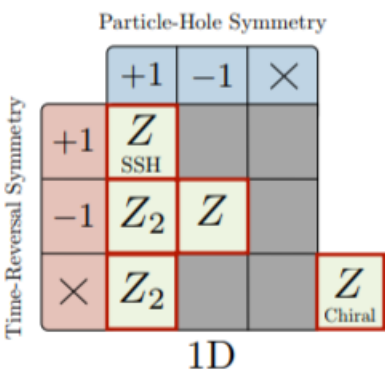


# 对称性和边缘态讨论

5 月 15 日

## Quantum walk 中含有的对称性和如何破缺

我们讨论的 quantum walk 主要有三种对称性：Time Reversal, Particle-Hole, Chiral。一般的有其中两种就可以得到第三种对称性。Kitagawa 在其文章中表明 1D 和 2D 的 quantum walk 可以实现所有对称性类。其中 1D 的有：



$\mathcal{T}^2$ (TRS)	$\mathcal{P}^2$ (PHS)	$\Gamma^2$ (CS)	1D DTQW protocol
1	1	1	$TR_y(\theta)$ or $T_{\downarrow}R_y(\theta_2)T_{\uparrow}R_y(\theta_1)$

一般的 split-step quantum walk 是属于这一类，值得一提的是一般认为变化时间框架后对称性任保存，可以参考下面这段评论：

associated topological invariant. Our crucial insight is that it is important to widen the scope: *a DTQW has CS, if there is a timeframe where its effective Hamiltonian has CS*: If a time  $T$  and a unitary operator  $\Gamma$  acting on the coin space can be found, with  $\Gamma^2 = 1$ , that  $\Gamma U_T \Gamma = U_T^{-1}$ .

因此变换时间框架与否都会存在 CS。一般的，只关注 PHS 和 CS，因为其中一个破缺必然失去第三个对称性 TRS。可以关注于只破缺 PHS 和只破缺 CS 以及破缺两者。也就是如下图所示的情况 2 和 4。Kitagawa 在文章中论述过可以通过取四个内态其中两个向左两个向右的方式将 2 变为 3，4 变为 5。所以只讨论 2 和 4 的情况。

$\mathcal{T}^2$	$\mathcal{P}^2$	$\Gamma^2$
(TRS)	(PHS)	(CS)
1	1	1
—	—	1
-1	-1	1
—	1	—
-1	1	1

$$R(\chi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta - i \sin \theta \sin \chi & -\sin \theta \cos \chi \\ \sin \theta \cos \chi & \cos \theta + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix}$$

$$= \exp[-i\theta(\cos(\chi)\sigma_y + \sin(\chi)\sigma_z)]$$

破缺 PHS 很容易：

通过改变 $\chi$  可以使得 PHS 破缺但仍保存有 CS。破缺 CS 方法有两种：

$$1. U = S_{\uparrow} R_y(\theta_2) S_{\downarrow} R_y(\theta_1) S$$

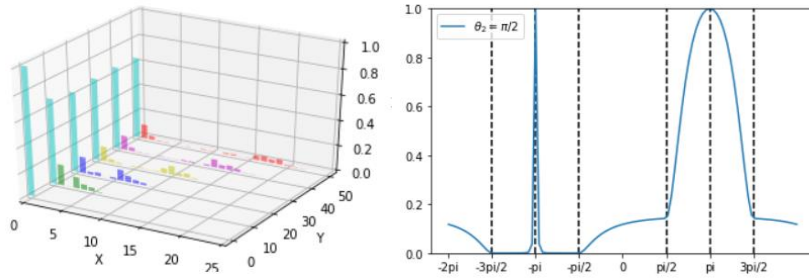
2. 使用 4 步的 quantum walk 可以实现只破缺 PHS，只破缺 CS 和两者都破缺：

$U = S_{\downarrow} R_4 S_{\downarrow} R_3 S_{\uparrow} R_2 S_{\uparrow} R_1$ ，在这种方式下根据上面 $R(\chi, \theta)$ 的定义，只要取 $\chi \neq 0$ ，破缺 PHS；

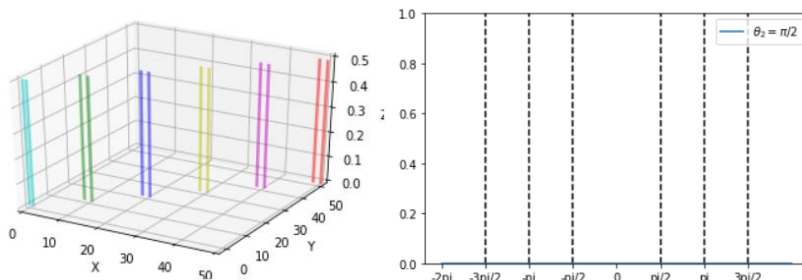
取 $\theta_2 \neq \theta_1$ 破缺 Chiral；这两个条件都实现的情况下两个对称性都破缺。

## 模拟结果（左图浅蓝色为在边界处声子的概率）

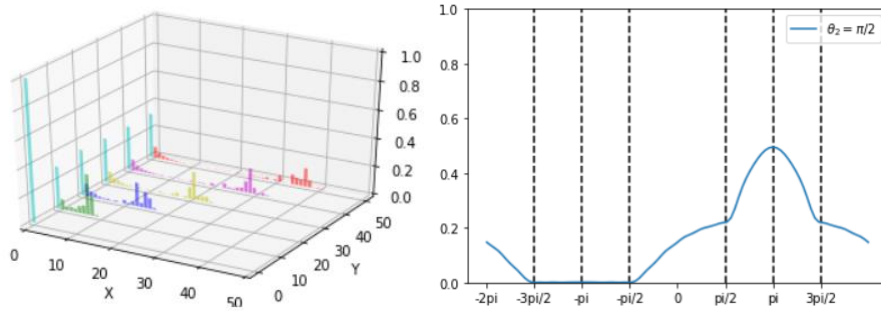
开始的 split-step 的走法，图一取 $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 存在边缘态，Y 为行走步数；图二为行走 100 步取 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，不同 $\theta_1$ 的 $p_0 + p_1$ 。



1.破缺 PHS：改变 $\chi$ ， $\chi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{2}$  时不会存在边缘态。

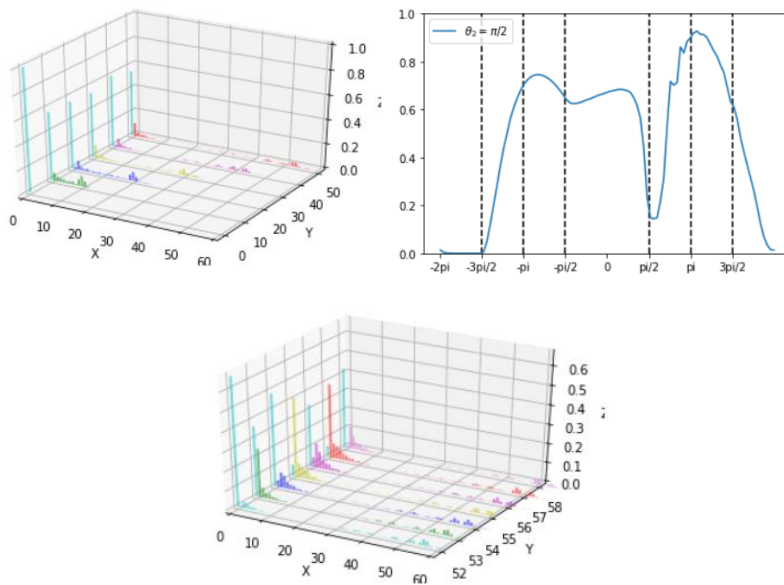


取 $\chi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{4}$ 时，图一取 $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 存在边缘态，Y 为行走步数，说明破缺了 PHS 后仍有 Chiral 保护；图二为行走 100 步取 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，不同 $\theta_1$ 的 $p_0 + p_1$ 。

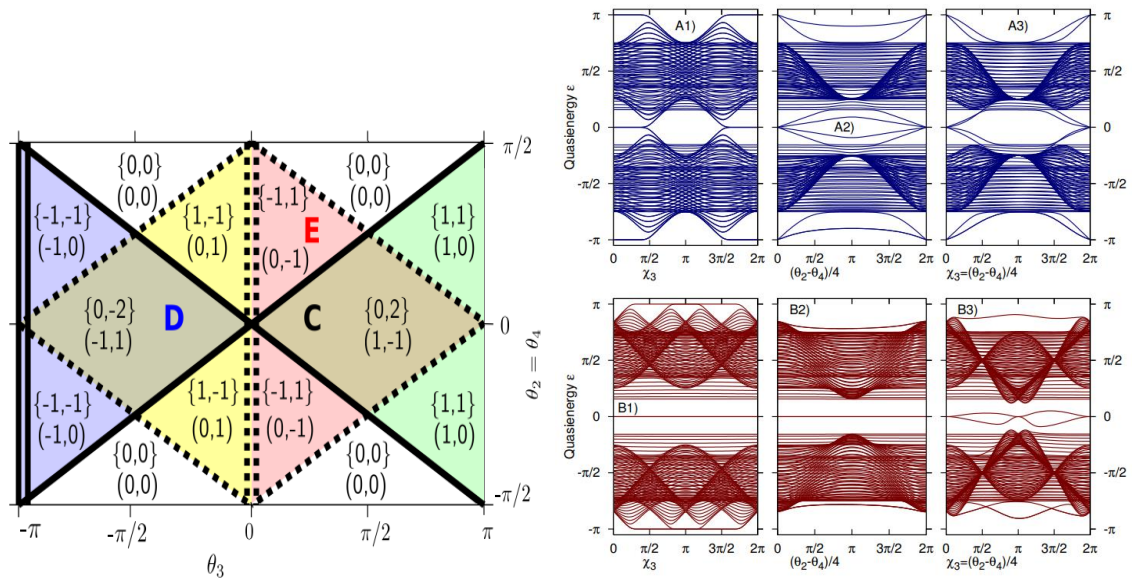


## 2. 破缺 Chiral:

Walk 形式  $U = S_{\uparrow} R_y(\theta_2) S_{\downarrow} R_y(\theta_1) S$ ，这种形式在我们的系统中是不易实现的，因为需要的自旋依赖的步数太多，需要时间是很长的。图一取 $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 存在边缘态，Y 为行走步数，说明破缺了 Chiral 后存在边缘态，但已经看不出相图分区这是比较奇怪的一点；原本分区  $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$  不会出现边缘态出现；图二为行走 100 步取 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，不同 $\theta_1$ 的 $p_0 + p_1$ 。仔细考察每个参数下 walk 的结果，发现虽然在边界出现较大的概率但并非稳定的边缘态，一直会在边界几个格点来回波动。可以看出在边界极其不稳定。这种方式不是很靠谱。



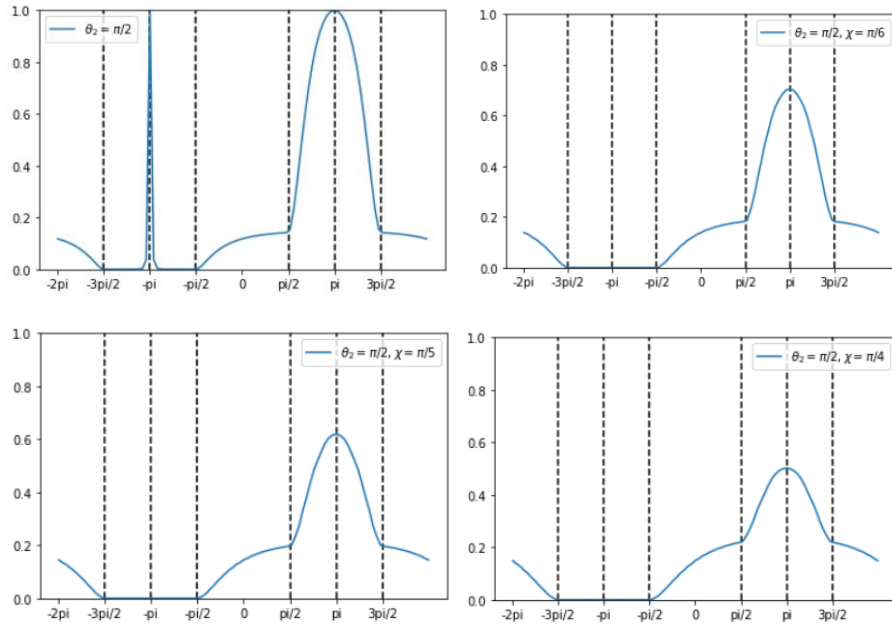
- 行走方式:  $U = S_{\downarrow} R_4 S_{\downarrow} R_3 S_{\uparrow} R_2 S_{\uparrow} R_1$  同样这需要 4 步自旋依赖的行走完成一步操作，在我们的系统上也是几乎无法实现的。这种四步的行走 $\chi_j = 0$  时保证 PHS，在 $\theta_2 = \theta_4$  时保证 CS。为了方便取 $\theta_1 = 0$  相图和能带如下

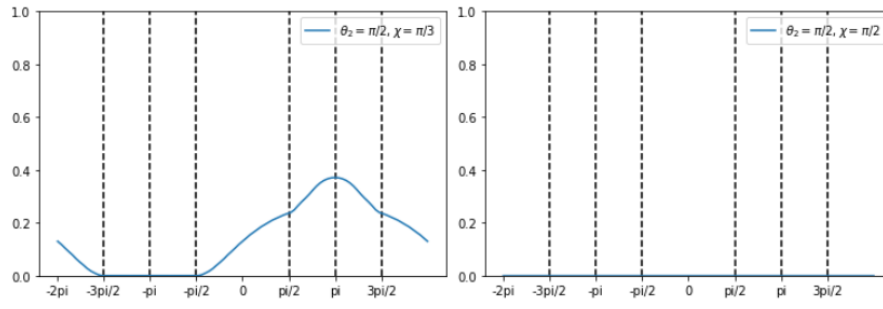


右边上面的三图是 C 和 D 之间的能带，本存在  $\epsilon = 0, \pi$  的边缘态；下图是 C 和 E 之间的能带，本存在  $\epsilon = 0$  的边缘态。横向三张图分别是破缺 PHS（通过非零  $\chi_3$ ），破缺 CS ( $\theta_2 \neq \theta_4$ ) 和破缺 PHS+CS。A1) 看出有两个边缘态在  $\chi_3 = \frac{\pi}{2}$  时都退简并，B1)  $\epsilon = 0$  边缘态仍然存在 gap，能量本征值不会发生改变；A2) 两个本征态都退简并，B2)  $\epsilon = 0$  边缘态仍然存在 gap，能量本征值不会发生改变。所以是不是 single 的 edge state 更加稳定？

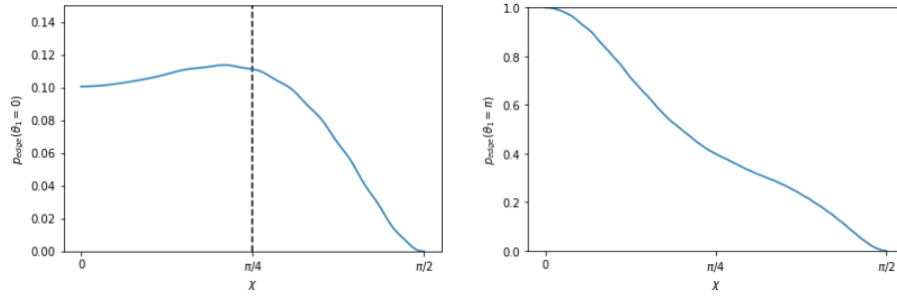
总结一下上面结果：破缺 PHS 很容易，可能的结果是一个本征态比两个本征态更加稳定。破缺 CS 在我们的系统中不易实现。所以我觉得可以重点研究下前者。

可以看下下面这一系列图：固定  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，在  $\chi_1 = \chi_2$  为不同值，改变  $\theta_1$  时的变化结果：





此时区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 只有一个边缘态，区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 有两个边缘态，取这两个区间的中点：



可以看出两个边缘态受到影响更大。