讨论结果

1.我们的quantum walk：one step evolution（先向左走）：

$$U = T_1 R(\theta_1) T_2 R(\theta_2)$$

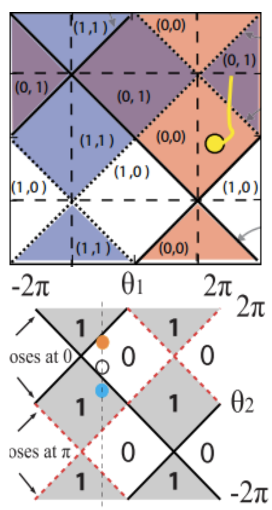
$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (|n+1><n| \otimes |\uparrow><\uparrow| - |n><n| \otimes |\downarrow><\downarrow|) + (|0><0| \otimes |\uparrow><a|$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|n><n+1| \otimes |\downarrow><\downarrow| - |n><n| \otimes |\uparrow><\uparrow|) + (|0><0| \otimes |a><\downarrow|)$$

所以整体的效果：

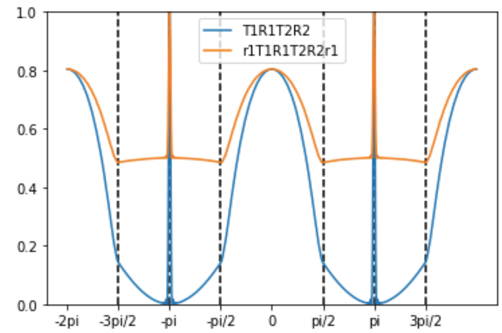
$$U = (\sum_{n=0}^{\infty} (|n+1><n| \otimes |\uparrow><\uparrow| - |n><n| \otimes |\downarrow><\downarrow|))R1(\sum_{n=0}^{\infty} (|n><n+1| \otimes |\downarrow><\downarrow| - |n><n| \otimes |\uparrow><\uparrow|))R2 - |0><0| \otimes |\uparrow><\downarrow|$$

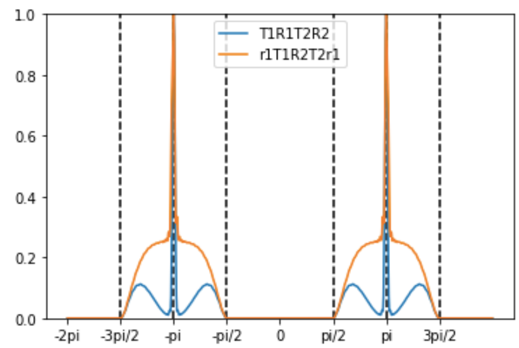
采用相图如下：在（1，0）区域为真空。我还是觉得可以参考一下下面第二个相图，因为上图应该是在下图的基础上更精细的分类，也即原本会是与真空winding number相同的区域也会出现拓扑相。

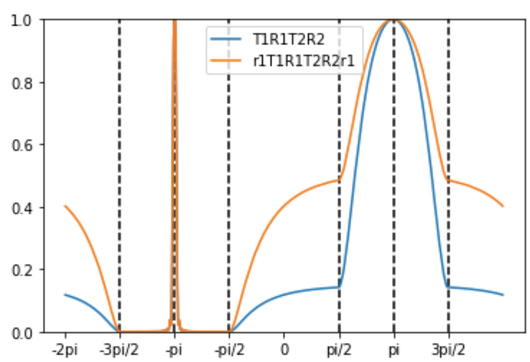


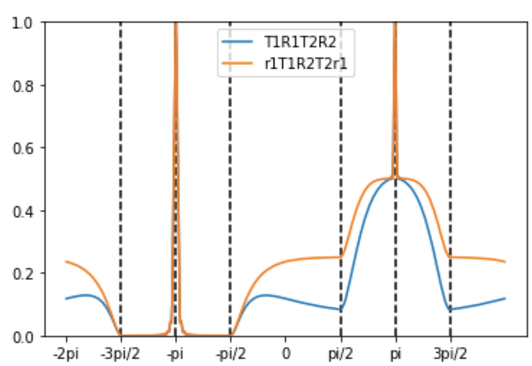
这里要说明一下接下来我是如何观察相图的：对于T1R1T2R2和r2T1R1T2r2是以θ_2作为x轴，θ_1作为y轴。对于T2R2T1R1和r1T2R2T1r1是以θ_1作为x轴，θ_2作为y轴。原因可以从有效哈密顿量看出，把先走的那个角度作为x轴，按照原始的相图（只有winging number）是一样的。

2. 模拟结果：下图1，2是选定$\theta_1 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_2，对应于相图中水平的线，图1始终存在边缘态，图2在（1，0）区间外存在边缘态。下图3，4选定$\theta_2 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_1，对应图中垂直的线，可以看出仍然是在（1，0）区间外存在边缘态。分别画的是T1R1T2R2, r2T1R1T2r2（抱歉下面图上的标签有误）

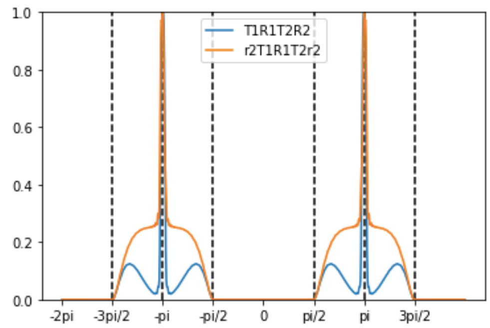


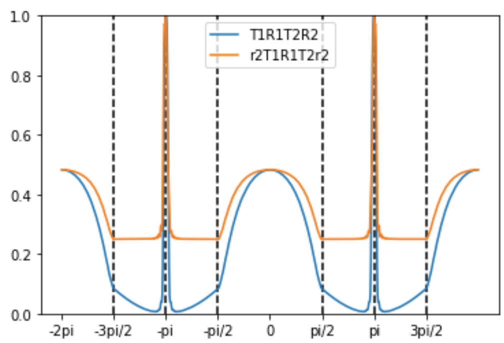


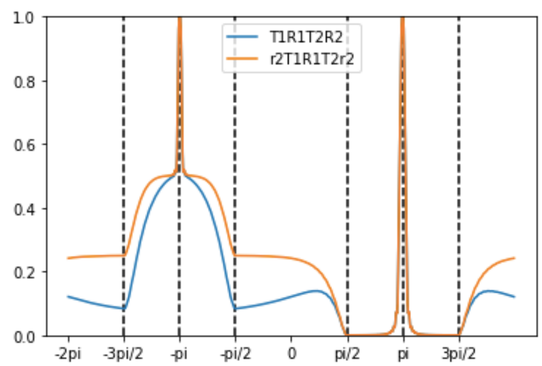


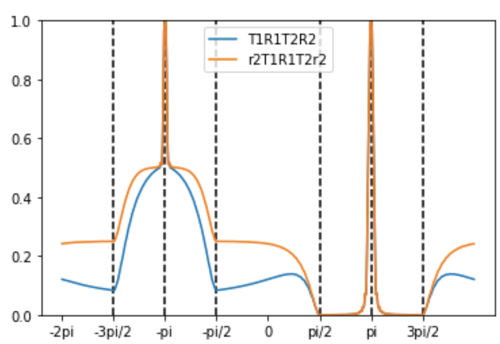


有趣的结果：下图1，2是选定$\theta_1 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_2，对应于相图中水平的线，图1始终存在边缘态，图2在（0，1）区间外存在边缘态。下图3，4选定$\theta_2 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_1，对应图中垂直的线，可以看出仍然是在（0，1）区间外存在边缘态。画的仍然是T1R1T2R2, r2T1R1T2r2，不过对反射壁进行了改进，反射壁变为$|0><0| \otimes |\uparrow><\downarrow|$（原来前面是负号）。

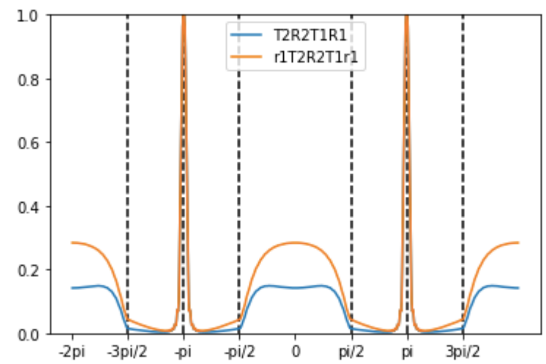


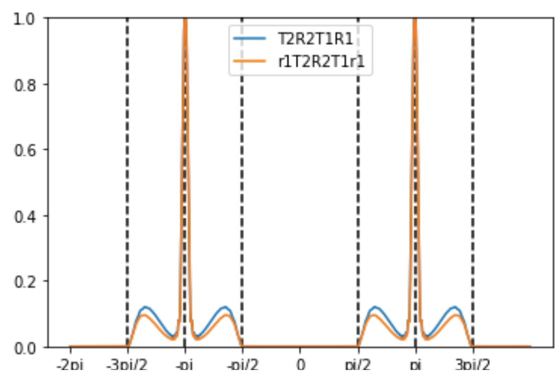


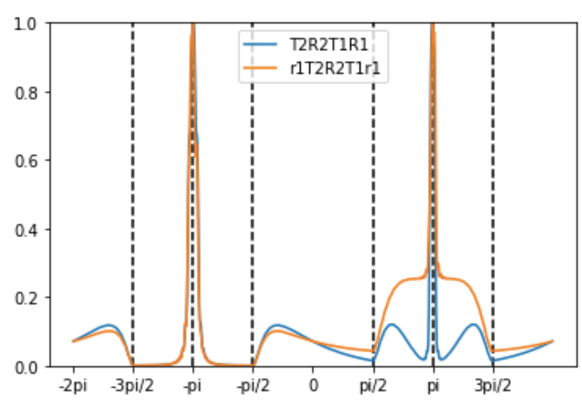


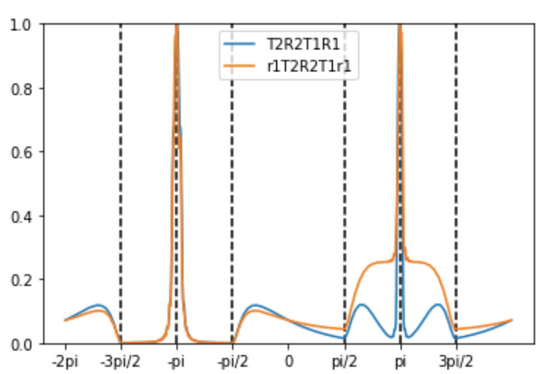


更多的：下面四张图的描绘的次序是：T2R2T1R1, r1T2R2T1r1.下图1，2是选定$\theta_1 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_2，对应于相图中垂直的线，图1始终存在边缘态，图2在（1，1）区间外存在边缘态。下图3，4选定$\theta_2 = \pi/2$，$-\pi/2$改变θ_1，对应图中水平的线，可以看出竟然是在（1，1）区间外存在边缘态。分别画的是T1R1T2R2, r2T1R1T2r2，这样的话根据相图，真空为（1，1）









结论：通过模拟已经可以获取三种真空，采用的手段是改变行走的顺序（向左走或向右走）和边界反射壁的正符号。理应是有2*2=4种，不过T2R2T1R1比较勉强，因为我们的系统在这种情形下是有辅助能级的，没法给出一种明确的边界情况，边界和辅助能级混合在了一起。我也不是很明确是否得到了真的不同的真空，目前仅仅是不同的参数区间，因为我不知道变了行走和边界的方式，$Z_2 \times Z_2$的相图会有怎样的变化。