题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
阅卷人										

一、填空。（16×3＝48分）

1、函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为____________。

2、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ __________。

3、函数 $z=\sin e^{xy}$，则 $dz=$ ____________。

4、设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ___________。

5、积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=$ ___________。

6、设质点在空间中的位置函数 $r=f(t)=(t^2+1,4t,t^2-1)$，则质点在时刻 $t=2$ 秒时的速度大小为__________。

7、设L是任意一光滑曲线，若线积分 $\int_L a^x y dx+e^x dy$ 与积分路径无关，则 $a=$ _____。

8、$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$ _____，其中L为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t,(0\le t\le 2\pi)$。

9、曲面 $u=xyz$ 在点（1，1，1）处沿函数增加最快的方向的方向导数为________。

10、曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点（2，1，0）处的法线方程为______________。

11、已知 Ω 为半径为 R 的球体，Σ 取其外侧球面，则 $\oiint_\Sigma xdydz+ydzdx-zdxdy=$ ______。

12、数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$（绝对还是条件）_______收敛。

13、$\dfrac{1}{1+4x^2}$ 的幂级数展式为________________________

14、设a、b、c为单位向量，且满足$a+b+c=0$，则$a.b+b.c+c.a=$ ______ 。

15、设$f(x)$是周期为2π的函数，且它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1,-\pi\le x<0\\2,0\le x<\pi\end{cases}$，则由收敛定理，$f(x)$的傅丽叶级数在$x=k\pi$ $(k\in z)$处收敛于 ______ 。

16、已知直线$L_1:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$，平面$S:x+y-z=0$，则线面之间的位置关系为 ________ 。

二、已知ΔABC三边分别为a、b、c，面积为S，从其内部的动点P向三边作垂线，试问当三条垂线长分别为多少时，它们的乘积最大。（8分）

三、利用重积分计算半球面$\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=2(z\ge 0)$和锥面$\Sigma_2:z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体的体积。（8分）

四、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$的和函数。（8分）

五、已知空间中点$P(-1,2,0)$及平面$S:x+2y-z+1=0$。求（1）过点P且垂直于平面的直线方程；（2）点P在平面上的投影坐标。（8分）

六、已知柱面方程为$x^2+y^2=a^2$，平面$x+y+z=a$。求两曲面交线所围平面区域的面积。（8分）

七、用格林公式计算：$\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中$L$为三顶点分别为$(0,0)$，$(3,0)$，和$(3,2)$的三角形正向边界。（4分）

八、计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2\le 1)$。（8分）

九、附加题：设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy\ge 1$。（提示：将之转化为二重积分进行计算）（8分）

《高等数学》(A)（工科本科）参考答案及评分标准

一 填空题（每小题3分，共48分）

1、 $\{(x,y)|0<x^2+y^2<1 且 y\le 4x^2\}$；2 、0 ；3、 $e^{xy}\cos e^{xy}(ydx+xdy)$；

4、 $2f'+4y^2f''$；5、 $\frac{1}{2}(e-1)$；6、 $4\sqrt{3}$ ；7、e；8、 $2\pi ae^a$；9、 $\sqrt{3}$；

10、 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$；11、 $\frac{4}{3}\pi R^3$；12、条件；13、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^{2n}(|x|<\frac{1}{2})$；

14、 $-\frac{3}{2}$；15、 $\frac{3}{2}$；16、平行

二 （本题8分）

解：设三垂线长度分别为 x,y,z，其乘积为 P，则由已知得

目标函数： $P=xyz$ 1分

条件: $ax+by+cz=2S$, ...2分

作拉格朗日函数:

$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(ax+by+cz-2S)$ 3分

并令 $L_x=L_y=L_Z=L_\lambda=0$ 得

$$\begin{cases} yz+\lambda a=0 \\ xz+\lambda b=0 \\ xy+\lambda c=0 \\ ax+by+cz=2S \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} x=\dfrac{2S}{3a} \\ y=\dfrac{2S}{3b} \\ z=\dfrac{2S}{3c} \end{cases}$$

..................................7分

由已知,该问题确实存在最大值且在内部取得.

所以,当三垂线长度分别为 $\frac{2S}{3a},\frac{2S}{3b},\frac{2S}{3c}$,它们的乘积最大...8分

三 、 (本题8分)

解：设两曲面所围立体为 Ω，则

$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$ 2分

$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=2(z\ge 0);\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 易得投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$.......3分

所以 $V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}dz$ 5分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)dp$ 6分

$=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)$ 8分

四、（本体满分8分）

解:令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$. 易求得其收敛域为

$I=\{x||x|<1\}$............................2分

(1) 当 $x=0$ 时,显然有 $S(0)=0$

;...3分

(2) 当 $x\neq 0$ 时,有 $\frac{s(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 也

收敛..4分

$\Rightarrow (\frac{s(x)}{x})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n-1}}{2n-1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$

.... 6分

所以

$\frac{s(x)}{x}=\int_0^x(\frac{s(x)}{x})'dx=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(\int_0^x\frac{dx}{1+x}+\int_0^x\frac{dx}{1-x})=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

......7分

$s(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,而此时也有 $S(0)=0$.

所以原级数和函数为 $s(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$

....8分

五 (本题满分8分)

解: (1)平面法向量为 $n=(1,2,-1)$,选作所求直线的方向向量

所以直线方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$

;..4分

令 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}=t$ 得直线参数方程为

$x=t-1, y=2t+2, z=-t$,代入平面方程得:

$(t-1)+2(2t+2)-(-t)+1=0\Rightarrow t=-\frac{2}{3}$,再回代入直线参数方程得 $x=-\frac{5}{3}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{2}{3}$.所以投影为($-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$)..8分

六(本题满分8分)

解:设交线所围区域为 Σ ,则由已知知 Σ 方程为:

$z=a-x-y$.......................2分

因为交线也在柱面上,所以易知 Σ 在 xoy 面的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leq a^2$..........3分

而 $z_x=z_y=-1$

....
......5分

所以其面积为 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{3}\pi a^2$

....8分

七(本题满分4分)

解： 记L所围的区域为D。令P＝2x－y, Q=5y+3x-6.........................2分

则由格林公式

原式= $\iint\limits_{D_{XY}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 4\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 12$

...........................4分

八(本题满分8分)

解: 由已知:曲面方程$\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 \le 1)$,其投影 $D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$..........1分

又 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}$

....

.............3分

所以 原式=

$\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) \cdot \sqrt{2} dxdy = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = \sqrt{2}\pi$

......8分

九(附加题)

证:取区域D=[0,1]$\times$[0,1]

因为 $e^{f(x) - f(y)} \ge 1 + f(x) + f(y)$

....3分

所以左边=$\iint\limits_{D} e^{f(x) - f(y)} dxdy \ge \iint\limits_{D} [1 + f(x) + f(y)] dxdy$

..............................5分

$= \iint\limits_{D} (1 + f(x)) dxdy - \iint\limits_{D} f(y) dxdy$

....6分

$= \int_0^1 (1 + f(x)) dx - \int_0^1 f(y) dy = 0$

....8分