

Решение задач на Python, Предел, непрерывность, ряды

Предел, непрерывность

Для вычисления пределов используется функция `limit()` библиотеки `sympy`. Синтаксис: `sympy.limit` (функция, предел которой вычисляется, переменная, предельное значение переменной, правосторонний, левосторонний или обычный предел).

`sympy.limit(e, z, z0, dir = '+')` Параметры: вычисляется предел функции `e` от переменной `z` при стремлении к числу `z0`, `z0` может быть принимать бесконечные значения, `oo` и `-oo`; если `dir = "+-"` или эта позиция отсутствует, вычисляется обычный двусторонний предел, если `dir = "+"` - правосторонний, если `dir = "-"` - левосторонний пределы. Отметим, что символ бесконечности в языке Python - это две буквы `o` (`oo`).

Пример 1:

Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x}{3x^2}$

```
In [1]: from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((6*x**2+3*x)/(3*x**2), x, oo)
```

Out[1]: 2

Пример 2:

Пример 2. Вычислить пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

```
In [2]: limit(sin(x)/x, x, 0)
```

Out[2]: 1

```
In [3]: limit((1+x)**(1/x), x, 0)
```

Out[3]: e

```
In [4]: limit((1+1/x)**x, x, oo)
```

Out[4]: e

Односторонние пределы

Найдем левосторонний предел функции $f(x) = \frac{1}{x}$

Заметим, что вместо $dir = '—'$ можно поставить просто $'—'$

```
In [5]: limit(1/x,x,0,'—')
```

Out[5]: $-\infty$

Пример 3:

Найти левосторонний и правосторонний пределы функции $\frac{2^x-1}{x^2-3x}$, при $x \rightarrow 3$.

```
In [6]: limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'+')
```

Out[6]: ∞

```
In [7]: limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'—')
```

Out[7]: $-\infty$

Пример 4:

```
In [8]: x=Symbol("x")
limit((5**x-5*7**x)/(4*5**x-3*7**x),x,oo)
```

Out[8]: $\frac{5}{3}$

```
In [9]: x=Symbol("x")
limit((7*8**x+2*9**x)/(6*8**x-6*9**x),x,-oo)
```

Out[9]: $\frac{7}{6}$

```
In [10]: limit(sqrt(x*(x+3))-sqrt(x**2+9), x, -oo)
```

Out[10]: $-\frac{3}{2}$

Пример 5:

Найти точки разрыва функции и определить их типы $f(x) = \frac{|x-2|(x-7)}{x^3-9x^2+14x}$.

```
In [11]: x=Symbol("x")
```

```
print(solve(x**3-9*x**2+14*x))
```

[0, 2, 7]

```
In [12]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 0, '-')
```

Out[12]: ∞

```
In [13]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 0, '+')
```

Out[13]: $-\infty$

```
In [14]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 2, '-')
```

Out[14]: $-\frac{1}{2}$

```
In [15]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 2, '+')
```

Out[15]: $\frac{1}{2}$

```
In [16]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 7, '-')
```

Out[16]: $\frac{1}{7}$

```
In [17]: limit(abs(x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x),x, 7, '+')
```

Out[17]: $\frac{1}{7}$

0 — точка разрыва II рода, 7 — I рода, устранимый разрыв, 2 — I рода, неустранимый разрыв.

Пример 6:

Найти асимптоты графика функции $y = \frac{1+5x}{3+x}$.

Сначала найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$.

```
In [18]: k=limit((1 + 5*x)/(3+x)/x,x,oo)
print(k)
```

0

```
In [19]: b=limit((1+5*x)/(3+x)-k*x,x,oo)
print(b)
```

5

Затем вертикальные.

```
In [20]: solve(3+x)
```

```
Out[20]: [-3]
```

```
In [21]: limit((1+5*x)/(3+x),x,-3, '-')
```

```
Out[21]: ∞
```

```
In [22]: limit((1+5*x)/(3+x),x,-3, '+')
```

```
Out[22]: -∞
```

$y = 5$ — горизонтальная асимптота, $x = -3$ — вертикальная асимптота.

Ряды

Пример 7:

Найдем радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

```
In [23]: import math as m
x=symbols('x')
limit(1/factorial(x)/(1/factorial(x+1)),x,oo)
```

```
Out[23]: ∞
```

Пример 8:

Найдем радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

```
In [24]: x=Symbol('x')
limit(x**x/factorial(x)/((x+1)**(x+1)/factorial(x+1)),x,oo)
```

```
Out[24]: e-1
```

Пример 9:

Разложим в ряд Мак Лорена функции

$$f(x) = \sin x, f(x) = \cos(x), f(x) = e^x, f(x) = \arcsin(x)$$

```
In [25]: x = symbols('x')
func = sin(x)
```

```
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

$x - x^{**3}/6 + x^{**5}/120 - x^{**7}/5040 + x^{**9}/362880 + O(x^{**10})$

```
In [26]: x = symbols('x')
func = cos(x)
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

$1 - x^{**2}/2 + x^{**4}/24 - x^{**6}/720 + x^{**8}/40320 + O(x^{**10})$

```
In [27]: x = symbols('x')
func = exp(x)
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

$1 + x + x^{**2}/2 + x^{**3}/6 + x^{**4}/24 + x^{**5}/120 + x^{**6}/720 + x^{**7}/5040 + x^{**8}/40320 + x^{**9}/362880 + O(x^{**10})$

```
In [28]: func=asin(x)
x0=0
func.series(x,x0,10)
```

Out[28]: $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + O(x^{10})$

Примеры решения задач

Пример 1:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+1}{7n^2-3n+9}$$

```
In [29]: n = Symbol('n')
limit((6 * n ** 2 + 1)/(7 * n ** 2 - 3 * n + 9),n,oo)
```

Out[29]: $\frac{6}{7}$

Пример 2:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3n^3+4n^2-8n-6}{4n^2+2n} \right)$$

```
In [30]: n = Symbol('n')
limit((-3*n**3+4*n**2-8*n-6)/(4*n**2+2*n),n,oo)
```

Out[30]: $-\infty$

Пример 3:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n}{-5n^3 + 4n^2 + 9} \right)$$

```
In [31]: n = Symbol('n')
limit((n**2-3*n)/(-5*n**3+4*n**2+9),n,oo)
```

Out[31]: 0

Пример 4:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-7n+10}{\sqrt{9n^2+10n}} \right)$$

```
In [32]: n = Symbol('n')
limit((-7*n+10)/(sqrt(9*n**2 + 10 * n)),n,oo)
```

Out[32]: $-\frac{7}{3}$

Пример 17:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \cdot 7^{-n} - 5 \cdot 2^{-n} - 5}{5 \cdot 2^{-n} + 5 \cdot 7^{-n} - 3} \right)$$

```
In [33]: n = Symbol('n')
limit((4 * 7 ** (-n) - 5 * 2 ** (-n) - 5)/(5 * 2 ** (-n) + 5 * 7 ** (-n) - 3),n,oo)
```

Out[33]: $\frac{5}{3}$

Пример 20:

Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 - 5n + 3})$$

```
In [34]: n = Symbol('n')
limit((2 * n - sqrt(4 * n ** 2 - 5 * n + 3)),n,oo)
```

Out[34]: $\frac{5}{4}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 16:

Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+4}{5-2\ln(2x)} \right)$$

```
In [35]: x = Symbol('x')
limit((4 * x + 4)/(5 - 2 * ln(2 * x)), x, oo)
```

Out[35]: $-\infty$

Индивидуальное задание

Компания производит товары по цене $C(x) = 100 + 5 * x * 2 - 0.2 * x * 3$ рублей, где x - количество произведенных товаров. Компания продает каждый товар по цене $p(x) = 20 * x - 0.1 * x ** 2 - 5 * x ** 3 / 1000$ \$ рублей. Найдите максимальную прибыль, которую может получить компания.

Чтобы решить эту проблему в Python, мы выполним следующие шаги:

Определяем переменные и функции:

```
In [36]: import sympy as sp

x = sp.Symbol('x') # количество произведенных товаров

C = 100 + 5 * x ** 2 - 0.2 * x ** 3 # функция затрат
p = 20 * x - 0.1 * x ** 2 - 5 * x ** 3 / 1000 # функция цены
```

Вычислим функцию выручки, $R(x)$, которая является произведением количества произведенных виджетов и цены:

```
In [37]: R = p*x
R
```

Out[37]: $x \left(-\frac{x^3}{200} - 0.1x^2 + 20x \right)$

Рассчитаем функцию прибыли, $P(x)$, которая представляет собой разницу между выручкой и затратами:

```
In [38]: P = R - C
```

P

```
Out[38]: 0.2x3 - 5x2 + x  $\left(-\frac{x^3}{200} - 0.1x^2 + 20x\right) - 100$ 
```

Найдем критические точки P(x), которые являются значениями x, при которых производная P(x) равна нулю:

```
In [39]: dP = sp.diff(P, x)
dP
```

```
Out[39]:  $-\frac{x^3}{200} + 0.5x^2 + x \left(-\frac{3x^2}{200} - 0.2x + 20\right) + 10x$ 
```

```
In [40]: critical_points = sp.solve(dP, x)
critical_points
```

```
Out[40]: [-31.9493345951487, 0.0, 46.9493345951487]
```

Найдем вторую производную от P(x) и оценим ее в каждой критической точке, чтобы определить, соответствует ли каждая критическая точка максимуму или минимуму прибыли:

```
In [41]: d2P = sp.diff(P, x, 2)
max_profits = []
for point in critical_points:
    if d2P.subs(x, point) < 0:
        max_profits.append(P.subs(x, point))

max_profits
```

```
Out[41]: [6740.38480362997, 19018.9901963700]
```

Найдите максимальную прибыль, взяв максимум из прибылей, полученных в предыдущем шаге

```
In [42]: max_profit = max(max_profits)
```

```
In [43]: print(f"Максимальная прибыль, которую может получить компания, составляет {max_prof
```

Максимальная прибыль, которую может получить компания, составляет 19018.99 рублей.