高等数学下册知识点

第八章　空间解析几何与向量代数

（一）向量及其线性运算

1、　向量，向量相等，单位向量，零向量，向量平行、共线、共面；

2、　线性运算：加减法、数乘；

3、　空间直角坐标系：坐标轴、坐标面、卦限，向量的坐标分解式；

4、　利用坐标做向量的运算：设$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，

则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$；

5、　向量的模、方向角、投影：

1）　向量的模：$\left|\vec{r}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

2）　两点间的距离公式：$\left|AB\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3）　方向角：非零向量与三个坐标轴的正向的夹角α, β, γ

4）方向余弦：$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}$，$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}$，$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

5）投影：$\operatorname{Pr} j_{\vec{u}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$，其中$\varphi$为向量$\vec{a}$与$\vec{u}$的夹角。

（二）数量积，向量积

1、数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

1）$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

2）$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

2、 向量积：$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

大小：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，方向：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合右手规则

1）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

2）$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

运算律：反交换律 $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

（三）曲面及其方程

1、 曲面方程的概念：$S: f(x, y, z) = 0$

2、 旋转曲面：

yoz 面上曲线 $C: f(y, z) = 0$，

绕 y 轴旋转一周：$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$

绕 z 轴旋转一周：$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

3、 柱面：

$F(x, y) = 0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 的柱面

（五）平面及其方程

1、 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$，过点(x_0,y_0,z_0)

2、 一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

3、 两平面的夹角：$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow\ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

$\Pi_1//\Pi_2\Leftrightarrow\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

4、 点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1、 一般式方程：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2、 对称式（点向式）方程：$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

方向向量：$\vec{s} = (m, n, p)$，过点(x_0, y_0, z_0)

3、 参数式方程：$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

4、 两直线的夹角：$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$，$\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$，

$$\cos\varphi = \frac{\left|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

5、 直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$L // \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

$$L \perp \Pi \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

1、 距离，邻域，内点，外点，边界点，聚点，开集，闭集，连通集，区域，闭区域，有界集，无界集。

2、 多元函数：$z=f(x,y)$，图形：

3、 极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

4、 连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

5、 偏导数：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

6、 方向导数：

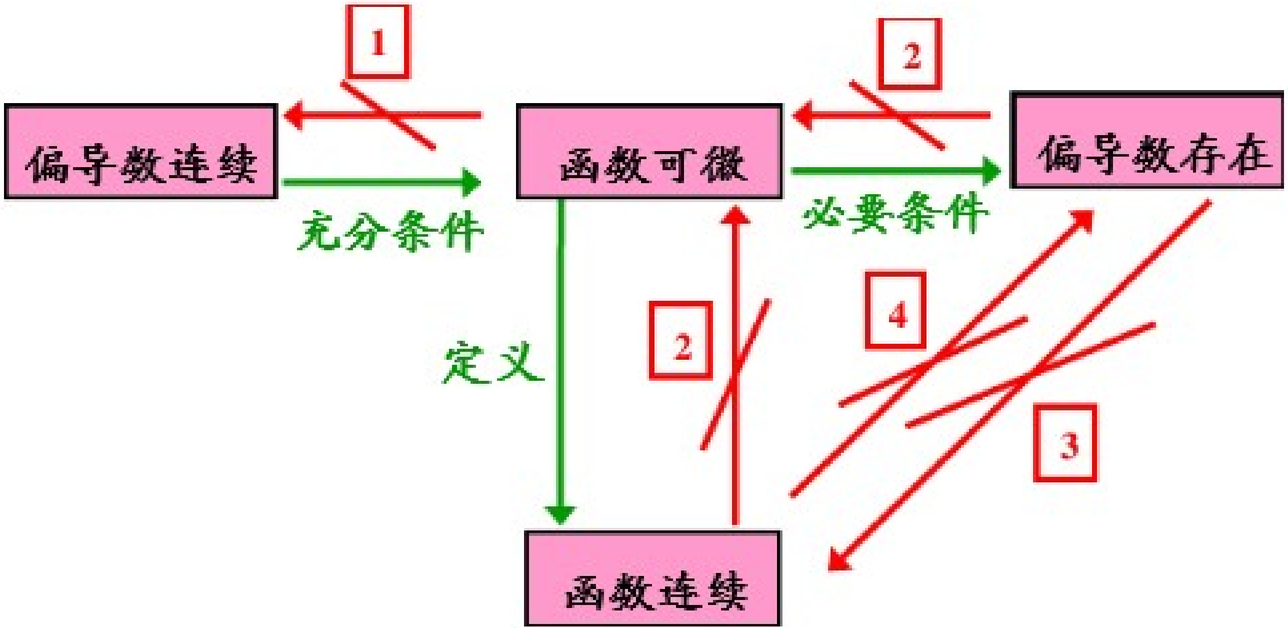
$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ 其中α,β 为 l 的方向角。

7、 梯度：$z=f(x,y)$，则 $grad f\ (x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$。

8、 全微分：设$z=f(x,y)$，则$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

（二）性质

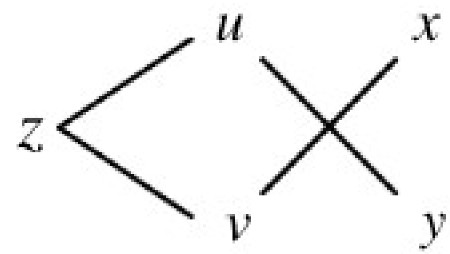
1、 函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：



2、 闭区域上连续函数的性质（有界性定理，最大最小值定理，介值定理）

3、 微分法

1） 定义：



2） 复合函数求导：链式法则

若 $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

3） 隐函数求导：两边求偏导，然后解方程（组）

（三）应用

1、 极值

1） 无条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

解方程组 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0,y_0)，令

$A = f_{xx}(x_0, y_0)$， $B = f_{xy}(x_0, y_0)$， $C = f_{yy}(x_0, y_0)$，

① 若 $AC - B^2 > 0$， $A > 0$， 函数有极小值，

若 $AC - B^2 > 0$， $A < 0$， 函数有极大值；

② 若 $AC - B^2 < 0$， 函数没有极值；

③ 若 $AC - B^2 = 0$， 不定。

2） 条件极值：求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值

令：$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ———Lagrange 函数

解方程组 $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

2、几何应用

1）曲线的切线与法平面

曲线Γ：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，则$\Gamma$上一点$M(x_0, y_0, z_0)$（对应参数为$t_0$）处的

切线方程为：$\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为：$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$

2）曲面的切平面与法线

曲面Σ：$F(x, y, z) = 0$，则Σ上一点$M(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程为：

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程为：$\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{matrix}\right.\right\},$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\\ c\le y\le d\end{matrix}\right.\right\},$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

2） 极坐标

$$D=\left\{(\rho,\theta)\left|\begin{matrix}\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{matrix}\right.\right\}$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho$$

3、 计算：

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续， L 的参数方程为

$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(t:\alpha\to\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且

$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

（三）格林公式

1、格林公式：设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，则有 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

2、G 为一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 上具有连续一阶偏导数，则

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $\Leftrightarrow$ 曲线积分 $\int\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关

$\Leftrightarrow$ 曲线积分 $\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

$\Leftrightarrow$ $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 内为某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分

（六）高斯公式

1、 **高斯公式：设空间闭区域Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成，Σ 的方向取外侧，**

函数P, Q, R 在Ω 上有连续的一阶偏导数， 则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

1）无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

部分和：$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$，

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$

交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$，$u_n \geq 0$

2）级数收敛：若$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，否则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

3）条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散；

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛。

2、 性质:

1） 改变有限项不影响级数的收敛性;

2） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛;

3） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则任意加括号后仍然收敛;

4） 必要条件：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$．（注意：不是充分条件!）

3、 审敛法

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $u_n \ge 0$

1） 定义：$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在;

2） $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$有界;

3） 比较审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，且$u_n \le v_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

4） 比较法的推论：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，若存在正整数m，当$n > m$时，

$u_n \le kv_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若存在正整数m，当$n > m$时，$u_n \ge kv_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

5） 比较法的极限形式：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l < +\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} > 0$或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = +\infty$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

6） 比值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，设$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则当$l < 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；则当$l > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；当$l = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛也可能发散

7） 根值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当$l<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；则当$l>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；当$l=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛也可能发散

8） 极限审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，若$\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n>0$或$\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n=+\infty$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；若存在$p>1$，使得$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot u_n=l$ $(0\le l<+\infty)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

交错级数：

莱布尼茨审敛法：交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n\ge 0$满足：$u_{n+1}\le u_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim_{n\to\infty} u_n=0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛。

任意项级数：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

常见典型级数：几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $\begin{cases} 收敛， & |q| < 1 \\ 发散， & |q| \geq 1 \end{cases}$

p -级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} 收敛， & p > 1 \\ 发散， & \mathrm{p} \leq 1 \end{cases}$

（二）函数项级数

1、 定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，收敛域，收敛半径，和函数；

2、 幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛半径的求法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则收敛半径 $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ 0, & \rho=+\infty \\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$

3、 泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

展开步骤：（直接展开法）

1） 求出 $f^{(n)}(x),\quad n=1,2,3,\cdots$；

2） 求出 $f^{(n)}(x_0),\quad n=0,1,2,\cdots$；

3） 写出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$；

4） 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ 是否成立。

间接展开法:（利用已知函数的展开式）

1） $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

2） $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

3） $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

4） $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$， $x\in(-1,1)$；

5) $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}, \quad x\in(-1,\ 1)$

6) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n+1}x^{n+1}, \quad x\in(-1,\ 1]$

7) $\dfrac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}, \quad x\in(-1,\ 1)$

8) $(1+x)^{m}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^{n}, \quad x\in(-1,\ 1)$