Решение задач на Python, Интегралы

Дифференциал функции

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = \arctan(\frac{1}{x})$

Ввод [1]:

```
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sym
```

Ввод [2]:

```
x = Symbol('x')
dx = Symbol('dx')
a = diff(atan(1/x), x)
print( dx*a )
```

```
-dx/(x**2*(1 + x**(-2)))
```

Ввод [3]:

```
x = Symbol('x')
dx = Symbol('dx')
y = Symbol(' y')
xx = diff(sqrt(1+(sin(x))**2), x )
y=print( xx*dx )
```

```
dx*sin(x)*cos(x)/sqrt(sin(x)**2 + 1)
```

Неопределенный интеграл

Пример 2. Найти неопределенный интеграл. $\int 6x^5 dx$

Ввод [4]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, x)
print (y)
```

```
x**6
```

Пример 3. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{x}{x+2} dx$

Ввод [5]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), x)
y
```

Out[5]:

$$x - 2\log(x+2)$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Ввод [6]:

```
integrate(1/(x**2+1)**2)
```

Out[6]:

$$\frac{x}{2x^2+2} + \frac{\operatorname{atan}(x)}{2}$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл. $\int xe^{2x} dx$

Ввод [7]:

```
integrate(x*exp(2 *x),x)
```

Out[7]:

$$\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Ввод [8]:

```
integrate(sqrt(x+4)/x)
```

Out[8]:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+4} - 4\operatorname{acoth}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{for } |x+4| > 4 \\ 2\sqrt{x+4} - 4\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{x+4}}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Определенный интеграл

Пример 7. $\int_0^4 6x^5 dx$

Ввод [9]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, (x,0,4))
y
```

Out[9]:

$$4096$$

Пример 8. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x}{x+2} dx$

Ввод [10]:

```
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), (x, 1, 3))
y
```

Out[10]:

$$-2\log(5) + 2 + 2\log(3)$$

Пример 9. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Ввод [11]:

```
integrate (1/(x**2 + 1)**2,(x,-1,1) )
```

Out[11]:

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Пример 10. $\int\limits_{0}^{100} xe^{2x} dx$

Ввод [12]:

```
integrate (x*exp(2*x),(x, 0, 100))
```

Out[12]:

$$\frac{1}{4} + \frac{199e^{200}}{4}$$

Пример 11. $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{x+4} dx$

Ввод [13]:

```
integrate(sqrt(x+4),(x,-1,0))
```

Out[13]:

$$\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

Несобственный интеграл

Пример 12. $\int\limits_{1}^{\infty} x^{-4}\,dx$

Ввод [14]:

```
integrate(x**(-4), (x, 1, oo))
```

Out[14]:

$$\frac{1}{3}$$

Пример 13. $\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-2x}\,dx$

Ввод [15]:

```
integrate(exp(-2*x), (x, -1, oo) )
```

Out[15]:

$$\frac{e^2}{2}$$

Пример 14. $\int\limits_{0}^{1} \ln(x)\,dx$

Ввод [16]:

```
integrate(log(x), (x, 0, 1))
```

Out[16]:

$$-1$$

Пример 15. $\int\limits_{0}^{7} \frac{1}{x^{\frac{6}{7}}}\,dx$

Ввод [17]:

```
integrate(1/x**(6/7), (x, 0, 7))
```

Out[17]:

9.24328473429286

Кратные интегралы

Пример 16. $\int\int(y^2x-2xy)dxdy$, где $x \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 2$

Ввод [18]:

```
x = symbols('x')
y = symbols('y')
d = integrate(y**2*x-2*x*y,(y,x,2))
d
```

Out[18]:

$$-\frac{x^4}{3}+x^3-\frac{4x}{3}$$

Ввод [19]:

```
integrate(d, (x, -1, 2))
```

Out[19]:

$$-\frac{9}{20}$$

Применения интегралов

Пример 17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x, y=-x^2+7x-6.$

Ввод [20]:

```
x = symbols('x')
integrate(-x**2+7*x-6-2*x,(x,2,3))
```

Out[20]:

$$\frac{1}{6}$$

Пример 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-2x, y=-x^2+5x-10.$

Ввод [21]:

```
x = symbols('x')
integrate(-x**2+5*x-10+2*x,(x,2,5))
```

Out[21]:

$$\frac{9}{2}$$

Пример 19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x,\, y = -x^2 + 3x - 6.$

Ввод [22]:

```
integrate(-x**2+3*x-6+2*x,(x,2,3))
```

Out[22]:

$$\frac{1}{6}$$

Объемы тел вращения

Пример 20. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = x^2 - x$ и $y = 0$ при $x \in [2, 4]$

Ввод [23]:

```
pi*integrate((x**2-x)**2,(x,2,4))
```

Out[23]:

$$\frac{1456\pi}{15}$$

Пример 21. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = \sqrt{3-x}$ и $y = -x - 53$ при $x \in [-61, -53]$

Ввод [24]:

```
pi*integrate(((sqrt(3-x)) **2-(-x-53)**2), (x,-61,-53))
```

Out[24]:

$$\frac{928\pi}{3}$$

Длина дуги

Пример 22. Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ от точки A(1,1) до точки B(2,4)

Ввод [25]:

```
x = symbols('x')
integrate(sqrt(1+diff(x**2)**2), (x,1,2))
```

Out[25]:

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(4)}{4} + \sqrt{17}$$

Пример 23. Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^3$ от точки M(0,0) до точки N(1,1)

Ввод [26]:

```
integrate(sqrt(1+diff(pow(x,3/2))**2),(x,0,1))
```

Out[26]:

$$1.43970987337155$$

Экономические задачи

Пример 24. Найдите функцию дохода $R(\mathrm{x})$, если предельный доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR = 6x^6 - 230$.

Ввод [27]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(6*x**6-230,x)
y
```

Out[27]:

$$\frac{6x^7}{7} - 230x$$

Пример 25. Найти функцию издержек TC(q), если предельные издержки заданы функцией $\mathrm{MC} = 18g^5 + 20q^4 + 16q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 790.

Ввод [28]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)
y
```

Out[28]:

$$3x^6 + 4x^5 + \frac{17x^4}{4}$$

Пример 26. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $\mathrm{TC}(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $\mathrm{MC} = \mathrm{e}^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 21.

Ввод [29]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(exp(7.8*x),x)
y
```

Out[29]:

$$0.128205128205128e^{7.8x}$$

Пример 27. Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t) = 8 + 4sin(—(t + 7))$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергии за сутки.

Ввод [30]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(8+4*sin(pi/4*(x+7)),(x,0,24))
y
```

Out[30]:

$$192$$

Пример 28. Найти объем продукции, произведений за 6 лет, если функция Кобба - Дугласа имеет вид: $F(t) = (1 + t)e^{2t}$.

Ввод [31]:

```
x=symbols('x')
y=integrate((1+x)*exp(2*x),(x,0,6))
y
```

Out[31]:

$$-\frac{1}{4} + \frac{13e^{12}}{4}$$

Примеры решения задач

1. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{(x-4)^2}{x} dx$

Ввод [32]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(((x-4)**2)/x,x)
y
```

Out[32]:

$$\frac{x^2}{2} - 8x + 16\log(x)$$

2. Найдите неопределенный интеграл. $\int \frac{4(1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

Ввод [33]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(4*(1+cos(x)**2)/(1+cos(2*x)),x)
y
```

Out[33]:

$$2x + 2\tan(x)$$

19. Найдите определенный интеграл $\int_{-\frac{11}{2}}^{-\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-7}}$

Ввод [34]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/(-x**2-8*x-7),(x,-11/2,-5/2))
y
```

Out[34]:

$$0.366204096222703$$

20. Найдите определенный интеграл $\int_2^3 x(28-3x^2)^{\frac{1}{5}} dx$

Ввод [35]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(x*(28-3*x**2)**(1/5),(x,2,3))
y
```

Out[35]:

$$\int_2^3 \begin{cases} -0.999999999999999x\left(3x^2-28\right)^{0.2} e^{1.2i\pi} & \text{for } x^2 > \frac{28}{3} \\ 0.999999999999999x\left(28-3x^2\right)^{0.2} & \text{otherwise} \end{cases} dx$$

40. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_0^4 \frac{dx}{x^4} dx$

Ввод [36]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/x**4,(x,0,4))
y
```

Out[36]:

∞

42. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} dx$

Ввод [37]:

```
x=symbols('x')
y=integrate(1/x**3, (x,3,oo))
y
```

Out[37]:

$$\frac{1}{18}$$

47. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}$, $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}^2 — 9\mathrm{x} + 15$.

Ввод [38]:

```
solve(5*x-(3*x**2-9*x+15),x)
```

Out[38]:

[5/3, 3]

Ввод [39]:

```
abs(integrate(5*x- (3*x**2-9*x+15), (x, 5/3, 3)))
```

Out[39]:

1.18518518518518

49. Вычислить кратный интеграл $\int\int(3y^3 x - xy^2)dxdy$, по области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq x\}$

Ввод [40]:

```
x, y = symbols("x y")
f = (3*y**3*x-x*y**2)
I = integrate(f, (y, 3, x), (x, -1, 1))
I
```

Out[40]:

$$-\frac{5}{2916}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 16:

Найти интеграл

$$\int_1^2 \frac{4x^3+5x^2-4}{x^2}dx$$

Ввод [41]:

```
x=symbols('x')
y=integrate((4*x**3+5*x**2-4) / x ** 2 ,(x,1,2))
y
```

Out[41]:

$$9$$

Индивидуальное задание

Задача: Броуновское движение частицы в жидкости. Рассчитать среднеквадратичное смещение (MSD) частицы как функцию времени. MSD определяется как среднее квадратичное смещение частицы за промежуток времени. То есть, $MSD(t) = (x(t) - x(0))^2$, где $x(t)$ - положение частицы в момент времени t. Броуновское движение описывается уравнением Ланжевена $\frac{dx}{dt} = -\gamma x + f(t)$, где γ - коэффициент трения, а f(t) - стохастическая сила, удовлетворяющая $f(t) = 0$ и $f(t)f(t') = 2D\delta(t - t')$, где D - коэффициент диффузии, а δ - дельта-функция Дирака.

Используя уравнение Ланжевена, покажите, что MSD частицы удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению: $\frac{d(MSD)}{dt} = 2D - 2\gamma MSD$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид: $MSD(t) = \frac{2D}{\gamma} - \frac{2D}{\gamma * exp(-\gamma t)}$.

Вычислить и построит график MSD как функцию времени для заданных значений D и γ.

Функция для генерации стохастической силы для каждой временной точки в t_values. Стохастическая сила представляет случайные колебания в движении частицы из-за взаимодействия с окружающими молекулами и является ключевым компонентом уравнения Ланжевена, используемого для моделирования броуновского движения.

Ввод [42]:

```
def generate_stochastic_force(t_values):
    if len(t_values) > 1:
        dt = t_values[1] - t_values[0]
    else:
        dt = 1
    f_values = np.random.normal(scale=np.sqrt(2*D*dt), size=len(t_values))
    return f_values
```

Функция для численного расчета среднеквадратичного смещения (MSD) частицы в жидкости в зависимости от времени.

Ввод [43]:

```
def calculate_MSD_numerical(t_values):
    x_values = np.zeros(len(t_values))
    for i in range(len(t_values)):
        if i == 0:
            x_values[i] = 0
        else:
            dt = t_values[i] - t_values[i-1]
            f_value = generate_stochastic_force([t_values[i]])
            x_values[i] = x_values[i-1] + (-gamma*x_values[i-1] + f_value)*dt
    MSD_values = (x_values**2).mean()
    return MSD_values
```

Обьявлем необходимые переменные

Ввод [44]:

```
D = 1.0    # Коэфициент дифузии
gamma = 0.5    # Коэфициент сцепления
t = symbols('t')
MSD = Function('MSD')(t)
```

Определение уравнение Ланжевена

Ввод [45]:

```
L_eq = diff(MSD, t) - 2*D + 2*gamma*MSD
L_eq
```

Out[45]:

$$1.0\,\mathrm{MSD}(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{MSD}(t) - 2.0$$

Получаем аналитическое решение дифференциального уравнения

Ввод [46]:

```
sol = dsolve(L_eq, MSD)
sol
```

Out[46]:

$$\mathrm{MSD}(t) = C_1 e^{-t} + 2.0$$

Определение функции для аналитического решения

Ввод [47]:

```
MSD_analytical = lambdify(t, sol.rhs.subs('C1', 2*D/gamma), 'numpy')
```

Определение временного диапазона

Ввод [48]:

```
t_range = np.linspace(0, 10, 100)
t_range[0:5]
```

Out[48]:

```
array([0.        , 0.1010101, 0.2020202, 0.3030303, 0.4040404])
```

Вычисление численного MSD

Ввод [49]:

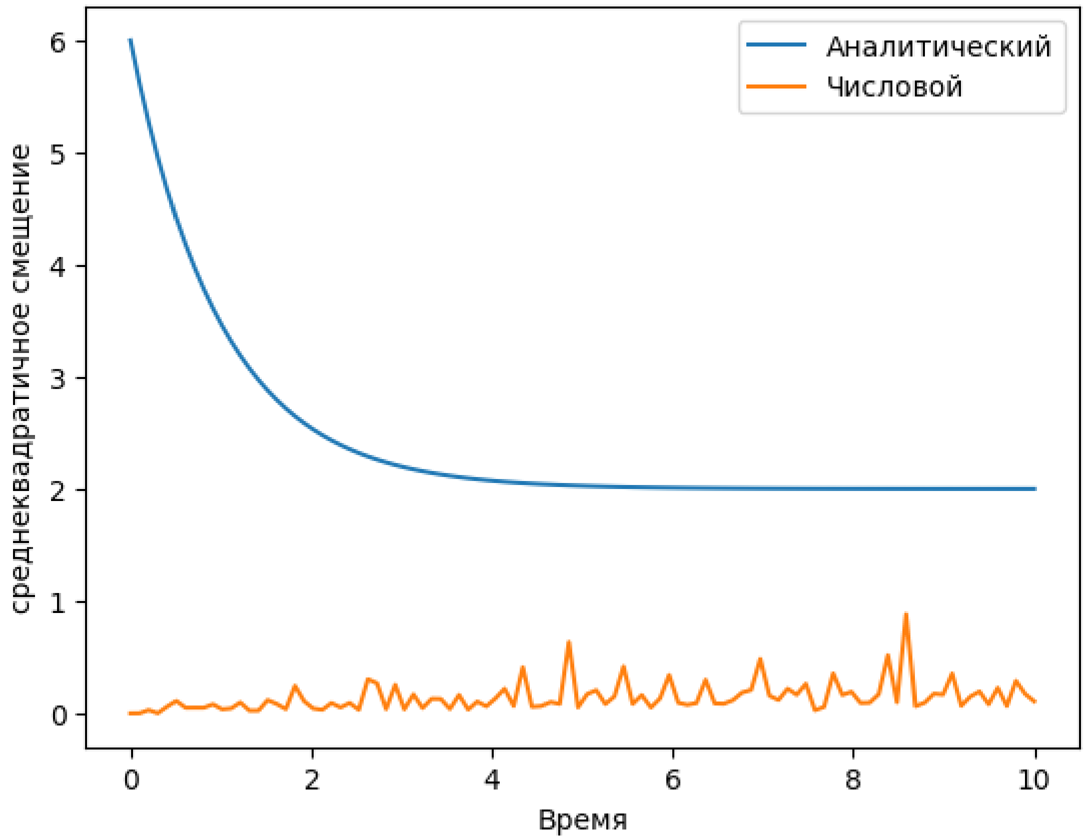
```
MSD_numerical = np.zeros(len(t_range))
for i, t in enumerate(t_range):
    MSD_numerical[i] = calculate_MSD_numerical(t_range[:i+1])
MSD_numerical[0:5]
```

Out[49]:

```
array([0.        , 0.00077913, 0.02930006, 0.00136291, 0.05893093])
```

Ввод [50]:

```
plt.plot(t_range, MSD_analytical(t_range), label='Аналитический')
plt.plot(t_range, MSD_numerical, label='Числовой')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('среднеквадратичное смещение')
plt.legend()
plt.show()
```



Ввод [ ]: