fiche n°22 : Séries entières

Exercice 72. Chercher le rayon de convergence des séries entières ($z \in \mathbb{C}$) :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (nz)^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (1+i\sqrt{3})^n z^{2n}$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} C_{2n}^n z^n$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right) z^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n2^n}$ 7) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$ 8) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$ 10) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^n$ 11) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$

Exercice 73. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x^n)\mathrm{d}x$.

1)Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.
2)En déduire un encadrement de a_n.
3)Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $\sum (-1)^n a_n$ converge. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 74. Préciser les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ dans les exemples suivants :

1) $a_n = (-5)^n$ et $b_{2p} = \dfrac{1}{3^p}, b_{2p+1} = 0$; 2) $a_n = -n$ et $b_n = \ln(n+1)$;
3) $a_n = 2^n$ et $b_n = \mathrm{i}\, n - 2^n$; 4) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ et $b_{2p} = 0, b_{2p+1} = \dfrac{1}{p!}$.

Exercice 75. On donne trois séries entières réelles $\sum a_n x^n$. Pour chacune des séries :
a) Montrer que le rayon de convergence est 1.
b) Étudier la convergence pour $x = 1$.

1) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$; 2) $a_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$; 3) $a_n = \cos(n)$.

Exercice 76. Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière réelle, écrire ce développement et préciser le rayon de convergence :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ avec $a \neq 0$. Que se passe-t-il pour $a = 0$?
2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$ avec $a \neq 0$.
3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

fiche n°23 : Séries entières

Exercice 77. On considère la fonction f définie pour x réel dans $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1) Montrer que f vérifie sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1.$$

2) Montrer que f est développable en série entière (au voisinage de 0) et donner le rayon de convergence de cette série.
3) Donner le développement en série entière de g, avec

$$g(x) = (\arcsin x)^2.$$

Exercice 78. On se propose de résoudre quelques relations de récurrence à l'aide des séries entières. À une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les deux séries entières suivantes :

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Les questions de ce problème sont totalement indépendantes.
1) Dans les deux cas suivants préciser les rayons de convergence des séries entières définissant f et g et calculer leur sommes :
a) $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = 1$.
b) $a_n = \cos(n\theta)$ où θ est un réel donné.

2) Etude de la suite $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ pour $n \geq 2$.

a) Montrer que $f(x) = \dfrac{2+x+x^2}{(2+x)(1+x)(1-2x)}$.
b) Développer f en série entière en précisant où cela est possible et en déduire a_n. *(On pourra décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.)*

3) Étude de $a_0 = 1$, $a_n - na_{n-1} = (-1)^n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
b) En déduire que $a_n = n!\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}\right)$.
c) Montrer que $a_n \sim \dfrac{n!}{e}$ et dire pourquoi on ne pouvait donc pas utiliser f ici.

Exercice 79. On considère l'équation différentielle (E), où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x :

(E) $x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = x^2 - 2$.

1) Chercher les solutions de (E) qui sont développables en série entière. Écrire les solutions trouvées à l'aide de fonctions usuelles et vérifier qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) On cherche à déterminer une solution y telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$. Obtient-on une seule solution ?

Exercice 80. Soit F la fonction donnée pour x dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Sans expliciter l'intégrale, montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que sur $]-1,1[$, le développement de F en série entière est :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n^2} + \dots .$$

3) On pose $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{2k^2}$, $\forall x \in [0,1]$.

a) Montrer que la convergence de la suite F_n est uniforme sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$.

4) Pour quelles valeurs de l'entier N est-on certain que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ soit une valeur approchée à 10^{-2} de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t$? Écrire sous forme de somme de fractions une valeur approchée à 10^{-2} de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 81. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Exercice 82. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$.

Exercice 83. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R_b le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$.

1. Montrer que $R_b \geq \max(1, R_a)$.
2. Montrer que si $R_b > 1$ alors $R_b = R_a$.
3. Exprimer R_b en fonction de R_a.

Exercice 84. Soit E un espace vectoriel et a_n le nombre de parenthésages possibles de la somme de n éléments de E (par convention $a_1 = 1$, ensuite $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$).

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
2. Soit f la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.
3. Calculer R et f.
4. En déduire a_n.

Exercice 85. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, on considère la forme bilinéaire symétrique φ définie, pour $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, par :

$$\varphi(u, v) = (x + y)(x' + y') + (x - y - z)(x' - y' - z') + 2zz'.$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2) Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ est-elle orthogonale pour φ ?

Exercice 86. Soit a un nombre réel. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, on considère la forme bilinéaire symétrique φ définie par :

$$\varphi((x, y), (x', y')) = 2xx' + 2ayy' + xy' + x'y.$$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2) Écrire la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$.
3) Quand $a = 1$, trouver une base orthonormale pour φ.

Exercice 87. On se place dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On considère les applications définies pour t réel et n entier positif par :

$$h_n(t) = \cos(2\pi nt).$$

1) Montrer que ces applications sont orthogonales deux à deux.
2) On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie. Montrer en utilisant des applications h_n qu'on arrive à une contradiction.

Exercice 88. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ \forall i = 1, \ldots, n, \ x_i > 0\}$ et h définie sur D par :

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right).$$

Déterminer le minimum de h sur D.
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 89. 1) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour X vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, évaluer ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$. Observer le résultat.
2) Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On suppose que pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^tXAX = {}^tXBX$. Montrer que $A = B$.
3) Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n. On suppose que pour tous les vecteurs colonne X et Y de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^tXAY = {}^tXBY$. Montrer que $A = B$.

Exercice 90. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On notera (x, y, z, t) les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
1) Déterminer une base orthonormée du sous espace vectoriel E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $u_2 = (-1, -1, 1, 1)$.
2) Soit F le sous espace orthogonal de E. Quelle est la dimension de F ?
3) Déterminer une base orthonormée de F.

Exercice 91. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On notera (x, y, z, t) les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
1) Déterminer l'orthogonal du vecteur $u_1 = (1, 1, 0, -1)$.
2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de base (u_2, u_3, u_4) avec $u_2 = (1, -1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 1, -1, 0)$, $u_4 = (0, 0, 1, -1)$.
  a) Donner une équation de F.
  b) Chercher le projeté orthogonal de u_1 sur F.
  c) En déduire la distance de u_1 à F.

Exercice 92. Sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on donne la forme quadratique Φ qui à $v = (x, y, z)$ associe

$$\Phi(v) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz.$$

1) Ecrire la matrice A de Φ dans la base $\mathscr{B}$.
2) On appelle φ la forme bilinéaire symétrique dont Φ est la forme quadratique. Donner l'expression de φ pour v et v' dans $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
4) Chercher une base orthonormée pour φ, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, à partir de la base $\mathscr{B}$.
5) Calculer la projection orthogonale du vecteur e_2 sur le plan vect$\{e_1, e_3\}$, ainsi que la distance de e_2 à ce plan.

Exercice 93. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2), avec $e_k(t) = t^k$. On donne la forme bilinéaire symétrique :

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \mapsto \varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
3) Déterminer l'orthogonal (pour φ) du polynôme $T(t) = 30t^2 + 12t + 1$.
4) Déterminer une base orthonormée (pour φ) de $\mathbb{R}_2[X]$.
5) Pour a et b réels, décomposer le polynôme $R(t) = t^2 + at + b$ dans cette nouvelle base orthonormée (pour φ). En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \{(1 - a + b)^2 + b^2 + (1 + a + b)^2\}.$$

Exercice 94 (IE 15 mars 2012)**.** On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)dt, \quad \|P\| = \sqrt{\int_{-2}^{2} P^2(t)dt}.$$

1. (a) Déterminer une base orthogonale $(\mathscr{E})$ du sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 pour le produit scalaire φ.
(b) On note p_F la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F. Soit p un entier positif, calculer la projection orthogonale $p_F(X^{2p+1})$ de X^{2p+1} sur F.
2. (a) En utilisant, pour tout élément P de E, l'unicité de la décomposition $P = p_F(P) + Q, p_F(P) \in F$, $Q \in F^\perp$, montrer que p_F est linéaire.
(b) Déterminer l'application $p_F \circ p_F$.
(c) Déterminer $p_F\left(\sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}X^{2p+1}\right)$.
(d) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que l'application p_F est lipschitzienne de rapport 1.
3. Soit L l'application qui à un polynôme P associe

$$L(P) = (4 - X^2)P'' - 2XP'.$$

(a) Montrer que L définit un endomorphisme de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
(b) Quelle est la matrice de L dans la base $(\mathscr{E})$?
(c) Montrer que L est un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire φ, c'est à dire tel que

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)).$$

Exercice 95. (DS EURINSA du 28 janvier 2008) On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels. On donne pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ la forme bilinéaire :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $\varphi(P, Q)$ existe pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Monter que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini pour P dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$u(P)(x) = e^x \left(xe^{-x}P'(x)\right)' = (1 - x)P'(x) + xP''(x),$$

où x est réel et P', P'' sont les dérivées de P. Montrer que pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$\varphi(u(P), Q) = \varphi(P, u(Q)).$$

c) On suppose que pour P et Q non nuls dans $\mathbb{R}[X]$, il existe des réels <u>distincts</u> λ et μ tels que $u(P) = \lambda P$ et $u(Q) = \mu Q$. Montrer que les polynômes P et Q sont orthogonaux pour φ.
d) On suppose que pour P dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un réel λ tel que $u(P) = \lambda P$. Montrer que pour x réel P vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad xP''(x) + (1 - x)P'(x) - \lambda P(x) = 0.$$

e) Montrer que s'il existe, pour n entier, un polynôme P de degré n, vérifiant l'équation différentielle (E), alors $\lambda = -n$.
f) On donne, pour n entier, l'équation différentielle

$$(E_n) \quad xy''(x) + (1 - x)y'(x) + ny(x) = 0$$

et le polynôme P_n défini pour x réel par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$. On admet que P_n est solution de (E_n). Quelle est la valeur de $P_n(0)$? En déduire qu'il existe un réel $\alpha_n > 0$ tel que $P_n(x) > 0$ pour x dans $]0, \alpha_n[$. Montrer qu'il existe une solution de (E_n) sur $]0, \alpha_n[$, non proportionnelle à P_n, et décrire une méthode pour la déterminer (on ne démande pas les calculs effectifs).
g) Montrer que la famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, orthogonaux deux à deux pour φ.
h) *Question facultative :* Montrer que P_n est solution de (E_n).

Exercice 96. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser la matrice A, en précisant une matrice de passage orthogonale. Cette matrice définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
2) Mêmes questions avec B.

Exercice 97. Soit Q une forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, et soit A la matrice de Q.
1) Donner la valeur de $\max\limits_{\|X\|=1} Q(X)$ et $\min\limits_{\|X\|=1} Q(X)$ lorsque :
  a) A est diagonale.
  b) A n'est pas diagonale. *(Indication : utiliser les valeurs propres de A).*
2) Calculer

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} \{(x+3y)^2 + (4y-2x)^2 + 2z^2\}.$$

Exercice 98. Soit Q la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ donnée par :

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto Q(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3.$$

1) Écrire la matrice A de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On définit la matrice B par : $A = I + 3B$. Écrire B. Expliquer pourquoi la matrice B est diagonalisable.
2) Montrer que si on diagonalise la matrice B alors on peut diagonaliser la matrice A à l'aide de la même matrice de passage. Écrire les relations entre les valeurs propres de A et celles de B.
3) Calculer les valeurs propres de B, puis celles de A, et déterminer une matrice de passage P orthogonale permettant de diagonaliser simultanément A et B.
4) En déduire une forme réduite de Q, dans une base orthonormale.
5) Déterminer $\min\limits_{\|X\|=1} Q(X)$ et $\max\limits_{\|X\|=1} Q(X)$.

Exercice 99. Écrire la matrice, puis étudier la signature et le rang des formes quadratiques suivantes. Préciser celles dont la forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire, et celles qui gardent un signe constant.
a) $Q(x,y,z) = x^2 - y^2 - xy$; b) $Q(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$;
c) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - (x+y+z)^2$;
d) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 4xy + 2xz - 2yz$;
e) $Q(x,y,z) = mx^2 + y^2 + mz^2 - 4xz$, en fonction du paramètre réel m.

Exercice 100. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2), avec $e_k(t) = t^k$. On donne φ définie par :

$$(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \mapsto \varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E. (Ne pas oublier de justifier la convergence de l'intégrale).
2) Montrer que $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k!$ pour tout k entier positif.
3) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
4) Trouver l'orthogonal dans E, du plan $\mathscr{P}$ engendré par e_1 et e_2.
5) En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (1 - at - bt^2)^2 e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 101. On considère la suite de fonctions f_n, $n \geq 0$, définies sur $]-1,1[$ par :

$$\theta = \arccos(x), \quad f_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

1) a) Calculer f_n pour $n = 0, 1$.
  b) Établir, pour $n \geq 1$ et $x \in]-1,1[$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

En déduire que f_n est une fonction polynôme sur $]-1,1[$ de degré n et de même parité que n.
  c) Montrer que l'on peut prolonger les fonctions f_n par continuité sur $[-1,1]$.
On continuera de noter f_n ces fonctions définies alors sur $[-1,1]$.
2) Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie pour f et g dans E par :

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

  a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
  b) Vérifier que la suite de terme général f_n $(n \geq 0)$ est une suite de polynômes orthogonaux, relativement à φ, dans E.

Exercice 102. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_m(x,y,z) = (m+1)(x^2+z^2) + my^2 + 2(xy+yz)$$

et on note φ_m la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ associée. Réduire q_m et déterminer les valeurs de m pour lesquelles φ_m définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 103. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne un réel m et on considère la conique (Γ_m) d'équation :

$$(\Gamma_m) \quad (1+m)(x^2+y^2) + 2(1-m)xy + 2\sqrt{2}(m-1)x - 2\sqrt{2}(m+1)y + 2m = 0.$$

1) Trouver un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où l'équation de (Γ_m) est réduite.
2) Préciser la nature de (Γ_m) suivant les valeurs du réel m.
3) Représenter, sur un seul dessin dans l'ancien repère R, le point Ω et les deux coniques (Γ_1) et (Γ_{-1}) (on précisera leur type).

Exercice 104. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la conique (Γ_α) d'équation :

$$(\Gamma_\alpha) \quad x^2 + y^2 + 2\,\mathrm{ch}\,(\alpha)xy + x + y = 1.$$

Trouver, suivant les valeurs du réel α, son équation réduite et préciser sa nature.

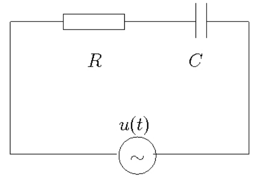
Exercice 105. 1) Donner, en fonction du réel m, la signature de la forme quadratique Q définie par $Q(x,y) = 5x^2 - 2mxy + 5y^2$.
2) On considère dans le plan P euclidien, muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (Γ) d'équation :

$$(\Gamma) \quad 5x^2 - 6|xy| + 5y^2 = 2.$$

Faire un dessin de (Γ) dans le repère R, en précisant les coniques dont (Γ) est constituée.

Exercice 106. On considère le circuit ci-dessous qui vérifie l'équation différentielle

$$(E) \quad Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t),$$



où $R > 0$ est la résistance, $C > 0$ est la capacité, $u(t)$ est la tension d'entré et $q(t)$ est la densité de charge.

Au temps $t = 0$ on suppose que le condensateur est déchargé : $q(0) = 0$. On veut déterminer la tension d'entrée u, avec u continue sur $[0,1]$, de sorte que après une unité de temps, q prenne une valeur prédéterminée q_0, $q(1) = q_0$. Pour simplifier, on suppose $q_0 = C$, avec les bonnes unités.

Si f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, on note leur produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t}$ la norme euclidienne associée de $C([0,1],\mathbb{R})$.
1) Résoudre l'équation différentielle (E) avec la condition initiale $q(0) = 0$.
2) Montrer que la fonction continue u est solution du problème

$$(P) \quad \begin{cases} Rq'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = u(t) \\ q(0) = 0, \ q(1) = C \end{cases}$$

si et seulement si $\langle u, \phi \rangle = RCe^{\frac{1}{RC}}$ avec $\phi(t) = e^{\frac{t}{RC}}$.
3) Montrer que si u_1 et u_2 sont deux solutions de (P) alors $u_1 - u_2$ est orthogonale à ϕ.
On veut maintenant trouver une solution de (P) telle que $\|u\|_2$ soit minimale. La quantité $\|u\|_2^2$ est proportionnelle à l'énergie dissipée dans la résistance. On veut donc minimiser la perte d'énergie dans la résistance au cours de la charge.
4) Montrer que si u est solution de (P) alors $\|u\|_2 \geq RCe^{\frac{1}{RC}} \dfrac{1}{\|\phi\|_2}$.
5) Trouver une solution de P de norme $\|u\|_2$ minimale.

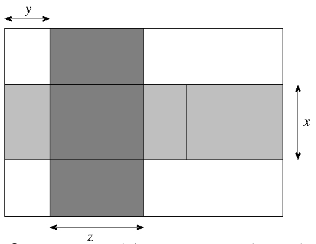
Exercice 107. Trouver les extremums relatifs de f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Exercice 108. Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy + y^4 - 2x^2y^2,$$

où m est un paramètre réel.
1) Vérifier que $O(0,0,0)$ est un point critique de f.
2) Étudier, suivant les valeurs du réel m, si O est un extremum relatif de f.

Exercice 109. Dans une feuille de carton on découpe le patron suivant d'un parallélépipède rectangle (on néglige les languettes nécessaires au collage, mais les parties non utilisées du carton doivent être comptabilisées) :



Le volume de ce parallélépipède est de $1\ \mathrm{dm}^3 = 1000\ \mathrm{cm}^3$.
Les longueurs x, y et z sont en dm.

On veut déterminer les dimensions x, y et z pour que la surface de la feuille de carton initiale (et non seulement celle du patron) soit minimale.
1) Montrer que le problème se ramène à la recherche d'un minimum de la fonction f suivante, dont on précisera l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = 2\left(2y^2 + xy + \frac{1}{y} + \frac{2}{x}\right).$$

2) Déterminer les dimensions optimales du parallélépipède (on admettra que le minimum trouvé est absolu).

Exercice 110. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$.
1) Montrer que f n'admet qu'un minimum relatif sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que ce minimum n'est pas absolu dans $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que ce minimum est absolu dans le disque ouvert D :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 2\}.$$

4) Étudier les extremums absolus de f dans le disque fermé

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Exercice 111. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2$.
1) Montrer que f n'admet qu'un extremum relatif.
2) Cet extremum est-il absolu ?

Exercice 112. Méthode des moindres carrés. Soit n entier, $n \geq 2$.
1) On considère $x_1, \ldots, x_n$ réels tous distincts. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 < n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
2) Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on donne n points M_k de coordonnées (x_k, y_k), les x_k étant tous distincts. La méthode des "moindres carrés" propose de chercher une droite (D), d'équation $y = ax + b$ "proche" des points M_k, en minimisant la fonction F :

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2.$$

a) Montrer que F admet un seul extremum relatif dans $\mathbb{R}^2$, et préciser sa nature. Expliquer, sur un dessin, ce que F représente.
b) Quelle est la position de (D) lorsque $n = 2$ (faire un dessin), et quel est alors le minimum de F ?

Exercice 113. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1$. Étudier les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 114. On considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = y(\pi - x)$.
a) Étudier les extremums relatifs de F sur $\mathbb{R}^2$.
b) Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la conique (Γ_α) d'équation $F(x,y) = \alpha$, où α est une constante réelle. Écrire une équation réduite de (Γ_α) dans un repère orthonormé. En déduire la nature de (Γ_α) en fonction de α. Faire un déssin précis de (Γ_α) pour $\alpha = \dfrac{\pi^2}{4}$. (*Indication : on remarquera que* $F\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$). Indiquer dans quelle partie du plan on a $F(x,y) \leq \dfrac{\pi^2}{4}$.
c) On considère le triangle ouvert $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < x < \pi\}$ et le triangle fermé $\overline{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x \leq \pi\}$. Représenter $\overline{T}$ sur le dessin précédent. Étudier les extremums relatifs de F sur T. Montrer que le minimum absolu de F sur $\overline{T}$ est 0 et que le maximum absolu de F dans $\overline{T}$ est $\dfrac{\pi^2}{4}$.