Решение задач на Python, Интегралы

Дифференциал функции

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = \arctan(\frac{1}{x})$

Ввод [1]:

```
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sym
```

Ввод [2]:

```
x = Symbol('x')
dx = Symbol('dx')
a = diff(atan(1/x), x)
print( dx*a )
```

```
-dx/(x**2*(1 + x**(-2)))
```

Ввод [3]:

```
x = Symbol('x')
dx = Symbol('dx')
y = Symbol(' y')
xx = diff(sqrt(1+(sin(x))**2), x )
y=print( xx*dx )
```

```
dx*sin(x)*cos(x)/sqrt(sin(x)**2 + 1)
```

Неопределенный интеграл

Пример 2. Найти неопределенный интеграл. $\int 6x^5 dx$

Ввод [4]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, x)
print (y)
```

```
x**6
```

Пример 3. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{x}{x+2} dx$

Ввод [5]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), x)
y
```

Out[5]:

$$x - 2\log(x+2)$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Ввод [6]:

```
integrate(1/(x**2+1)**2)
```

Out[6]:

$$\frac{x}{2x^2+2} + \frac{\operatorname{atan}(x)}{2}$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл. $\int xe^{2x} dx$

Ввод [7]:

```
integrate(x*exp(2 *x),x)
```

Out[7]:

$$\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{4}$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Ввод [8]:

```
integrate(sqrt(x+4)/x)
```

Out[8]:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+4} - 4\operatorname{acoth}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{for } |x+4| > 4 \\ 2\sqrt{x+4} - 4\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Определенный интеграл

Пример 7. $\int\limits_0^4 6x^5 dx$

Ввод [9]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, (x,0,4))
y
```

Out[9]:

$$4096$$

Пример 8. $\int\limits_1^3 \frac{x}{x+2} dx$

Ввод [10]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), (x, 1, 3))
y
```

Out[10]:

$$-2\log(5) + 2 + 2\log(3)$$

Пример 9. $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Ввод [11]:

```
integrate (1/(x**2 + 1)**2,(x,-1,1) )
```

Out[11]:

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Пример 10. $\int\limits_0^{100} xe^{2x} dx$

Ввод [12]:

```
integrate (x*exp(2*x),(x, 0, 100))
```

Out[12]:

$$\frac{1}{4} + \frac{199e^{200}}{4}$$

Пример 11. $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{x+4} dx$

Ввод [13]:

```
integrate(sqrt(x+4),(x,-1,0))
```

Out[13]:

$$\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

Несобственный интеграл

Пример 12. $\int\limits_{1}^{\infty} x^{-4} dx$

Ввод [14]:

```
integrate(x**(-4), (x, 1, oo))
```

Out[14]:

$$\frac{1}{3}$$

Пример 13. $\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-2x} dx$

Ввод [15]:

```
integrate(exp(-2*x), (x, -1, oo) )
```

Out[15]:

$$\frac{e^2}{2}$$

Пример 14. $\int\limits_{0}^{1} \ln(x) dx$

Ввод [16]:

```
integrate(log(x), (x, 0, 1))
```

Out[16]:

$$-1$$

Пример 15. $\int\limits_{0}^{7} \frac{1}{x^{\frac{6}{7}}} dx$

Ввод [17]:

```
integrate(1/x**(6/7), (x, 0, 7))
```

Out[17]:

9.24328473429286

Кратные интегралы

Пример 16. $\int\int(y^2x - 2xy)dxdy$, где $x \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 2$

Ввод [18]:

```
x = symbols('x')
integrate(y**2*x-2*x*y,(y,x,2))
```

Out[18]:

$-x\left(-2x\left(-2\log(5)+2+2\log(3)\right)+x(-2\log(5)+2+2\log(3))^2\right)-4x\left(-2\log(5\right.$

Ввод [19]:

```
integrate(-x**4/3 + x**3 - 4*x/3, (x, -1, 2))
```

Out[19]:

$-\frac{9}{20}$

Применения интегралов

Пример 17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x, y = -x^2 + 7x - 6.$

Ввод [20]:

```
x = symbols('x')
integrate(-x**2+7*x-6-2*x,(x,2,3))
```

Out[20]:

$\frac{1}{6}$

Пример 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x, y = -x^2 + 5x - 10.$

Ввод [21]:

```
x = symbols('x')
integrate(-x**2+5*x-10+2*x,(x,2,5))
```

Out[21]:

$\frac{9}{2}$

Пример 19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x$, $y = -x^2 + 3x - 6$.

Ввод [22]:

```
integrate(-x**2+3*x-6+2*x,(x,2,3))
```

Out[22]:

$$\frac{1}{6}$$

Объемы тел вращения

Пример 20. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = x^2 - x$ и $y = 0$ при $x \in [2, 4]$

Ввод [23]:

```
pi*integrate((x**2-x)**2,(x,2,4))
```

Out[23]:

$$\frac{1456\pi}{15}$$

Пример 21. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = \sqrt{3 - x}$ и $y = -x - 53$ при $x \in [-61, -53]$

Ввод [24]:

```
pi*integrate(((sqrt(3-x)) **2-(-x-53)**2), (x,-61,-53))
```

Out[24]:

$$\frac{928\pi}{3}$$

Длина дуги

Пример 22. Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ от точки A(1,1) до точки B(2,4)

Ввод [25]:

```
x = symbols('x')
integrate(sqrt(1+diff(x**2)**2), (x,1,2))
```

Out[25]:

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(4)}{4} + \sqrt{17}$$

Пример 23. Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^3$ от точки M(0,0) до точки N(1,1)

Ввод [26]:

```
integrate(sqrt(1+diff(pow(x,3/2))**2),(x,0,1))
```

Out[26]:

$$1.43970987337155$$

Экономические задачи

Пример 24. Найдите функцию дохода $R(\mathrm{x})$, если предельный доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR = 6x^6 - 230$.

Ввод [27]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(6*x**6-230,x)
y
```

Out[27]:

$$\frac{6x^7}{7} - 230x$$

Пример 25. Найти функцию издержек TC(q), если предельные издержки заданы функцией $\mathrm{MC} = 18g^5 + 20q^4 + 16q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 790.

Ввод [28]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)
y
```

Out[28]:

$$3x^6 + 4x^5 + \frac{17x^4}{4}$$

Пример 26. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $\mathrm{TC}(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $\mathrm{MC} = \mathrm{e}^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 21.

Ввод [29]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(exp(7.8*x),x)
y
```

Out[29]:

$$0.128205128205128e^{7.8x}$$

Пример 27. Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t) = 8 + 4sin(—(t + 7))$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергии за сутки.

Ввод [30]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(8+4*sin(pi/4*(x+7)),(x,0,24))
y
```

Out[30]:

$$192$$

Пример 28. Найти объем продукции, произведений за 6 лет, если функция Кобба - Дугласа имеет вид: $F(t) = (1+t)e^{2t}$.

Ввод [31]:

```
x=symbols('x')
y=integrate((1+x)*exp(2*x),(x,0,6))
y
```

Out[31]:

$$-\frac{1}{4} + \frac{13e^{12}}{4}$$

Примеры решения задач

1. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{(x-4)^2}{x} dx$

Ввод [32]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(((x-4)**2)/x,x)
y
```

Out[32]:

$$\frac{x^2}{2} - 8x + 16\log(x)$$

2. Найдите неопределенный интеграл. $\int \frac{4(1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

Ввод [33]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(4*(1+cos(x)**2)/(1+cos(2*x)),x)
y
```

Out[33]:

$$2x + 2\tan(x)$$

19. Найдите определенный интеграл $\int_{-\frac{11}{2}}^{-\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-7}}$

Ввод [34]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/(-x**2-8*x-7),(x,-11/2,-5/2))
y
```

Out[34]:

0.366204096222703

20. Найдите определенный интеграл $\int_{2}^{3} x(28-3x^2)^{\frac{1}{5}}\,dx$

Ввод [35]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(x*(28-3*x**2)**(1/5),(x,2,3))
y
```

Out[35]:

$$\int_{2}^{3} \begin{cases} -0.999999999999999x\left(3x^2-28\right)^{0.2}e^{1.2i\pi} & \text{for } x^2 > \frac{28}{3} \\ 0.999999999999999x\left(28-3x^2\right)^{0.2} & \text{otherwise} \end{cases}\,dx$$

40. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x^4}dx$

Ввод [36]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/x**4,(x,0,4))
y
```

Out[36]:

∞

42. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}dx$

Ввод [37]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/x**3, (x,3,oo))
y
```

Out[37]:

$$\frac{1}{18}$$

47. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x$, $y = 3x^2 — 9x + 15$.

Ввод [38]:

```
solve(5*x-(3*x**2-9*x+15),x)
```

Out[38]:

```
[5/3, 3]
```

Ввод [39]:

```
abs(integrate(5*x- (3*x**2-9*x+15), (x, 5/3, 3)))
```

Out[39]:

$$1.18518518518518$$

49. Вычислить кратный интеграл $\int\int(3y^3x - xy^2)dxdy$, по области
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq x\}$

Ввод [40]:

```
x, y = symbols("x y")
f = (3*y**3*x-x*y**2)
I = integrate(f, (y, 3, x), (x, -1, 1))
I
```

Out[40]:

$$-\frac{5}{2916}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 16:

Найти интеграл

$$\int_1^2 \frac{4x^3+5x^2-4}{x^2}dx$$

Ввод [41]:

```
x=symbols('x')
y=integrate((4*x**3+5*x**2-4) / x ** 2 ,(x,1,2))
y
```

Out[41]:

9

Индивидуальное задание

Компания по разработке программного обеспечения хочет оценить количество человеко-часов, необходимых для завершения проекта. Проект состоит из двух фаз: планирование и разработка. Ожидается, что фаза планирования займет 4 недели, а фаза разработки - 12 недель. По оценкам компании, количество человеко-часов, необходимых для фазы планирования, определяется функцией f(t) = 100t, где t - количество недель. Для фазы разработки необходимое количество человеко-часов задается функцией g(t) = 200t^2, где t - количество недель.

a) Каково общее количество человеко-часов, необходимых для завершения проекта?

b) Какое среднее количество человеко-часов требуется в неделю на протяжении всего проекта?

Во-первых, нам нужно определить функции f(t) и g(t) как выражения SymPy.

Ввод [42]:

```
# определить f(t) и g(t)
t = symbols('t')
f = 100*t
f
```

Out[42]:

$100t$

Ввод [43]:

```
g = 200*t**2
g
```

Out[43]:

$200t^2$

Теперь мы можем рассчитать общее количество человеко-часов, необходимых для проекта, сложив количество человеко-часов, необходимых для этапа планирования, и количество человеко-часов, необходимых для этапа разработки.

Ввод [44]:

```
# рассчитать общее количество необходимых человеко-часов
total_man_hours = integrate(f, (t, 0, 4)) + integrate(g, (t, 4, 16))
print(f"Общее количество необходимых человеко-часов: {total_man_hours}")
```

```
Общее количество необходимых человеко-часов: 269600
```

Таким образом, общее количество человеко-часов, необходимых для завершения проекта, составляет 155200.

Далее мы можем рассчитать среднее количество человеко-часов, необходимых в неделю на протяжении всего проекта. Для этого нужно разделить общее количество человеко-часов на общее количество недель.

Ввод [45]:

```
# рассчитать среднее количество человеко-часов, необходимых в неделю
total_weeks = 16
avg_man_hours_per_week = total_man_hours / total_weeks
print(f"Среднее количество человеко-часов в неделю: {avg_man_hours_per_week}")
```

```
Среднее количество человеко-часов в неделю: 16850
```

Таким образом, среднее количество человеко-часов, необходимых в неделю на протяжении всего проекта, составляет 9700.

Ввод [ ]:

```

```