

边缘态 3

6.2

关于破缺 PHS 后相图的变化：

第一种走法：

$$R(\theta_2/2, \chi) T_1 R(\theta_1, \chi) T_2 R(\theta_2/2, \chi),$$

相应的有： $\cos(E_k) = \cos(k) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\chi) \sin(k)$

可以见得当 $k = 0, \pi$ 时最后一项为 0，与没有破缺 PHS 时的边缘态分界一致。

第二种走法：

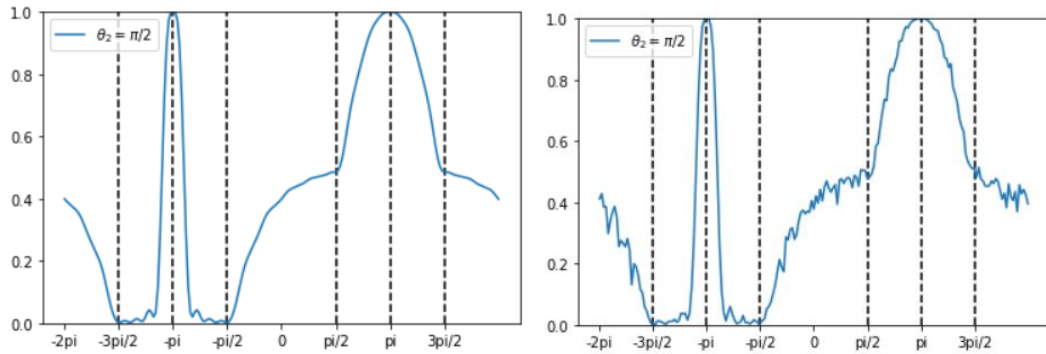
$$R(\theta_2/2) T_1 R(\theta_1, \chi) T_2 R(\theta_2),$$

相应的有： $\cos(E_k) = \cos(k) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\chi)$ ，取 $k = 0, E_k = 0$ ，可以推得：

$1 = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\chi)$ ，可以看出 χ 从 0 到 $\pi/2$ ，相图边界一直在减小，最终只剩下一个点。

边缘态的动力学演化

1. 含有随机的转角误差的情况：

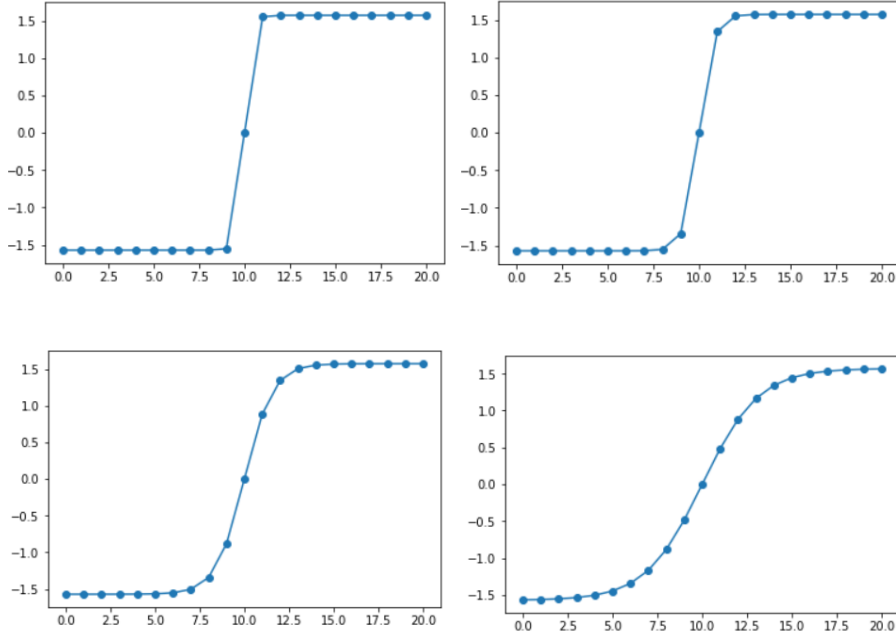


行走方式为： $R(\theta_2/2) T_2 R(\theta_1) T_1 R(\theta_2/2)$ ，右图对 θ_1 引入随机误差 $\delta\theta \in [-\pi/20, \pi/20]$ ，每一步都

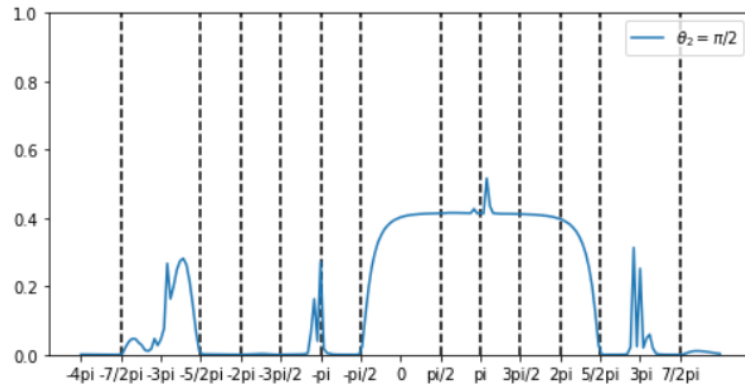
不同，固定 $\theta_2 = \pi/2$ ，扫描 θ_1 ，行走 20 步后结果。可以发现基本的特征不会发生改变。尝试对 θ_1, θ_2 都引入随机的误差，结果也类似。

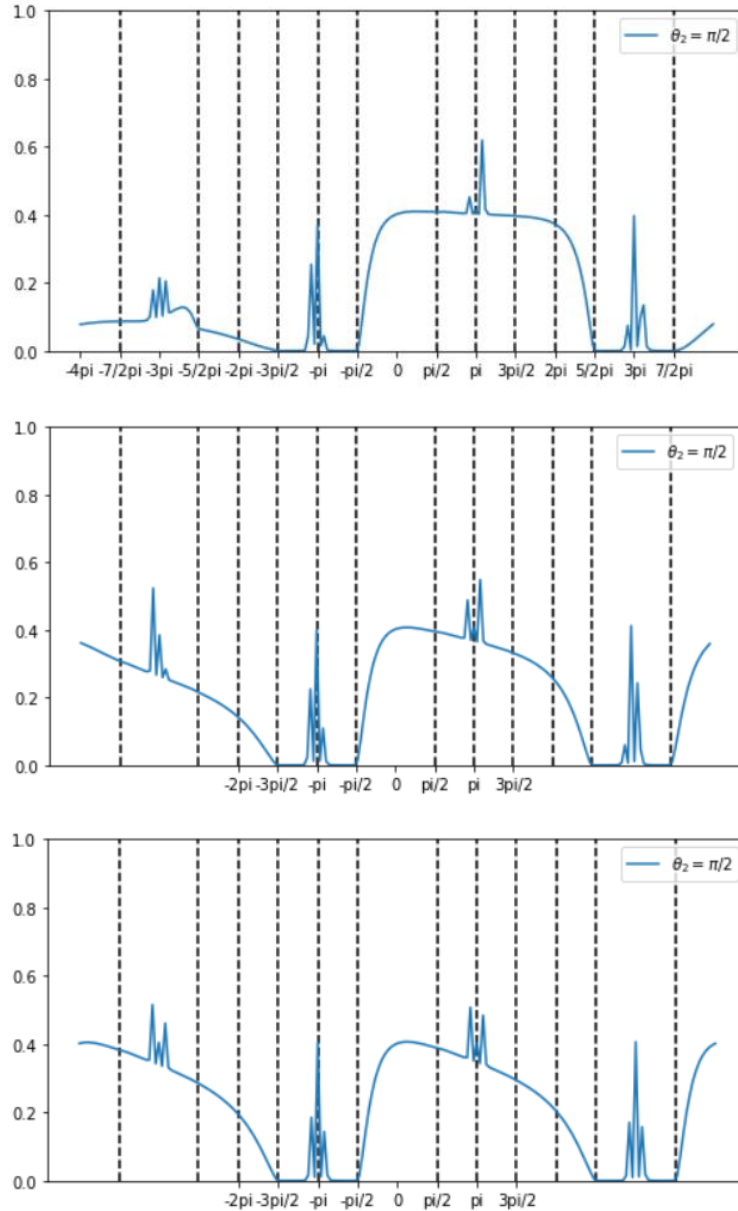
2. 绝热演化：

采用随时间变化的转角形式：
$$\theta(t) = \frac{\theta_{final} + \theta_{initial}}{2} + \frac{\theta_{final} - \theta_{initial}}{2} \tanh\left(\frac{t}{\xi}\right)$$
，这种形式是把之前做的在空间左半格点到右半格点的转动角的变化弄到时间上来。 ξ 决定绝热演化的速度。下图是取 $\xi = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ 的波形横轴是行走步数。



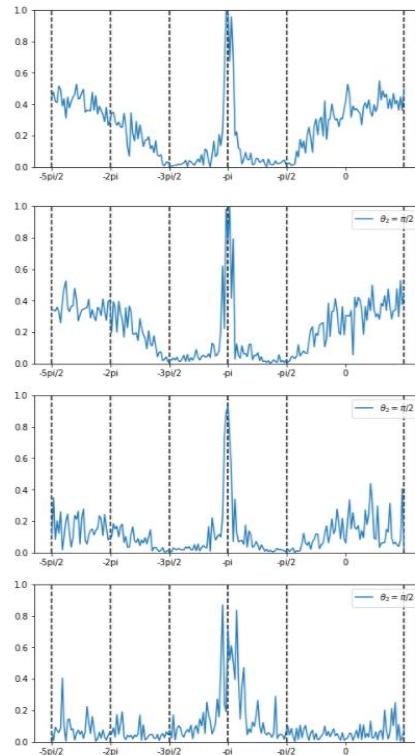
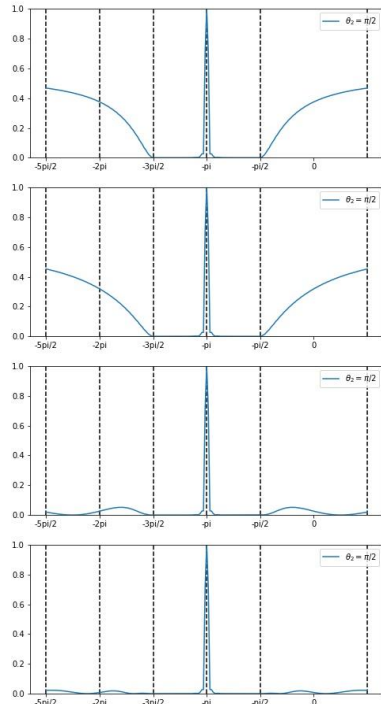
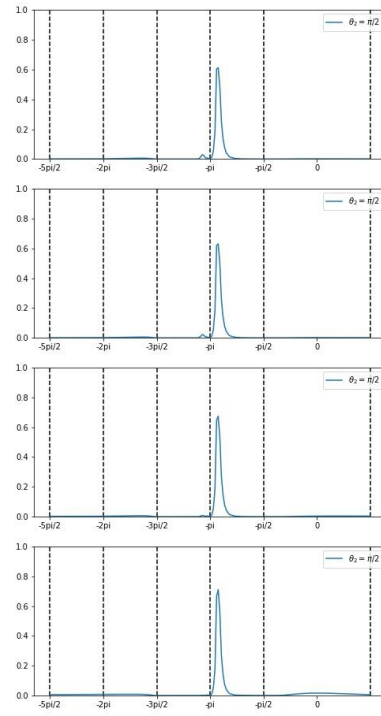
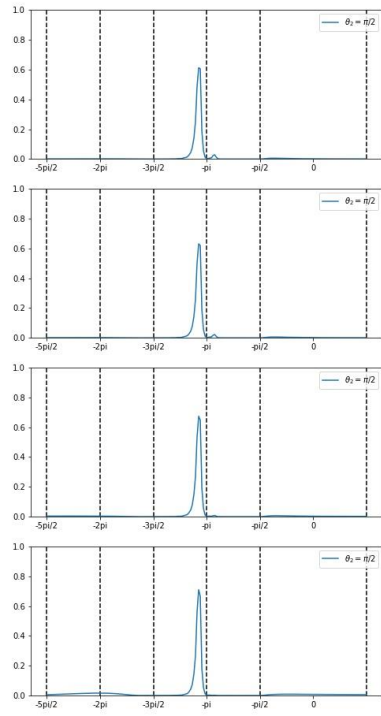
按照之前的想法，是 $n=0$ 的边界相当于在行走中 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, θ_2 与体相同。所以进行绝热的过程取 θ_2 为定值可看作与相同的体进行干涉。所以先试一下：固定 θ_2 ，绝热的改变 θ_1 并调节 ξ 去改变速度。确定一个初始角度开始演化。这样存在一个问题：可能与绝热路径相关，原本整个相图的周期是 2π ，感觉现在没有周期的，若要到达相图上同一个点，若经过了trivial的相区，可能边缘态就不复存在。下图的结果可以看出随着减慢绝热的速度周期性逐渐恢复。还有问题就是这些小峰，貌似会有些规律，比如说峰（毛刺）的数量与位置，但我也没弄清是什么规律。

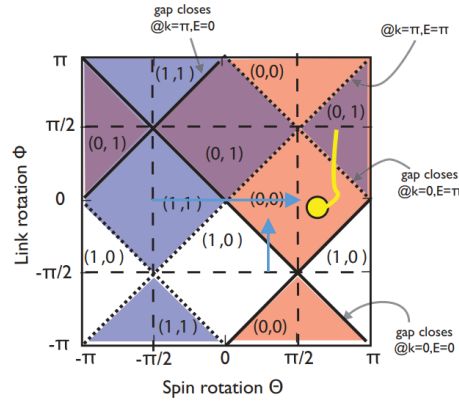




总结一下上面的结果：固定 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，初始的 $\theta_1 = 0$ ，以不同的绝热演化速度的结果。貌似总结不出什么有意思的结果，就是得到在相图上从某个初始点每一步沿着不同的路径变化到达最终点，得到的结果是不同的，原来的 2π 的周期性失去了。而且这个模拟比较难受的一点是我不知道是不是应该把前后行走的步数设为一致，貌似平衡也比较难判断，需要走的步数较多。如果韩老师有兴趣的话我可以当面演示一下。

可能比较临近的相变才有参考意义。比如可以考虑只考虑从一个点出发的相邻的两个相。上次我得到的结论是从 trivial 的相无法建立非 trivial 的边缘态，现在看来可能有些问题，取决于初始在 trivial 相中的位置：下面两张图分别取 $\theta_1 = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$ 。可以看出初始在 trivial 的地方无法建立起边缘态，会存在一个小峰，前者在左侧后者在右侧。



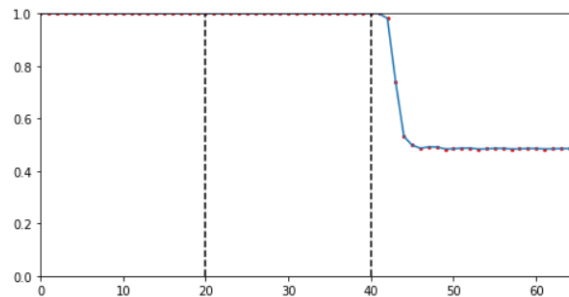


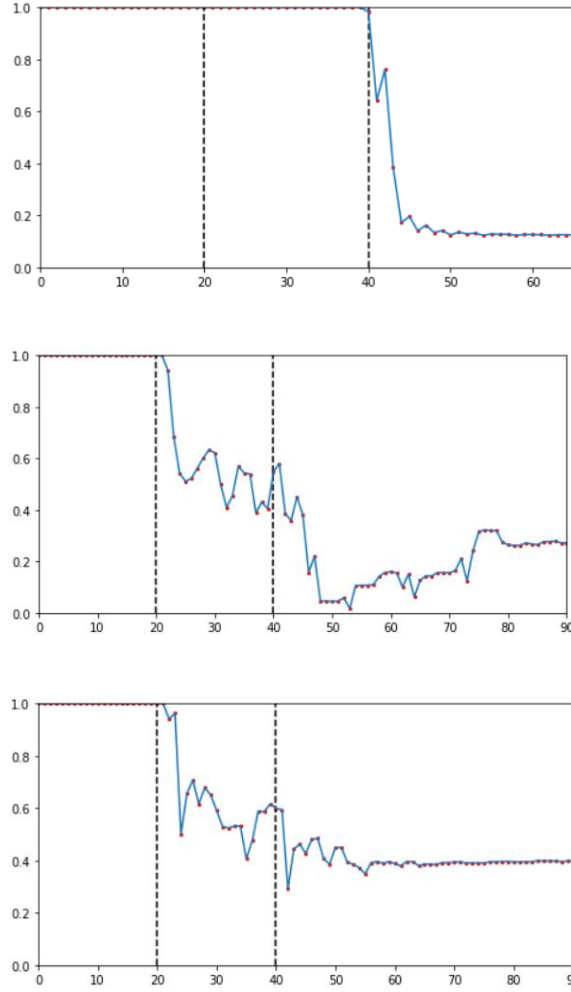
上图3取 $\theta_1 = -\pi$ ，可以见到在绝热速度很快的时候可以建立起边缘态的，对应与 quench 的情形。在绝热速度较慢时边缘态无法建立，对应绝热的情形拓扑的性质不会改变。

边缘态的数量和能量对应到相图上随机行走的 (v_0, v_π) 是拓扑不变量，所以反应到边缘态是否会么正操作下建立是合理的。下图有加入随机转角误差的结果。遗憾的是并没有看到有趣的现象。从 trivial 的相出发建立不起边缘态感觉也是可以理解的。所以后面可以研究下从有边缘态的相向没有边缘态的相演化的规律。

接下来研究从一个点出发去到另一个点的演化过程。取初始点选取在 $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ ，终止点为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，

$\xi = 0.25$ （较快）， 2 （较慢）时的结果如下：可以见得之前描述的结果其实是对原始相图 π 那个在 trivial 相中尖峰的演化。前面一段不会发生演化，到后面会随着演化速度的减慢减少边缘态的概率。下面各图是在边缘态的概率随行走步数的演化。下面第三张图是在图二的加上 dissipation 的结果。第四张图是在图二演化路径中 trivial 相部分加上 dissipation 的结果。并不是每次都会得到对边缘态保存有帮助的结果。总而言之，下面四张图给出了 trivial 相中的类似孤子边缘态到 non-trivial 相的演化。但是我经过尝试认为本征态的建立，能量为 0 的本征态演化为能量为 π 的本征态是不可实现的，即使采用绝热的方法。然而唯一可以违反这个结果的方式就是两个区间孤子之间的演化，0 和 π 区间的演化也有类似的结果： $(-\pi, 0) \rightarrow (\pi, 0)$ ，演化较快时边缘态保留，演化慢时边缘态消失。





调研了下 time-dependent quantum walk，主要有下面几篇文章：

PHYSICAL REVIEW A **73**, 062304 (2006)

Quantum walk with a time-dependent coin

M. C. Bañuls,¹ C. Navarrete,¹ A. Pérez,¹ Eugenio Roldán,² and J. C. Soriano²

¹*Departament de Física Teòrica and IFIC, Universitat de València-CSIC, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain*

²*Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain*

(Received 7 October 2005; published 6 June 2006)

We introduce quantum walks with a time-dependent coin, and show how they include, as a particular case, the generalized quantum walk recently studied by Wojcik *et al.* [Phys. Rev. Lett. **93**, 180601 (2004)] which exhibits interesting dynamical localization and quasiperiodic dynamics. Our proposal allows for a much easier implementation of this particularly rich dynamics than the original one. Moreover, it allows for an additional control on the walk, which can be used to compensate for phases appearing due to external interactions. To illustrate its feasibility, we discuss an example using an optical cavity. We also derive an approximated solution in the continuous limit (long-wavelength approximation) which provides physical insight about the process.

DOI: [10.1103/PhysRevA.73.062304](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.062304)

PACS number(s): 03.67.Lx, 05.40.Fb, 42.15.Eq

Experimental quantum-walk revival with a time-dependent coin

P. Xue,^{1,2,*} R. Zhang,¹ H. Qin,¹ X. Zhan,¹ Z. H. Bian,¹ J. Li,¹ and Barry C. Sanders^{3,4,5,6}

¹*Department of Physics, Southeast University, Nanjing 211189, China*

²*State Key Laboratory of Precision Spectroscopy,
East China Normal University, Shanghai 200062, China*

³*Hefei National Laboratory for Physical Sciences at Microscale and Department of Modern Physics,
University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*

⁴*Shanghai Branch, CAS Center for Excellence and Synergetic
Innovation Center in Quantum Information and Quantum Physics,
University of Science and Technology of China, Shanghai 201315, China*

⁵*Institute for Quantum Science and Technology, University of Calgary, Alberta T2N 1N4, Canada*

⁶*Program in Quantum Information Science, Canadian Institute for Advanced Research, Toronto, Ontario M5G 1Z8, Canada*

没仔细看，应该没有涉及到边缘态演化的问题。