电子课件

常微分方程

Ordinary differential equation

常微分方程

Ordinary differential equation

课程目的/Major Subjection of Course/

- 学习各类可求解的常微分方程和方程组的类型及其求解方法。
- 熟悉常微分方程解的基本性质，如解的存在性，唯一性等内容，了解研究常微分方程的基本方法，如稳定性分析、定性分析等。

学科内容和研究方法

•经典部分：以数学分析、高等代数为工具，以求微分方程的解为主要目的。

•现代部分：主要应用泛函分析、拓扑学等知识来研究解的性质。

•研究方法：解析、几何（定性）、数值方法。

课时/Periods/　4节/周，共48学时。

考试/Examination/　闭卷：测验、期末考试。

参考书目/Reference Books/

- 常微分方程(第二版), 东北师范大学编, 高教出版社。
- 常微分方程教程(第二版)，丁同仁&李承志编，高等教育出版社。
- Ordinary differential equations, Arnol’d, Springer-Verlag.
- 常微分方程，B.И.阿诺尔德，沈家骐等译，科学出版社。

第一章　　绪　论

Introduction

- 微分方程概述 /Sketch of ODE/
- 基本概念 /Basic Conception/
- 练习题/Exercise/

本章要求/Requirements/

- 能快速判断微分方程的类型；
- 掌握高阶微分方程及其初值问题的一般形式；
- 理解微分方程解的意义。

§ 1.1 微分方程概述/ Sketch of ODE/

微分方程理论起始于十七世纪末，是研究自然现象强有力的工具，是数学科学联系实际的主要途径之一。

1676年， Leibniz 在给 Newton 的信中首次提到 Differential Equations（微分方程）这个名词。

微分方程研究领域的代表人物：Bernoulli、Cauchy、Euler 、Taylor 、Leibniz、Poincare、Liyapunov等。

微分方程理论发展经历了三个过程：求微分方程的解；定性理论与稳定性理论；微分方程的现代分支理论。

常微分方程是研究自然科学和社会科学中的事物、物体和现象的运动、演化以及变化规律的最为基本的数学理论和方法。

物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域中的许多原理和规律都可以描述成适当的常微分方程。如牛顿运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律，能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨伏趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等，对这些规律的描述、认识和分析就归结为对相应的常微分方程描述的数学模型的研究。

因此，常微分方程的理论和方法不仅广泛应用于自然科学，而且越来越多的应用于社会科学的各个领域。

方程/Equation/

含有未知量(数)的等式(或关系式)。例如:

1 **代数方程(组)**，其未知量为数

一元n次代数方程: $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$

无理方程: $\sqrt{x^2 + 5} = 6$　　方程组: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

2 **超越方程（组）**，其含有超越函数

三角方程: $\sin(x+5) = \cos x$

指数方程: $e^x + 2^x = 5$

其特点：方程的解为实数（有限个或者无限个）

3　函数方程（或泛函方程），其未知量为函数

$$Z^2(t)+\sin^2 t=1 \qquad Z(t)=\pm\cos t$$

$$Z''(t)=1 \qquad Z(t)=\frac{t^2}{2}+c_1 t+c_2$$

其特点：方程的解为有限个或无穷多个函数。

定义：一个或几个包含自变量，未知函数以及未知函数的某些阶导数（或微商）的关系式，称之为**微分方程**。

例

1. $y'=x^2 \qquad y'=f(x)$

2. $r^2\dfrac{d^2u}{dr^2}+r\dfrac{du}{dr}+(r^2-1)u=0$

3. $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=\theta(x)$

4. $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ n阶隐式方程

5. $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ n阶显式方程

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ 方程组

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ 偏微分方程

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = -4\pi\rho$ 偏微分方程

9. $\mathrm{f}^2(x) = \sin x$ 不是微分方程

微分方程模型举例/Modeling of ODE/

为了定量地研究一些实际问题的变化规律,往往是要对所研究的问题进行适当的**简化和假设**,建立数学模型。当问题涉及变量的变化率时,该模型就是微分方程。通过几个典型的例子来说明建立微分方程模型的过程。

例1： 质量为m的物体在重力的作用下，沿铅直线下落，物体下落距离S(向下为正）随时间 t 而改变。在不考虑空气阻力的情况下，试求出距离 S 应满足的微分方程。

解： 设在时刻 t 物体下落的距离为 $s(t)$

按牛顿第二定律

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg \qquad \frac{d^2s}{dt^2}=g$$

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$$

例2：放射性元素镭因不断放射出各种射线而逐渐减少其质量，这种现象成为**衰变**，实验知镭的衰变率与其当时的质量成比例。试求镭衰变的规律。

解：设在任意时刻 t 镭的质量为R(t),

$$R'(t) = kR(t)$$

微分方程模型：含有自变量，未知函数及未知函数导数（或变化率）的关系式。

例3.增长与衰减问题

- 碳定年代法

- 考古、地质学等方面的专家常用 ^{14}C(碳－14)测定法(通常称为碳定年代法)去估计文物或化石的年代。

- 碳-14的蜕变规律
  碳-14是一种由宇宙射线不断轰击大气层，使之产生中子，中子与氮气作用生成的一种具放射性的物质 。这种放射性碳可氧化成二氧化碳，二氧化碳被植物所吸收，而动物又以植物作食物，于是放射性碳被带到各种动植物体内。
- 由于碳-14 是放射性的，无论存在于空气中或生物体内它都在不断蜕变

- 通常假设 ^{14}C 蜕变速度与该时刻 的存量成正比.
- 设在时刻 t (年)生物体中 的存量为 $x(t)$, 生物体的死亡时间记为 $t_0 = 0,$
- 此时含量为 $x_0 = 0,$则由假设，得初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

马王堆一号墓年代的确定

- 马王堆一号墓于1972年8月出土. 其时测得出土的木炭标本的 ^{14}C 平均原子蜕变数为 29.78/分， 而新砍伐烧成的木炭中 ^{14}C 平均原子蜕变数为38.37/分，又知 ^{14}C 的半衰期为5568年.
- 可以把 $\dot{x}(0)$ = 38.37 / 分， $\dot{x}(t)$ =29.78 / 分，
- *T*= 5568年

- **估算出马王堆一号墓大约是在2000多年前.**

例4. 范. 梅格伦(Van Meegren) 伪造名画案

第二次世界大战比利时解放后，荷兰保安机关开始搜捕纳粹分子的合作者，发现一名三流画家H.A.Van Meegren曾将17世纪荷兰著名画家Jan.Vermeer的一批名贵油画盗卖给德寇，于1945年5月29日通敌罪逮捕了此人。

Van Meegren被捕后宣称他从未出卖过荷兰的利益，所有的油画都是自己伪造的，为了证实这一切，在狱中开始伪造Vermeer的画《耶稣在学者中间》。当他的工作快完成时，又获悉他可能以伪造罪被判刑，于是拒绝将画老化，以免留下罪证。

为了审理这一案件，法庭组织了一个由化学家、物理学家、艺术史学家等参加的国际专门小组，采用了当时最先进的科学方法，动用了X-光线透视等，对颜料成份进行分析，终于在几幅画中发现了现代物质诸如现代颜料钴蓝的痕迹。

这样，伪造罪成立， Vanmeegren被判一年徒刑。1947年11月30日他在狱中心脏病发作而死去。

但是，许多人还是不相信其余的名画是伪造的，因为，Vanmeegren在狱中作的画实在是质量太差，所找理由都不能使怀疑者满意。直到20年后，1967年，卡内基梅隆大学的科学家们用微分方程模型解决了这一问题。

原理

著名物理学家卢瑟夫(Rutherford)指出：

物质的放射性正比于现存物质的原子数.

设 t 时刻的原子数为$N(t)$，则有

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

λ 为物质的衰变常数

初始条件 $N\big|_{t=t_0} = N_0$

例5. 传染病模型 长期以来,建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程,一直是各国有关专家和官员关注的课题.人们不能去做传染病传播的试验以获取数据,所以通常主要是依据机理分析的方法建立模型.

假设在疾病传播期内所考察地区的总人数N不变,时间以天为计量单位,假设条件为:

(1)在时该t人群中易感染者(健康)和已感染者(病人)在总人数中所占比例分别为$s(t)$和$i(t)$.

(2)每个病人每天有效接触的平均人数是λ,λ称日接触率.

根据题设,每个病人每天可使

$\lambda s(t)$个健康者变为病人.

由于病人总人数为 $Ni(t)$,

所以每天共有$\lambda Ns(t)i(t)$个健康者被感染.

于是病人增加率为 $N\frac{di}{dt}=\lambda Nsi$,

又因$s(t)+i(t)=1$,再由初始条件得

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

§ 1.2 基本概念/Basic Conception/

1. 常微分方程和偏微分方程
2. 一阶与高阶微分方程
3. 线性和非线性微分方程
4. 解和隐式解
5. 通解和特解
6. 积分曲线和积分曲线族
7. 微分方程的几何解释-----方向场

●常微分方程与偏微分方程/ODE and PDE/

常微分方程/ODE /

在微分方程中，**自变量**的个数只有一个的微分方程称为**常微分方程**。

偏微分方程/ PDE/

自变量的个数有两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2 + t\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4\frac{\partial T}{\partial t}$$

●一阶与高阶微分方程/First and Higher ODE/

微分方程的阶/Order/

在一个微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数n称为该方程的**阶**。

当n=1时，称为**一阶微分方程**；

当n>1时，称为**高阶微分方程**。

例如

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

一阶常微分方程的一般隐式形式可表示为：

$$F(x, y, y') = 0$$

一阶常微分方程的一般显式形式可表示为：

$$y' = f(x, y)$$

类似的，n阶隐方程的一般形式可表示为：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

n阶显方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

其中F及f分别是它所依赖的变元的已知函数。

●线性和非线性微分方程/Linear and Nonlinear ODE/

如果方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式，则称它为线性微分方程，否则，称它为非线性微分方程。

例如：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2 + t\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4\frac{\partial T}{\partial t}$$

n阶线性微分方程的一般形式为：

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$$

其中 $a_0(x) \neq 0$ $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), g(x)$ 均为 x 的已知函数

如：2阶线性方程的一般形式

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$

$$y'' + x^2 y' + y\sin x = xe^x$$

●解和隐式/Solution/

对于方程

$$F[x,y,y',\cdots,y^{(n)}]=0 \quad \text{或} \quad y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

若将函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程后使其有意义且两端成立

即 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]=0$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为该方程的一个**解.**

一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 有解 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

即关系式 $x^2+y^2=1$ 包含了方程的解，

若方程的解是某关系式的隐函数，称这个关系式为该方程的**隐式解**。把方程解和隐式解统称为**方程的解**。

●通解和特解/General Solution and Special Solution/

常微分方程的解的表达式中，可能包含一个或者几意常数，若其所包含的独立的任意常数的个数恰好与该方程的阶数相同，我们称这样的解为该微分方程的**通解**。

常微分方程满足某个初始条件的解称为微分方程的**特解**。

例：二阶方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$

其通解 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$

而 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是方程满足初始条件 $s(0)=0,\ s'(0)=0$ 解。

注1: 称函数$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$含有$n$个独立常数,是指存在$(x,c_1,\cdots,c_n)$的某一邻域,使得行列式

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

其中$\varphi^{(k)}$表示$\dfrac{d^k\varphi}{dx^k}$.

例　验证$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 3$是微分方程

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 6$$ 的通解.

证明:　由于 $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x},$$

$$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}$$

故　$y''' - 2y'' - y' + 2y =$

$$(c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}) - 2(c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x})$$

$$-(c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}) + 2(c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 3)$$

$$= (c_1 - 2c_1 - c_1 + 2c_1)e^x + (-c_2 - 2c_2 + c_2 + 2c_2)e^{-x}$$

$$+ (8c_3 - 8c_3 - 2c_3 + 2c_3)e^{2x} + 6 = 6$$

故$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+3$是

微分方程$y'''-2y''-y'+2y=6$的解.

又由于

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_3} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_3} \\ \frac{\partial\varphi''}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi''}{\partial c_3} & \frac{\partial\varphi''}{\partial c_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & e^{2x} \\ e^{x} & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

故$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+3$是微分方程

$y'''-2y''-y'+2y=6$的通解.

注2: $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$是微分方程的

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n})=0$$

的通解,并不表示$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$包含了该微分方程的所有解.

注3: 类似可定义方程的隐式通解.

如果微分方程的隐式解中含有任意常数,且所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为该 方程的隐式通解.

以后不区分显式通解和隐式通解,统称为方程的通解.

初值条件/Initial Value Conditions/

对于 n 阶方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

初值条件可表示为

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ y''(x_0) = y_0'', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

n阶方程**初值问题**（Cauchy Problem）的表示

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

一阶和二阶方程**初值问题**（Cauchy Problem）的表示

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

●积分曲线和积分曲线族 /Integral Curve(s)/

一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解 $y=\varphi(x)$ 表示 x,y平面的一条曲线，我们称它为微分方程的<u>**积分曲线**</u>，而微分方程的通解 $y=\varphi(x,c)$ 表示 x,y 平面的一族曲线，称它们为微分方程的<u>**积分曲线族**</u>。

●方向场/Directional Pattern/

对于一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 其右端函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，在定义域的每一点 (x,y) 处，画一个小线段，其斜率等于 $f(x,y)$，此时，点集 D 就成为带有方向的点集。称此区域为由方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 确定的方向场。

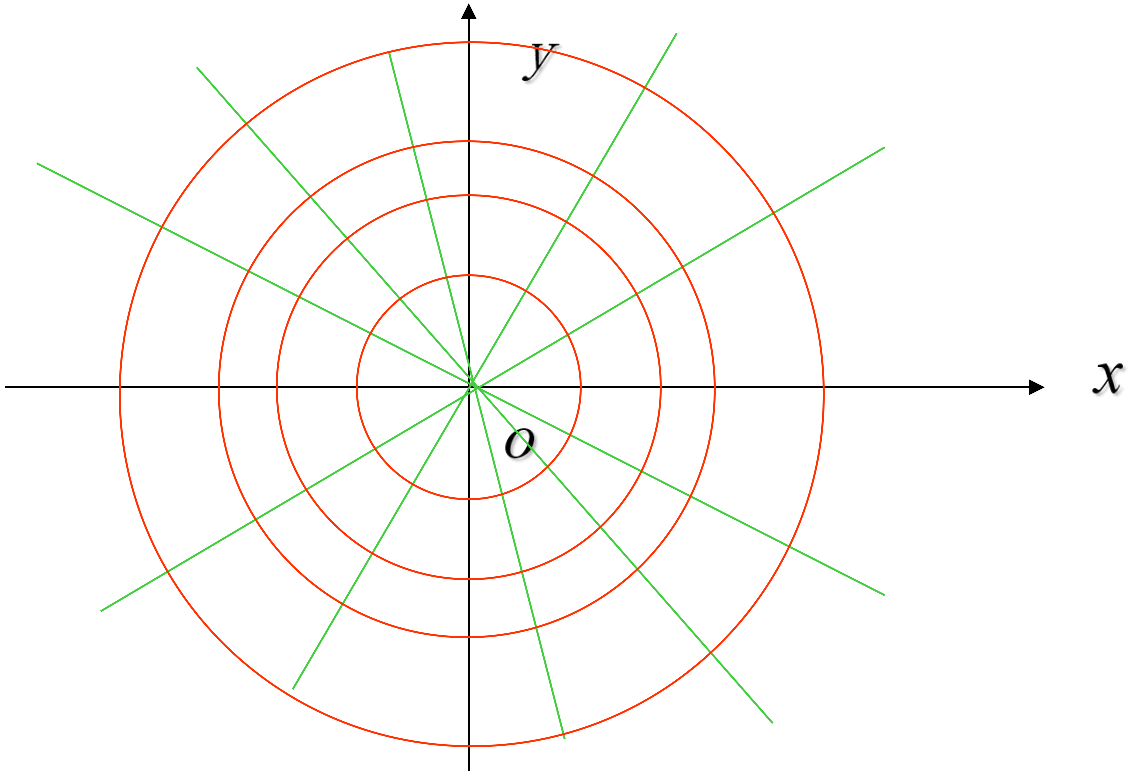
常微分方程求解的几何意义是：

在方向场中寻求一条曲线，使这条曲线上每一点切线的方向等于方向场中该点的方向。

例1 画出方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 的方向场。

等斜线方程 $-\dfrac{x}{y}=k$ 即 $y=-\dfrac{1}{k}x$

也就是说，方向场中每点的方向与该点等斜线垂直。



练习题1

编号	微分方程	自变量	未知函数	常或偏	阶数	是否线性
1	$\frac{d^4 s}{d\gamma^4}+s=s^3$	γ	s	常	4	否
2	$y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$	x	y	常	1	否
3	$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$	$x\quad y\quad t$	u	偏	2	是
4	$\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$	x	y	常	1	否

练习题2

编号	函数	微分方程	初始条件
1	$y=e^{x^2}(1+\int_0^x e^{-t^2}dt)$	$y'-2xy=1$	$y(0)=1$
2	$y=e^{\lambda x}$（λ 是实数）	$y'''-\lambda^3 y=0$	$y(0)=1 \quad y'(0)=\lambda$ $y''(0)=\lambda^2$
3	$u=1+\cos(x+t)$	$u''_{tt}=u''_{xx}$	$u(0,x)=1+\cos x$ $u'(0,x)=-\sin x$
4	$y=\sin x$	$y''+y=0$	$y(\pi)=0 \quad y'(\pi)=-1$

练习题3

求下列曲线族所满足的微分方程

(1) $y = cx + x^2$

$$y' = c + 2x$$

$$y'' = 2$$

$$y''' = 0$$

(2) $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{c^2 - 1} = 1$

$$\frac{2x}{c^2} + \frac{2yy'}{c^2 - 1} = 0$$

$$(c^2 - 1)x + c^2 yy' = 0$$

$$(c^2 - 1) + c^2 (y')^2 + c^2 yy'' = 0$$

$$c^2 2y'y'' + c^2 y'y'' + c^2 yy''' = 0$$

$$2y'y'' + y'y'' + yy''' = 0$$

作业/Homework/

P27 4. 5. 6. 8(5)(6)

第二章　一阶微分方程的初等积分法

Integrated Method of First Order ODE

方程类型/Classifications/：

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad F(x, y, y') = 0$$

初等积分法/Integrated Method/： 通过积分求解常微分方程的一种方法，其特点是微分方程的解可用初等函数以及初等函数的积分形式来表示。

本章内容/Main Contents/

本章要求/Requirements/

熟练掌握一些重要的常见的

一阶方程的类型及其求解方法。

- 注意：　　正确判断方程的类型

本章目录/Main Contents/

§2.1　变量分离方程与变量变换

Separable First-Order ODE & Transform

•内容提要/Main Contents/

变量分离方程与变量变换
- 变量分离方程
  - •特点
  - •解法
  - •举例
- 可化为变量分离的类型
  - 齐次方程
  - 可化为齐次方程的类型

•本节要求/Requirements/

1 熟练掌握变量分离方程，齐次方程的求解方法。

2 熟练掌握运用变量变换将方程化为熟知类型求解的思想方法，求更广泛类型方程的解。

1 变量分离方程/Variables Separated ODE/

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

其中 $f(x), \varphi(y)$ 分别是 x 与 y 的已知连续函数。

特点

一般的一阶方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 中的 $\boldsymbol{f(x, y)}$可表示成

$$f(x, y) = f(x) \cdot \varphi(y)$$

例 $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{dN}{dt} = rN$

解法步骤 /Solving Steps/

如果 $\varphi(y) \neq 0$

（1） 分离变量 $\dfrac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$

（2） 两边积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$

用$G(y)$，$F(x)$分别表示 $\dfrac{1}{\varphi(y)}$ 及$f(x)$

的某一个原函数

(3) 方程（2.1）的通解为$G(y)=F(x)+C$ …………(2.2)

因为将 y 视为 x 的函数，对$G(y)=F(x)+C$ 两端关于x求导，

$$\frac{1}{\varphi(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

所以，（2.2）为方程(2.1)的通解。

如果存在 y_i ，使得 $\varphi(y_i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,k$

直接验证得： $y \equiv y_i$ 为方程(2.1)的常数解。

分离变量方程（2.1）的解为 $\begin{cases} G(y) = F(x) + C \\ y \equiv y_i, \ \ i = 1,2,\cdots,k \end{cases}$

例1 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

解 $\varphi(y)=\dfrac{1}{y}\neq 0$

1 分离变量 $ydy=-xdx$

2 两边积分 $\int ydy=-\int xdx$ $\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{c}{2}$

3 求通解 $x^2+y^2=c$ 或者 $y=\pm\sqrt{c-x^2}$

（c 为任意正常数）

例2　求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x$

并求出满足初始条件：当 $x=0$时 $y=1$的特解。

解　$y\neq 0$ 时

（1）分离变量　$\dfrac{dy}{y^2}=\cos x dx$

（2）两边积分　$\displaystyle\int\frac{dy}{y^2}=\int\cos x dx+c$　$-\dfrac{1}{y}=\sin x+c$

（3）　$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}$（c为任意常数）为方程的通解。

注意　$y=0$ 时，也是方程的解，而其并不包含在通解中，因而方程还有解 $y=0$

所以，原方程的解为 $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sin x + c} \\ y \equiv 0 \end{cases}$

求特解

将初始条件 $y(0)=1$ 代入通解中，得 $c = -1$

则满足所给条件的特解为：$y = -\dfrac{1}{\sin x - 1}$

2　可化为变量分离方程的类型

/Classifications of Variable Separated Equation/

(1)　齐次方程/Homogeneous Equation/

(2)　可化为齐次方程的方程类型

/Classifications of Homogenous/

（1） 齐次方程/Homogeneous Equation/

- **形式：** $\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$ **g (*u*)**为 ***u*** 的连续函数
- **特点：** 一般方程的右端函数 $f(x,y)$ 是x，y 的零次齐次式。

即 $$f(x,y) = g(\frac{y}{x})$$

$$f(kx,kg) = g(\frac{ky}{kx}) = k^0 g(\frac{y}{x}) = f(x,y) \quad k \neq 0$$

或 $f(x,y)$ 可表示成以 $\dfrac{y}{x}$ 为整体变量的函数。

解法

(1)　作变量变换 $\frac{y}{x}=u$　　即　　$y=ux$

（2）对两边关于 x 求导 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

（3）将上式代入原方程，得　$x\frac{du}{dx}+u=g(u)$

整理　$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot(g(u)-u)$　………. (2. 3)

变量可分离方程

（4）求解方程(2. 3), 若其解为：$u=\varphi(x,c)$ 或 $\Phi(u,x,c)=0$

(5)　原方程的通解为: $y=x\varphi(x,c)$或$\Phi(\frac{y}{x},x,c)=0$

例3 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

解

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 或 $y=ux$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u \qquad x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\tan u}{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

$$\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x} \qquad \int\frac{d\sin u}{\sin u}=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c} \qquad (\tilde{c}\ \text{为任意常数})$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \tilde{c} \qquad (\tilde{c}\ \ 为任意常数)$$

$$|\sin u| = e^{\tilde{c}}|x| \qquad \sin u = \pm e^{\tilde{c}} x$$

令 $c = \pm e^{\tilde{c}}$ 得:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\tan u}{x}$$

$Sinu = cx$ （c 为非零任意数）

另当 $tanu = 0$ 时，$u = 0$ 即 $u = 0$ 也是方程(2.4)的解

故 （2.4）的通解为 $sinu = cx$（c 为任意常数）

代回原来的变量，原方程的通解为: $\sin\frac{y}{x} = cx$

(2)可化为齐次方程的类型

/Classifications of Homogenous/

- 形式：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ ……………(2.5)

$a_i,b_i,c_i,i=1,2$ 均为常数，且c_1,c_2 不同时为零.

1\. 若$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

设 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ $a_1=ka_2$， $b_1=kb_2$

则原方程可化为: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令 $u=a_2x+b_2y$ $\qquad \frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$$ （变量分离方程，即可求解）

2. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 则 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ .... (2.6)

有唯一的解:(α,β) 令 $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$

则方程（2.5）化为：

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_1(X+\alpha)+b_1(Y+\beta)+c_1}{a_2(X+\alpha)+b_2(Y+\beta)+c_2}$$

$$= \frac{a_1X+b_1Y+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2X+b_2Y+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y} = g(\frac{Y}{X})$$ 为齐次方程，即可求解。

- 特别地，当 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程(2.5)的求解方法

(1) 解代数方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ ....(2.6)

其解为：$x=\alpha, y=\beta$

(2) 作变换 $x=X+\alpha,\quad y=Y+\beta$

将方程(2.5)化为齐次方程 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$

(3) 再作变换 $U=\dfrac{Y}{X}$ 将其化为变量分离方程

(4) 求解上述变量分离方程，最后代回原变量即可得原

方程的解。

- 类似的方法，可求解更广泛的方程　P. 37

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

例4　求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ ..... (2. 17)

解　解方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 1, y = 2$

令 $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X - Y}{X + Y}$.......... (2. 18)

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.18)$$

再令 $u=\frac{Y}{X}$ 即 $Y=uX$ $\quad \frac{dY}{dX}=X\frac{du}{dX}+u$

$$X\frac{du}{dX}+u=\frac{1-u}{1+u} \qquad X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u}-u=\frac{1-u-u(1+u)}{1+u}$$

即(2.18)可化为: $\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du=-\frac{1}{2(1-2u-u^2)}d(1-2u-u^2)$

两边积分，得: $\ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+\tilde{c}$

因此 $X^2(u^2+2u-1)=\pm e^{\tilde{c}}$

记 $\pm e^{\tilde{c}}=c_1$ 并代回原变量，得: $X^2(u^2+2u-1)=c_1$

并代回原变量，得:

$$Y^2+2XY-X^2=c_1$$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1$$

此外，容易验证: $u^2+2u-1=0$

即 $Y^2+2XY-X^2=0$

也是方程(2. 18)的解。

因此原方程(2. 17)的通解为:

$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$ 其中 c 为任意常数。

本节小结/Conclusion/

变量分离方程与变量变换

- 变量分离方程
  - 特点
  - 解法
  - 举例
- 可化为变量分离的类型
  - 齐次方程
  - 可化为齐次方程的类型

注意/Note/： 通解的形式及其中任意常数的意义。

• 课堂练习/Exercise/

1 $\frac{dy}{dx}=p(x)y$　　2 $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

3 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$　　4 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$

• 思考以下方程的求解方法

1 $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$　　2 $x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$

3 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$　　4 $\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x^2})$

作业/Homework/

P42 1(2)(3)(5)(8). 2(1). 4. 6

§ 2.2　线性方程与常数变易法

/Linear ODE and variation of constants Method/

内容提要/Constant Abstract/

- 线性方程与常数变易法
  - 线性方程
    - 齐次线性方程：特点·解法·举例
    - 非齐次线性方程
      - 常数变易法（积分因子方法）
      - 求解步骤·举例·随堂练习
  - 可化为线性方程的方程
    - 伯努利方程
    - 黎卡提方程
    - 其他可化为线性方程的方程
      - 特点
      - 解法
  - 重点与难点
  - 思考

本节要求/Requirements/

- 熟练掌握**线性方程**和**伯努利方程**的求解方法。
- 了解**黎卡提方程**的简单性质及其求解方法。

一 、一阶线性微分方程/ First-Order Linear ODE/

一般形式 $a(x)\dfrac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$

形如 $y'=P(x)y+Q(x)$ ....(2. 2. 1)

的方程称为**一阶线性微分方程**(即关于 y, y' 是线性的)

其中 $P(x),Q(x)$ 为 x 的已知函数。当$Q(x)\equiv 0$时，

$$y'=P(x)y \qquad \text{.....................} \; (2.\,2.\,2)$$

称为**齐次线性方程**;

当 $Q(x)\neq 0$ 时，称为**非齐次线性方程**。

（1）齐次线性方程/Homogenous Linear ODE/

$$y' = p(x)y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.2)$$

解法：

分离变量，得： $$\frac{dy}{y} = p(x)dx$$

积分，得： $$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C_1$$

$$\ln|y| = \int p(x)dx + C_1 \qquad |y| = e^{C_1} e^{\int p(x)dx}$$

$$y = \pm e^{C_1} e^{\int p(x)dx} \qquad c = \pm e^{C_1}$$

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\boxed{y' = p(x)y \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.2)}$$

得 $y = ce^{\int p(x)dx}$

因为 $y \equiv 0$ 为(2. 2. 2)的解, 所以其通解为:

$$y = ce^{\int p(x)dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)$$

其中c为任意常数。

满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)'$$

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\boxed{y' = p(x)y \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.2)}$$ $$\boxed{y = ce^{\int p(x)dx} \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.3)}$$

例1 试求微分方程 $y' + y\sin x = 0$

的通解, 并求满足条件的 $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ 特解

解 $p(x) = -\sin x$

由公式(2.2.3)得，所求通解为:

$$y = ce^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$$

由初始条件得，所求特解为:

$$y = 2e^{\cos x}$$

（2）非齐次线性方程/Non-Homogenous Linear ODE/

采用**常数变易法**求解

设想方程 $y' = P(x)y + Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.1)$

有形如(2. 2. 3)的解，但其中的常数c变易为x的待定函数

即设 $y = c(x)e^{\int P(x)dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2. 2. 4)

方程的解。

$\boxed{y' = p(x)y \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.2)}$ $\boxed{y = ce^{\int p(x)dx} \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.3)}$

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\boxed{y = c(x)e^{\int P(x)dx} \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.4)}$$

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.1)}$$

把（2.2.4)代入方程(2.2.1)，得:

$$c'(x)e^{\int P(x)dx} + c(x)e^{\int P(x)dx}P(x) = P(x)c(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x)$$

即:

$$c'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$$

积分得:

$$c(x) = \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c$$

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\boxed{y = c(x)e^{\int P(x)dx} \qquad \cdots\cdots\cdots(2.2.4)}$$

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(2.2.1)}$$

$$c(x) = \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c$$

代入(2. 2. 4) 得方程(2. 2. 1)的通解:

$$\boxed{y = e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.5)$$

同时，方程满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的特解为 ：

$$\boxed{y = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}dx]}$$

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.1)}$$

$$\boxed{y = e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c] \quad \cdots\cdots\cdots(2.2.5)}$$

由(2. 2. 5)得:

$$y = ce^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

其中第一项是线性齐次方程的通解，第二项是线性非齐次方程特解。

非齐次线性方程通解的结构：

通解等于其*对应齐次方程通解*与*自身的一个特解*之和。

例2 $$\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x$$

解 1） 先求对应的齐次方程通解

$$\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x \qquad \frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+\ln|c|$$

$$y=\frac{c}{\cos x}\quad (c为任意常数)$$

2） 用常数变易法求方程通解

设 $y=\dfrac{c(x)}{\cos x}$ 是方程的解，代入原方程，得

$$\boxed{\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x}\qquad\qquad \boxed{y=\frac{c(x)}{\cos x}}$$

$$\cos x\left(\frac{c'(x)\cos x+c(x)\sin x}{\cos^2 x}\right)=\frac{c(x)}{\cos x}\sin x+\cos^2 x$$

$$c'(x)=\cos^2 x$$

$$c(x)=\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

方程的通解是

$$y=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c\right)\quad (c\text{为任意常数})$$

说明：对于一阶线性方程，也可直接用通解公式计算得出。

例3 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$$ $$\boxed{y=e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c]}$$

解 1） 转换变量位置

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$$

2） 用公式求方程通解

$$x=e^{2\int\frac{1}{y}dx}[-\int ye^{-2\int\frac{1}{y}dy}dy+c]=e^{\ln y^2}(-\int ye^{\ln y^{-2}}dy+c)$$

$$x=y^2(-\int\frac{1}{y}dy+c)=-y^2\ln|y|+cy^2$$

$$x=-y^2\ln|y|+cy^2$$

注意:

有时方程关于 $y, \dfrac{dy}{dx}$ 不是线性的，但如果视

x 为 y 的函数，方程关于 $x, \dfrac{dx}{dy}$ 是线性的，

于是仍可以根据上面的方法求解。

二、 可化为线性方程的方程

1 伯努利方程/Bernoulli ODE/

2* 黎卡提方程/ Riccati ODE/

1 伯努利方程/Bernoulli ODE/

形如 $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ (2.2.6)

的方程称为伯努利方程，其中 $n \neq 0, n \neq 1$

它通过变量代换可化为线性方程。

解法： 将方程(2. 2. 6)的各项同乘以y^{-n}

得: $y^{-n}y' = P(x)y^{1-n} + Q(x)$

令 $z = y^{1-n}$

则 $\dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx} = y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = P(x)z + Q(x)$$

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n \qquad (2.2.6)$$

令$z = y^{1-n}$,

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)$$

用上式求解后，代入原变量 $z = y^{1-n}$ ，便得原方程的通解。

$$\boxed{y^{1-n} = e^{\int (1-n)P(x)dx}\left[\int (1-n)Q(x)e^{-\int (1-n)P(x)dx}dx + c\right]}$$

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x)\text{的通解}y = e^{\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c\right]}$$

例4 $xy'+y=xy^2\ln x$

解 将方程改写为: $y^{-2}y'=-\dfrac{1}{x}y^{-1}+\ln x$

$$z=y^{-1} \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}z-\ln x$$

$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right)$$

$$=x\left(\int-\frac{\ln x}{x}dx+c\right)$$

$$=x\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+c\right]$$

$$\boxed{y'=P(x)y+Q(x)\text{的通解}y=e^{\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right]}$$

故 $\dfrac{1}{y}=x\left[c-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]$

2 黎卡提方程 / Riccati ODE/

●形如 $$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (2.2.7)$$

的方程称为**黎卡提方程**。

●特点：

在一般情况下，此类方程的解不能用初等函数及其积分形示表示，如果先由观察法或其他方法知道它的一个特解时，才可以通过初等积分法，求出它的通解。

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (2.2.7)$$

解法　若方程有一特解为 $y(x) = \tilde{y}(x)$

设 $y = z + \tilde{y}(x)$ 　 $y' = z' + \tilde{y}'(x)$

则 $z' + \tilde{y}'(x) = P(x)(z+\tilde{y})^2 + Q(x)(z+\tilde{y}) + R(x)$

$$z' + \tilde{y}'(x) = P(x)(z^2 + 2\tilde{y}z + \tilde{y}^2) + Q(x)(z+\tilde{y}) + R(x)$$

$$z' + \tilde{y}'(x) = P(x)z^2 + (2\tilde{y}P(x) + Q(x))z + P(x)\tilde{y}^2 + Q(x)\tilde{y} + R(x)$$

$$z' = P(x)z^2 + (2\tilde{y}P(x) + Q(x))z$$

化为伯努利方程。

例5 $y' = y^2 - x^2 + 1$

解 由观察看出$\tilde{y} = x$是方程的一个特解，于是

令 $y = x + u$ ，则得 $1 + u' = (u + x)^2 - x^2 + 1$

$$u' = u^2 + 2xu \qquad \frac{1}{u^2}u' = 1 + 2xu^{-1}$$

$$-(u^{-1})' = 1 + 2xu^{-1}$$

$$z' = -2xz - 1 \qquad z = e^{-x^2}\left(\int -e^{x^2}dx + C\right)$$

故原方程的通解为 $y = x + e^{x^2}\left(C - \int e^{x^2}dx\right)^{-1}$

例6 试求$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ 形如 $\dfrac{a}{x}$ 的特解，解此微分方程。

解 设 $y = \dfrac{a}{x}$, $y' = -\dfrac{a}{x^2}$,代入方程得:

$$-a = a^2 + a + 1 \qquad (a+1)^2 = 0$$

所以 $a = -1$ 故 $\tilde{y} = -\dfrac{1}{x}$ 是方程的一个特解。

令 $y = -\dfrac{1}{x} + u$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2} + u'\right) = x^2\left(-\frac{1}{x} + u\right)^2 + x\left(-\frac{1}{x} + u\right) + 1$$

于是方程化为伯努利方程 $u' = x^2u^2 - xu$

$$\frac{1}{u^2}u' = -xu^{-1} + x^2 \Longrightarrow -(u^{-1})' = -xu^{-1} + x^2$$

$$z' = xz - x^2 \Longrightarrow z = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)$$

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)^{-1}$$

故原方程的通解为

$$y = -\frac{1}{x} + u = -\frac{1}{x} + e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)^{-1}$$

练习

(1) $xy'+(1+x)y=e^x$

(2) $$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$$

(3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$$

练习　（1）　$xy'+(1+x)y=e^x$

解　1) 先解齐次方程　$xy'+(1+x)y=0$

$$\frac{dy}{y}+\frac{1+x}{x}dx=0$$

积分，得：

$$\ln y+\ln x+x=c_1 \qquad y=c\frac{e^{-x}}{x}$$

2)　设 $y=c(x)\dfrac{e^{-x}}{x}$ ，代入原方程，得：

$$x[c(x)\frac{e^{-x}}{x}]'+(1+x)c(x)\frac{e^{-x}}{x}=e^x$$

$$x[c'(x)\frac{e^{-x}}{x}+c(x)\frac{-xe^{x}-e^{x}}{x^{2}}]+(1+x)c(x)\frac{e^{-x}}{x}=e^{x}$$

化简得: $c'(x)e^{-x}=e^{x}$ $\quad c'(x)=e^{2x}$

$$c(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

所以，通解为: $$y=\frac{e^{-x}}{x}(\frac{1}{2}e^{2x}+c)$$

$$y=\frac{e^{x}}{2x}+\frac{ce^{-x}}{x}$$

练习 (2) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

解 用公式求解，$p(x) = -2x, Q(x) = 4x$

$$y = e^{-\int 2xdx}(\int 4xe^{\int 2xdx}dx + c)$$

$$= e^{-x^2}(\int 4xe^{x^2}dx + c)$$

$$= e^{-x^2}(2e^{x^2} + c)$$

即： $y = 2 + ce^{-x^2}$

练习 (3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$$

解 方程可以改写为:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}x+y^2 \qquad p(y)=\frac{1}{y},\ \ Q(y)=y^2$$

故通解为:

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}+c\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+c\right)$$

即: $x=\frac{1}{2}y^3+cy$ 或 $y=cx-\frac{1}{2}y^3$

练习

(1) $xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0$

(2) $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$

练习 (1) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$

解 方程各项同除以 xy^3dx

得: $$y^{-3}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y^{-2}+1+\ln x$$

令 $z=y^{-2}$, $\dfrac{dz}{dx}=-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$

于是方程化为: $$\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{x}z-2(1+\ln x)$$

$$z=\frac{1}{x^2}[\int -2(1+\ln x)x^2dx+c]=\frac{1}{x^2}(-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+c)$$

即 $$y^{-2}=\frac{c}{x^2}-\frac{4}{9}x-\frac{2}{3}x\ln x$$

练习 (2) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

解 $$y'=-y^2e^x+2ye^{2x}+e^x-e^{3x}$$

经观察，方程有一个特解 $\tilde{y}=e^x$

令 $$y=e^x+u$$

$$u'=-u^2e^x-2ue^{2x}$$

$$y=e^x+\frac{1}{c+e^x}$$

思考题

(1) $e^{-y}\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$

(2) $y'-e^{x}+e^{x+y}=0$

(3) $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$

作业： **P.48 1(1,6,8,12,13,16)**

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

提示：1 $e^{-y}\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$ $\quad e^{-y}\dfrac{dy}{dx}+e^{-y}=xe^{x}$

$\dfrac{de^{-y}}{dx}=e^{-y}-xe^{x}$（线性方程）

2 $y'-e^{x}+e^{x+y}=0$ $\quad (e^{y})'-e^{x}e^{y}+e^{x}e^{2y}=0$

$u'-e^{x}u+e^{x}u^{2}=0$（伯努利方程）

3 $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$

$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{x-\ln y}{y\ln y}=-\dfrac{1}{y\ln y}x+\dfrac{1}{y}$（线性方程）

$$y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$$

解　原方程可改写为:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\ln y}{x-\ln y}\qquad\qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{x-\ln y}{y\ln y}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y\ln y}x+\frac{1}{y}\qquad P(y)=-\frac{1}{y\ln y},\qquad Q(y)=\frac{1}{y}$$

故通解为: $$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left(\int\frac{1}{y}\cdot e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{\ln y}{y}dy+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{\ln y}{y}dy+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left[\frac{1}{2}(\ln y)^2+c\right]$$

即: $$x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{c}{\ln y}$$

或: $$(2x-\ln y)\ln y=2c$$

§2.3　恰当微分方程与积分因子

/exact differential equations and integrating factors/

一、恰当方程的定义及条件

设$u=u(x,y)$是一个连续可微的函数,则它的全微分为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

如果我们恰好碰见了方程

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=0$$

就可以马上写出它的隐式解

$$u(x,y)=c.$$

1 恰当方程的定义

定义1　若有函数$u(x,y)$,使得

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

则称微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

是**恰当方程**. 此时(1)的通解为$u(x,y)=c.$

如 $d(xy)=\ xdy+ydx=0$

$$d(x^3y+xy^2)=(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$$

$$d(\int f(x)dx+\int g(y)dy)=\ f(x)dx+g(y)dy=0$$

是恰当方程.

需考虑的问题

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (1)}$$

(1) 判断方程(1)是否为恰当方程?

(2) 若(1)是恰当方程,怎样求解?

(3) 若(1)不是恰当方程,有无可能转化为恰当方程求解?

2 方程为恰当方程的充要条件

定理1 设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在一个矩形区域R中连续且有连续的一阶偏导数,则方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad (2).$$

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1)}$$

证明 “必要性” 设(1)是恰当方程, 则有函数$u(x,y)$, 使得

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \ = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

故有 $$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

从而 $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

由于$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$都是连续的, 从而有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,

故 $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

“充分性”　　若 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$，

则需构造函数$u(x,y)$,满足

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy, \qquad (4)$$

即应满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y), \qquad (6)$$

从(5)出发,把y看作参数,解这个方程得

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y).$$

$$\boxed{u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y).}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y), \quad (6)}$$

这里$\varphi(y)$是y的任意可微函数,

下面选择$\varphi(y)$,使u同时满足(6),即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N$$

因此 $$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad (7)$$

下面证明(7)的右端与x无关, 即对x的偏导数常等于零

事实上 $$\frac{\partial}{\partial x}[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\equiv 0.$$

于是,(7)右端的确只含有y,积分之得

$$\varphi(y)=\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy,$$

$$\boxed{\frac{d\varphi(y)}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad (7)}$$

故

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy, \quad (8)$$

即$u(x,y)$存在,从而(1)为恰当方程。

注:若(1)为恰当方程,则其通解为

$$\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=c, \quad c\text{为任常数}$$

二、恰当方程的求解

1 不定积分法

1^0 判断$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$是否为恰当方程,

若是进入下一步.

2^0 求$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$,

3^0 由$\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$求$\varphi(y)$.

例1 验证方程

$$(e^x + y)dx + (x - 2\sin y)dy = 0$$

是恰当方程,并求它的通解.

解: 这里$M(x,y) = e^x + y, N(x,y) = x - 2\sin y.$

所以$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$,

故所给方程是恰当方程.

由于所求函数$u(x,y)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2\sin y,$$

由偏导数的定义,只要将y看作常数,将$e^x + y$对x积分得

$$u(x,y) = \int (e^x + y)dx + \varphi(y) = e^x + yx + \varphi(y).$$

$$\boxed{u(x,y)=e^x+yx+\varphi(y).}$$

对$u(x,y)$关于y求偏导数,得$\varphi(y)$应满足的方程为

$$x+\frac{d\varphi(y)}{dy}=x-2\sin y$$

即 $$\frac{d\varphi(y)}{dy}=-2\sin y$$

积分后得: $\varphi(y)=2\cos y,$

故 $u(x,y)=e^x+yx+2\cos y.$

从而方程的通解为

$$e^x+yx+2\cos y=c.$$

2 分组凑微法

采用“分项组合”的方法,把本身已构成全微分的项分出来,再把余的项凑成全微分.

---应熟记一些简单二元函数的全微分.

如

$$ydx + xdy = d(xy),$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \qquad d(\ln|\frac{x}{y}|),$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \qquad d(\arctan\frac{x}{y}),$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \qquad \frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|).$$

$$xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \qquad \frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln|xy|)$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$$

例2 求方程 $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ 的通解.

解: 这里$M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$,

所以 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$,

故所给方程是恰当方程. 把方程重新“分项组合”得

$$3x^2dx++4y^3dy+(6xy^2dx+6x^2ydy)=0$$

即 $$dx^3+dy^4+(3y^2dx^2+3x^2dy^2)=0$$

或写成 $$d(x^3+y^4+3x^2y^2)=0$$

故通解为: $x^3+y^4+3x^2y^2=c$, c为任常数。

例3 验证方程

$$(\cos x\sin x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0,$$

是恰当方程,并求它满足初始条件y(0)=2的解.

解:这里$M(x,y) = \cos x\sin x - xy^2$, $N(x,y) = y(1-x^2)$,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

故所给方程是恰当方程. 把方程重新“分项组合”得

$$\cos x\sin x dx - (xy^2dx + x^2ydy) + ydy = 0,$$

即 $$d\frac{1}{2}\sin^2 x - d\frac{1}{2}x^2y^2 + d\frac{1}{2}y^2 = 0,$$

$$\boxed{d\frac{1}{2}\sin^2 x - d\frac{1}{2}x^2y^2 + d\frac{1}{2}y^2 = 0}$$

或写成 $d(\sin^2 x - x^2y^2 + y^2) = 0,$

故通解为: $\sin^2 x - x^2y^2 + y^2 = c,$

由初始条件$y(0) = 2,$得 $c = 4,$

故所求的初值问题的解为:

$$\sin^2 x - x^2y^2 + y^2 = 4.$$

3 线积分法

定理1充分性的证明也可用如下方法:

由于 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$,

由数学分析曲线积分与路径无关的定理知:

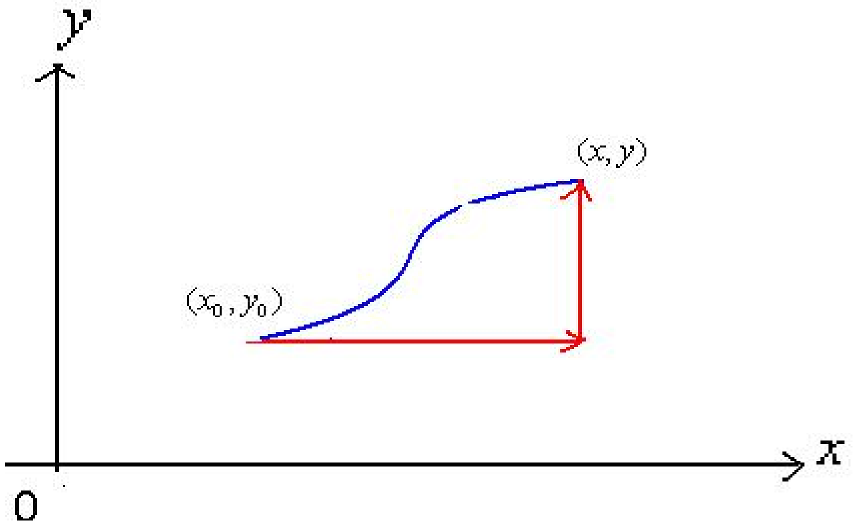
$M(x,y)dx+N(x,y)dy$为某函数$u(x,y)$的全微分,

即有函数$u(x,y)$,使

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

从而(1)为恰当方程。

这时,取$(x_0,y_0)\in R$,则



$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

$$=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx \ +\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy,$$

从而(1)的通解为

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=c,\quad c\text{为任常数。}$$

例4 求解方程

$$(y\cos x+2xe^{y})dx+(\sin x+x^{2}e^{y}+2)dy=0.$$

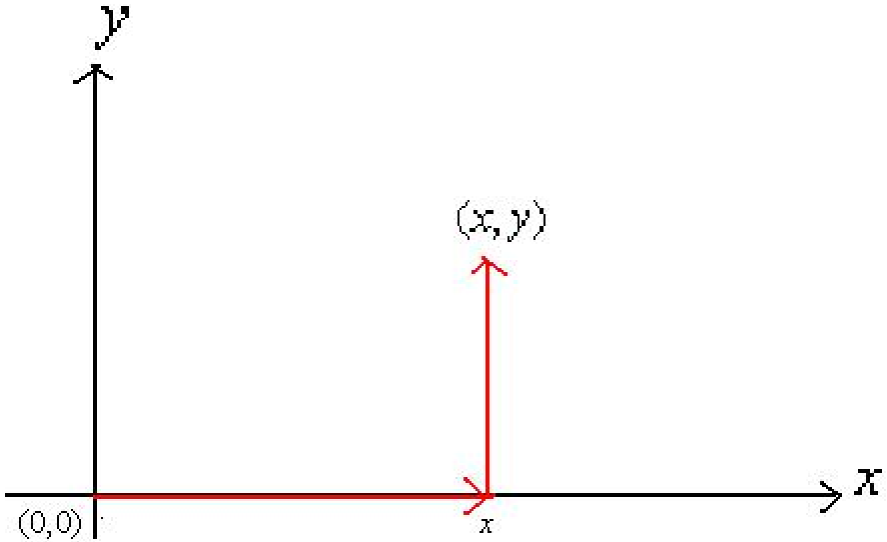
解: 由于$M(x,y)=y\cos x+2xe^{y}, N(x,y)=\sin x+x^{2}e^{y}+2,$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos x+2xe^{y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

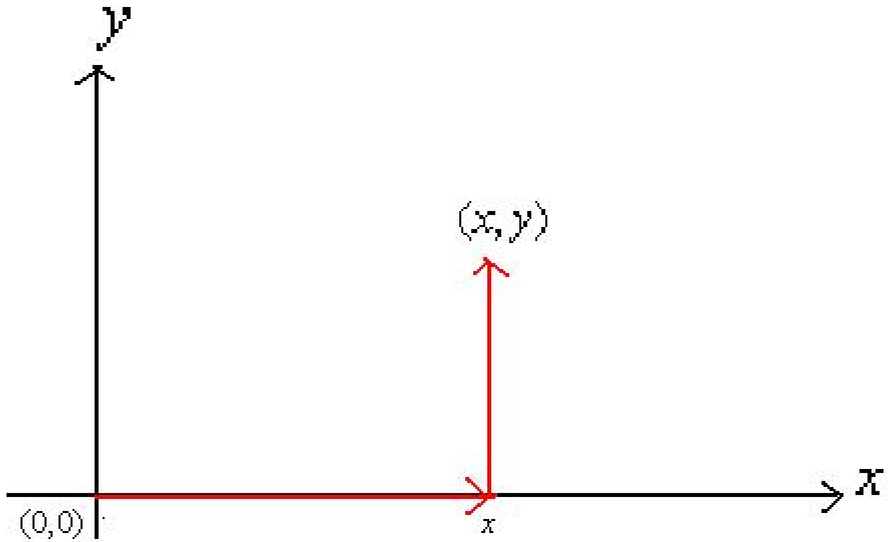
故所给方程是恰当方程.

由于$M(x,y), N(x,y)$在全平面上连续,

故取$(x_0,y_0)=(0,0)$, 则



$$\boxed{\begin{aligned} M(x,y) &= y\cos x + 2xe^y \\ N(x,y) &= \sin x + x^2e^y + 2, \end{aligned}}$$



$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= \int_0^x M(x,0)dx + \int_0^y N(x,y)dy$$

$$= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (\sin x + x^2e^y + 2)dy$$

$$= x^2 + y\sin x + x^2(e^y - 1) + 2y.$$

$$= y\sin x + x^2e^y + 2y.$$

故通解为: $y\sin x + x^2e^y + 2y = c,\quad c$为任常数.

三、积分因子

非恰当方程如何求解?

对变量分离方程:

$$dy - f(x)\varphi(y)dx = 0, \quad \text{不是恰当方程.}$$

方程两边同乘以$\dfrac{1}{\varphi(y)}$,得

$$\frac{1}{\varphi(y)}dy - f(x)dx = 0,$$

$$\frac{\partial(-f(x))}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \dfrac{1}{\varphi(y)}}{\partial x} \qquad \text{是恰当方程.}$$

对一阶线性方程: $dy-(P(x)y+Q(x))dx=0,$

不是恰当方程. 方程两边同乘以$e^{-\int P(x)dx}$,得

$$e^{-\int P(x)dx}dy-e^{-\int P(x)dx}(P(x)y+Q(x))dx=0,$$

则 $$\frac{\partial e^{-\int P(x)dx}}{\partial x}=-p(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\frac{\partial\left(-e^{-\int P(x)dx}(p(x)y+Q(x))\right)}{\partial y}$$ 是恰当方程.

可见,对一些非恰当方程,乘上一个因子后,可变为恰当方程.

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1)}$$

1 定义 如果存在连续可微函数$\mu(x,y)\neq 0$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

为恰当方程,则$\mu(x,y)$是方程(1)的一个积分因子.

例5 验证$\mu(x,y)=x^2y$是方程

$$(3y+4xy^2)dx+(2x+3x^2y)dy=0$$

的一个积分因子,并求其通解.

解: 对方程有

$$\mu(x,y)M(x,y) = 3x^2y^2+4x^3y^3$$

$$\mu(x,y)N(x,y) = 2x^3y+3x^4y^2$$

由于

$$\frac{\partial\mu(x,y)M(x,y)}{\partial y} = 6x^2y+12x^2y^2 = \frac{\partial\mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

故所给方程乘于$\mu(x,y)$后为恰当方程,

所以$\mu(x,y)$是其积分因子.

对方程两边同乘以$\mu(x,y)=x^2y$后得

$$(3x^2y^2+4x^3y^3)dx+(2x^3y+3x^4y^2)dy=0$$

把以上方程重新“分项组合”得

$$(3x^2y^2dx+2x^3ydy)+(4x^3y^3dx+3x^4y^2)dy=0$$

即 $dx^3y^2+dx^4y^3=0$

也即 $$d(x^3y^2+x^4y^3)=0$$

故所给方程的通解为:

$$x^3y^2+x^4y^3=c,\quad c\text{为任常数。}$$

2 积分因子的确定

$\mu(x,y)$是方程$M(x,y)dx+N(x,y)=0$的积分因子的充要条件是：

$$\frac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

即 $$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu$$

$$\boxed{N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu}$$

上面方程是以$\mu(x,y)$为未知函数的偏微分方程，要想从以上方程求出$\mu(x,y)$，一般来说比直接解微分方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$更困难.

尽管如此，方程

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu$$

还是提供了寻找特殊形式积分因子的途径.

如果方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$存在仅与x有关的积分因子$\mu(x,y)=\mu(x)$，则$\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$，这时方程

$$\boxed{N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu}$$

变成 $$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

即 $$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx$$

由于上式左侧仅与 x有关，

所以上式右侧只能是x的函数的微分，

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}dx}$$

从而微分方程$M(x,y)dx+N(x,y)=0$有一个仅依赖于x的积分因子的必要条件是

$$\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}$$

只是x的函数$\psi(x)$,而与y无关.

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu}=\psi(x)dx} \qquad (10)$$

此时求得积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}, \quad 这里\psi(x)=\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} \qquad (10)$$

另一方面,

若(10)只是x的函数$\psi(x)$,而与y无关.

则$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}$, 这里$\psi(x)=\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}$

是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 一个积分因子。

事实上， $\boxed{\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}}$， $\boxed{这里\psi(x)=\dfrac{(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})}{N}}$

$$\frac{\partial\mu(x)N(x,y)}{\partial x}=N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}+\mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$=N(x,y)e^{\int\psi(x)dx}\psi(x)+\mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$=(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})\mu(x)+\mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$=\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x)M(x,y)}{\partial y}$$

故$\mu(x)$是方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$一个积分因子.

3 定理 微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y) = 0, \qquad (1)$$

有一个仅依赖于x的积分因子的充要条件是

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N},$$

仅与x有关,这时(1)的积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x)dx}, \qquad 这里\,\psi(x) = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}$$

同理,微分方程(1)有一个仅依赖于y的积分因子的充要条件是

$$\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{-M},$$

仅与y有关,这时(1)的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int \varphi(y)dy}, \qquad 这里\varphi(y)=\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{-M}.$$

例6 求微分方程 $(\frac{y^2}{2}+2ye^x)dx+(y+e^x)dy=0$ 的通解.

解: 这里$M(x,y)=\frac{y^2}{2}+2ye^x, N(x,y)=y+e^x,$

由于 $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=y+2e^x \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}= e^x,$

故它不是恰当方程,

又由于 $$\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}=\frac{y+e^x}{y+e^x}=1=\psi(x)$$

它与y无关,故方程有一个仅与x有关的积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}=e^{\int 1dx}=e^{x}$$

$$\boxed{\psi(x)=\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}=1}$$

对方程两边同乘以$\mu(x)=e^{x}$后得

$$(\frac{y^2}{2}e^{x}+2ye^{2x})dx+(ye^{x}+e^{2x})dy=0$$

利用恰当方程求解法得通解为

$$\frac{y^2}{2}e^{x}+ye^{2x}=c,\quad c\text{为任意常数}.$$

注：积分因子是求解积分方程的一个极为重要的方法,绝大多数方程求解都可以通过寻找到一个合适的积分因子来解决,但求微分方程的积分因子十分困难,需要灵活运用各种微分法的技巧和经验.

例7 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}, \quad (y>0).$$

解: 方程改写为: $xdx + ydy = \sqrt{x^2+y^2}dx,$

或: $$\frac{1}{2}d(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2}dx,$$

易看出,此方程有积分因子 $\mu(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

以$\mu(x,y)$乘改写后的方程两边得:

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx,$$

即 $d\sqrt{x^2+y^2}=dx,$

$$\boxed{\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx,}$$

故方程的通解为: $\sqrt{x^2+y^2}=x+c,$ c为任常数.

例8　求解方程

$$ydx + (y - x)dy = 0.$$

解:　这里$M(x, y) = y, N(x, y) = y - x,$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -1,$$

故方程不是恰当方程,

方法1:

因为 $\dfrac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M}=-\dfrac{2}{y}=\varphi(y)$ 仅与y有关,

故方程有一个仅依赖于y的积分因子

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2},$$

以$\mu=\dfrac{1}{y^2}$乘方程两边得: $\dfrac{1}{y}dx+\dfrac{1}{y}dy-\dfrac{x}{y^2}dy=0.$

即 $$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0.$$

故方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

$$ydx+(y-x)dy=0.$$

方法2: 方程改写为: $ydx-xdy=-ydy,$

容易看出方程左侧有积分因子:

$$\mu=\frac{1}{y^2}\text{ 或 }\frac{1}{x^2}\text{ 或 }\frac{1}{xy}\text{ 或 }\frac{1}{x^2+y^2}\cdots$$

但方程右侧仅与y有关,

故取$\mu=\dfrac{1}{y^2}$为方程的积分因子,由此得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-\frac{dy}{y}.$$

故方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

$$ydx+(y-x)dy=0.$$

方法3: 方程改写为:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

这是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$代入方程得

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u},$$ 即 $$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{1}{x}dx,$$

故通解为: $$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+c,$$

变量还原得原方程的通解为: $$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

$$ydx+(y-x)dy=0.$$

方法4: 方程改写为:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}x-1,$$

它是以x为未知函数, y为自变量的一阶线性微分方程

故方程的通解为: $x=e^{\int p(y)dy}(\int Q(y)e^{-\int p(y)dy}dy+\tilde{c})$

$$=e^{\int\frac{1}{y}dy}(-\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+\tilde{c})$$

$$=y(-\int\frac{1}{y}dy+\tilde{c})=y(-\ln|y|+\tilde{c}),$$

即方程的通解为: $\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$

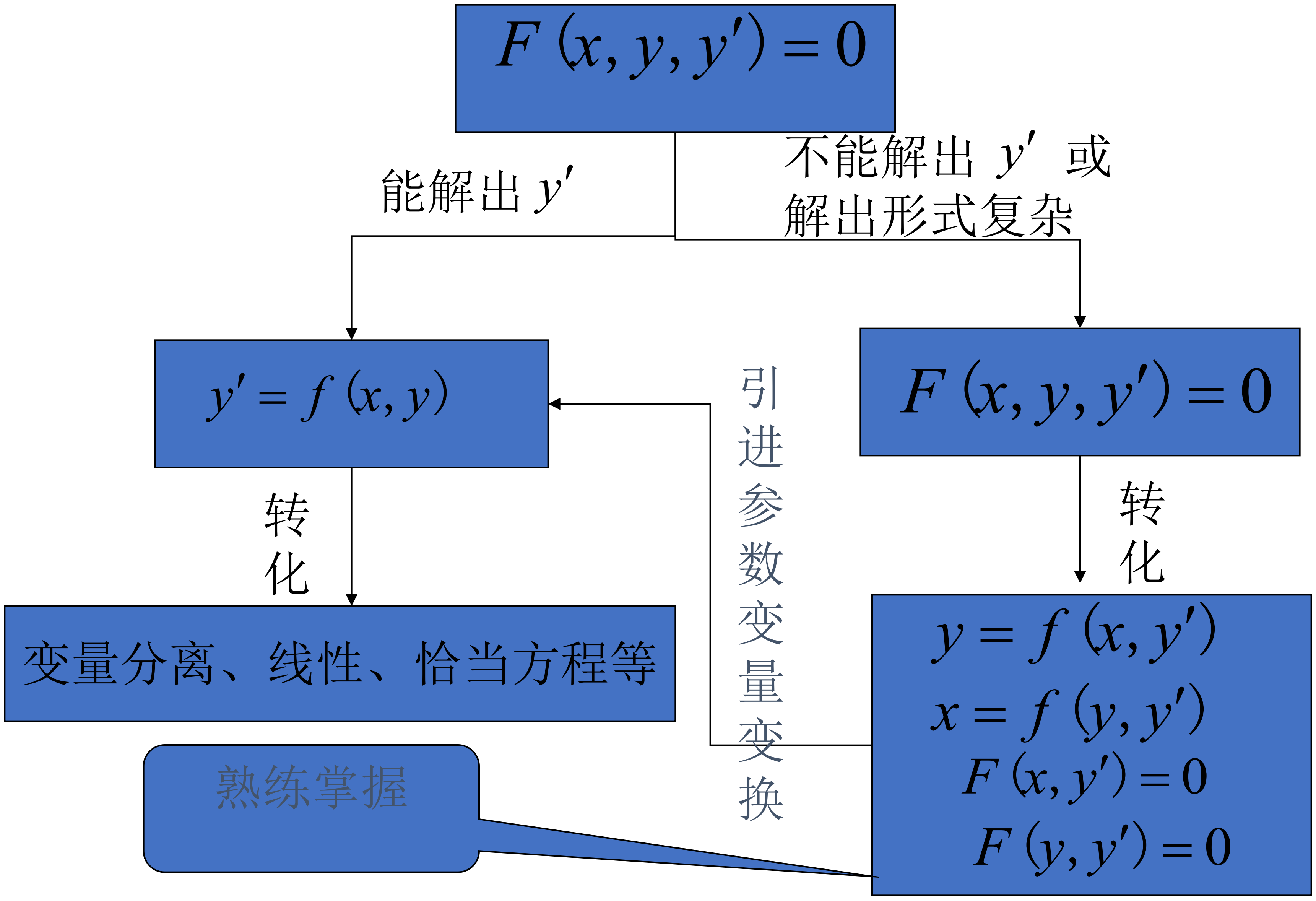
作业/Homework/

P60　2(单数）．6

§2.4 一阶隐式微分方程及其参数表示

/Implicit First-Order ODE and Parameter Representation/

§ 2.4 Implicit First-Order ODE and Parameter representation



一、 能解出 y （或 x ）的方程

1 $y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ (2.4.1)

这里假设函数 $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ 有连续的偏导数。

解法： 引进参数 $\frac{dy}{dx} = P$ ，则(2.4.1)变为

$$y = f(x, p) \tag{2.4.2}$$

两边关于 x 求导，并把 $p = \frac{dy}{dx}$ 代入，得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.4.3}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

关于 x 和 p 显式方程

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (2.4.1)$$

$$y = f(x, p) \qquad (2.4.2)$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \qquad (2.4.3)$$

(i) 若已得出(2. 4. 3)的通解形式为 $p = \varphi(x,c)$ 代入(2.4.2)得

$y = f(x,\varphi(x,c))$ 就是(2. 4. 1)的通解。

(ii) 若得出(2. 4. 3)通解形式为 $x = \psi(p,c)$ ，则原方程(2.4.1)

有参数形式的通解 $\begin{cases} x = \psi(p,c) \\ y = f(\psi(p,c), p) \end{cases}$

其中 p 是参数，c为任意常数。

(iii) 若求得(2. 4. 3)通解形式 $\Phi(x,p,c) = 0$ ，则原方程(2.4.1)

有参数形式通解 $\begin{cases} \Phi(x,p,c) = 0 \\ y = f(x,p) \end{cases}$

其中 p 是参数，c为任意常数。

2 $x = f(y, \frac{dy}{dx})$ (2.4.4) $\frac{dy}{dx} = p$

解法 $x = f(y, p)$ (2.4.5)

两边对 y 求导 $\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$ (2. 4. 6)

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

若求得为 $p = \psi(y, c)$

则(2. 4. 4)的通解为$x = f(y, \psi(y, c))$

若求得为 $\Phi(y, p, c) = 0$

则(2. 4. 4)的通解为 $\begin{cases} x = f(y, p) \\ \Phi(y, p, c) = 0 \end{cases}$

例1　　求解方程　$(\frac{dy}{dx})^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

解法1：　解出 y　　令 $\frac{dy}{dx} = p$

得　$y = p^3 + 2xp$　　两边对 x 求导

$$p = 3p^2\frac{dp}{dx} + 2x\frac{dp}{dx} + 2p$$

$$3p^2dp + 2xdp + pdx = 0$$

当 $p \neq 0$ 时，上式乘以 p，得

$$3p^3dp + 2xpdp + p^2dx = 0$$

积分，得　$\frac{3p^4}{4} + xp^2 = c$

解出 x，得 $x=\dfrac{c-\dfrac{3}{4}p^4}{p^2}$

将它代入 $y=p^3+2xp$

$$y=p^3+\frac{2(c-\dfrac{3}{4}p^4)}{p}$$

因此，方程参数形式通解 $\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2 \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3 \end{cases}$ $(p\neq 0)$

当 p=0 时，由$y=p^3+2xp$ 可知，y=0也是方程的解。

例1 求解方程 $$(\frac{dy}{dx})^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

解法2: 解出 x，并把 $\frac{dy}{dx} = p$ 得 $x = \frac{y - p^3}{2p}$ $(p \neq 0)$

两边对 y 求导

$$\frac{1}{p} = \frac{p(1-3p^2\frac{dp}{dy}) - (y - p^3)\frac{dp}{dy}}{2p^2}$$

$$pdy + ydp + 2p^3dp = 0 \qquad 2yp + p^4 = c$$

$$y = \frac{c - p^4}{2p} \qquad x = \frac{\frac{c-p^4}{2p} - p^3}{2p} = \frac{c - 3p^4}{4p^2}$$

所以，方程的通解为: $$\begin{cases} x = \dfrac{c}{4p^2} - \dfrac{3}{4}p^2 \\ y = \dfrac{c}{2p} - \dfrac{p^3}{2} \end{cases} \qquad p \neq 0$$

此外，还有解 $y = 0$

例2 求解方程 $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$ 得 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$

两边对 x 求导，得 $p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$

$(\frac{dp}{dx}-1)(2p-x)=0.$ 由 $\frac{dp}{dx}-1=0,$ 得 $p=x+c$

将它代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$

得方程的通解 $y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$

方程的通解 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$

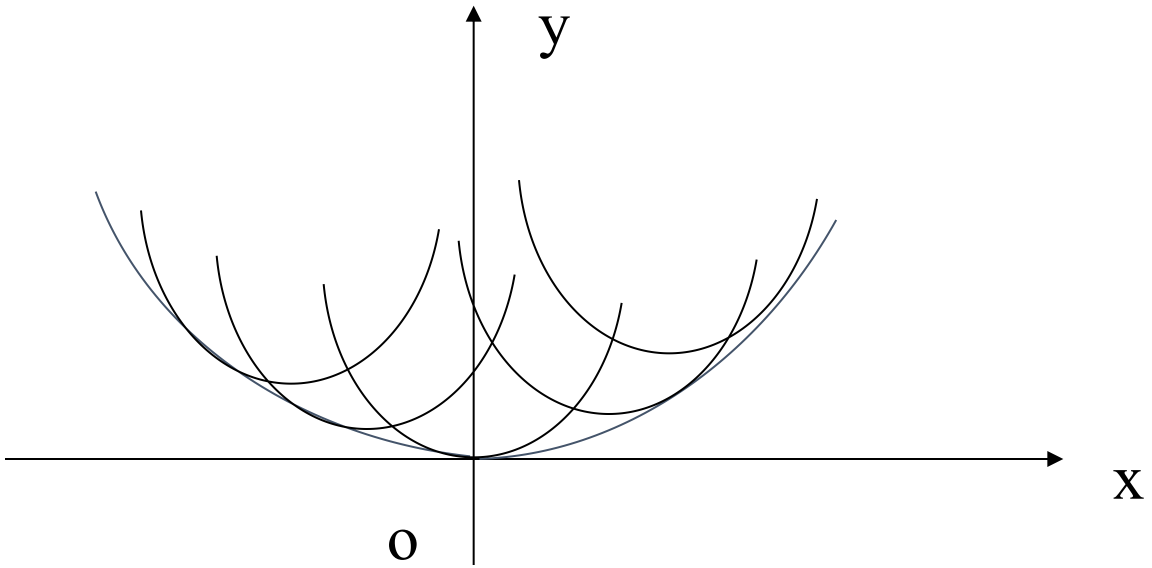
再由 $2p-x=0$ 得 $p=\dfrac{x}{2}$

将它代入 $y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}$，又得方程的一个解 $y=\dfrac{x^2}{4}$

注意: 此解与通解 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$ 中的每一条积分曲线均相切(如图)(P65)，这样的解我们称之为奇解。

下一章将给出奇解的确切含义。

$$y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2 \qquad\qquad y = \frac{x^2}{4}$$



二、不显含 y（或 x 的方程）

3 $F(x,y')=0$ 关键 (2.4.7)

解法： 引入变换 $x=\varphi(t)$，从(2.4.7)得到 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\psi(t)$

(or 引入变换 $y'=\psi(t)$,从(2.4.7)得到 $x=\varphi(t)$)

$$dy=\psi(t)dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$\int dy=\int\psi(t)\varphi'(t)dt \qquad y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$$

则，方程的参数形式通解为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c \end{cases}$$

3 $F(x, y') = 0$ (2.4.7)

特殊情形

令 $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

$$x = \varphi(p)$$

$$dy = pdx = p\varphi'(p)dp$$

$$y = \int p\varphi'(p)dp + c$$

通解为 $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p\varphi'(p)dp + c \end{cases}$

关键

4 $F(y,y')=0$ (2.4.8)

解法： 引入变换 $y \doteq \varphi(t)$, 从(2.4.7)得到 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\psi(t)$

(or 引入变换 $y'=\psi(t)$,从(2.4.7)得到 $y=\varphi(t)$)

$$dy=\psi(t)dx \qquad dx=\frac{1}{\psi(t)}dy=\frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)dt$$

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$$

则，方程的参数形式通解为 $\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$

若 $F(y,0)=0$有实根 $y=k$, 则 $y=k$ 也是方程的解。

4 $F(y,y')=0$ (2.4.8)

特殊情形 令 $y'=\dfrac{dy}{dx}=p$

$$y=\varphi(p)$$

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}\varphi'(p)dp$$

$$x=\int\frac{1}{p}\varphi'(p)dp+c$$

通解为
$$\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+c \\ y=\varphi(p) \end{cases}$$

若 $F(y,0)=0$有实根 $y=k$ 则 $y=k$ 也是方程的解。

例4 求解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$ 这里 $y'=\dfrac{dy}{dx}$

解 令 $y'=p=tx$

则 由方程，得 $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$ 从而 $p=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$

于是 $dy=\dfrac{3t^2}{1+t^3}dx=\dfrac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$

$$y=\int\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt=\frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c$$

通解为
$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2}+c \end{cases}$$

例5 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

解 令 $2-y'=yt$ 把 $y'=2-yt$ 代入原微分方程

得 $y^2(yt-1)=y^2t^2$

由此得 $y=\dfrac{1}{t}+t$ 且 $y'=1-t^2$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{1-t^2}d\left(\frac{1}{t}+t\right)=-\frac{1}{t^2}dt \qquad x=\frac{1}{t}+c$$

方程的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+c \\ y=\dfrac{1}{t}+t \end{cases}$

此外，$y=\pm 2$ 也是方程的解。

练习 求解方程 $y = xy' + \varphi(y')$ $\qquad y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

注意观察方程的解的特点

克莱洛方程
Clairant
Equation

解

$$p = p + xp' + \varphi'(p)p'$$

$$(x + \varphi'(p))p' = 0$$

$p' = 0 \qquad x = -\varphi'(p)$

$p = c \qquad y = cx + \varphi(c)$ 通解

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -\varphi'(p)p + \varphi(p) \end{cases}$$

三　利用变量代换的微分方程积分法

有时方程 $F(x,y,y')=0$ 就 x,y,y' 都不易解出，

或者虽能解出，但积分计算比较复杂，这时，除了引用

适当的参数外，还可以先进行适当的变量代换后再

求解，这种方法称为利用变量代换的微分方程积分法。

但是，如何选择适当的变量来代换，没有一定的规律，

需要在做大量的练习中积累经验.

例6 求解方程

$$(y')^2\cos^2 y + y'\sin x\cos x\cos y - \sin y\cos^2 x = 0$$

解 令 $\sin y = u \quad \sin x = v$

则 $du = \cos y dy, \quad dv = \cos x dx \quad y' = \dfrac{\cos x}{\cos y}\dfrac{du}{dv}$

代入原方程，得 $(\dfrac{du}{dv})^2 + v\dfrac{du}{dv} - u = 0$

即 $u = v\dfrac{du}{dv} + (\dfrac{du}{dv})^2$ 克莱洛方程

通解 $u = c^2 + vc$ 奇解 $u = -\dfrac{v^2}{2}$

$\sin y = c^2 + c\sin x$ $\sin y = -\dfrac{\sin^2 x}{2}$

例7 求方程 $(xy'-y)(yy'+x)=2y'$ 的通解.

解 令 $y^2=u,\quad x^2=v$

则 $du=2ydy,\quad dv=2xdv$ 于是 $y'=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{du}{dv}$

代入原方程，得 $(v\dfrac{du}{dv}-u)(\dfrac{du}{dv}+1)=2\dfrac{du}{dv}$

$$\frac{du}{dv}=p \qquad vp^2-up+vp-u=2p$$

$$u=vp-\frac{2p}{1+p}$$ 克莱洛方程

通解 $y^2=cx^2-\dfrac{2c}{1+c}$ 奇解 $\begin{cases} x^2=\dfrac{2}{(1+p)^2} \\ y^2=\dfrac{2p^2}{(1+p)^2} \end{cases}$

作业/Homework/

P.70 第 （1），（3）题

P.73 第 1（1，2，6，8，10，14）题

第三章　一阶微分方程解的存在唯一性定理

Existence & Uniqueness Theorem of First-Order ODE

第三章　一阶微分方程解的存在唯一性定理

/Existence & Uniqueness Theorem of First-Order ODE/

- 解的存在唯一性定理与逐步逼近法
- 解的一般性质 $\begin{cases}\text{解的延拓性}\\ \text{解对初值的连续依赖性和可微性*}\end{cases}$
- 奇解* $\begin{cases}\text{奇解概念}\\ \text{求奇解的两个方法}\end{cases}$
- 近似计算和误差估计

研究对象

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

主要问题

- 存在性，存在区间？
- 唯一性？
- 延拓性，最大存在区间？
- 初值微小变动时，解的变化情况？

本章要求/Requirements/

- 深刻理解解的存在唯一性定理的条件与结论
- 掌握逐步逼近方法的本思想
- 理解解的一般性质

  解的延拓

  解对初值的连续依赖性和可微性
- 掌握求奇解的两个方法
- 利用逐步逼近序列进行似计算和误差估计

本章目录 /Main Contents/

§ 3.1 解的存在唯一性定理和逐步逼近法

/Existence & Uniqueness Theorem & Progressive Method/

内容提要/Constant Abstract/

- 概念和定义
  - 一阶方程的初值问题
  - 利普希兹条件
- 存在唯一性定理
  - 定理 1
  - 定理 1的证明
    - 命题 1
    - 命题 2
    - 命题 3
    - 命题 4
    - 命题 5
  - 附注
  - 逐步逼近法的思想
  - 定理 2

•本节要求/Requirements/

- 深刻理解解的存在唯一性定理的条件与结论
- 掌握逐步逼近方法的本思想

一 、概念与定义/Concept and Definition/

1. 一阶方程的初值问题(*Cauchy problem*)表示

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.3) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.4) \end{cases}$$

2. 利普希兹条件

函数 $f(x,y)$ 称为在矩形域 ：

$$R:|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.5)$$

关于 y 满足**利普希兹（Lipschitz）条件**，如果存在常数 $L>0$

使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

对所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 都成立。

L 称为利普希兹常数。

二 、存在唯一性定理

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{.........} (3.1.1)$$

定理1

$$R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$$

如果 $f(x,y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足利普希兹条件,

则方程(3. 1. 1)存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$

定义在区间 $|x - x_0| \le h$ ， 且满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$

这里 $h = \min(a, \frac{b}{M})$ $M = \max_{(x,y \in R)} |f(x, y)|$

证明思路

(1) 初值问题(3.1.1)+(3.1.2)的解等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt \qquad (3.5)$$

的连续解.

(2) 构造(3.5)近似解函数列 $\{\varphi_n(x)\}$

任取一连续函数$\varphi_0(x), |\varphi_0(x) - y_0| \le b$, 代入(3.5)右侧的$y$, 得

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi$$

若$\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$, 则$\varphi_0(x)$为解, 否则将$\varphi_1(x)$代入(3.5)右侧的$y$, 得

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))d\xi$$

若$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)$,则$\varphi_1(x)$为解,否则将$\varphi_2(x)$代入(3.5)右侧的$y$,……

$$\varphi_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))d\xi,$$

这里要求$|\varphi_n(x)-y_0|\le b$,

若$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)$,则$\varphi_n(x)$为解,

否则一直下去可得函数列$\{\varphi_n(x)\}$

(逐步求(3.5)的解,逐步逼近法)

(3) 函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于$\varphi(x)$.

这是为了 $$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))d\xi$$
$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(\xi,\varphi_n(\xi))d\xi$$

即 $$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi,$$

只需函数列$\{f(x,\varphi_n(x))\}$在$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于$f(x,\varphi(x))$.

由$\left|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))\right|\le L\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|$

只需$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于$\varphi(x)$.

由于 $\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))=\varphi_n(x)$,

于是函数列$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0-h,x_0+h]$上一致收敛性,等价于函数项级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)),$$

在$[x_0-h,x_0+h]$上一致收敛性.

(4) $\varphi(x)$是积分方程(3.5)定义于$[x_0-h,x_0+h]$上连续解且唯一.

定理1的证明需要证明五个命题：

- 命题 1 求解微分方程的初值问题等价于求解一个积分方程
- 命题 2 构造一个连续的逐步逼近序列
- 命题 3 证明此逐步逼近序列一致收敛
- 命题 4 证明此收敛的极限函数为所求初值问题的解
- 命题 5 证明唯一性

下面分五个命题来证明定理,为此先给出

积分方程

如果一个数学关系式中含有定积分符号且在定积分符号下含有未知函数, 则称这样的关系式为积分方程.

如: $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$,就是一个简单的积分方程.

积分方程的解

对于积分方程$y=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y)dt$,如果存在定义在区间

$I=[\alpha,\beta]$上的连续函数$y=\varphi(x)$,使得

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,\varphi(t))dt$$

在区间I上恒成立,则称$y=\varphi(x)$为该积分方程的解.

定理1的证明

命题1 设 $y=\varphi(x)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \ldots\ldots\ldots(3.1.1) \\ \varphi(x_0)=y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2) \end{cases}$

的解的充要条件是 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad x_0 \le x \le x_0+h \quad \ldots\ldots(3.1.6)$$

的定义于 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上的连续解。

证明:

- 微分方程的初值问题的解满足积分方程（3. 1. 6）。
- 积分方程（3. 1. 6）的连续解是微分方程的初值问题的解。

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \ldots\ldots\ldots (3.1.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.2) \end{cases}$$

证 明

因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1.1)的解，故有：

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x))$$

两边从x_0到x 积分得到：

$$\varphi(x)-\varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0 \le x \le x_0+h$$

把(3.1.2)代入上式，即有：

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0 \le x \le x_0+h$$

因此，$y=\varphi(x)$是积分方程在 $x_0 \le x \le x_0+h$上的连续解.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, x_0 \le x \le x_0+h \cdots\cdots\cdots (3.1.6)$$

反之，如果$y=\varphi(x)$ 是（3. 1. 6）的连续解，则有：

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\le x\le x_0+h \quad \cdots\cdots\cdots (3.1.8)$$

微分之，得到： $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$

又把 $x=x_0$ 代入(3. 1. 8)，得到$\varphi(x_0)=y_0$

因此，$y=\varphi(x)$是方程(3. 1. 1)定义于$x_0\le x\le x_0+h$

上，且满足初始条件(3. 1. 2)的解。

同理，可证在 $x_0-h\le x\le x_0$ 也成立。

命题1证毕.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\cdots\cdots\cdots(3.1.1)\\ \varphi(x_0)=y_0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.2)\end{cases}$$

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, x_0\le x\le x_0+h\cdots\cdots\cdots(3.1.6)$$

现在取$\varphi_0(x) = y_0$，构造皮卡(Picard)逐步逼近函数序列如下：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 - h \le x \le x_0 + h \end{cases} \tag{3.1.9}$$

$$\varphi_0(x) = y_0$$

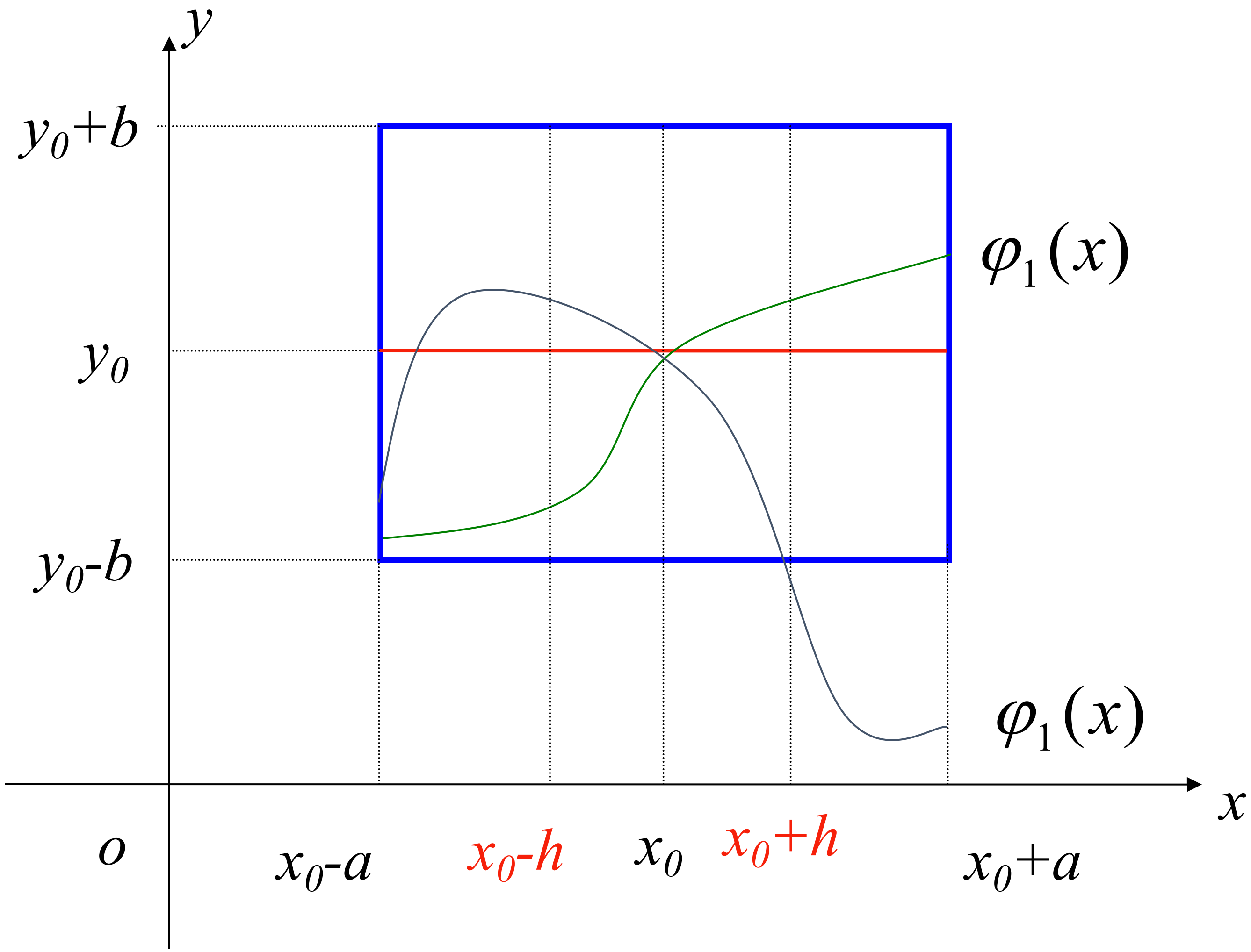
$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))d\xi$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$\varphi_0(x) = y_0 \qquad \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi$$



$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases} \tag{3.1.9}$$

命题2 对于所有的（3.1.9）中函数 $\varphi_n(x)$ 在

$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义、连续，即满足不等式：

$$|\phi_n(x) - y_0| \le b \tag{3.1.10}$$

证 明: （只在正半区间来证明，另半区间的证明类似）

当 $n=1$ 时， $\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi$

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b$$

$\varphi_1(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义, 连续

即命题2 当 n=1 时成立。

现在用数学归纳法证明对于任何正整数 n ，命题2都成立。

即 当 $n=k$ 时，$\varphi_k(x)$在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义，连续，

也就是满足不等式 $\left|\varphi_k(x) - y_0\right| \le b$

而当 $n=k+1$ 时， $\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi$

$$\left|\varphi_{k+1}(x) - y_0\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi, \varphi_k(\xi))\right| d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b$$

$\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义，连续。

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases} \qquad (3.1.9)}$$

即命题 2 在 $n=k+1$ 时也成立。

由数学归纳法得知命题 2 对于所有 n 均成立。

命题 2 证毕

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases} \tag{3.1.9}$$

命题2 对于所有的（3. 1. 9）中函数 $\varphi_n(x)$ 在

$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义、连续，即满足不等式：

$$\left|\phi_n(x) - y_0\right| \le b \tag{3.1.10}$$

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上是一致收敛的。

考虑级数:

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)],\quad x_0\le x\le x_0+h \qquad (3.1.11)$$

它的部分和为：$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\varphi_n(x)$

为此，进行如下的估计，由逐步逼近序列(3.1.9)有:

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0-h\le x\le x_0+h$$

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\le\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|d\xi\le M(x-x_0) \qquad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| &\le \int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|d\xi \\ &\le L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|d\xi \le L\int_{x_0}^{x}M(\xi-x_0)d\xi \\ &\le \frac{ML}{2!}(x-x_0)^2\end{aligned}$$

假设对于正整数 n ，不等式

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{成立,}$$

$$\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)\right|d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi = \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

于是，由数学归纳法得到：对于所有的正整数 k，有如下的估计:

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k \qquad x_0 \le x \le x_0+h \qquad (3.1.13)$$

由此可知，当 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 时

$$\left|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k \qquad (3.1.14)$$

(3. 1. 14)的右端是正项收敛级数$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$ 的一般项，

由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(简称维氏判别法)，

级数(3. 1. 11) 在$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛，

因而序列$\{\varphi_n(x)\}$ 也在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛。

命题3证毕

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$在$x_0 \le x \le x_0 + h$上是一致收敛的。

$$\left|\varphi_n(x) - y_0\right| \le b \qquad (3.1.10)$$

现设 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$

则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上连续，且由(3.1.10)

又可知 $\left|\varphi(x) - y_0\right| \le b$

命题4 $\varphi(x)$ 是积分方程(3.1.6)的定义于$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的连续解。

证 明: 由利普希兹条件

$$\left|f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi(x))\right| \le L\left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛于$\varphi(x)$

即知序列$\{f(x,\varphi_n(x))\} \to f(x,\varphi(x))$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 一致收敛。

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, x_0 \le x \le x_0 + h \cdots\cdots\cdots(3.1.6)$$

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases} \tag{3.1.9}$$

因而，对(3. 1. 9)两边取极限, 得到:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

即 $$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程(3. 1. 16)的定义于$x_0 \le x \le x_0 + h$上的连续解。

命题4 证毕

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, x_0 \le x \le x_0 + h \cdots\cdots\cdots (3.1.6)$$

$$\boxed{y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, x_0 \le x \le x_0 + h \cdots\cdots\cdots(3.1.6)}$$

命题5 若 $\psi(x)$ 也是积分方程(3. 1. 6)的定义于

$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的一个连续解，则

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0 + h$$

证明

首先证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数。

为此，从 $\varphi_0(x) = y_0$ $\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)d\xi) \quad (n \ge 1)$

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi$$

进行如下的估计

$$|\varphi_0(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \psi(\xi))| d\xi \le M(x - x_0)$$

$$\left|\varphi_0(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi \le M(x-x_0)$$

$$\left|\varphi_1(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_0(\xi)-\psi(\xi)\right|d\xi$$

$$\le ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)d\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

现设 $\left|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)\right| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$

则有 $\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$

有 $$\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right| d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} \left|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)\right| d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x} (\xi-x_0)^n d\xi$$

$$= \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

故由数学归纳法得知对于所有的正整数 n ，有下面的估计式

$$\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (3.1.15)$$

因此，在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有：

$$\left|\varphi_n(x) - \psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad (3.1.16)$$

$\frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$ 是收敛级数的公项。故 $n \to \infty$ 时，$\frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} \to 0$

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

因而 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛于$\psi(x)$

根据极限的唯一性，即得：$\varphi(x) \equiv \psi(x) \quad x_0 \le x \le x_0 + h$

命题5证毕

综合命题1-5，即得到存在唯一性定理的证明。

例 求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的第三次近似解。

$$\varphi_0(x) = 0 \qquad \varphi_1(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)]dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2}]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

附 注/Remark/

1）如果在 R 上 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在$\boldsymbol{R}$上关于 $\boldsymbol{y}$

满足利普希兹条件，反之不成立。

证 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上连续，则在 R 上有界，记为L

$\forall (x, y_i) \in R \quad i = 1,2$ 由中值定理

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| = \left|f_y'(x,\xi)\right| \cdot \left|y_1 - y_2\right| \quad \xi \text{ 在 } y_1,\ y_2 \text{ 之间}$$

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|$$

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

这条件是充分条件，而非必要条件。

例1 $\dfrac{dy}{dx} = |y|$ R 为中心在原点的矩形域

$f(x, y) = |y|$ 在 $y = 0$（x 轴上）无导数

但 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \big||y_1| - |y_2|\big| \le |y_1 - y_2|$

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且有界 $\longrightarrow$ $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且无界 $\longrightarrow$ $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 不满足利普希兹条件。

注意：

对于给定在R上有定义的函数$f(x,y)$，根据定义去验证它是否关于y满足Lipschitz条件，一般比较困难，下面给出在实际应用中容易判断的两个充分条件.

1^0 如果$f(x,y)$在R上关于y的偏导数$f_y(x,y)$存在且有界，则$f(x,y)$在R上关于y满足Lipschitz条件.

2^0 如果$f(x,y)$在R上关于y的偏导数$f_y(x,y)$连续，则$f(x,y)$在R上关于y满足Lipschitz条件.

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| = \left|f_y(x,y_2+\theta(y_1-y_2))\right|\left|y_1-y_2\right|$$
$$\le L\left|y_1-y_2\right|$$

附 注/Remark/

2) 定理1 中的两个条件是保证 Cauchy Problem 存在唯一的充分条件，而非必要条件。

例2 当连续条件不满足时，解也可能存在唯一。

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \begin{cases} a & y = ax \\ 0 & y \neq ax \end{cases} \qquad a \neq 0$$

$f(x,y)$ 在以原点为中心的矩形域中不连续，但解存在唯一

$$\begin{cases} 当 \quad y = ax & \dfrac{dy}{dx} = a \quad y = ax \\ 当 \quad y \neq ax & \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad y = C \end{cases}$$

例3 当 Lipscitz 条件不满足时，解也可能存在唯一。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \begin{cases} y \ln|y| & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$f(x,y)$ 在 $(x,0)$ 的任何邻域内不满足Lipscitz 条件，但解存在唯一

$$|f(x, y_1) - f(x,0)| = |y_1 \ln|y_1| - 0| = |\ln|y_1||y_1 - 0|$$

$$y \to 0, \quad |\ln|y_1|| \to \infty$$ 不可能有界

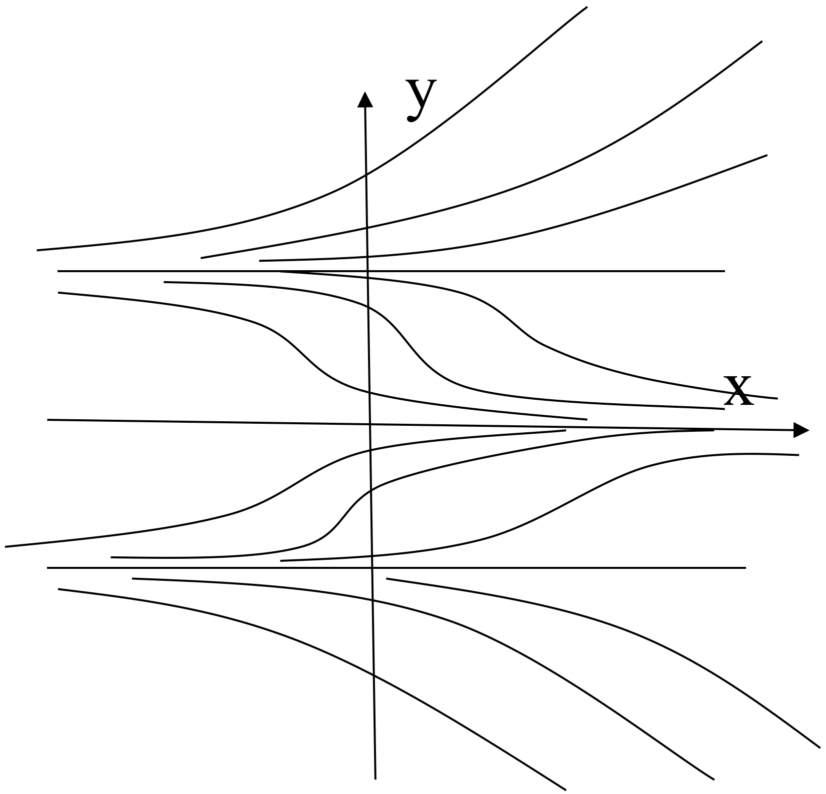
$$\frac{dy}{dx} = y\ln|y| \qquad \frac{dy}{y\ln|y|} = dx$$

$$\frac{dy}{y\ln|y|} = dx \qquad \frac{d\ln|y|}{\ln|y|} = dx$$

$$\ln\left|\ln|y|\right| = x + c_1$$

$$\ln|y| = c_2 e^x$$

$$\begin{cases} y = \pm e^{c_2 e^x} \\ y = 0 \end{cases}$$



附 注/Remark/

3）若 $f(x,y)$ 在带域 $\alpha \le x \le \beta \ (-\infty < x < +\infty)$ 中连续，

且对 y 满足Lipschitz条件，则在整个区间 $[\alpha, \beta]$

中存在唯一满足条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

的解 $\varphi(x)$。记 $M = \max\limits_{(x \in [\alpha, \beta])} |f(x, y_0)|$

例4 设方程(3. 1)为线性方程 $\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + Q(x)$

则当 $P(x), Q(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由任一初值

(x_0, y_0), $x_0 \in [\alpha, \beta]$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha, \beta]$

上都存在。

附 注/Remark/

4） 定理中$h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\}$的几何意义

在矩形R中有$|f(x,y)|\le M$,

故初值问题(3.1)的解曲线的斜率必介于$-M$与M之间,

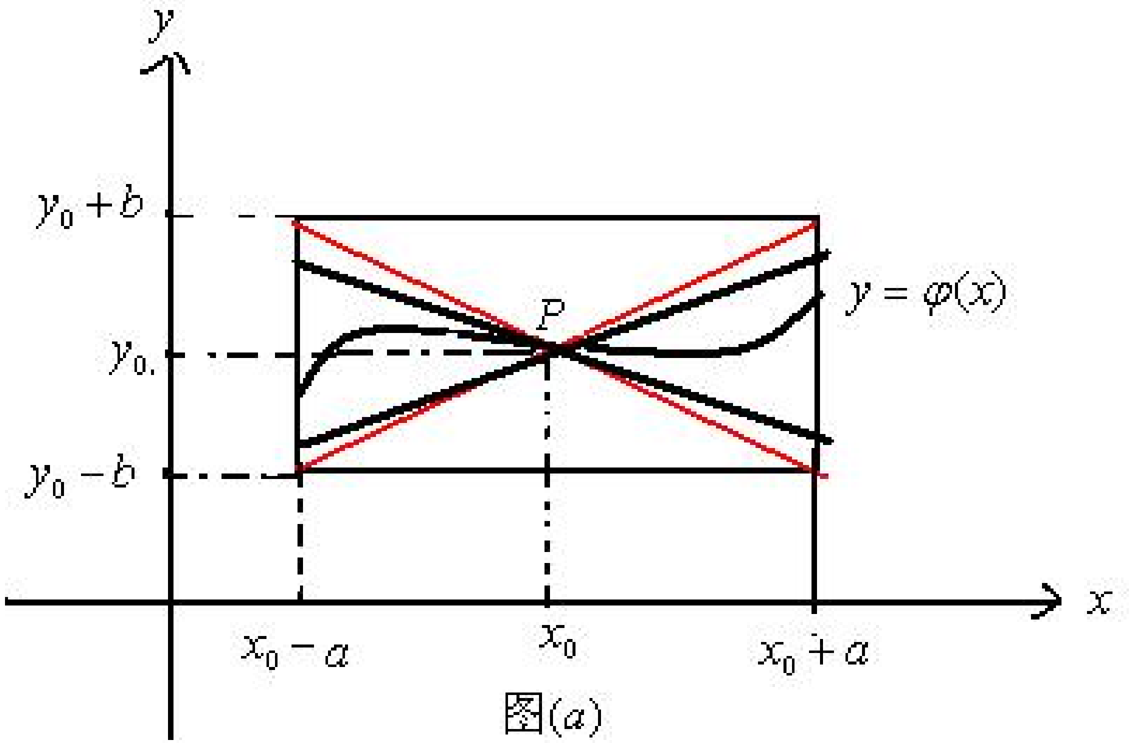
过点(x_0,y_0)分别作斜率为$-M$和M的直线,

当$M\le\dfrac{b}{a}$时(如图(a)

所示),解$y=\varphi(x)$在

$x_0-a\le x\le x_0+a$

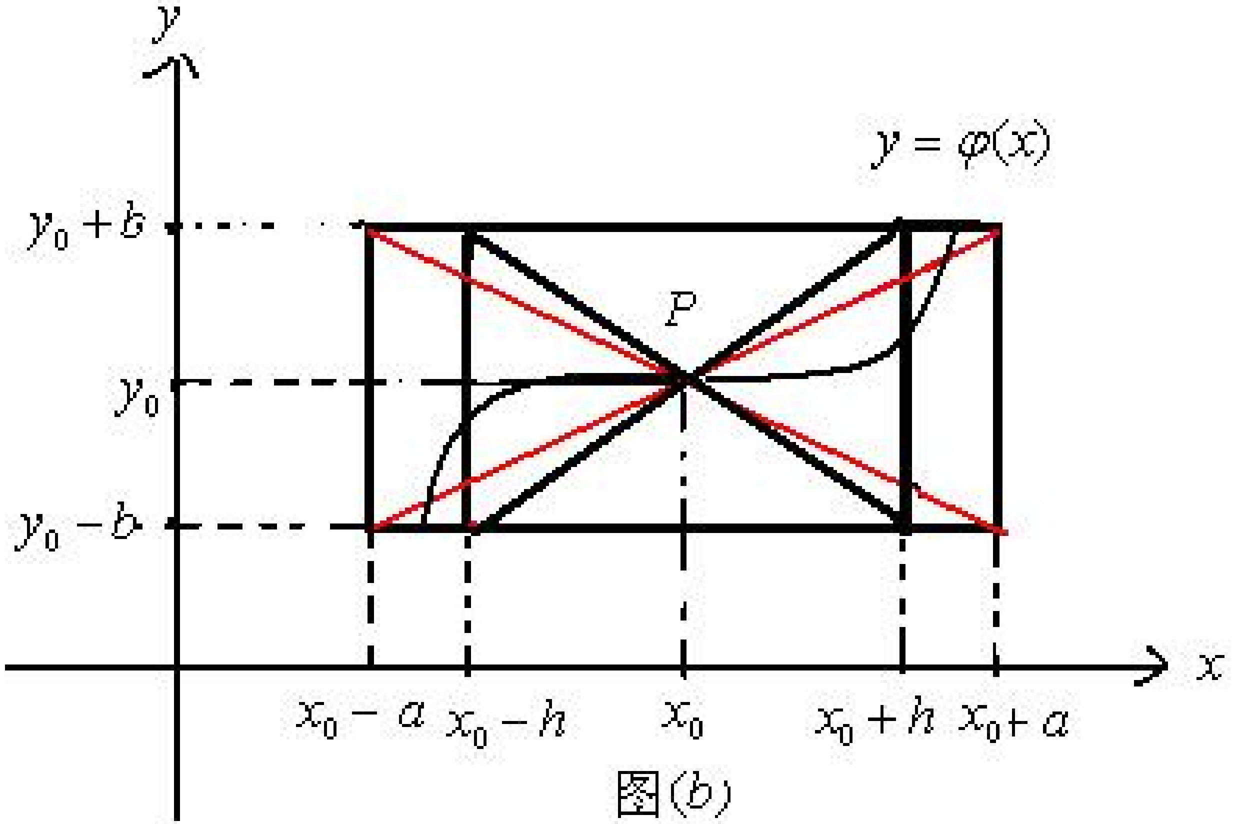
中有定义;



图(a)

而当$M > \dfrac{b}{a}$时(如图(b)所示),不能保证解$y=\varphi(x)$在$x_0-a\le x\le x_0+a$中有定义;它有可能在区间内跑到矩形R外去,使得无意义,只有当$x_0-\dfrac{b}{M}\le x\le x_0+\dfrac{b}{M}$时,才能保证解$y=\varphi(x)$在$R$内.

故要求解的存在范围为$|x-x_0|\le h.$



图(b)

4）一阶隐式方程的解的存在唯一性

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \text{..........................}(3.1.3) \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0' \text{.............}(3.1.4) \end{cases}$$

定理 2　如果在点 (x_0,y_0,y_0') 的某一邻域中，

$a)$ $F(x,y,y')$ 对所有的变元 (x,y,y') 连续，且存在连续的偏导数；

$b)$ $F(x_0,y_0,y_0')=0$

$c)$ $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'} \neq 0$

则上述初值问题的解在 x_0 的某一邻域存在。

事实上，由条件知 $F(x,y,y')=0$ 所确定的隐函数

$y'=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且连续，且

$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_{y'}}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内连续，在以 (x_0,y_0)

为中心的某一闭矩形区域 D 中有界，所以 $f(x,y)$

在D 中关于 y 满足Lipschitz条件。

由解的存在唯一性定理， $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$ 存在唯一，

存在区间中的 h 可足够小。同时，有

$$y(x_0)=y_0 \quad y'(x_0)=y'_0=f(x_0,y_0)$$

三 近似计算和误差估计

求方程近似解的方法---Picard逐步逼近法,这里

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

对方程的第n次近似解$\varphi_n(x)$和真正解$y = \varphi(x)$在$[x_0 - h, x_0 + h]$内误差估计为

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}, \qquad (3.19)$$

注:上式可用数学归纳法证明

$$|\varphi_0(x)-\varphi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi(\xi))| d\xi \le M|x-x_0| \le Mh$$

设 $|\varphi_{n-1}(x)-\varphi(x)| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}h^n,$

则 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\varphi(\xi))| d\xi$

$$\le L\int_{x_0}^{x} |\varphi_{n-1}(\xi)-\varphi(\xi)| d\xi \le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x} (\xi-x_0)^n d\xi$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

这样,在进行近似计算时,可以根据误差要求,

选取适当的逐步逼近函数 $\varphi_n(x)$

例1 讨论初值问题

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2,\quad y(0)=0$$

解的存在唯一区间,并求在此区间上与真正解的误差不超过0.05的近似解的表达式,其中$R:-1\le x\le 1,-1\le y\le 1.$

解 这里$M=\underset{(x,y)\in R}{Max}|f(x,y)|=2$, 所以$h=\min\{1,\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$

由于 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\le 2=L$

由(3.19) $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$

$$=\frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}<0.05$$

因而可取$n=3$,因此我们可以作出如下的近似表达式

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)!}<0.05}$$

$$\varphi_0(x)=0,\qquad \varphi_1(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_0^2(x)]dx=\frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_1^2(x)]dx=\int_0^x[x^2+\frac{x^6}{9}]dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_2^2(x)]dx=\int_0^x[x^2+\frac{x^6}{9}+\frac{2x^{10}}{189}+\frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

$\varphi_3(x)$就是所求的近似解,在区间$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上与真正解误差不会超过0.05.

例2 求初值问题

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2,\quad y(0)=0$$

解的存在唯一区间.

解 对任意a,b，函数$f(x,y)$均在矩形区域

$$R=\{(x,y)\,|\,|x|\le a,|y|\le b\}$$

内连续，且对y有连续的偏导数，计算

$$M=\underset{(x,y)\in R}{Max}|f(x,y)|=1+b^2;\quad h=\min\{a,\frac{b}{1+b^2}\}$$

由于a和b都可任意取，我们选取b，使$\dfrac{b}{1+b^2}$最大

显然$b=1$时，$\dfrac{b}{1+b^2}=\dfrac{1}{2}$为$\dfrac{b}{1+b^2}$的最大值.

故可取$a=1, b=1$

此时由定理得到初值问题的解的存在唯一区间是

$$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}.$$

例3 利用Picard迭代法求初值问题

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y), \quad y(0) = 0$$

的解.

解 与初值问题等价的积分方程为

$$y(x) = \int_0^x 2x(1+y)dx$$

其迭代序列分别为

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x 2x dx = x^2$$

$$y_2(x) = \int_0^x 2x(1 + x^2) dx = x^2 + \frac{x^4}{2!}$$

$$y_3(x) = \int_0^x 2x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}) dx = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = e^{x^2} - 1,$

即初值问题的解为 $y = e^{x^2} - 1.$

思考：

1、 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$，满足条件 $y(0)=0$

的解的最大存在区间，即 h 的最大值。

2、证明下列初值问题的解在指定的区间上存在且唯一：

$$(1)\quad y'=y^2+\cos x^2,\quad y(0)=0,\quad 0\le x\le\frac{1}{2}$$

$$(2)\quad y'=x+y^2,\quad y(0)=0,\quad 0\le x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

$$(3)\quad y'=e^{-x}+\ln(1+y^2),\quad y(0)=0,\quad 0\le x<\infty$$

3、 P.88 6

作业 P.88　第1，3，4 题

§ 3.2　解的延拓定理

/ Theorem on extension of solution/

内容提要/Constant Abstract/

- 解的延拓的引入 $\begin{cases}\text{局部利普希兹条件}\\\text{延拓方法}\end{cases}$

- 解的延拓定理及其推论 $\begin{cases}\text{解的延拓定理}\\\text{推论}\\\text{例子}\end{cases}$

本节要求/Requirements/

- 理解解的延拓方法。
- 会应用解的延拓性定理估计解的存在区间。

一 、 解的延拓的引入

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

右端函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在某一有界区域G 中有意义。

1 局部利普希兹条件

如果称 $\boldsymbol{f(x,y)}$在G 内满足局部利普希兹条件，即对

区域G内的每一点，存在以其为中心的完全含于G 内的

矩形域$\boldsymbol{R}$，在 $\boldsymbol{R}$ 上 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 满足利普希兹条件。

（注意：点不同，域 $\boldsymbol{R}$ 大小和常数 L 可能不同）

2 解的延拓

设 $y=\varphi(x)$ $x\in[a,b]$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\ldots\ldots\ldots(3.1.1)\\ \varphi(x_0)=y_0\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2)\end{cases}$$

的解，若 $y=\psi(x)$ $x\in[a_1,b_1]$ 也是初值问题的解，$[a,b]\subset[a_1,b_1]$，当 $x\in[a,b]$时， $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ 则称解 $\psi(x)$ 是解 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**延拓**。

若不存在满足上述条件的解$y=\psi(x)$，则称$y=\varphi(x)$，$x\in[a,b]$是初值问题(2.2)的饱和解（不可延拓解）.

3 延拓方法

设方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间

$|x-x_0|\le h$上，现取 $x_1=x_0+h$ $y_1=\varphi(x_1)=\varphi(x_0+h)$

然后以 $Q_1(x_1,y_1)$ 中心，作一小矩形，使它连同其边界

都含在区域 G 的内部，再用解的存在唯一性定理，存在

$h_1>0$ 使得在区间 $|x-x_1|\le h_1$ ，方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 有过

(x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$ 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x)=\varphi(x)$

由于唯一性，显然解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$

都在定义的区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，$\psi(x)\equiv\varphi(x)$

区间 $|x-x_1|\le h_1$ 上，$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 有过 (x_1,y_1)

的解 $y=\psi(x)$ 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x)=\varphi(x)$

由于唯一性，显然解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$

都在定义的区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，$\psi(x)\equiv\varphi(x)$

但是在区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，解 $y=\varphi(x)$

向右方的 **延拓，** 即将延拓要较大的区间

$x_0-h\le x\le x_0+h+h_1$ 。再令

$x_2=x_1+h,\quad y_2=\psi(x_1+h)$ 如果，$(x_2,y_2)\in G$

我们又可以取 (x_2,y_2) 为中心，作一小矩形，

$$x_2 = x_1 + h, \quad y_2 = \psi(x_1 + h)$$

可以取 (x_2, y_2)为中心，作一小矩形, 使它连同其边界

都含在区域G 内。仿前, 又可以将解延拓到更大的区间

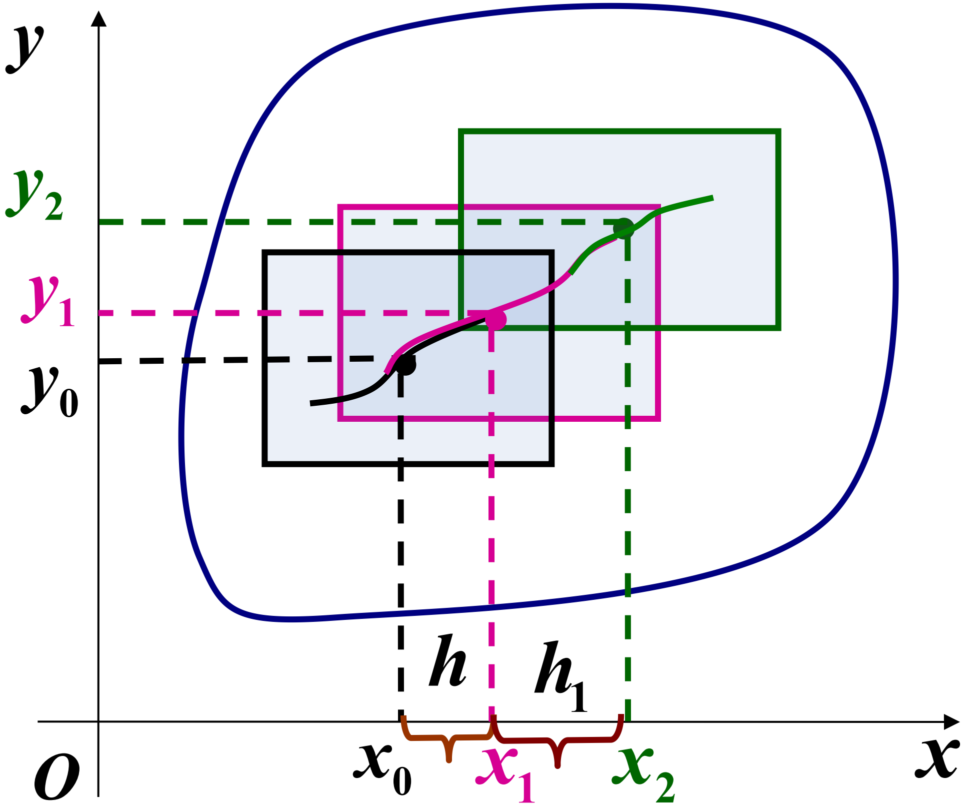
$x_0 - h \le x \le x_0 + h + h_1 = x_0 + h + h_1 + h_2$ 上，其中 h_2

是某一个正常数。对于 x 值减小的一边可以进行同样讨论,

使解向左方延拓。就是在原来的积分曲线 $y = \varphi(x)$

左右端个接上一个积分的曲线段。上述解的延拓的方法还

可继续进行。那么, $y = \varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢?



$P(x_0, y_0)$

$Q(x_1, y_1)$

$x_1 = x_0 + h$

$y_1 = \varphi(x_0 + h)$

$x_2 = x_1 + h_1$

$y_2 = y(x_1 + h_1)$

$$y = \varphi(x) \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

3　延拓方法

$$y = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ \psi(x) & x \in (x_0 + h, x_0 + h + h_1] \end{cases}$$

二、 解的延拓定理及其推论

1 解的延拓定理

如果方程(3.1)右端的函数$f(x,y)$在有界区域 G 中连续，且在 G 内满足局部利普希兹条件，那么方程(3.1)通过G 内任何一点(x_0,y_0)的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓,直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域G 的边界。

以向 x 增大的一方的延拓来说，如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓的区间$x_0\le x<m$上，则当 $x\to m$时，$(x,\varphi(x))$ 趋近于区域 G 的边界。

2 推论

如果 G 是无界区域，在上面解的延拓定理的条件下，方程(3. 1)的通过点(x_0, y_0)的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况：

(1) 解$y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0, +\infty)$

(2) 解$y=\varphi(x)$只可以延拓到区间 $[x_0, m)$

其中m 为有限数，则当$x \to m$ 时，或者 $y=\varphi(x)$ 无界，或者 $(x, \varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界。

例1 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$ 的通过点(0,0)的解

以及通过点（$ln2,-3$）的解的存在区间。

解 方程右端函数在整个 xOy 平面上满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

方程的通解为 $y=\dfrac{1+ce^x}{1-ce^x}$

通过点(0, 0)的解为 $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ 其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

通过点($ln2,-3$)的解为 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

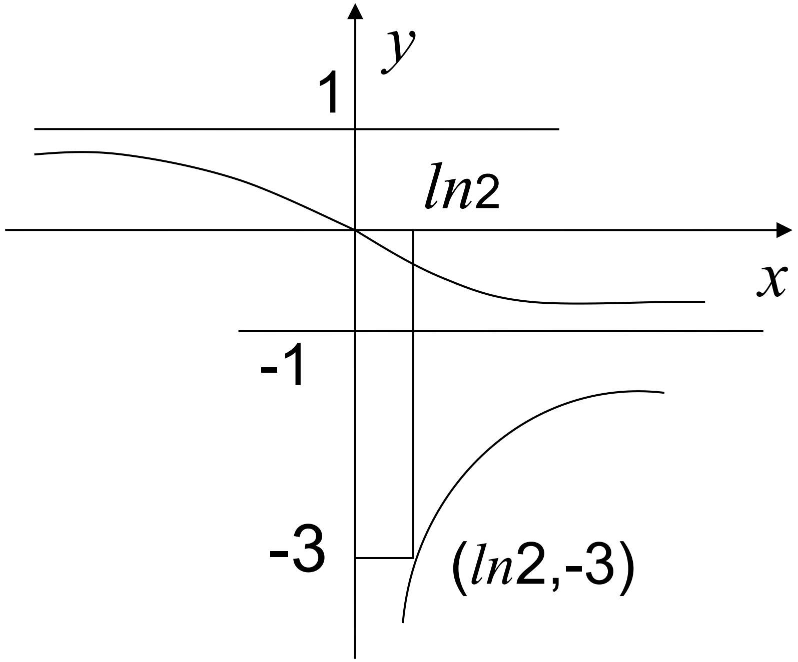
其存在区间为 $0<x<+\infty$

注意：

过点$(\ln 2,-3)$的解 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 向右可以延拓到$+\infty$

但向左方只能延拓到 0, 因为当$x\to 0_+$时, $y\to -\infty$ (无界)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况。



例2 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=1+\ln x$ 满足条件 $y(1)=0$

的解的存在区间。

解 方程右端函数右半平面 $x>0$ 上定义且满足解的

存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

通过点 $(1,0)$ 的解为 $y=x\ln x$ 其存在区间为 $(0,+\infty)$

向右可以延拓到 $+\infty$，但向左方只能延拓到 0,

因为当 $x\to 0_+$ 时, $y=x\ln x\to 0$ (趋于G的边界 $y=0$)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第二种情况。

例3 用解的延拓定理证明

如果 $f(x, y)$ 在整个 xOy 平面上定义、连续和有界，存在关于 y 的一阶连续偏导数，则方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的任一解均可以延拓到区间 $(-\infty, +\infty)$。

证明

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y = \varphi(x)$$

$$|f(x, y)| \le K \qquad -K \le \varphi'(x) \le K$$

所以 $y=\varphi(x)$ 值域在如图的阴影区内，否则

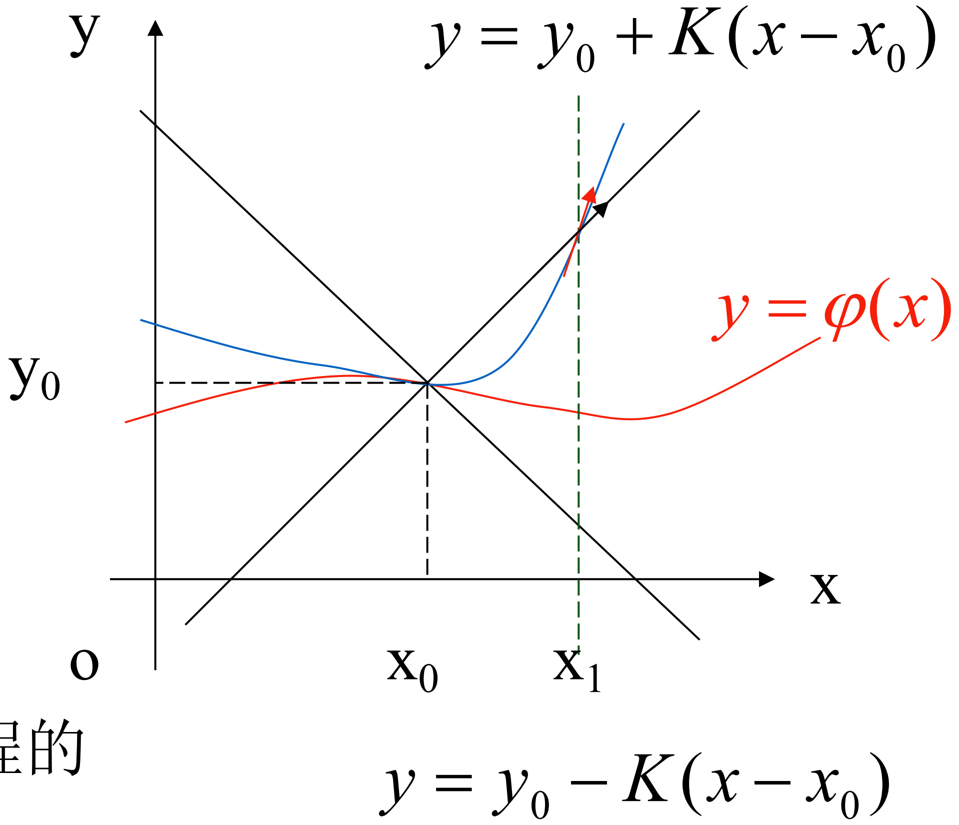
$y=\varphi(x)$ 将穿过直线

$$y=y_0+K(x-x_0)$$

$$y=y_0-K(x-x_0)$$

则会有 $|\varphi'(x)|>K$

与 $|f(x_1,y_1)|\le K$ 矛盾。



由解的延拓定理推论，方程的

任一解均可以延拓到区间 $(-\infty,+\infty)$。

练习 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=y^2$ 的通过点(1,1)的解

以及通过点（3, −1）的解的存在区间。

解 方程右端函数在整个 xy 平面上满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

方程的通解为 $y=\dfrac{1}{C-x}$

通过点(1, 1)的解为 $y=\dfrac{1}{2-x}$ 其存在区间为 $(-\infty,2)$

通过点(3, −1)的解为 $y=\dfrac{1}{2-x}$

其存在区间为 $(2,+\infty)$

练习

1 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 在 $-1<x<3$ 上满足条件

$y(1)=1$ *and* $y(1)=-1$ 的解的存在区间。

$(-1,2),\quad (0,3)$

2 设线性方程 $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$

当 $\boldsymbol{P(x),Q(x)}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 上连续，则由任一初值

(x_0,y_0) $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 所确定的解在整个区间

$(-\infty,+\infty)$ 上都存在。

§ 3.3　解对初值的连续性和可微性

/Continuous and differentiable dependence of the solutions/

内容提要

- 解对初值的连续性
- 解对初值的可微性

本节要求：

1 了解解对初值及参数的连续依赖性定理；

2 了解解对初值及参数的可微性定理。

3.3.1 解对初值的对称性定理

设 $f(x,y)$ 于域 D 内连续且关于 y 满足利普希茨条件，

$$(x_0, y_0) \in G, \quad y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的唯一解，则在此表达式中，(x_0, y_0) 与 (x, y) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y)$$

3.3.2解对初值的连续依赖性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，$(x_0, y_0) \in G$，$y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，它于区间 $a \le x \le b$ 有定义 $(a \le x_0 \le b)$，那么，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，必存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon, a, b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$

时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ 的解 $y = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 在区间 $a \le x \le b$ 也有定义，并且

$$|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad a \le x \le b$$

引理 如果 $f(x,y)$ 在某域 D 内连续，且关于 y 满足

利普希兹条件（利普希兹常数为L），则方程(3. 1. 1)

任意两个解 $\varphi(x)$及$\psi(x)$ 在它们公共存在区

间成立不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le |\varphi(x_0)-\psi(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

其中 x_0 为所考虑区间内的某一值。

证明 设 $\varphi(x),\psi(x)$在区间 $a \le x \le b$ 均有定义，令

$$V(x) = [\varphi(x)-\psi(x)]^2 \quad a \le x \le b$$

不妨设 $\varphi(x) < \psi(x)$. 因此，

则 $$V'(x)=2[\varphi(x)-\psi(x)][\varphi'(x)-\psi'(x)]$$

$$=2[\varphi(x)-\psi(x)][f(x,\varphi)-f(x,\psi)]$$

$$\le 2L[\varphi(x)-\psi(x)][\varphi(x)-\psi(x)]=2LV(x)$$

$$V'(x)e^{-2Lx}-2LV(x)e^{-2Lx}\le 0$$

于是 $$\frac{d}{dx}(V(x)e^{-2Lx})\le 0$$

因此，在区间 $[a,b]$ 上 $V(x)e^{-2Lx}$ 为减函数，有

$$V(x)\le V(x_0)e^{2L(x-x_0)},x_0\le x\le b$$

对于区间 $a \le x \le x_0$, 令 $-x = t$, 并记 $-x_0 = t_0$, 则

$$\frac{dy}{dt} = -f(-t, y)$$

并且已知它有解 $y = \varphi(-t), y = \psi(-t)$

类似以上推导过程，令 $\sigma(t) = [\varphi(-t) - \psi(-t)]^2$

可得 $\sigma(t) \le \sigma(t_0) e^{-2L(t-t_0)}, t_0 \le t \le -a$

注意到 $\sigma(t)\big|_{t=-x} = V(x)$ 及 $\sigma(t_0) = V(x_0)$

$$V(x) \le V(x_0) e^{-2L(x-x_0)}, a \le x \le x_0$$

因此 $V(x) \le V(x_0) e^{2L|x-x_0|}, a \le x \le b, a \le x_0 \le b$

两边取平方根，得 $|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| e^{L|x-x_0|}$

解对初值的连续依赖性定理的证明

（一）构造满足利普希茨条件的有界闭区域

因为，积分曲线段 S： $y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi(x)$, $a\le x\le b$ 是 $\boldsymbol{x\,y}$ 平面上一个有界闭集，又按假定对S上每一点**(x,y)**必存在一个以它为中心的开圆 $C: C\subset G$， 使在其内函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件。根据有限覆盖定理，可以找到有限个具有这种性质的圆 $C_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ 并且它们的全体覆盖了整个积分曲线段S。设 r_i 为圆 C_i 的半径，L_i 表示 $f(x,y)$ 于 C_i 内的相应的利普希茨常数。

令 $\tilde{G}=\bigcup_{i=1}^{N} C_i,$ 则有 $S \subset \tilde{G} \subset G,$

且 $\tilde{G}$ 的边界与S的距离 $\rho > 0$ 。对预先给定的 $\varepsilon > 0$

若取 $\eta = \min(\varepsilon, \frac{\rho}{2})$ 及 $L = \max(L_1, L_2, \cdots, L_N)$

则以S上每一点为中心，以 η 为半径的圆的全体，连同它们的圆周一起构成S的有界闭域 $D \subset G$ ，且 $f(x, y)$

在D上关于 y 满足利普希茨条件，利普希茨常数为L。

（二）解对初值的连续依赖性

断言，必存在这样的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ $(\delta<\eta)$，

使得只要 $\bar{x}_0,\bar{y}_0$ 满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$$

则解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$ 必然在区间 $a\le x\le b$ 也有定义。

由于D是有界闭区域，且 $f(x,y)$在其内关于 y 满足利普希茨条件，由延拓性定理知，解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必能延拓到区域D的边界上。设它在D的边界上的点为 $(c,\psi(c))$和 $(d,\psi(d))$ $c<d$，这是必然有 $c\le a,d\ge b.$

因为否则设 $c>a, d<b$，则由引理

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right| e^{L\left|x-\bar{x}_0\right|}, c \le x \le d$$

由 $\varphi(x)$ 的连续性，对 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\eta e^{-L(b-a)}$，必存在 $\delta_2>0,$

使得当 $\left|x-x_0\right| \le \delta_2$ 时有 $\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right|<\delta_1$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2 \le \delta^2$

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|^2 \le \left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|^2 e^{2L\left|x-\bar{x}_0\right|}$$

$$\le \left(\left|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)\right|+\left|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|\right)^2 e^{2L\left|x-\bar{x}_0\right|}$$

$$|\varphi(x)-\psi(x)|^2 \le |\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)|^2 e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le \left(|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)|\right)^2 e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le 2\left(|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|^2+|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)|^2\right)e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le 2\left(\delta_1^2+|y_0-\bar{y}_0|^2\right) e^{2L(b-a)}\le 4\delta_1^2 e^{2L(b-a)} = \eta^2, c\le x\le d$$

于是 $|\varphi(x)-\psi(x)|<\eta$ 对一切 $x\in[c,d]$ 成立，特别地有

$$|\phi(c)-\psi(c)|<\eta, \quad |\phi(d)-\psi(d)|<\eta.$$

即点 $(c,\psi(c))$ 和 $(d,\psi(d))$ 均落在D的内部，而不可能

位于D的边界上。与假设矛盾，因此，解 $\psi(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上有定义。

在不等式 $\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \eta$, $c \le x \le d$ 中，

将区间$[c,d]$换为$[a,b]$，可知，当

$$(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$

时，有

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right| < \eta \le \varepsilon,\quad a \le x \le b$$

定理得证。

解对初值的连续性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的。

1. 含参数的一阶方程表示

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (E_\lambda)$$

$$G_\lambda:\quad (x,y)\in G,\ \alpha<\lambda<\beta$$

2. 一致利普希兹条件

设函数 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内 **一致地**关于 y 满足**局部利普希兹 (Lipschitz)条件**，即对 G_λ 内的每一点 (x,y,λ) 都存在以 (x,y,λ) 为中心的球 $C\subset G_\lambda$，使得对任何 $(x,y_1,\lambda),(x,y_2,\lambda)$ 成立不等式 $\left|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$

其中 L 是与 λ 无关的正数。

由解的存在唯一性定理，对每一$\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$

方程为 E_λ 的解唯一确定。记$y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda_0)$

解对初值和参数的连续依赖性定理

假设 $f(x,y,\lambda)$ 于域 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部利普希茨条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$，$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$ 是方程 E_λ 通过点 (x_0,y_0) 的解，在区间 $a\le x\le b$ 有定义其中 $a\le x_0\le b$，那么，对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\le\delta^2$$

时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$ 在区间 $a\le x\le b$ 也有定义，并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le x\le b$$

解对初值和参数的连续性定理

假设$f(x,y,\lambda)$于域 G_λ 内连续，且在G_λ 内关于$\boldsymbol{y}$一致地满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在它的存在范围内是连续的。

3.3.3解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的。

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$分别是下列初值问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$$

证明　由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 G 内连续，推知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 y 满足局部利普希茨条件。因此，解对初值的连续性定理成立，即

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)$$

在它的存在范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的。

下面进一步证明对于函数 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点的偏导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续。

先证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续。

设由初值 (x_0, y_0)和$(x_0+\Delta x_0, y_0)$ $\left(|\Delta x_0| \le \alpha, \alpha\right.$为足够小的正数）所确定的方程的解分别为

$$y=\varphi(x, x_0, y_0)\equiv\varphi \text{ 和 } y=\varphi(x, x_0+\Delta x_0, y_0)\equiv\psi$$

即 $\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx \qquad \psi = y_0 + \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx$

于是 $\psi-\varphi \equiv \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx - \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx$

$$= -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx$$

其中 $0<\theta<1.$

注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 及 ψ,φ 的连续性，有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

其中 r_1 具有性质

当$\Delta x_0\to 0$时 $r_1\to 0$，且当$\Delta x_0=0$时 $r_1=0$。

类似地 $$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

其中 r_2 与 r_1 具有相同的性质，因此对 $\Delta x_0\neq 0$时，有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv[-f(x_0,y_0)+r_2]+\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1]\frac{\psi-\phi}{\Delta x_0}dx$$

即 $\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r\equiv z_0\end{cases}$$

的解，在这里 $\Delta x_0\neq 0$ 被视为参数。

显然，当 $\Delta x_0=0$ 时上述初值问题仍然有解。

根据解对初值和参数的连续性定理，知 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$

是 $x, x_0, z_0, \Delta x_0$ 的连续函数。从而存在

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$$

而 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases}$ 的解。

且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$，显然

它是 x, x_0, y_0 的连续函数。

再证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续。

设 $y=\varphi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)\equiv\psi$ 为初值 $(x_0,y_0+\Delta y_0)$

$(|\Delta y_0|\le\alpha)$ 所确定的方程的解。

类似地可推证 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right]z\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

的解。因而

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3]dx\right)$$

其中 r_3 具有性质

当$\Delta y_0 \to 0$时 $r_3 \to 0$，且当$\Delta y_0 = 0$时 $r_3 = 0$。

故有 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \lim\limits_{\Delta y_0 \to 0} \dfrac{\psi - \varphi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$

显然它是 x, x_0, y_0 的连续函数。$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$

至于 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ 的存在及连续性，只需注意到 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$

是方程的解，因而 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$

由 f 及 φ 的连续性即直接推的结论。

证毕。

练习

已知方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$

试求 $\left[\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}}$, $\left[\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}}$

按照公式，一般有

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0\\ y_0}} = -\sin(x_0 y_0)e^{\int_{x_0}^{x} x\cos(xy(x,x_0,y_0)dx}$$

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0\\ y_0}} = e^{\int_{x_0}^{x} x\cos(xy(x,x_0,y_0)dx}$$

由于 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 时有 $y \equiv 0$ ，因此，我们有

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = 0 \qquad \left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

§3.4　奇 解

/Singularly solution/

3.4　奇解

主要内容

- 包络和奇解
- 克莱罗方程（Clairant Equation）

本节要求：

- 1　了解奇解的意义；
- 2　掌握求奇解的方法。

一 包络和奇解的定义

曲线族的包络：是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族中，但过这条曲线上的每一点，有曲线族中的一条曲线与其在此点相切。

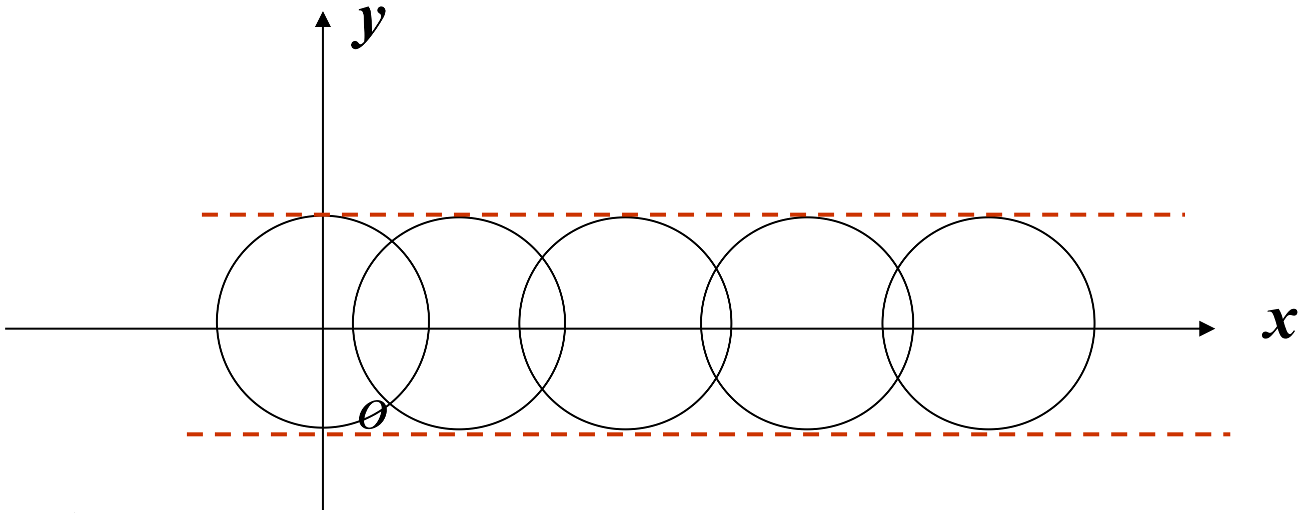
奇解：在有些微分方程中，存在一条特殊的积分曲线，它并不属于这个方程的积分曲线族，但在这条特殊的积分曲线上的每一点处，都有积分曲线族中的一条曲线与其在此点相切。这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的**奇解**。

注：奇解上每一点都有方程的另一解存在。

例 单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

R是常数，c是参数。



显然，$y=\pm R$ 是曲线族 $(x-c)^2+y^2=R^2$ 的包络。

注：一般的曲线族并不一定有包络，如同心圆族，平行线族等都是没有包络的。

二 求奇解（包络线）的方法

设一阶方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通积分为 $\Phi(x, y, C) = 0$。

定理 方程的积分曲线族的包络线是方程的奇积分曲线。

----求*奇解*的问题化为求积分曲线族的*包络线*的问题。

例 方程

$$\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$$

的通解 $y=(x+C)^3$. $y=0$ 是一个特解.

例 方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$$

的通解 $y=\sin(x+C)$. $y=\pm 1$ 是两个特解.

求奇解（包络线）的方法

- **C-判别曲线法**
- **P-判别曲线法**

设一阶方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通积分为 $\boldsymbol{\Phi}(x, y, C) = 0$。

1 C-判别曲线法

结论：通积分作为曲线族的包络线（奇解）包含在下列方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x, y, C) = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

消去 C 而得到的曲线中。

设由 $\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x, y, C) = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$ 能确定出曲线为

$$L: \quad x = x(C),\ y = y(C)$$

则 $\boldsymbol{\Phi}(x(C), y(C), C) \equiv 0$

对参数 C 求导数

$$\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C), y(C), C)x'(C) + \boldsymbol{\Phi}'_y(x(C), y(C), C)y'(C) + \boldsymbol{\Phi}'_C(x(C), y(C), C) \equiv 0$$

从而得到恒等式

$$\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C), y(C), C)x'(C) + \boldsymbol{\Phi}'_y(x(C), y(C), C)y'(C) \equiv 0$$

$$\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C),y(C),C)x'(C)+\boldsymbol{\Phi}'_y(x(C),y(C),C)y'(C)\equiv 0$$

当 $\boldsymbol{\Phi}'_x(x,y,C),\boldsymbol{\Phi}'_y(x,y,C)$ 至少有一个不为零时

有 $$\frac{y'(C)}{x'(C)}\equiv-\frac{\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C),y(C),C)}{\boldsymbol{\Phi}'_y(x(C),y(C),C)},$$ 或

$$\frac{x'(C)}{y'(C)}\equiv-\frac{\boldsymbol{\Phi}'_y(x(C),y(C),C)}{\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C),y(C),C)},$$

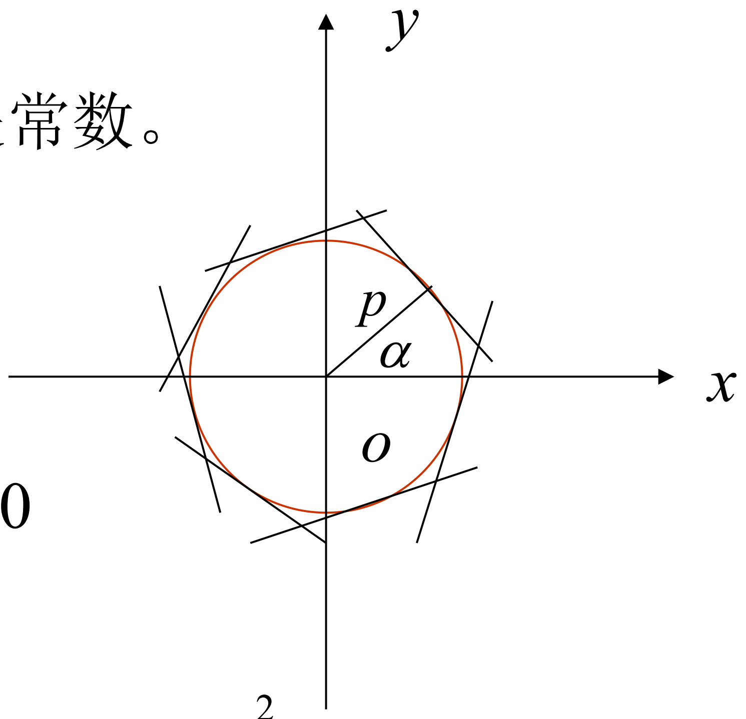
这表明曲线 L 在其上每一点 $(x(C), y(C))$ 处均与曲线族中对应于C的曲线$\boldsymbol{\Phi}(x,y,C)\equiv 0$ 相切。

注意： **C-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例1 求直线族

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

的包络，这里 α 是参数，p 是常数。



解： 对参数 α 求导数

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$

联立 $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases}$

$$x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha = p^2$$

$$x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

相加，得 $x^2 + y^2 = p^2$. 经检验，其是所求包络线。

例2 求直线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$$

的包络，这里 c 是参数。

解： 对参数 c 求导数 $y-c-(x-c)^2=0$

联立 $\begin{cases}(y-c)^2-\dfrac{2}{3}(x-c)^3=0\\ y-c-(x-c)^2=0\end{cases}$

得 $(x-c)^3[(x-c)-\dfrac{2}{3}]=0$

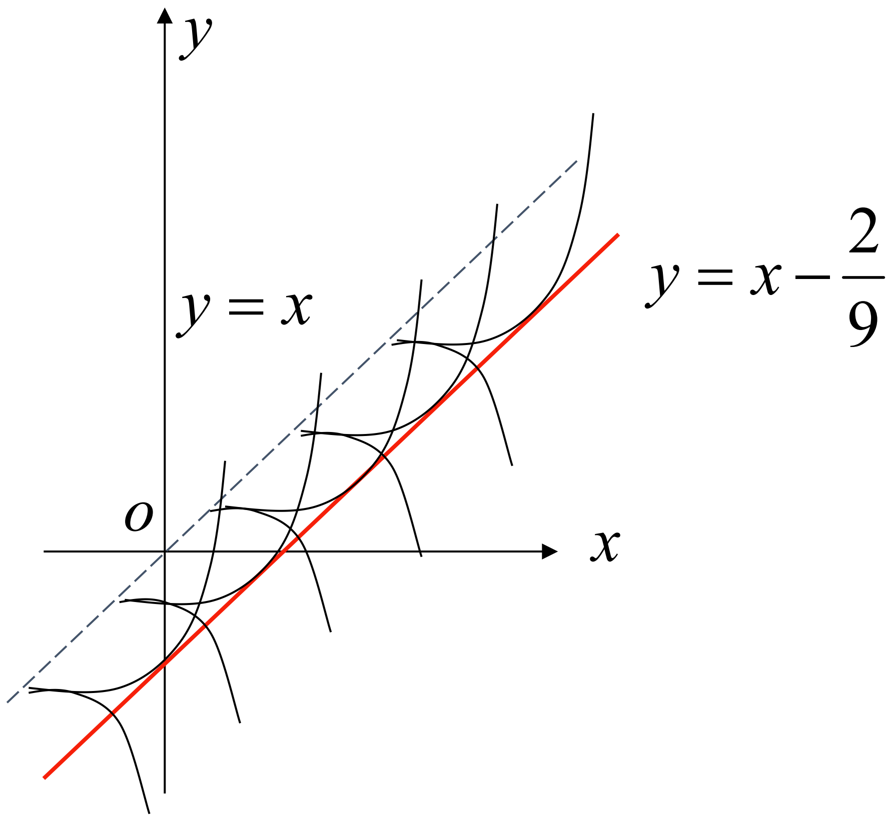
从 $x-c=0$ 得到 $y=x$

从 $(x-c)-\dfrac{2}{3}=0$ 得到 $y=x-\dfrac{2}{9}$

因此， C-判别曲线中包括了两条曲线。

易检验，$y=x-\dfrac{2}{9}$

是所求包络线。



y
x
o
y = x
y = x − 2/9

2 p-判别曲线

设一阶方程 $F(x,y,y')=0$

结论： 方程 $F(x,y,y')=0$ 的奇解包含在下列方程组

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F'_p(x,y,p)=0 \end{cases}$$

消去 p 而得到的曲线中。

注意： **p-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例3 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2-1=0$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} p^2+y^2-1=0 \\ 2p=0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

$$y=\pm 1$$

因为易求得原方程的通解为 $y=\sin(x+c)$

而 $y=\pm 1$ 是方程的解，且正好是通解的包络。

经检验，它们是方程的奇解。

例4 求方程 $y=2x\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} y=2xp-p^2 \\ 2x-2p=0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

经检验，$y=x^2$ 不是方程的解，故此方程没有奇解。

注意： **以上两种方法，只提供求奇解的途径，所得*p*-判别曲线和C-判别曲线是不是奇解，必需进行检验。**

3 克莱罗方程

形式　$y = xp + f(p)$

其中　$p = \dfrac{dy}{dx}$，　$f(p)$ 是 p 的二次可微函数。

解法

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

$$(x + f'(p))p' = 0$$

$$p' = 0 \qquad\qquad p = c$$

$$y = cx + f(c) \qquad\qquad \text{通解}$$

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + f(p) \end{cases} \qquad\qquad \text{奇解}$$

例5 求解方程 $y = xp + \dfrac{1}{p}$

解： 这是克莱罗方程，因而其通解为 $y = xc + \dfrac{1}{c}$

从
$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{c^2} = 0 \\ y = xc + \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

消去 c，得到奇解

$$y^2 = 4x$$

例6 求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积都等于2。

解 设要求的曲线为 $y = y(x)$

过曲线任上一点 (x, y) 的切线方程为

$$Y = y'(x)(X - x) + y$$

其与坐标轴的交点为 $\left(-\dfrac{y}{y'} + x,\ -xy' + y\right)$

切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{y'} + x\right)\left(-xy' + y\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{y'}+x\right)(-xy'+y)=2$$

$$(y-xy')^2=-4y'$$

$$y-xy'=\pm 2\sqrt{-y'} \qquad y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}$$

这是克莱罗方程，因而其通解为

$$y=c_1x\pm 2\sqrt{-c_1}=2c-c^2x$$

从 $\begin{cases} y=2c-c^2x \\ 2-2cx=0 \end{cases}$ 消去 c，得到奇解 $xy=1$

这是等腰双曲线，显然它就是满足要求的曲线。

第四章　　高阶线性微分方程

Higher-Order Linear ODE

本章内容/Main Contents/

本章要求/Requirements/

- 理解高阶线性方程解的性质和解的结构
- 熟练掌握常系数高阶线性方程的解法
- 掌握高阶方程的一般解法

本章目录/Main Contents/

§ 4.1 高阶线性微分方程的一般理论

/General Theory of Higher-Order Linear ODE/

本节要求/Requirements/

- 理解高阶齐次线性方程解的性质和解的结构
- 理解高阶非齐次线性方程解的性质和解的结构

4.1.1 引言 /Introducation/

n 阶微分方程一般形式： $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$

n 阶线性微分方程一般形式：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \qquad (4.1)$$

其中 $a_i(t)(i = 1,2,\cdots,n)$ 及$f(t)$是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数。

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \qquad (4.2)$$

称它为 n 阶齐次线性微分方程，而方程（4.1）为 n 阶非齐次线性微分方程。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

方程（4.1）的解的存在唯一性定理:

定理1 如果 $a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数，则对于任一 $t_0\in[a,b]$ 及任意的 $x_0,x_0^{(1)},\cdots x_0^{(n-1)}$，方程（4.1）存在 唯一解 $x=\varphi(t)$，定义于区间 $a\le t\le b$ 上，且满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)} \qquad (4.3)$$

4.1.2 齐线性方程解的性质与结构

例 $$\frac{d^2y}{dx^2}+w^2y=0 \qquad (w>0\text{为常数})$$

有解 $y=\cos wx \qquad y=\sin wx$

$$y=C_1\cos wx \qquad y=C_2\sin wx$$

$$y=C_1\cos wx+C_2\sin wx$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理2 （叠加原理）如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程（4.2）的k个解，则它们的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是（4.2）的解，这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是任意常数。

证明
$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

$$[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]^{(n)}+$$

$$+a_1(t)[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]^{(n-1)}$$

$$+\cdots+a_n(t)[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]$$

$$=c_1[\frac{d^n x_1}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_1}{dt}+a_n(t)x_1]$$

$$+c_2[\frac{d^n x_2}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_2}{dt}+a_n(t)x_2]$$

$$+\cdots+c_k[\frac{d^n x_k}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_k}{dt}+a_n(t)x_k]=0$$

问题：

当 $k=n$ 时，若 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是齐线性方程的解，

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

能否成为方程（4.2）的通解？　不一定

如在上例中　$y_1=\cos wx$　　$y_2=5\cos wx$

$$y=C_1\cos wx+C_2 5\cos wx$$

不包含解　$y=C_2\sin wx$

要使 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$ 为方程（4.2）的通解

$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$　还需满足一定的条件?

函数线性无关和相关

定义在 $a \le t \le b$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 使得恒等式

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t) \equiv 0$$ 对所有 $t \in [a, b]$ 成立，

称这些函数是线性相关的，否则称是线性无关的。

如 $\cos x$, $\sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

$\cos^2 x$, $\sin^2 x$, 1 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关

$1, t, t^2, \cdots, t^n$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

要使得 $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n \equiv 0 \quad t \in (-\infty, +\infty)$

则 $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

伏朗斯基行列式（Wronsky)

定义在 $a \le t \le b$ 区间上的 ***k***个可微 ***k*-1**次的函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W(t) = W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的伏朗斯基行列式。

定理3 若函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间 $a\le t\le b$ 上线性相关，则在 $[a,b]$上它们的伏朗斯基行列式$W(t)\equiv 0$。

证明 由假设，即知存在一组不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，

使得 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0 \quad a\le t\le b$ （4.6）

依次对 t 微分此恒等式，得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)\equiv 0 \\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)\equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)\equiv 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

关于$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的齐次线性代数方程组，

它的系数行列式 $W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right]$，由线性代数理论方程存在非零解的充要条件是系数行列式必须为零，即

$$W(t) \equiv 0 \qquad a \le t \le b$$

证毕

定理3 若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则在 $[a,b]$ 上它们的伏朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$。

注意：其逆定理是否成立？ 不一定

即由其构成的伏朗斯基行列式为零，但它们也可能是线性无关的。

例如：

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2 & -1 \le t \le 0 \\ 0 & 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & -1 \le t \le 0 \\ t^2 & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2 & -1\le t\le 0 \\ 0 & 0\le t\le 1 \end{cases} \qquad x_2(t)=\begin{cases} 0 & -1\le t\le 0 \\ t^2 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$W\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\begin{cases} \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix}=0 & -1\le t\le 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix}=0 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=\begin{cases} c_1t^2+c_2\cdot 0\equiv 0 & -1\le t\le 0 \\ c_1\cdot 0+c_2t^2\equiv 0 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$c_1=c_2=0$$

故 $x_1(t),x_2(t) \quad t\in[-1,1]$ 是线性无关的。

定理4 如果方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$ 在这个区间的任何点上都不等于零，即 $W(t) \neq 0 \quad a \le t \le b$

证明 反证法 设有某个 t_0， $a \le t_0 \le b$，使得 $W(t_0) = 0$

考虑关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0 \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) + \cdots + c_n x_n'(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

其系数行列式$W(t_0)=0$ ，故（4.9）有非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$

构造函数 $x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$ $a\le t\le b$

根据叠加原理，$x(t)$ 是方程（4.2）的解，且满足初始条件

$$x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad （4.10）$$

另 $x=0$ 也是方程(4.2) 也满足初始条件（4.10）的解，

由解的唯一性知 $x(t)\equiv 0$ $a\le t\le b$，即

$$\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)\equiv 0 \qquad a\le t\le b$$

因为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$不全为0，与 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关的假设矛盾。

证毕

$\exists t_0, \quad a \le t_0 \le b$ $\xrightarrow{\text{定理4}}$ $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$

$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] = 0$ $\xleftarrow[\text{定理3}]{}$ 线性相关

重要结论

方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关

的充分必要条件是 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \ne 0 \qquad a \le t \le b$

定理5 $\boldsymbol{n}$ 阶齐线性方程(4.2)一定存在 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的解，

且任意 $\boldsymbol{n+1}$ 个解都线性相关。

证明 $a_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $a \le t \le b$ 上连续，取 $t_0 \in [a, b]$

则满足条件 $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$

存在唯一。

$$x(t_0)=1,\ x'(t_0)=0,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad x_1(t)$$

$$x(t_0)=0,\ x'(t_0)=1,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad x_2(t)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x(t_0)=0,\ x'(t_0)=0,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=1 \qquad x_n(t)$$

$$W\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right]\Big|_{t_0}=|\mathbf{E}|=1\neq 0$$

$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关。

即齐线性方程(4.2)一定存在 *n* 个线性无关的解。

任取方程(4.2)的*n*+ 1个解， $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),x_{n+1}(t)$

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & x_{n+1}^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_1^{(n-i)}(t) & \sum_{i=1}^{n} a_i x_2^{(n-i)}(t) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n+1}^{(n-i)}(t) \end{vmatrix}=0$$

任意 n+1个解都线性相关。

•n 阶齐线性方程的所有解构成一个 n 维线性空间。

•方程(4.2)的一组n个线性无关解称为它的一个基本解组。

定理6（通解结构）

如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程（4.2）的n个线性无关的解，则方程（4.2）的通解可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad (4.11)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数，且通解（4.11）包括方程（4.2）的所有解。

4.1.3 非齐线性方程与常数变易法

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

性质1 如果 $\overline{x}(t)$ 是方程（4.1）的解，而 $x(t)$ 是方程（4.2）的解，则 $\overline{x}(t)+x(t)$ 也是方程（4.1）的解。

性质2 方程（4.1）的任意两个解之差必为方程（4.2）的解。

$$(\overline{x}+x)^{(n)}+a_1(t)(\overline{x}+x)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)(\overline{x}+x)'+a_n(t)(\overline{x}+x)$$

$$=\left[\overline{x}^{(n)}+a_1(t)\overline{x}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\overline{x}'+a_n(t)\overline{x}\right]$$

$$+\left[x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x\right]=f(t)$$

定理7 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为方程（4.2）的基本解组，

$\bar{x}(t)$ 是方程（4.1）的某一解，则方程（4.1）的通解为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t) \qquad (4.14)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数，且通解（4.14）包括方程（4.1）的所有解。

证明 1)（4.14）一定是方程（4.1）的解，且含有n个独立的任意常数，是通解。

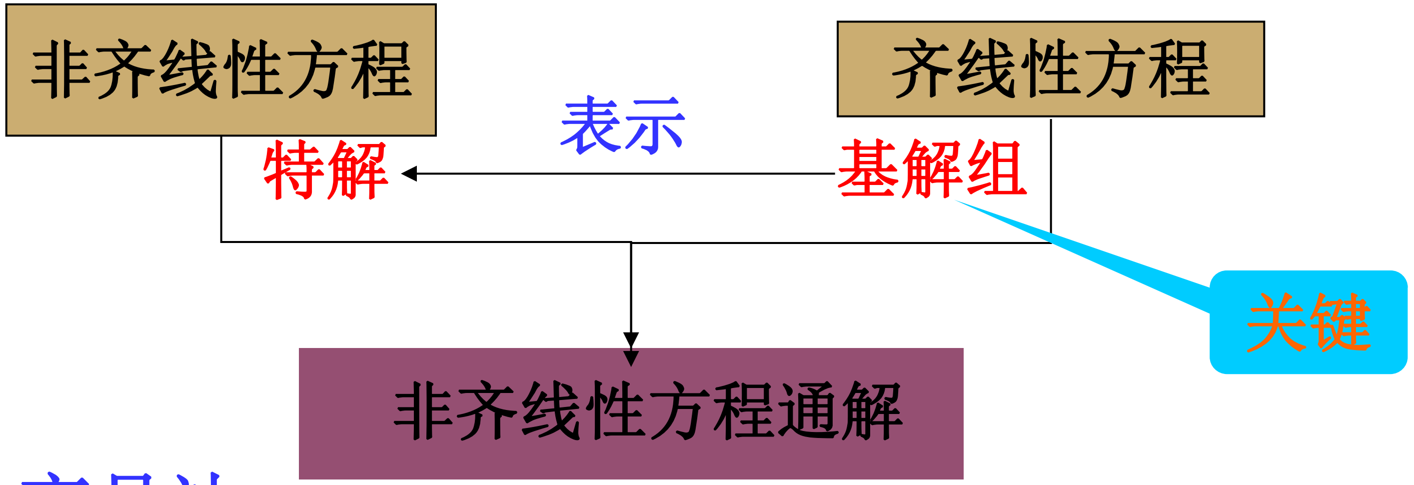
2) $\tilde{x}(t)$ 是方程（4.1）的任一个解，则

$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)$ 是方程（4.2）的解 $\exists\ \tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$

$$x(t)-\bar{x}(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t)$$

证毕



常数变易法

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程（4.2）的基本解组，

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \qquad (4.15)$$

为（4.2）的通解。 设

$$x = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t) \qquad (4.16)$$

为（4.1）的解。

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t)$$

$$+ x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t)$$

令 $$x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t) = 0 \qquad (4.17)_1$$

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \qquad (4.18)_1$$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t)$$

$$+ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t)$$

$$\boldsymbol{x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t) = 0} \qquad (4.17)_2$$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t) \qquad (4.18)_2$$

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \quad (4.17)_{n-1}$$

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \quad (4.18)_{n-1}$$

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)$$

$$+x_1^{(n)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n)}(t)c_n'(t) \quad (4.18)_n$$

（4. 16） $(4.18)_1$ $(4.18)_2$ $(4.18)_{n-1}$ $(4.18)_n$

代入方程（4.1）

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t) \quad (4.17)_n$$

$$\begin{cases} x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t) = 0 & (4.17)_1 \\ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t) = 0 & (4.17)_2 \\ x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 & (4.17)_{n-1} \\ x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t) & (4.17)_n \end{cases}$$

$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$　方程组有唯一的解，设为

$$c_i'(t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t)dt + \gamma_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t) \qquad (4.16)$$

特解 $\gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$x = x_1(t)\int \varphi_1(t)dt + x_2(t)\int \varphi_2(t)dt + \cdots + x_n(t)\int \varphi_n(t)dt$$

通解

$$x = x_1(t)\int \varphi_1(t)dt + x_2(t)\int \varphi_2(t)dt + \cdots + x_n(t)\int \varphi_n(t)dt$$

$$+ \gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t) + \cdots + \gamma_n x_n(t)$$

结构： 非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。

例1 求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解，已知它对应齐线性方程的基本解组为 $\cos t$ ，$\sin t$

解 令 $x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$

$$c_1'(t)\cos t+c_2'(t)\sin t=0$$

$$-c_1'(t)\sin t+c_2'(t)\cos t=\frac{1}{\cos t}$$

解得 $c_1'(t)=-\dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\quad c_2'(t)=1$

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\gamma_1 \quad c_2(t)=t+\gamma_2$$

原方程的通解为 $x=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t$

例2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 于域 $t\neq 0$ 上的所有解。

解 对应的齐线性方程为 $tx''-x'=0$

$$\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t}\qquad \frac{dx'}{x'}=\frac{1}{t}dt$$

得 $x'=At$ $\quad x=\frac{1}{2}At^2+B$ 这里 A、B 为任意常数。

易见有基本解组 $1,\ t^2$ $\qquad x''-\frac{1}{t}x'=t$

设 $x=c_1(t)+c_2(t)t^2$ 为方程的解

$$c_1'(t)+t^2c_2'(t)=0 \qquad c_1(t)=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1$$

$$2tc_2'(t)=t \qquad c_2(t)=\frac{1}{2}t+\gamma_2$$

故得原方程的通解

$$x=\gamma_1+\gamma_2t^2+\frac{1}{3}t^3$$ （ γ_1,γ_2 为任意常数)

思考题 常数变易法中待定函数的条件如何选择？

练习题

1 验证 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组为 e^t，e^{-t}，并求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$$ 的通解。

2 求方程 $x''+4x=t\sin 2t$ 的通解，已知它对应齐线性

方程的基本解组为 $\cos 2t$，$\sin 2t$

作业：**P.131，第1，3（2）（4）题**

（二）
拉普拉斯变换法 /Laplace Transform /

拉普拉斯变换

§1拉普拉斯变换定义/Definition of Laplace Transform/

对于在 $[0,\infty)$ 上有定义的函数 $f(t)$

若

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

对于已给的一些 s（一般为复数）存在，则称

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $L[f(t)]=F(s)$

$f(t)$称为Laplace Transform 的原函数，$F(s)$称为$f(t)$的象函数.

拉普拉斯变换法存在性/Existence of Laplace Transform/

假若函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的每一个有限区间上

是分段连续的, 并且∃ 常数 $M > 0,\ \sigma \geq 0$

使对于所有的 $t \geq 0$ 都有下列不等式成立

$$\left|f(t)\right| < Me^{\sigma t},$$

则当 $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ 时, $f(t)$ 的**Laplace Transform**

是存在的。

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

例1 $f(t)=1 \quad (t\geq 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1dt = \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T]$$

$$=\lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}]=\frac{1}{s}$$ 当 $\mathrm{Re}\, s>0$

即 $L[1]=\dfrac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\, s>0)$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

例2 $f(t)=e^{zt}$(z 是给定的实数或复数)

$$L[e^{zt}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-z)t}dt=\frac{1}{s-z} \qquad (\mathrm{Re}(s-z)>0)$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z} \qquad (\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\ z)$$

练习　求函数$f(t)=t$的Laplace变换.

解

$$L[t]=\int_0^{+\infty}e^{-st}t\,dt=\frac{1}{s^2},\quad \operatorname{Re}s>0$$

练习　求函数$f(t)=t^n$的Laplace变换.

解

$$L[t^n]=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^n\,dt=\frac{n!}{s^{n+1}},\ \operatorname{Re}s>0.$$

§ 2 拉普拉斯变换的基本性质/ Properties of Laplace Transform/

1 线性性质 如果 $f(t), g(t)$ 是原函数，α 和 β 是任意两个常数(可以是复数)，则有

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$$

$$左=\int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt$$

$$=\alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt+\beta\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$$

$$=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]= 右$$

例1 如果原函数为 $f(t)=u(t)+iv(t)$， u,v 为实函数，则 $L[f(t)]=L[u(t)]+iL[v(t)]$

显然，若 s 为实数，

$$L[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt+i\int_0^\infty e^{-st}v(t)dt$$

$$=L[u(t)]+iL[v(t)]$$

则 $L[u(t)]=\operatorname{Re}L[f(t)]$

$$L[v(t)]=\operatorname{Im}L[f(t)]$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

$$f(t)=e^{iwt}=\cos wt+i\sin wt$$

$$L[\cos wt]+iL[\sin wt]=L[e^{iwt}]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{iwt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-wi)t}dt=\frac{1}{s-iw} \qquad (s>0)$$

$$=\frac{s}{s^2+w^2}+i\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos wt]=\frac{s}{s^2+w^2} \qquad L[\sin wt]=\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1} \qquad L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$$

2 原函数的微分性质

如果 $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ 都是原函数，则有

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$ 或

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $t = 0$ 处不连续，则

$f^{(k)}(0)$ 理解为 $\lim\limits_{T \to 0^+} f^{(k)}(T)$

证明 用数学归纳法证明. 当$n=1$时,

$$L[f'(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}df(t)$$

$$=e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}f(t)de^{-st}=sL[f(t)]-f(0).$$

设当$n=k$时有

$$L[f^{(k)}(t)]=s^kL[f(t)]-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}f'(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0),$$

$$L[f^{(k+1)}(t)]=L[\left(f^{(k)}(t)\right)']=sL[f^{(k)}(t)]-f^{(k)}(0)$$

$$=s\left[s^kL[f(t)]-s^{k-1}f(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0)\right]-f^{(k)}(0)$$

$$=s^{k+1}L[f(t)]-s^kf(0)-\cdots-sf^{(k-1)}(0)-f^{(k)}(0).$$

3　象函数的微分性质

$$F(s)=L[f(t)]$$

$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} te^{-st}f(t)dt=-L[tf(t)].$$

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}f(t)dt=(-1)^n L\left[t^n f(t)\right].$$

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]$$

特别的，令　$f(t)=1$

$$L[t^n]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad(\operatorname{Re}s>0)$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt}$$

证明 $$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt$$

$$=-\int_0^{+\infty}te^{-st}f(t)dt=-L\left[tf(t)\right].$$

用数学归纳法可以证明

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^ne^{-st}f(t)dt=(-1)^nL\left[t^nf(t)\right].$$

例2 求函数$f(t)=t^n e^{\alpha t}$的Laplace变换.

解 $$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^n e^{-st}e^{\alpha t}dt=(-1)^n L[t^n e^{\alpha t}],$$

$$L[t^n e^{\alpha t}]=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)$$

$$=\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}},\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,\alpha.$$

$$F(s)=L[e^{\alpha t}]=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{\alpha t}dt=\frac{1}{s-\alpha},\quad \mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,\alpha.$$

例3　求函数$t\sin\omega t, t\cos\omega t$的Laplace变换.

解

$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} te^{-st}\cos\omega t dt=-L[\mathrm{t}\cos\omega\,\mathrm{t}],$$

$$L[\mathrm{t}\cos\omega\,\mathrm{t}]=-F'(s)=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$L[\mathrm{t}\sin\omega\,\mathrm{t}]=-\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{2\omega s}{\left(x^2+\omega^2\right)^2}.$$

$$F(s)=L[\cos\omega\,\mathrm{t}]=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos\omega t dt=\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{L}[\sin\omega\,\mathrm{t}]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,s>0.$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \qquad (4.58)}$$

性质

$$\text{如果} F(s)=L\left[f(t)\right], \text{则}$$

$$L\left[e^{\alpha t} f(t)\right]=F(s-\alpha).$$

证明

$$L\left[e^{\alpha t} f(t)\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)dt$$

$$=F(s-\alpha).$$

例4 求函数$e^{\alpha t}\sin\omega t, e^{\alpha t}\cos\omega t$的Laplace变换.

解 $$L[e^{\alpha t}\cos\omega \mathrm{t}] = F(s-\alpha) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$L[e^{\alpha t}\sin\omega \mathrm{t}] = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}.$$

$$F(s) = L[\cos\omega \mathrm{t}] = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{L}[\sin\omega \mathrm{t}] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

§3　拉普拉斯逆变换 /Inverse of Laplace Transform /

已知象函数，求原函数　$L^{-1}[F(s)] = f(t)$

具有线性性质

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

证明

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]$$

$$=L^{-1}[c_1\int_0^{\infty}e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^{\infty}e^{-st}f_2(t)dt]$$

$$=L^{-1}[\int_0^{\infty}e^{-st}(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))dt]$$

$$=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$$

$$=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

由线性性质可得

如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=F_1(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定 $F_i(s)$ 的拉普拉斯变换容易求得，即

$$F_i(s)=L[f_i(t)]$$

则 $$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]$$

$$=f_1(t)+\cdots+f_n(t)$$

例1 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的**Laplace** 反变换

解
$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$
$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s+1}]-L^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$
$$=2e^{-t}-e^{-2t}\qquad t\geq 0$$

例2 求 $F(s)=\dfrac{s^2-5s+s}{(s-1)(s-2)^2}$ 的Laplace 反变换

解 $$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s-1}]-L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2}]$$

$$=e^t-te^{2t}\quad(t\geq 0)$$

(二)拉普拉斯变换法(求非齐次线性方程的特解)

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \quad (4.32)$$

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_0', x''(0)=x_0'', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$$

a_i 为常数

令 $X(s)=L[x(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$

$$L[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\cdots$$

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}$$

给(4.32)两端施行Laplace Transform

$$s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$
$$+ a_1[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x_0' - \cdots - x_0^{(n-2)}] +$$
$$\cdots + a_{n-1}[sX(s) - x_0] + a_n X(s) = F(s)$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)X(s) = F(s) + B(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)+B(s)}{A(s)}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}]$$

二阶常系数线性微分方程的初值问题

$$y''(t)+py'(t)+qy(t)=f(t);\ y(0)=y_0,y'(0)=y_0'.$$

设$Y(s)=L\left[y(t)\right],F(s)=L\left[f(t)\right]$,则

$$L\left[y''(t)+py'(t)+qy(t)\right]=L\left[f(t)\right],$$

$$L\left[y''(t)\right]+pL\left[y'(t)\right]+qL\left[y(t)\right]=F(s),$$

$$\left(s^2L\left[y(t)\right]-sy(0)-y'(0)\right)+p\left(sL\left[y(t)\right]-y(0)\right)$$

$$+qL\left[y(t)\right]=F(s),$$

$$\left(s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right)+p\left(sY(s)-y_0\right)+qY(s)=F(s),$$

$$Y(s)=\frac{(s+p)y_0}{s^2+ps+q}+\frac{y_0'}{s^2+ps+q}+\frac{F(s)}{s^2+ps+q}.$$

拉普拉斯逆变换

$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=y(t).$$

$y(t)$的求法：将$Y(s)$用部分分式方法分解成最简分式，使得每一分式的原函数均可以在Laplace变换表上查到.

例3 求 $\dfrac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初始条件$x(0)=0$的特解

解 令 $L[x(t)]=X(s)$ $\quad L(\dfrac{dx}{dt})-L[x]=L[e^{2t}]$

$$sX(s)-x(0)-X(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s-2}]-L^{-1}[\frac{1}{s-1}]=e^{2t}-e^{t}$$

例 4 求 $x'' + 2x' + x = e^{-t}$ 满足初始条件 $x(1) = x'(1) = 0$ 的特解

解 令 $\tau = t - 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} \qquad e^{-t} = e^{-\tau} \cdot e^{-1}$$

$$x'' + 2x' + x = e^{-(\tau+1)} \qquad x(\tau)\big|_{\tau=0} = 0 \quad x'(\tau)\big|_{\tau=0} = 0$$

$$L[x(\tau)] = X(s)$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2sX(s) - x(0) + X(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-x(0)+X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$X(s)=\frac{1}{e(s+1)(s^2+2s+1)}=\frac{2!}{e(s+1)^3}\frac{1}{2}$$

$$x(\tau)=\frac{1}{2e}\tau^2e^{-\tau}$$

$$x(t)=\frac{1}{2e}(t-1)^2e^{-(t-1)}=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$$

例 5 求 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 满足初始条件

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ 的特解

解 令 $X(s) = L[x(t)]$

$$s^3X(s) + 3s^2X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2)e^{-t}$$

练习

求方程 $$x'' + a^2 x = \sin at$$

满足初始条件

$$x(0) = x'(0) = 0$$

的特解，其中 a 为非零常数 。

作业：P.165，第4题（2）

4.2.3　非齐次线性方程解法

-------比较系数法与拉普拉斯变换法

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (4.32)$$

$a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数， $f(t)$ 为连续函数。

令 $D=\dfrac{d}{dt}$

$$L=D^n+a_1 D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

L 为线性微分算子。

$$L[x]=f(t) \longrightarrow L[x]=0$$

相加

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

特解 ⟵ 基本解组或通解

常数变易法

比较系数法与拉普拉斯变换法

（一）比较系数法/Comparison Coefficients Method/

类型I/Type One/

$$f(t)=\left(b_0 t^m+b_1 t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m\right)\cdot e^{\lambda t}$$

其中 $\lambda, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为确定的实常数。

简单的 $\boldsymbol{y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)}$ ①

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

设特解为 $y^* = \underline{e^{\lambda x} Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\underline{\lambda Q(x)} + \underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\underline{\lambda^2 Q(x)} + \underline{2\lambda Q'(x)} + \underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$.

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(2) 若λ 是特征方程的单根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0,$$

则$Q'(x)$为m 次多项式，故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

则$Q''(x)$ 是 m 次多项式，故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①，当λ 是特征方程的 k 重根 时，可设

特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad(k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

结论1 当方程(4.32)中右端函数 $f(t)$为以上类型时，

方程 (4.32) 有一特解为以下形式

$$\tilde{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m) \cdot e^{\lambda t}$$

其中 $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 为待定系数， k 由(4.32)

对应的特征方程 $F(\lambda) = 0$ 来决定，

λ 是特征根时， k 为 λ 的重数，

λ 不是特征根时， $k = 0$

例

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

$$x = t\ Ae^{-t} = Ate^{-t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=(t^2+1)e^t$$

$$\tilde{x}=t^0\ (At^2+Bt+C)e^t=(At^2+Bt+C)e^{-t}$$

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (4.32)$$

1） $\lambda=0$ $f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$

（1） $\lambda=0$ 不是特征根 $F(0)\neq 0$ $\therefore a_n\neq 0$

要证明(4.32)有解 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$

即证明 B_i 能由已知条件唯一确定。

事实上，将其代入方程， 比较同次幂的系数，得

$$\begin{cases} a_n B_0 = b_0 \\ a_n B_1 + a_{n-1} m B_0 = b_1 \\ a_n B_2 + a_{n-1}(m-1)B_1 + a_{n-2} m(m-1) B_0 = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_n B_m + a_{n-1} B_{m+1} + 2a_{n-2} B_{m+2} + \cdots = b_m \end{cases}$$

$\because a_n \neq 0 \quad B_0, B_1, \cdots, B_m$ 可唯一确定。

（2） $\lambda=0$ 是 k 重特征根

$$x = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m)$$

其特征方程为 $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k} \lambda^k = 0$

也就是 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0 \quad a_{n-k} \neq 0$

原方程为 $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = f(t)$$

令 $$\frac{d^k x}{dt^k} = z$$

$$\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t) \qquad (4.36)$$

对方程(4.36)， $a_{n-k}\neq 0$

$\lambda=0$ 不是 (4.36) 的特征根， 有如下形式的特解

$$\tilde{z}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$$

$$\frac{d^k\tilde{x}}{dt^k}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$$

$$\frac{d^{k-1}\widetilde{x}}{dt^{k-1}} = \frac{\widetilde{B}_0}{m+1}t^{m+1} + \frac{\widetilde{B}_1}{m}t^{m} + \cdots + \widetilde{B}_m t$$

$$\cdots$$

$$\widetilde{x} = t^k(\gamma_0 t^m + \gamma_1 t^{m-1} + \cdots + \gamma_m)$$

$\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 为确定的数。

2）如果 $\lambda \neq 0$ 引入 $x = ye^{\lambda t}$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = e^{\lambda t} P_m(t) \qquad (4.32)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m \qquad (4.37)$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为确定的常数。

当 λ 是(4.32) 的 k 重特征根，

则0就是 (4.37) 的 k 重特征根

当 λ 不是(4.32) 对应齐次方程的特征根，

则 0 就不是(4.37)的特征根。

利用1）的讨论，故 (4.37)有形如以下的特解

$$y = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m$$

$$x = y e^{\lambda t}$$ (4.32)有形如

$$x = e^{\lambda t}\left(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m\right)$$ 的特解

当 λ 是**(4.32)** 的 $\boldsymbol{k}$ 重特征根，

则0就是 **(4.37)** 的 $\boldsymbol{k}$ 重特征根

$$\tilde{y}=t^{k}\left(B_{0}t^{m}+B_{1}t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_{m}\right)$$

(4.32)有特解为

$$\tilde{x}=t^{k}\left(B_{0}t^{m}+B_{1}t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_{m}\right)\cdot e^{\lambda t}$$

例1 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 的通解.

解 1° 先求对应齐次方程的通解

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

通解 $c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° 用比较系数法求一特解

0不是特征根， 则方程有形如 $\tilde{x}=At+B$ 的特解

$$-2A-3(At+B)=3t+1$$

$$\begin{cases}-3A=3\\-2A-3B=1\end{cases} \qquad A=-1,B=\frac{1}{3}$$

3° 通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-t+\dfrac{1}{3}$

例2 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 的通解

解 1° $-1,\ 3$ $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° -1是特征根， $x=t\,Ae^{-t}=Ate^{-t}$

$$\tilde{x}'=Ae^{-t}-Ate^{-t}$$

$$\tilde{x}''=-Ae^{-t}-Ae^{-t}+Ate^{-t}=-2Ae^{-t}+Ate^{-t}$$

$$-2Ae^{-t}+Ate^{-t}-2(Ae^{-t}-Ate^{-t})-3Ate^{-t}=e^{-t}$$

$$A=-\frac{1}{4}\qquad \tilde{x}=-\frac{1}{4}te^{-t}$$

3° 通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\frac{1}{4}te^{-t}$

$$L[x] = f_1(t) + f_2(t)$$

若 $L[x] = f_1(t)$ 有特解 $x_1(t)$

$L[x] = f_2(t)$ 有特解 $x_2(t)$

则 $L[x] = f_1(t) + f_2(t)$ 有特解

$$x_1(t) + x_2(t)$$

例3 求方程 $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$ 的通解

解 1° $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ $\lambda_{1,2,3}=-1$

$$(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}$$

2° 设 $\tilde{x}=t^3(At+B)e^{-t}$

$$A=\frac{1}{24} \quad B=-\frac{5}{6}$$

3° $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$

例4 求$t^2x'' - 4tx' + 6x = t$的通解.

解 $t = e^s$ $\quad s = \ln|t|$

变换后，对应齐次方程的特征方程为

$$k(k-1) - 4k + 6 = 0 \qquad k^2 - 5k + 6 = 0$$

变换后，为常系数方程 $\dfrac{d^2x}{ds^2} - 5\dfrac{dx}{ds} + 6 = 0$

原方程化为 $\dfrac{d^2x}{ds^2} - 5\dfrac{dx}{ds} + 6x = e^s$

$$k_1 = 2,\ k_2 = 3 \qquad c_1e^{2s} + c_2e^{3s}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}-5\frac{dx}{ds}+6x=e^s$$

$$\tilde{x}=s^0Ae^s=Ae^s$$

$$A-5A+6A=1 \qquad A=\frac{1}{2}$$

$$\tilde{x}=\tfrac{1}{2}e^s=\tfrac{1}{2}t$$

$$x(s)=c_1e^{2s}+c_2e^{3s}+\frac{1}{2}e^s$$

原方程的通解为 $x(t)=c_1t^2+c_2t^3+\tfrac{1}{2}t$

练习 $$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1+e^{-t}$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

特解 $At+B$ $\quad \mathrm{A}=-1,\mathrm{B}=\frac{1}{3} \qquad \tilde{x}_1=-t+\frac{1}{3}$

特解 Ate^{-t} $\quad A=-\frac{1}{4} \qquad \tilde{x}_2=-\frac{1}{4}te^{-t}$

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}te^{-t}$$

类型II /Type Two/

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

其中 α,β 为实数， $A(t),B(t)$ 是 t

的实系数多项式

$$\max(\partial A(t),\partial B(t))=m$$

简单的

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数)

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m \cos\omega x + \widetilde{R}_m \sin\omega x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

结论2

方程(4.32)有特解

$$\tilde{x} = t^k \left[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t \right] e^{\alpha t}$$

$P(t), Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式,

k 由 $\alpha + i\beta$ 决定

当 $\alpha + i\beta$ 是特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根时，k 为重数

当 $\alpha + i\beta$ 不是特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根时，$k = 0$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = [\cos\beta t + i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = [\cos\beta t - i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{2}i\,(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$f(t) = A(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} -$$

$$i\frac{B(t)}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\right)$$

$$= \frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= f_1(t) + f_2(t)$$

显然 $$\overline{f_1(t)} = \frac{A(t)+iB(t)}{2} e^{(\alpha-i\beta)t} = f_2(t)$$

$$L[x] = f_1(t) \qquad\qquad L[x] = f_2(t)$$

$$\tilde{x}_1 = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad \tilde{x}_2 = t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\tilde{x}(t) = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\tilde{x}(t) = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= t^k e^{\alpha t} \left[D(t) e^{i\beta t} + \overline{D}(t) e^{-i\beta t} \right]$$

$$= t^k e^{\alpha t} \left[D(t) (\cos\beta t + i \sin\beta t) + \overline{D}(t) (\cos\beta t - i \sin\beta t) \right]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[D(t)(\cos\beta t+i\sin\beta t)+$$
$$\overline{D}(t)(\cos\beta t-i\sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[(D(t)+\overline{D}(t))\cos\beta t+$$
$$i(D(t)-\overline{D}(t))\sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)]$$

$P(t),Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式。

例5 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$ 的通解

解 $\lambda^2+4\lambda+4=0 \qquad \lambda_{1,2}=-2$

齐次方程的通解为 $(c_1+c_2t)e^{-2t}$

设方程的特解形如：$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$

$$\begin{cases} 4A+8B+4A=1 \\ 4B-8A-4B=0 \end{cases} \qquad A=0,\ B=\frac{1}{8}$$

$$\tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$$

原方程的通解为 $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$

练习 试求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t+2\sin t$ 的特解.

解

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=2\sin t$$

作业：P.164，第1题（5）（6）（15）

（二）

拉普拉斯变换法 /Laplace Transform /

拉普拉斯变换

§1拉普拉斯变换定义/Definition of Laplace Transform/

对于在 $[0,\infty)$ 上有定义的函数 $f(t)$

若 $$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt$$

对于已给的一些 s（一般为复数）存在，则称

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $L[f(t)]=F(s)$

$f(t)$称为Laplace Transform 的原函数，$F(s)$称为$f(t)$ 的象函数.

拉普拉斯变换法存在性/Existence of Laplace Transform/

假若函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的每一个有限区间上

是分段连续的, 并且$\exists$ 常数 $M > 0,\ \sigma \geq 0$

使对于所有的 $t \geq 0$ 都有下列不等式成立

$$|f(t)| < Me^{\sigma t},$$

则当 $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ 时, $f(t)$ 的**Laplace Transform**

是存在的。

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

例1 $f(t)=1 \quad (t \geq 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1dt = \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T]$$

$$=\lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}]=\frac{1}{s} \qquad 当 \quad \mathrm{Re}\, s>0$$

即 $$L[1]=\frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\, s>0)$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

例2 $f(t)=e^{zt}$(z 是给定的实数或复数)

$$L[e^{zt}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-z)t}dt=\frac{1}{s-z} \qquad (\mathrm{Re}(s-z)>0)$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z} \qquad (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,z)$$

练习 求函数$f(t)=t$的Laplace变换.

解

$$L[t]=\int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

练习 求函数$f(t)=t^n$的Laplace变换.

解

$$L[t^n]=\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

§2 拉普拉斯变换的基本性质/ Properties of Laplace Transform/

1 线性性质 如果 $f(t), g(t)$ 是原函数, α 和 β 是任意两个常数(可以是复数)，则有

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$$

$$左=\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt$$

$$=\alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+\beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

$$=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]=右$$

例1 如果原函数为 $f(t)=u(t)+iv(t)$，u,v 为实函数，则 $L[f(t)]=L[u(t)]+iL[v(t)]$

显然，若 s 为实数，

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}u(t)dt+i\int_0^{\infty}e^{-st}v(t)dt$$

$$=L[u(t)]+iL[v(t)]$$

则 $L[u(t)]=\operatorname{Re}L[f(t)]$

$$L[v(t)]=\operatorname{Im}L[f(t)]$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

$$f(t)=e^{iwt}=\cos wt+i\sin wt$$

$$L[\cos wt]+iL[\sin wt]=L[e^{iwt}]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{iwt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-wi)t}dt=\frac{1}{s-iw}\qquad (s>0)$$

$$=\frac{s}{s^2+w^2}+i\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos wt]=\frac{s}{s^2+w^2}\qquad L[\sin wt]=\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}\qquad L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$$

2 原函数的微分性质

如果 $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ 都是原函数，则有

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$ 或

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $t = 0$ 处不连续，则

$f^{(k)}(0)$ 理解为 $\lim\limits_{T \to 0^+} f^{(k)}(T)$

证明

用数学归纳法证明. 当$n=1$时,

$$L[f'(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}df(t)$$

$$=e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}f(t)de^{-st}=sL[f(t)]-f(0).$$

设当$n=k$时有

$$L[f^{(k)}(t)]=s^kL[f(t)]-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}f'(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0),$$

$$L[f^{(k+1)}(t)]=L[\left(f^{(k)}(t)\right)']=sL[f^{(k)}(t)]-f^{(k)}(0)$$

$$=s\left[s^kL[f(t)]-s^{k-1}f(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0)\right]-f^{(k)}(0)$$

$$=s^{k+1}L[f(t)]-s^kf(0)-\cdots-sf^{(k-1)}(0)-f^{(k)}(0).$$

3 象函数的微分性质

$$F(s)=L[f(t)]$$

$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} te^{-st}f(t)dt=-L[tf(t)].$$

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}f(t)dt=(-1)^n L\left[t^n f(t)\right].$$

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]$$

特别的，令 $f(t)=1$

$$L[t^n]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(\operatorname{Re}s>0)$$

$$\boxed{F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

证明 $$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt=\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)dt$$

$$=-\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)dt=-L\left[tf(t)\right].$$

用数学归纳法可以证明

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} f(t)dt=(-1)^n L\left[t^n f(t)\right].$$

例2　求函数$f(t)=t^n e^{\alpha t}$的Laplace变换.

解　$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}e^{\alpha t}dt=(-1)^n L[t^n e^{\alpha t}],$$

$$L[t^n e^{\alpha t}]=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)$$

$$=\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}},\operatorname{Re}s>\operatorname{Re}\alpha.$$

$$F(s)=L[e^{\alpha t}]=\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt=\frac{1}{s-\alpha},\quad \operatorname{Re}s>\operatorname{Re}\alpha.$$

例3　求函数$t\sin\omega t, t\cos\omega t$的Laplace变换.

解
$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} te^{-st}\cos\omega t dt=-L[\mathrm{t}\cos\omega\,\mathrm{t}],$$

$$L[\mathrm{t}\cos\omega\,\mathrm{t}]=-F'(s)=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$L[\mathrm{t}\sin\omega\,\mathrm{t}]=-\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{2\omega s}{\left(x^2+\omega^2\right)^2}.$$

$$F(s)=L[\cos\omega\,\mathrm{t}]=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos\omega t dt=\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{L}[\sin\omega\,\mathrm{t}]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}\,s>0.$$

$$\boxed{F(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \qquad (4.58)}$$

性质

如果$F(s)=L[f(t)]$,则

$$L\left[e^{\alpha t} f(t)\right]=F(s-\alpha).$$

证明

$$L\left[e^{\alpha t} f(t)\right]=\int_{0}^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)dt$$

$$=F(s-\alpha).$$

例4 求函数$e^{\alpha t}\sin\omega t, e^{\alpha t}\cos\omega t$的Laplace变换.

解 $$L[e^{\alpha t}\cos\omega \mathrm{t}] = F(s-\alpha) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$L[e^{\alpha t}\sin\omega \mathrm{t}] = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}.$$

$$F(s) = L[\cos\omega \mathrm{t}] = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{L}[\sin\omega \mathrm{t}] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

§3　拉普拉斯逆变换 /Inverse of Laplace Transform /

已知象函数，求原函数　$L^{-1}[F(s)] = f(t)$

具有线性性质

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]$$

$$=L^{-1}[c_1\int_0^{\infty}e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^{\infty}e^{-st}f_2(t)dt]$$

$$=L^{-1}[\int_0^{\infty}e^{-st}(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))dt]$$

$$=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$$

$$=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

由线性性质可得

如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=F_1(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定 $F_i(s)$ 的拉普拉斯变换容易求得，即

$$F_i(s)=L[f_i(t)]$$

则 $$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]$$

$$=f_1(t)+\cdots+f_n(t)$$

例1 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的Laplace 反变换

解

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s+1}]-L^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t} \qquad t\geq 0$$

例2 求 $F(s)=\dfrac{s^2-5s+s}{(s-1)(s-2)^2}$ 的Laplace 反变换

解 $$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s-1}]-L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2}]$$

$$=e^t-te^{2t}\quad(t\geq 0)$$

(二)拉普拉斯变换法(求非齐次线性方程的特解)

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \quad (4.32)$$

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_0', x''(0)=x_0'', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$$

a_i 为常数

令 $X(s)=L[x(t)]\equiv\int_0^{\infty}e^{-st}x(t)dt$

$$L[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\cdots$$

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}$$

给(4.32)两端施行Laplace Transform

$$s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - s x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$
$$+ a_1\left[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x_0' - \cdots - x_0^{(n-2)}\right] +$$
$$\cdots + a_{n-1}\left[sX(s) - x_0\right] + a_n X(s) = F(s)$$

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)X(s) = F(s) + B(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)+B(s)}{A(s)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left[X(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}\right]$$

二阶常系数线性微分方程的初值问题

$$y''(t)+py'(t)+qy(t)=f(t);\ y(0)=y_0, y'(0)=y_0'.$$

设$Y(s)=L\left[y(t)\right], F(s)=L\left[f(t)\right]$,则

$$L\left[y''(t)+py'(t)+qy(t)\right]=L\left[f(t)\right],$$

$$L\left[y''(t)\right]+pL\left[y'(t)\right]+qL\left[y(t)\right]=F(s),$$

$$\left(s^2L\left[y(t)\right]-sy(0)-y'(0)\right)+p\left(sL\left[y(t)\right]-y(0)\right)$$

$$+qL\left[y(t)\right]=F(s),$$

$$\left(s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right)+p\left(sY(s)-y_0\right)+qY(s)=F(s),$$

$$Y(s)=\frac{(s+p)y_0}{s^2+ps+q}+\frac{y_0'}{s^2+ps+q}+\frac{F(s)}{s^2+ps+q}.$$

拉普拉斯逆变换

$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=y(t).$$

$y(t)$的求法：将$Y(s)$用部分分式方法分解成最简分式，使得每一分式的原函数均可以在Laplace变换表上查到.

例3 求 $\dfrac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初始条件$x(0)=0$的特解

解 令 $L[x(t)]=X(s)$ $\quad L(\dfrac{dx}{dt})-L[x]=L[e^{2t}]$

$$sX(s)-x(0)-X(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s-2}]-L^{-1}[\frac{1}{s-1}]=e^{2t}-e^{t}$$

例 4 求 $x''+2x'+x=e^{-t}$ 满足初始条件 $x(1)=x'(1)=0$ 的特解

解 令 $\tau=t-1$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{d\tau^2} \qquad e^{-t}=e^{-\tau}\cdot e^{-1}$$

$$x(\tau+1)\big|_{\tau=0}=0 \quad x'(\tau+1)\big|_{\tau=0}=0$$

$$L[x(\tau)]=X(s)$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-x(0)+X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$X(s)=\frac{1}{e(s+1)(s^2+2s+1)}=\frac{2!}{e(s+1)^3}\frac{1}{2}$$

$$x(\tau)=\frac{1}{2e}\tau^2e^{-\tau}$$

$$x(t)=\frac{1}{2e}(t-1)^2e^{-(t-1)}=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$$

例 5 求 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 满足初始条件

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ 的特解

解 令 $X(s) = L[x(t)]$

$$s^3X(s) + 3s^2X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2)e^{-t}$$

练习

求方程 $$x'' + a^2 x = \sin at$$

满足初始条件

$$x(0) = x'(0) = 0$$

的特解，其中 a 为非零常数。

§ 4.2 常系数线性微分方程的解法

Solving Method of Constant Coefficients Linear ODE

§ 4.1内容回顾

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

解的性质与结构

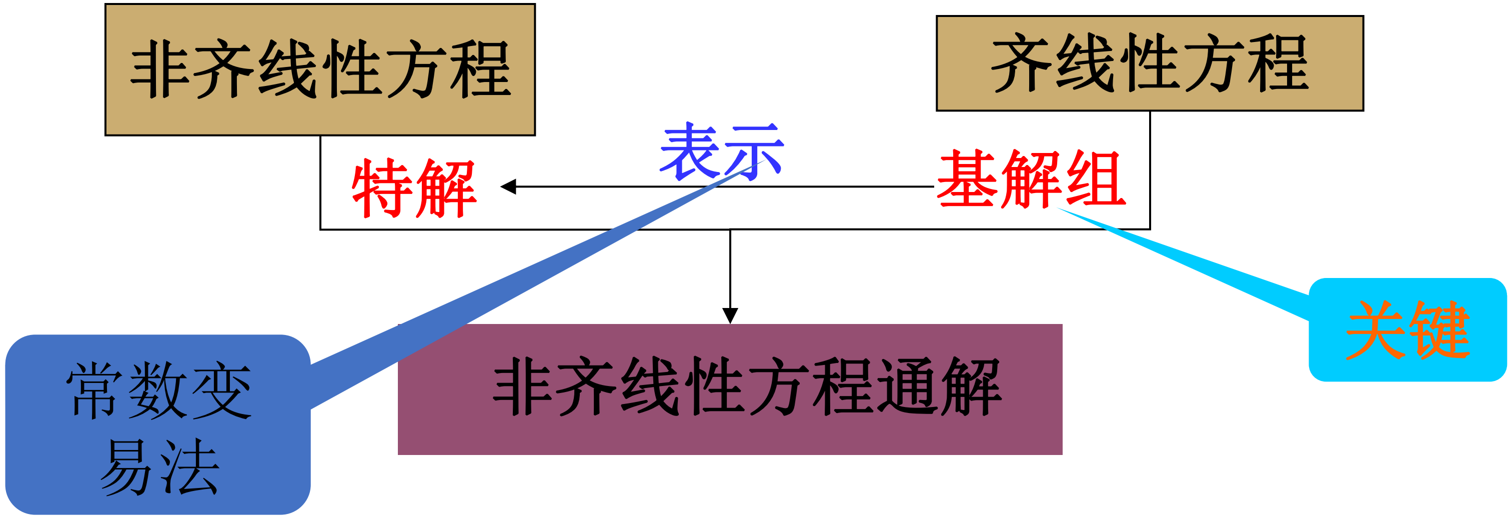
♣ $\boldsymbol{n}$ 阶齐次线性方程的所有解构成一个 $\boldsymbol{n}$ 维线性空间

方程(4.2)的一组n个线性无关解称为它的一个基本解组

结构

齐线性方程的通解可由其基本解组线性表示。

非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。



本节要求/Requirements/

- 熟练掌握常系数齐次线性方程的求解方法
- 熟练掌握常系数非齐次线性方程的求解方法
- 熟练掌握欧拉方程的求解方法

4.2.1 复值函数与复值解/Complex Function and Complex Solution/

1、 定义 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t) \quad t\in[a,b]$,

$\varphi(t)$, $\psi(t)$是定义在$[a,b]$上的实函数。

极限 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) \quad t_0\in[a,b]$,

连续 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=z(t_0) \quad t_0\in[a,b]$,

导数 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+i\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)=\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}+i\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_0}$$

易验证

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)\cdot z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}z_2(t)+z_1(t)\frac{dz_2(t)}{dt}$$

如 $\quad z_j(t)=\varphi_j(t)+i\psi_j(t) \quad j=1,2 \quad t\in[a,b],$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{d}{dt}(\varphi_1(t)+i\psi_1(t)+\varphi_2(t)+i\psi_2(t))$$

$$=\frac{d}{dt}\{[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i[\psi_1(t)+\psi_2(t)]\}$$

$$=\frac{d}{dt}[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i\frac{d}{dt}[\psi_1(t)+\psi_2(t)]$$

$$=(\frac{d\varphi_1}{dt}+i\frac{d\psi_1}{dt})+(\frac{d\varphi_2}{dt}+i\frac{d\psi_2}{dt})=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

2、 关于 e^{kt} $\quad k=\alpha+i\beta \quad \alpha,\beta$为实数，$t$为实变量。

定义

$$e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}$$
$$=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

$$e^{i\beta t}=\cos\beta t+i\sin\beta t$$

$$e^{-i\beta t}=\cos\beta t-i\sin\beta t$$

$\bar{k}=\alpha-i\beta$ 表示 $k=\alpha+i\beta$ 共轭复数，

$$e^{\bar{k}t}=e^{\overline{(\alpha+i\beta)}t}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$
$$=\overline{e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)}=\overline{e^{kt}}$$

e^{kt}的性质

1） $e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$

2） $\dfrac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$ 3） $\dfrac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt}$

结论

- 实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式一致。
- 实变量的复指数函数的求导公式与实变量的实指数函数的性质一致。

3、 线性方程的复值解/Complex Solution of Linear Higher-Order ODE

如果定义在 $[a,b]$ 上的实变量的复值函数 $x=z(t)$ 满足方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

则称 $x=z(t)$ 为方程的一个复值解。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理8 如果方程(4.2)中所有系数$a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$

都是实值函数，而 $x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是方程的复数解，

则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$，虚部 $\psi(t)$ 和共轭复数函数 $\bar{z}(t)$

也是方程(4.2)的解。

定理9 若方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$

有复数解 $x=U(t)+iV(t)$,这里 $a_i(t)(i=1,2,\ldots,n),u(t)$

及 $v(t)$ 都是实函数。那么这个解的实部 $U(t)$ 和虚部

$V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解。

4.2.2 常系数齐线性方程和欧拉方程

/Coefficient Linear Homogenous Higher-Order ODE And Euler Equation/

n 阶常系数齐次线性方程　其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数。

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad \ldots\ldots.(4.19)$$

为了求方程(4.19)的通解，只需求出它的基本解组。

$x = e^{\lambda t}$　　$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}F(\lambda)$　　$x = e^{\lambda t}$

$$L[e^{\lambda t}] \equiv \lambda^n e^{\lambda t} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \ldots\ldots.(4.21)$$

特征方程

$e^{\lambda t}$　　$F(\lambda) = 0$ ← λ 满足

特征根

结论： $x = e^{\lambda t}$ 是方程(4.19)的解的充要条件 λ 满足 $F(\lambda) = 0$

下面根据特征根的不同情况分别进行讨论。

$$F(\lambda)=\boxed{\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0}$$

1)特征根为单根的情况

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程（4.21）的**n**个互不相等的根，

则相应的方程（**4.19**）有如下**n**个解

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$$

这**n**个解在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上线性无关，从而组成方程

的基本解组。事实上，

$$W(t) \equiv \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 是方程的基本解组。

方程4.19的通解可表示为 $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$

如果特征方程有复根，则因方程的系数是实常数。复根将成对共轭的出现，设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 方程的一个特征根

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个特征根

则方程（4.19）有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

对应两个实值解 $e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t$

例1 求方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i$$

第二步：求出基本解组

$$e^t, \ e^{-t}, \quad \cos t, \ \sin t$$

第三步：写出通解

$$x(t) = c_1 e^t + \mathrm{c}_2\, e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

例2 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3+1=0 \qquad \lambda_1=-1, \quad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}, \qquad e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\,e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

2）特征根有重根的情况

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \qquad \text{.......(4.19)}$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \text{.......(4.21)}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是特征方程（4.21）的m个互不相等的根。

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 重数 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$

I. 设 $\lambda_1 = 0$ 是 k_1 重特征根

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k_1}\lambda^{k_1} = 0 \qquad a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k_1+1} = 0$$

$$a_{n-k_1} \neq 0$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k_1}\frac{d^{k_1}x}{dt^{k_1}} = 0$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k_1}\frac{d^{k_1}x}{dt^{k_1}}=0$$

显然 $1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$ 是方程的 k_1 个线性无关的解，

方程(4.19)有 k_1 重零特征根

方程恰有 k_1 个线性无关的解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$

II. 设 $\lambda_1 \neq 0$ 是 k_1 重特征根

令 $x=ye^{\lambda_1 t}$

$$L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$$

…….(4.19)

$$x^{(m)} = (ye^{\lambda_1 t})^{(m)} =$$

$$y^{(m)}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 m y^{(m-1)}e^{\lambda_1 t} + \frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \lambda_1^m y e^{\lambda_1 t}$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}] =$$

$$e^{\lambda_1 t}(y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}y' + b_n y) = 0$$

$$L_1[y] = y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}y' + b_n y = 0$$

$$\ldots\ldots.(4.23)$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t}L_1[y]$$

特征方程 $G(\mu) = \mu^n + b_1\mu^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\mu + b_n = 0 \cdots\cdots(4.24)$

$$L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t} L_1[y]$$

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t} = L[e^{(\mu+\lambda_1)t}] = L[e^{\mu t}e^{\lambda_1 t}]$$

$$= e^{\lambda_1 t} L_1[e^{\mu t}] = e^{(\lambda_1+\mu)t} G(\mu)$$

$$F(\mu+\lambda_1) = G(\mu) \qquad F^{(j)}(\lambda_1) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,k_1 - 1$$

$$F^{(k_1)}(\lambda_1) \neq 0,$$

$$\frac{dF^j(\mu+\lambda_1)}{d\mu^j} = \frac{dG^j(\mu)}{d\mu^j}, \quad j = 1,2,\cdots,k_1$$

(4.19)的 k_1重特征根λ_1 $\longleftrightarrow$ **(4.23)的 k_1 重特征根零**

方程(4.23)恰有 k_1 个线性无关的解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$

由 $x = ye^{\lambda_1 t}$

方程(4.19)恰有 k_1 个线性无关的解 $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}$

类似地

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 & k_1 & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 & k_2 & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m & k_m & e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{array}\right\} \text{基本解组} \quad (4.26)$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$$

证明 假若这些函数线性相关，则存在不全为零的数$A_j^{(r)}$使得

$$
\begin{aligned}
&(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}t + \cdots + A_{k_1-1}^{(1)}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t} + \\
&(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}t + \cdots + A_{k_2-1}^{(2)}t^{k_2-1})e^{\lambda_2 t} + \cdots + \\
&(A_0^{(m)} + A_1^{(m)}t + \cdots + A_{k_m-1}^{(m)}t^{k_m-1})e^{\lambda_m t} \equiv 0
\end{aligned}
$$

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \equiv 0 \qquad \textbf{(4.27)}$$

假定多项式$P_m(t)$ 至少有一个系数不为零，则 $P_m(t)$

不恒为零，

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + P_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} \equiv 0$$

微分 k_1 次

$$[P_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}]^{(k_1)}$$

$$=[P_r^{(k_1)}(t)+k_1(\lambda_r-\lambda_1)P_r^{(k_1-1)}(t)+\cdots+(\lambda_r-\lambda_1)^k P_r(t)]e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}$$

$$=Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} \qquad \partial(Q_r(t))=\partial(P_r(t))$$

$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\cdots+Q_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0$$

$\partial(Q_m(t))=\partial(P_m(t))$ $\quad Q_m(t)$ 不恒为零，

$$\vdots$$

$R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\equiv 0 \qquad \partial(R_m(t))=\partial(P_m(t))$

$R_m(t)$ 不恒为零， $\quad e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\neq 0$ $\quad$ 矛盾！

(4.26) 中函数线性无关，其构成的解本解组。

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 方程的一个k重特征根

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个k重特征根

它们对应2 k个线性无关的实解是

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

例3 求方程 $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \qquad \lambda_{1,2,3}=1,$$

第二步：求出基本解组

$$e^t, \quad te^t, \quad t^2e^t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1 e^t+c_2\, te^t+c_3\, t^2e^t$$

例4　求方程 $$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$ 的通解。

解　第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \qquad \lambda_{1,2}=\pm i \quad \text{二重根}$$

第二步：求出基本解组

$$\cos t,\ t\cos t,\ \sin t,\ t\sin t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\, t\cos t+c_3\sin t+c_4\, t\sin t$$

作业：P.164，第1题（1）（3）

可化为常系数线性方程的方程　　-------欧拉(Euler) 方程

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad (4.29)$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数。

引入自变量代换　$x = e^t$　　$\ln x = t$　　$dx = e^t dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right) = \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \frac{dt}{dx}$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

假设 自然数 m 有以下关系式成立，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$为常数

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[e^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\Big[-me^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)+$$

$$e^{-mt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\Big]e^{-t}$$

$$=\frac{1}{x^{m+1}}\left(\frac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}}+\beta_1\frac{d^m y}{dt^m}+\cdots+\beta_m\frac{dy}{dt}\right)$$

对一切自然数 **m** 均有以下关系是成立，

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

原方程 $x=e^t$

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)\quad(4.29)$$

可化为常系数线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=f(e^t)\quad(4.30)$$

求解欧拉方程的过程

欧拉方程 $\xrightarrow{x=e^t}$ 常系数线性方程 $\longrightarrow F(k)=0$

$y=x^k \longleftarrow y=e^{kt}$

确定 $F(k)=0$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

设 $y=x^k$ 是欧拉方程的解

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)x^k+\cdots+a_{n-2}k(k-1)x^k+a_{n-1}kx^k+a_nx^k=0$$

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n]x^k=0$$

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

$$F(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n$$

解齐次欧拉方程的步骤

第一步：写出特征方程，并求特征根

第二步：求出的基本解组

先求出变换以后方程的基本解组

再求出原方程的基本解组

第三步：写出原方程的通解

例5 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解。

解 第一步：写出特征方程，并求特征根

$$F(k)=k(k-1)-k+1=0 \qquad k_{1,2}=1,$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\quad te^t \xrightarrow{x=e^t} x,\ x\ln|x|$$

第三步：写出通解

$$y(x)=c_1x+c_2x\ln|x|$$

例6 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解。

解 第一步：写出特征方程，并求特征根

$$F(k)=k(k-1)+3k+5=0 \qquad k^2+2k+5=0$$

$$k_{1,2}=-1\pm 2i$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}\cos 2t,\ e^{-t}\sin 2t \xrightarrow{x=e^t} \frac{1}{x}\cos 2\ln|x|,\ \frac{1}{x}\sin 2\ln|x|$$

第三步：写出通解 $y(x)=\dfrac{1}{x}(c_1\cos 2\ln|x|+c_2\sin 2\ln|x|)$

作业： P.165，第3题（1）

§4.3　高阶方程的降阶法

和幂级数解法

Step-down Order Method and Series Method

§ 4.2 内容回顾

方程类型

1 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

2 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+x(t)$$

求解方法

$$L[x]=f(t) \longrightarrow L[x]=0$$

相加

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

特解 $\longleftarrow$ 基本解组或通解

常数变易法

比较系数法　　　拉普拉斯变换法

本节内容/Contents/

4.3.1 可降阶的方程的类型

n 阶方程的一般形式 $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$

1) 方程不显含未知函数 x 及 $x', x'', \cdots, x^{(k-1)}$

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0 \quad 1 \le k \le n$$

则方程可降为 $n-k$ 阶的方程，即可降 k 阶

方法 令 $x^{(k)}=y$ 则

$$F\left(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)}\right)=0 \qquad (4.58)$$

若可求得 (4.58) 的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

$$x^{(k)}=y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

逐次积分 k 次，可得原方程的通解。

特别，对于二阶方程 $F(t, x', x'') = 0$

$$x' = y, \quad x'' = y'$$

$$F(t, y, y') = 0$$

$$y = \varphi(t, c_1) \qquad x' = \varphi(t, c_1)$$

积分，可得原方程的通解

$$x = \Phi(t, c_1, c_2)$$

例1 求方程 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$ 的通解。

解 令 $\frac{d^4x}{dt^4}=y$ $\qquad y'-\frac{1}{t}y=0$

$$y=c_1e^{\int\frac{1}{t}dt}=c_1t \qquad x^{(4)}=c_1t \qquad x^{(3)}=\frac{c_1}{2}t^2+c_2$$

$$x^{(2)}=\frac{c_1}{6}t^3+c_2t+c_3 \qquad x'=\frac{c_1}{24}t^4+\frac{c_2}{2}t^2+c_3t+c_4$$

$$x=c_1't^5+c_2't^3+c_3't^2+c_4't+c_5'$$

2)不显含自变量 t 的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \qquad (4.59)$$ 可降低一阶

方法　令　$x' = y$

$$x'' = \frac{d}{dt}(x') = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$x''' = \frac{d}{dt}(y\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(y\cdot\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= y\left((\frac{dy}{dx})^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right) = y(\frac{dy}{dx})^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

假定 $x^{(n-1)} = f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}})$

$$x^{(n)} = \frac{d}{dt} f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}) = \frac{d}{dx} f \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= y \frac{d}{dx} (f(y, y'_x, \cdots, y_x^{(n-2)}))$$

$$= f_1(y, y'_x, \cdots, y_x^{(n-1)})$$

将 $x', x'', \cdots, x^{(n)}$ 代入原方程 (4.59)

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$ 降低一阶

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$$

$$y = \frac{dx}{dt} = x' = \varphi\left(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}\right)$$

分离变量，可得原方程的解。

例2 求解方程 $xx'' + (x')^2 = 0$

解 令 $x' = y$ $\qquad x'' = y \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$x \cdot y \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$y = 0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx} = -y \qquad \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1' \qquad y = \frac{c_1}{x}$$

$$x' = \frac{c_1}{x} \qquad xdx = c_1 dt$$

$$\frac{1}{2}x^2 = c_1 t + c_2 \qquad x^2 = 2c_1 t + 2c_2$$

$$y = 0 \qquad x' = 0 \qquad x = c$$

$$x^2 = 2c_1 t + 2c_2$$

3) 齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

结论

已知 (4.2)的 k 个线性无关的特解，则(4.2)可降低 k 阶，即可得到 n-k 阶的齐次线性方程。特别地，如果已知(4.2)的 n-1 个线性无关的解，则(4.2)的基本解组可以求得。

方法　设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是(4.2)的 k 个线性无关的解

$$x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,k \qquad 令$$

$$a_n \quad x = x_k y$$

$$a_{n-1} \quad x' = x_k y' + x_k' y$$

$$a_{n-2} \quad x'' = x_k y'' + 2x_k' y' + x_k'' y$$

$$\cdots$$

$$a_1 \quad x^{(n-1)} = x_k y^{(n-1)} + \cdots + x_k^{(n-1)} y$$

$$x^{(n)} = x_k y^{(n)} + n x_k' y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x_k'' y^{(n-2)} + \cdots + x_k^{(n)} y$$

$$x_k y^{(n)} + (nx_k' + a_1(t)x_k)y^{(n-1)} + \cdots$$

$$+ [x_k^{(n)} + a_1(t)x_k^{(n-1)} + a_2(t)x_k^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x_k]y = 0$$

令 $y' = z$

$$z^{(n-1)} + b_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t)z = 0 \qquad (4.67)$$

***n*-1阶线性方程**

$$z = y' = \left(\frac{x}{x_k}\right)' \qquad \text{或} \qquad x = x_k \int z dt$$

可将 (4.2) 化为 $n-1$ 阶线性方程

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0 \quad (4.67)$$

同理，对于 (4.67) 就知道了 $k-1$ 个非零解

$$z_i=\left(\frac{x_i}{x_k}\right)' \quad i=1,2,\cdots,k-1$$ 且其线性无关，

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_{k-1}z_{k-1}\equiv 0$$

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)'+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)'\equiv 0$$

$$\left[\frac{1}{x_k}(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1})\right]'\equiv 0$$

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}\equiv -\alpha_k x_k$$

$x_i, i=1,2,\cdots,k$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$

类似地, 令 $u=\left(\dfrac{z}{z_{k-1}}\right)'$ 或 $z=z_{k-1}\int u\,dt$

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-3)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0$$

$u_i=\left(\dfrac{z_i}{z_{k-1}}\right)'\quad i=1,2,\cdots,k-2$ 线性无关的解,

继续下去，得到一个 ***n-k*** 阶的线性齐次方程

若 ***k*= *n*-1**，则可得到 1 阶线性齐次方程，则可求得通解。

特别，对于二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

若知其一非零解 $x=x_1\neq 0$ ，则可求得通解。

令 $y=\left(\frac{x}{x_1}\right)'$ $\qquad x=x_1\int y\,dt$

$$x'=x_1'\int y\,dt+x_1 y$$

$$x''=x_1''\int y\,dt+x_1'y+x_1'y+x_1y'$$

$$=x_1''\int y\,dt+2x_1'y+x_1y'$$

$$x_1''\int y\,dt + 2x_1'y + x_1y' + p(t)x_1'\int y\,dt + p(t)x_1y + q(t)x_1\int y\,dt = 0$$

$$x_1y' + [2x_1' + p(t)x_1]y = 0$$

$$y' = -\frac{2x_1' + p(t)x_1}{x_1}y$$

$$y = c_1e^{-\int\frac{2x_1'+p(t)x_1}{x_1}dt} = c_1e^{-[2\int\frac{1}{x_1}dx_1+\int p(t)dt]}$$

$$= c_1e^{-\ln x_1^2}\cdot e^{-\int p(t)dt} = \frac{c_1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}$$

$$y=\frac{c_1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt} \qquad x=x_1\int ydt$$

基解组为 x_1， $x_1\int\frac{1}{x_1^{2}}e^{-\int p(t)dt}dt$

通解 $x(t)=x_1[c_1+c_2\int\frac{1}{x_1^2}e^{\int p(t)dt}dt]$

P.131

例4 已知 $x=\dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$ 的解，试求方程的通解。

解 $p(t)=\dfrac{2}{t}$

$$x=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c_2\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot e^{-2\int\frac{1}{t}dt}dt\right)$$

$$=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c_2\int\frac{1}{\sin^2 t}dt\right)$$

$$=\frac{\sin t}{t}(c_1-c_2\cot t)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c_2\cos t)$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法（求特解）

例5 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=y-x$ 的满足初始条件 $y(0)=0$ 的解。

解 设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 为方程的解

$$y(0)=0 \qquad a_0=0$$

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$=(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-x$$

$$=(a_1-1)x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y - x}$$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

$$= (a_1 - 1)x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n = \frac{1}{(n+1)n}a_{n-1} = \frac{1}{(n+1)n\cdots 3}a_2 = -\frac{1}{(n+1)\,!}$$

$$a_n = -\frac{1}{n!} \qquad n = 2, 3, \cdots$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y - x}$$

$$a_n = -\frac{1}{n!} \qquad n = 2, 3, \cdots$$

$$y = -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 1 + x$$

$$= 1 + x - e^x$$

$$y = e^{\int dx}\left(-\int e^{-\int dx} \cdot x dx + c\right) = e^x\left(-\int e^{-x} x dx + c\right)$$

$$= e^x\left(e^{-x}x - e^{-x} + c\right) = x + 1 + ce^x$$

$$1 + c = 0, c = -1 \qquad y = -e^x + x + 1$$

例7 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初始条件

$y(0)=0 \quad y'(0)=1$ 的解。

解 设级数解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

由于 $y(0)=0 \quad y'(0)=1$ 所以 $a_0=0,\ a_1=1$

$$y=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x(1+\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1}) - 4(x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n) = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x - \sum_{n=2}^{\infty} (2na_n + 4a_n)x^n = 0$$

0次项系数 $2!a_2 = 0$ $a_2 = 0$

1次项系数 $3!a_3 - 6 = 0$ $a_3 = 1$

≥ 2 次项系数 $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+4)a_n = 0$

$$a_{n+2}=\frac{(2n+4)}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{2}{(n+1)}a_n$$

n 为偶数时，即 $n=2k$ ，由上述递推公式得

$$a_{2k}=a_2=0$$

n 为奇数时，即 $n=2k+1$

$$a_{2k+3}=\frac{2}{2(k+1)}a_{2k+1}=\frac{1}{k+1}a_{2k+1}$$

$$a_{2(k+1)+1}=\frac{1}{(k+1)}a_{2(k+1)-1} \qquad a_{2k+1}=\frac{1}{k}a_{2k-1}$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{k} a_{2k-1} = \frac{1}{k(k-1)} a_{2k-3} = \cdots = \frac{1}{k!} a_3 = \frac{1}{k!}$$

$$a_{2k} = 0 \qquad a_{2k+1} = \frac{1}{k!}$$

$$y = x + \left(\frac{1}{1!}x^3 + \frac{1}{2!}x^5 + \frac{1}{3!}x^7 + \cdots + \frac{1}{k!}x^{2k+1} + \cdots\right)$$

$$= x\left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{k!}x^{2k} + \cdots\right)$$

$$= xe^{x^2}$$

例8 求初值问题 $x^2\dfrac{dy}{dx}=y-x \qquad y(0)=0$

解　　设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n \qquad y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n-x$$

1次项系数 $a_1=1$　　≥ 2 次项系数 $na_n=a_{n+1}$

$$a_n=(n-1)a_{n-1}=(n-1)!a_1=(n-1)!$$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!x^n=x+x^2+2!x^3+\cdots+n!x^{n+1}+\cdots$$

对任给 $x\neq 0$ 级数发散，因此不存在幂级数形式之解。

存在性：P175—176　　　　定理10，定理11

考虑二阶线性方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (4.72)$$

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (4.72)$$

定理10

如果 $p_1(x)$，$p_2(x)$ 在某点 x_0 的邻域内解析，即它们可展成 $(x-x_0)$ 的幂级数，则方程（4. 72）的解在 x_0 的邻域内也能展成 $(x-x_0)$ 的幂级数

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \qquad (4.72)$$

定理11

如果$xp_1(x), x^2p_2(x)$在某点x_0的邻域内解析，若$a_0\neq 0$, 则方程（4.72）有形如

$$y=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

的特解，其中α是某一实数.

若a_0=0, 或更一般地，a_i=0$\left(i=0,1,2,\cdots,m-1\right)$,但$a_m\neq 0$, 则令$\beta=\alpha+m, b_k=a_{m+k}$,方程（4.72）的解形如

$$y=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=m}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$=(x-x_0)^{\alpha+m}\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+k}(x-x_0)^k$$

$$=(x-x_0)^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k,$$

这里$b_0=a_m\neq 0$，α是某一实数.

例9　求解n阶Bessel方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

这里n为非负常数.

解　易见,它满足定理11条件.　求方程形如

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\alpha},$$

的解, 这里$a_0\neq 0,\alpha$是一个待定常数.

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_k x^{k+\alpha-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)a_k x^{k+\alpha-1}$$

$$+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_{\mathrm{k}}x^{k+\alpha}=0$$

比较x的同次幂系数得

$$\begin{cases} a_0(\alpha^2-n^2)=0 \\ a_1[(\alpha+1)^2-n^2]=0 \\ a_k[(\alpha+k)^2-n^2]+a_{k-2}=0, \quad k=2,3,\cdots \end{cases} \qquad (4.76)$$

因为$a_0\neq 0$，则有$\alpha^2-n^2=0$，从而$\alpha=\pm n$，

为确定起见暂令$\alpha=n$，由(4.76)得

$$a_1 = 0,\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, k = 2, 3, \cdots$$

即

$$\begin{cases} a_{2k+1} = -\dfrac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)}, \\ a_{2k} = -\dfrac{a_{2k-2}}{2k(2n+2k)}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots$$

从而可得

$$a_{2k-1} = 0, k = 1, 2, \cdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},\ \ k = 1, 2, \cdots$$

因此在$\alpha = n > 0$时,得到$Bessel$方程的一个解

$$y_1 = a_0 x^n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(n+1)\cdots(n+k)} x^{2k+n}.$$

若将任常数a_0取为 $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$

这里$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, 注意到时$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

因此解变为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)} \equiv J_n(x).$$

$J_n(x)$是由$Bessel$方程定义的特殊函数,称为n阶第一类$Bessel$函数.

当$\alpha=-n$时,完全类可得

$$a_{2k-1}=0,\ k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)},\quad k=1,2,\cdots$$

若取 $a_0=\dfrac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$

则可得方程的另一个特解

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv J_{-n}(x),\quad(4.78)$$

$J_{-n}(x)$称为$-n$阶第一类*Bessel*函数.

由达朗贝尔判别法知，级数$J_n(x)$和$J_{-n}(x)$在$(0, +\infty)$上收敛.

因此, 当n不等于非负整数时, $J_n(x)$和$J_{-n}(x)$都是方程的解, 且线性无关.

因而原方程的通解为

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

这里c_1, c_2为任常数.

当n等于正整数, 所求得的特解成为第二类Bessel函数.

例4　求方程$x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{9}{25})y = 0$的通解.

解　引入新变量$t = 2x$我们有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(2\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} = 4\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入方程得

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \frac{9}{25})y = 0$$

这是$n = \frac{3}{5}$的$Bessel$方程,故方程的通解为

$$y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(t) + c_2 J_{-\frac{3}{5}}(t),$$

代回原来的变量得原方程的通解为

$$y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x) + c_2 J_{-\frac{3}{5}}(2x),$$

c_1, c_2为任常数.

第五章　　线性微分方程组

Linear ODEs

本章主要内容 / Main Contents /

- § 5.1 线性微分方程组解的存在唯一性定理
- § 5.2 线性微分方程组的一般理论
- § 5.3 常系数线性方程组的解法

本章要求 / Requirements /

- 理解线性微分方程组解的存在唯一性定理。
- 掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系。
- 掌握线性微分方程组的解的代数结构。
- 熟练掌握常系数齐次线性微分方程组基解矩阵的求法与计算。

本章主要内容 / Main Contents /

§ 5.1 线性微分方程组解的存在唯一性定理

Existence & Uniqueness Theorems of Linear ODEs

本节要求/Requirements/

- 掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系。
- 理解线性微分方程组解的存在唯一性定理。
- 掌握解的逐次逼近序列的构造方法。

5.1.1 记号与定义/Symbol and Definition/

一阶微分方程组

$$
\begin{cases}
x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{cases}
$$

初值条件 $x_1(t_0) = \eta_1,\ x_2(t_0) = \eta_2, \cdots,\ x_n(t_0) = \eta_n$

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \qquad \cdots(5.1)$$

$a_{ij}(t),\ f_i(t) \quad i, j = 1,2,\cdots,n$ 在$[a,b]$上连续

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{..........(5.2)}$$

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \text{......(5.3)}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \qquad \text{............(5.4)}$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

在区间$a\le t\le b$ 可定义矩阵与向量函数

$$\boldsymbol{B}(t)=(b_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T$$

连续: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a\le t\le b$ 连续。

可微: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a\le t\le b$ 可微。

$$\boldsymbol{B}'(t)=(b'_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}'(t)=(u'_1(t),u'_2(t),\cdots,u'_n(t))^T$$

可积: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a\le t\le b$ 可积。

$$\int \boldsymbol{B}(t)dt = \left(\int b_{ij}(t)dt\right)_{n\times n}$$

$$\int \boldsymbol{u}(t)dt = \left(\int u_1(t)dt, \int u_2(t)dt, \cdots, \int u_n(t)dt\right)^T$$

1) $(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))' = \boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$

2) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$

3) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$

定义1 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，

$\boldsymbol{f}(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 n 维向量，方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \text{…………….(5.4)}$$

在某区间 $\alpha \le t \le \beta$ $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ 的解就是向量

$\boldsymbol{u}(t)$ 在区间 $\alpha \le t \le \beta$ 上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

定义2 初值问题(Cauchy Problem)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{.............(5.5)}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0的区间$\alpha \le t \le \beta$

上的解$\boldsymbol{u}(t)$，使得 $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$

例1 验证向量 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ 是初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在区间$-\infty<t<+\infty$上的解。

解 $\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} e^{0} \\ -e^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{u}(t)$ 是给定初值问题的解。

5.1.2 n 阶线性微分方程与一阶线性微分方程组等价

例1 $$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

解 令 $x_1 = x,\quad x_2 = x',$

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + f(t)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t_0)=\eta_1,\ x'(t_0)=\eta_2$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t) \xrightarrow{\text{解}} x=\varphi(t)$$

$$\varphi''(t)+p(t)\varphi'(t)+q(t)\varphi(t)=f(t)$$

$$\Big\downarrow \text{构造向量}$$

$$\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ \varphi''(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ -p(t)\varphi'(t)-q(t)\varphi(t)+f(t)\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{满足}$$

$$x_1(t_0)=\eta_1,\ x_2(t_0)=\eta_2 \qquad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$x(t_0)=\eta_1\,,x'(t_0)=\eta_2$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t) \xleftarrow{\text{满足}} x=\varphi_1(t)$$

$$\varphi_1''(t)+p(t)\varphi_1'(t)+q(t)\varphi_1(t)=f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\ \varphi_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ -q(t)\varphi_1(t)-p(t)\varphi_2(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

解

$$x_1(t_0)=\eta_1\,,x_2(t_0)=\eta_2 \qquad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

令 $x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (5.6)$$

$$\psi(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

等价

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

$$\cdots\cdots\cdots (5.7)$$

例2 将初值问题 $\begin{cases} x'' + 3tx' - 5t^2 x = \sin t \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

化为与之等价的一阶方程组的初值问题。

解 令 $x_1 = x, \quad x_2 = x', \qquad x_1' = x' = x_2$

$$x_2' = x'' = -3tx' + 5t^2 x + \sin t$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5t^2 x_1 - 3tx_2 + \sin t \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5t^2 & 3t \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$$

例3 将下列方程组化为高阶方程

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad x_2'' = x_1' - x_2' = x_2 - x_2'$$

$$x_2'' + x_2' - x_2 = 0$$

注意：不是所有方程组都可化为高阶方程

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

5.1.3 存在唯一性定理

初值问题(Cauchy Problem)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{.............(5.5)}$$

定理1 如果$A(t)$是$n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$是 $\boldsymbol{n}$ 维列向量，

它们都在区间 $a\le t\le b$ 上连续，则对于区间

$a\le t\le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}$$

方程组(5.5)存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$

定义于整个区间 $a\le t\le b$ 上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$$

现取 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}$ ，构造皮卡逐步逼近向量函数序列：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)\right]ds,\end{cases}$$

$$a\le t\le b \quad k=1,2,\cdots$$

向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ 称为(5.4)的第 k 次近似解。

例4 求方程组的初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的二次近似解。

解 令 $\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} dt$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} dt$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t^2 + t \end{pmatrix}$$

5.1.4 简单方程组的消元法

例5 求解方程组 $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

解 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

关键：保留一个未知函数，消掉另一个未知函数

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2) \qquad x_1' = \frac{1}{2}(x_2'' + x_2')$$

$$\frac{1}{2}(x_2'' + x_2') = \frac{3}{2}(x_2' + x_2) - 2x_2 \qquad x_2'' - 2x_2' + x_2 = 0$$

$$x_2'' - 2x_2' + x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2)$$

$$x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2 + c_2 t)e^t + (c_1 + c_2 t)e^t]$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^t$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^t \\ x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^t \end{cases}$$

例6 求解方程组 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$$

解：保留一个未知函数 x，消掉另一个未知函数 y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

令 $\dfrac{dx}{dt} = p$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x}p^2$$

$$\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}p^2$$

$$p\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p^2 = 0$$

$$p\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p^2=0$$

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2}{x}\end{cases}}$$

$$p=0,\quad \frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$$

$$\frac{dp}{p}-\frac{dx}{x}=0$$

$$\begin{cases}x=c_2e^{c_1t}\\ y=c_1c_2e^{c_1t}\end{cases}$$

$$p=c_1x$$

另外，由 $p=0$ $\begin{cases}x=c\\ y=0\end{cases}$

$$\frac{dx}{dt}=c_1x$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x=c_2e^{c_1t}\\ y=c_1c_2e^{c_1t}\end{cases}$$

作业：P.201 2 (1), 3

§ 5.2　线性微分方程组的一般理论

General Theory of Linear ODEs

本节要求/Requirements/

- 掌握线性齐次微分方程组的解的性质及代数结构。
- 掌握线性非齐次微分方程组的解的代数结构，理解常数变易法的基本思想。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

如果 $\boldsymbol{f}(t) \neq 0$ 　则**(5.14)**称为非齐次线性的。

如果 $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$ 　则方程（**5.15**）称为齐次线性的。

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad \textbf{(5.15)}$$

若 $A(t)$ 为常数矩阵，则称为常系数线性方程组。

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

5.2.1 齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (5.15)$$

定理2（叠加原理） 如果 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的解，

则它们的线性组合 $\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.15)的解。

证明：$[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]' = \alpha\,\boldsymbol{u}'(t)+\beta\,\boldsymbol{v}'(t)$

$$= \alpha\,\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad \textbf{(5.15)}$$

如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是**(5.15)**的解，则

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

也是**(5.15)**的解。

例：可验证 $\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$

是方程组 $x'=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}x$ 的解，则

$\boldsymbol{x}(t)=C_1\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$ 也是方程组的解。

基本概念/Basic Concept/

定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$$

是线性相关的，如果存在不全为零的常数

$c_1, c_2, \cdots, c_m$， 使得等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m(t) \equiv \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b$$

成立；否则，$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 为线性无关的。

例 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t^k \end{bmatrix}$ 线性无关。 $-\infty < t < \infty$

设有 $\boldsymbol{n}$ 个定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

由这$\boldsymbol{n}$个向量函数构成的行列式，

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]\equiv W(t)\equiv \det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称为这些向量函数的伏朗斯基行列式。

定理3 如果向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则它们的伏朗斯基行列式

$$W(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

证明 由假设，存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$

使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv\boldsymbol{0},\quad a\le t\le b \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} c_1x_{11}(t)+c_2x_{12}(t)+\cdots+c_nx_{1n}(t)=0 \\ c_1x_{21}(t)+c_2x_{22}(t)+\cdots+c_nx_{2n}(t)=0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_{n1}(t)+c_2x_{n2}(t)+\cdots+c_nx_{nn}(t)=0 \end{cases}$$

其系数行列式恰是 $W(t)$

$$W(t)\equiv 0 \quad a\le t\le b$$

证毕

定理4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，那么，它们的伏朗斯基行列式

$$W(t) \neq 0, \quad a \leq t \leq b$$

证明 用反证法。

设有某一个 t_0, $a \leq t_0 \leq b$ 使得 $W(t_0) = 0$,

考虑下面的齐次线性代数方程组：

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t_0) = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.17)}$$

它的系数行列式 $W(t_0)=0$ ，所以(5.17)有非零解

$c_{1,}c_2,\cdots,c_n$，　　$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0}$

以这个非零解作向量函数

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t) \qquad \textbf{(5.18)}$$

易知 $\boldsymbol{x}(t)$ 是(5.15)的解，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.19)}$$

而在 $a\le t\le b$ 上恒等于零的向量函数 $\boldsymbol{0}$ 也是(5.15)的满足初始条件(5.19)的解。

由解的唯一性，知道 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ 即

$$\tilde{c}_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n \boldsymbol{x}_n(t) = \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b$$

因为 $c_{1,} c_2, \cdots, c_n$ 不全为零，这就与

$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关矛盾。

定理得证。

定理3 如果向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线性相关，则它们的伏朗斯基行列式

$$W(t)\equiv 0,\quad a\le t\le b$$

定理4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，那么，它们的伏朗斯基行列式

$$W(t)\neq 0,\quad a\le t\le b$$

结论 由(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 作成的伏朗斯基行列式 $W(t)$ 或者恒等于零，或者恒不等于零。

定理5 (5.15)一定存在 n 个线性无关的解。

证明

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1(t),\quad \boldsymbol{x}_2(t),\quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n(t)$$

$W(t_0)=1\neq 0,\ \ \boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关

定理得证。

定理6 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是 **(5.15)** $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的解，则(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数。

证明 任取(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$，它满足

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t_0 \in [a,b]$$

令 $$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t_0) \qquad \textbf{(5.20)}$$

上式看作是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的线性代数方程组，

系数行列式就是 $W(t_0)$，因为 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，则 $W(t_0) \neq 0$，(5.20)有唯一解

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$

作向量函数 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$

它显然是(5.15)的解，且满足条件

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 与 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的初始条件，因此由解的存在唯一性条件可知

$$x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$

证毕

推论1 (5.15)线性无关解的最大个数等于 n 。

基本解组： (5.15)的 n 个线性无关解。

解矩阵： 由(5.15) n 个解的列构成的矩阵。

基解矩阵： 由(5.15) n 个线性无关解的列构成的矩阵。

标准基矩阵： $\det \boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0$ $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$

定理5和定理6的另一种形式

定理1*(5.15)一定存在基解矩阵；若 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.15)

任一解，则 $\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{\psi}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

定理2* **一个解矩阵是基解矩阵的充要条件是**

$$\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0 \quad (a\leq t\leq b)$$

而且，如果对某一个 $t_0\in[a,b]$, $\det\boldsymbol{\Phi}(t_0)\neq 0$,

则 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0,\quad a\leq t\leq b$

例1 验证 $\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\ \text{其中}\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的基解矩阵。

解 首先证明$\Phi(t)$是解矩阵。令 $\varphi_1(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第一列, $\varphi_2(t)$表示 $\Phi(t)$ 的第二列

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t)=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 是方程组的解，因此

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)]$$

是解矩阵。 又因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{2t}\neq 0$ ，所以

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵。

结论：$X(t)$是方程组(5.15) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \quad a \le t \le b$

的一解矩阵的充要条件 $X(t)$ 必满足关系是

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad a \le t \le b$$

$$X'(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t))'$$

$$= (\boldsymbol{x}_1'(t), \boldsymbol{x}_2'(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n'(t))$$

$$= (\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_n)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{A}(t)X(t)$$

推论1 如果 $\Phi(t)$ 是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵，C 非奇异 $n \times n$ 常数矩阵，那么，$\Phi(t)C$ 也是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵。

证明 令 $\Psi(t) \equiv \Phi(t)C \quad (a \le t \le b)$

$$\Psi'(t) \equiv \Phi'(t)C \equiv A(t)\Phi(t)C \equiv A(t)\Psi(t)$$

$\Psi(t)$ 是解矩阵。

$$\det\Psi(t) = \det\Phi(t) \cdot \det C \neq 0 \quad a \le t \le b$$

$\Psi(t)$即$\Phi(t)C$ 是(5. 15)的基解矩阵。

证毕

推论2 如果 $\Phi(t), \Psi(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是方程组(5.15)的两个基解矩阵，那么，存在一个非奇异 $n \times n$ 常数矩阵C，使得在区间 $a \le t \le b$ 上 $\Psi(t) = \Phi(t)C$

证明 $\Phi(t)$ 基解矩阵， $\Phi^{-1}(t)$ 存在，

令 $\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t) = X(t)$ 或 $\Psi(t) = \Phi(t)X(t)$

$$A(t)\Psi(t) \equiv \Psi'(t) \equiv \Phi'(t)\cdot X(t) + \Phi(t)\cdot X'(t)$$

$$= A(t)\Phi(t)\cdot X(t) + \Phi(t)\cdot X'(t) = A(t)\Psi(t) + \Phi(t)\cdot X'(t)$$

$$\Phi(t)\cdot X'(t) = 0 \qquad X'(t) = 0 \qquad X(t) = C$$

$$\Psi(t) = \Phi(t)C \qquad \det C = \det \Phi^{-1}(0)\cdot\Psi(0) \neq 0$$

证毕

推论3 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是某方程组的基解矩阵，那么，这个方程组为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{x} \quad a \le t \le b$$

证明 设所求方程组为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$

则 $$\boldsymbol{\Phi}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t) \quad a \le t \le b$$

故 $$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) \quad a \le t \le b$$

例 已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$，求该方程组。

解 $$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所求方程组为 $$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

作业 **P.216, 第1，3题。**

5.2.2 非齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

性质1 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(5.14)的解，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应齐次方程组(5.15)的解，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.14)的解。

证明

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)]' &= \boldsymbol{\varphi}'(t)+\boldsymbol{\psi}'(t) \\ &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\psi}(t) \\ &= \boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)]+\boldsymbol{f}(t)\end{aligned}$$

性质2 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$和$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.14)的任意两个解，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.14)对应齐次线性方程组(5.15)的解。

证明

$$[\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)]'$$

$$=[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)]-[\boldsymbol{A}(t)\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)+\boldsymbol{f}(t)]$$

$$=\boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)]$$

定理7 设 $\Phi(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，$\overline{\varphi}(t)$ 是(5.14)的某一解，则(5.14)的任一解 $\varphi(t)$ 都可以表示为：

$$\varphi(t) = \Phi(t)c + \overline{\varphi}(t) \tag{5.23}$$

这里 c 是确定的常数列向量。

证明 $\varphi(t)$ 是(5.14)的任一解，$\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)$ 是齐次方程组(5.15)的解，因此存在常列向量 c，使得

$$\varphi(t) - \overline{\varphi}(t) = \Phi(t)c$$

$$\varphi(t) = \Phi(t)c + \overline{\varphi}(t)$$

为了寻求(5.14)的通解，只要知道(5.14) 对应齐的齐线性方程组(5.15)的基解矩阵和自身的一个解即可。

已知(5.15)的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ ，则可用常数变易法求(5.14)的特解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$

假设(5.14)存在形如 $\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$ (5.24)

的解，则

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

而 $$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boxed{\phi(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}(t) \qquad (5.24)}$$

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds, \qquad t_0,t\in[a,b]$$

其中 $\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 　　这样，**(5.24)**变为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0,t\in[a,b] \qquad \textbf{(5.26)}$$

如果**(5.14)**有一个形如**(5.24)**的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ，$\boldsymbol{\varphi}(t)$
则

由**(5.26)**决定。反之易证明由**(5.26)**决定的向量函数

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 一定是**(5.14)**的解。

反之易证明由(5.26)决定的向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$

一定是(5.14)的解。

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0,t\in[a,b]} \qquad \textbf{(5.26)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right)+\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

定理8 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.26)$$

是(5.14)的解，且满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$

(5.14) 通解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

(5.14) 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.27)$$

例2 试求下面初值问题的解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{其中} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \qquad x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_1 = 0 \quad c_2 = 1 \qquad \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},\ \text{其中}\ x(0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{1}{e^{2s}}\begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s} \qquad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=E$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s}\cdot\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(e^{-2t}+1\right) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}\text{，其中 } x(0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

分析常数变易法/Analytic of Unknown Function Method/

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.25)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \cdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

记$\tilde{W}_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & f_2(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$ 则$c_k'(t)=\dfrac{\tilde{W}_k(t)}{W(t)}$

$k=1,2,\cdots,n$

$$c_k'(t)=\frac{W_k(t)}{W(t)} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$c_k(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)}{W(s)}ds \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)}{W(s)}ds$$

是**(5.14)**的满足 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 的解。

考虑非齐次n阶线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

令 $x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

应用到n阶线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \quad \textbf{(5.21)}$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \quad \textbf{(5.28)}$$

推论3 如果 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ 是区间 $a\le t\le b$

上的连续函数，$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是对应齐次方程

的基本解组，那么，非齐次线性方程（5.28）满足初始条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=0,\boldsymbol{\varphi}'(t_0)=0,\cdots,\boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad t_0\in[a,b]$$

的解为

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)ds \qquad \textbf{(5.29)}$$

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)ds \quad \textbf{(5.29)}$$

$$W(t)=\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$W_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & 1 & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

(5.28)的常数变易公式是

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)ds \tag{5.29}$$

(5.28)的通解可以表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t)$$

当n=2时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_1[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]} f(s)ds + x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_2[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]} f(s)ds$$

$$W_1[x_1(s),x_2(s)] = \begin{vmatrix} 0 & x_2(s) \\ 1 & x_2'(s) \end{vmatrix} = -x_2(s)$$

$$W_2[x_1(s),x_2(s)] = \begin{vmatrix} x_1(s) & 0 \\ x_1'(s) & 1 \end{vmatrix} = x_1(s)$$

因此，当n=2时常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds \qquad \textbf{(5.31)}$$

而通解就是 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t)$ **(5.32)**

这里 c_1,c_2 任意常数。

例3 试求方程 $x''+x=\tan t$ 的一个特解。

解 易知对应的齐线性方程 $x''+x=0$ 的基本解组为,

$$x_1(t)=\cos t, x_2(t)=\sin t$$

利用公式(5.31)来求方程的一个解,

$$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}\equiv 1$$

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds$$

$$=\int_0^t (\sin t\cos s-\cos t\sin s)\tan s ds$$

$$\int_0^t (\sin t\cos s-\cos t\sin s)\tan s ds$$

$$=\sin t\int_0^t \sin s ds-\cos t\int_0^t \sin s\tan s ds$$

$$=\sin t(1-\cos t)+\cos t(\sin t-\ln|\sec t+\tan t|)$$

$$=\sin t-\cos t\ln|\sec t+tgt|$$

注意，因为sint是对应的齐线性方程的解，所以函数

$$\overline{\varphi}(t)=-\cos t\ln|\sec t+tgt|$$

也是原方程的一个解。

作业　**P.217, 第 8，10(1) 题。**

求齐次线性方程组的解的另一方法：消元法

保留一个未知函数 x_1，消掉另一个未知函数 x_2

例 $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \quad\quad x_2 \end{cases}$

$$x_1'' = 2x_1' - x_1$$

$$x_1'' - 2x_1' + x_1 = 0$$

$$x_1'' = x_1' + x_2'$$

$$x_1'' = x_1' + x_2$$

$$x_2 = x_1' - x_1$$

$$x_1 = c_1e^t + c_2te^t$$

$$x_2 = c_1e^t + c_2e^t + c_2te^t - c_1e^t - c_2te^t$$

$$x_2 = c_2e^t$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1e^t + c_2te^t \\ x_2 = c_2e^t \end{cases}$$

求非齐次线性方程组的另一方法：消元法

保留一个未知函数 x_1，消掉另一个未知函数 x_2

例 $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases}$

$$x_1'' = x_1' + x_2' - e^{-t}$$

$$x_1'' = x_1' + x_2 - e^{-t}$$

$$x_2 = x_1' - x_1 - e^{-t}$$

$$x_1'' = 2x_1' - x_1 - 2e^{-t}$$

$$x_1'' - 2x_1' + x_1 = -2e^{-t}$$

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$- c_1 e^t - c_2 t e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - e^{-t}$$

$$x_2 = c_2 e^t$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t - \dfrac{1}{2} e^{-t} \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = t e^t - \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ x_2 = e^t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

§5.3 常系数线性微分方程组

Coefficients Linear ODEs

本节主要内容/Main Contents/

1 常系数齐线性微分方程组

$$x' = Ax \tag{5.33}$$

的基解矩阵的结构，这里 A 是 $n \times n$ 常数矩阵。

2 通过代数的方法，寻求**(5.33)**的一个基解矩阵。

3 拉普拉斯变换在常系数线性微分方程组中的应用。

5.3.1 矩阵指数 exp$A$ 的定义和性质

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)})_{n\times n} + (a_{ij}^{(2)})_{n\times n} + \cdots + (a_{ij}^{(k)})_{n\times n} + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots)_{n\times n}$$

如果每个 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ $\quad i, j = 1,2,\cdots,n$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛。

判断无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛的法则：

$\forall k \quad \left\| \boldsymbol{A}_k \right\| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij}^{(k)} \right| \le M_k$ 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，

则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛。

同理，可给出 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k(t)$ 在区间 $\boldsymbol{I}$ 上的一致收敛的定义，

和函数等类似的结果。

定义1 矩阵指数

$$\exp \boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}=E+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^m}{m!}+\cdots \qquad \textbf{(5.34)}$$

$\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵， $\boldsymbol{A}^m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\boldsymbol{m}$次幂。

$A^0=E,\quad 0!=1$ exp $\boldsymbol{A}$是一个确定的矩阵。

对于一切正整数 $\boldsymbol{k}$， $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|\le\frac{\|A\|^k}{k!}$

而 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}=\|E\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}=e^{\|A\|}+n-1$ 收敛，

则 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$ 收敛。

定义2 矩阵指数函数 $\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$ **(5.35)**

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的。

对于一切正整数 k，当 $|t| \leq c$ (c是某一正常数)时，有

$$\left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{\|A\|^k c^k}{k!}$$

而数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\| c)^k}{k!}$ 是收敛的，

因而(5.35)在 t 的任何有限区间上是一致收敛的。

$\exp \boldsymbol{A}$ 性质

性质1 如果矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$exp\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = exp\boldsymbol{A}\cdot exp\boldsymbol{B} \qquad \textbf{(5.36)}$$

证 由于级数 $exp\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$， $exp\boldsymbol{B}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}$

绝对收敛，由二项式定理，得

$$\exp(A+B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!}\right];$$

又 $\exp A\exp B=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^j}{j!} \underset{\Uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!}\right];$

绝对收敛级数的乘法定理

性质2 对于任何矩阵A，$(expA)^{-1}$ 存在，且

$$(expA)^{-1} = exp(-A) \qquad \textbf{(5.39)}$$

证 A与$-A$是可交换的，故在(5.36)中，令$B=-A$ 得

$$\exp\boldsymbol{A}\exp(-\boldsymbol{A}) = \exp(\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})) = \exp\boldsymbol{0} = \boldsymbol{E}$$

$$(\exp\boldsymbol{A})^{-1} = \exp(-\boldsymbol{A})$$

性质3 如果 T 是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T$$

事实上 $$\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^k}{k!}$$

$$= \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}}{k!}$$

$$= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}(\exp\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$$

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax, \ (5.33)}$$

定理9　矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp \boldsymbol{A}t$　　　**(5.41)**

是(5.33) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基解矩阵。$\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$

证明　$\boldsymbol{\Phi}'(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)'$

$$= \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2 t}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\boldsymbol{A}^{k+1} t^k}{k!} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{A} \exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的解矩阵，又因为 $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$,

因此，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.33)的标准基解矩阵。证毕

例1 如果A是一个对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$ (其中未写出的元素均为零)

试求出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵。

解 方程组可以写成 $x_k'=a_kx_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$

分别积分 $\begin{bmatrix} e^{a_1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_2t} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{a_nt} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e^{a_1t} & & & \\ & e^{a_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nt} \end{bmatrix}$

$$\exp \boldsymbol{A}t = E + \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

据定理9，这就是基解矩阵。

例2 试求 $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ 的基解矩阵。

解 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

后面的两个矩阵是可交换的，得到

$$\exp \boldsymbol{A}t = \exp \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left\{ \boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right\}$$

但是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left\{ \boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \right\}$$

因此，基解矩阵就是

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$x' = Ax \tag{5.33}$$

若(5.33）有 $\varphi(t) = e^{\lambda t}c \quad c \neq 0$ (5.43)

的解，其中常数 λ 和向量 c 是待定的。

$$\lambda e^{\lambda t}c = Ae^{\lambda t}c$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$

$$(\lambda E - A)c = 0 \tag{5.44}$$

反过来，λ 和向量 c 满足方程组 (5.44)，则

$$(e^{\lambda t}c)' = A(e^{\lambda t}c)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (5.33)}$$

$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的非零解 $\Longleftrightarrow$

λ和 c 满足方程 $(\lambda E - A)c = 0$ **(5.44)**

$c \neq 0$ $\quad p(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 特征方程

λ是 A 的特征值，c 是 A 的属于 λ 的特征向量。

$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$是(5.33)的非零解 $\Longleftrightarrow$

λ 是 A 的特征值， c 是 A 的属于 λ 的特征向量。

例3 求解 $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

解 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - 6$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad (\lambda_2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{\lambda_1 = -4} \qquad (-4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \qquad (1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{\Phi}(0) = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\big|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称

λ_0 是简单特征根，

2 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 $\boldsymbol{k}$ 重根**(**即 $p(\lambda)$

具有因子 $(\lambda-\lambda_0)^k$ ，而没有因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$**)**，

则称 λ_0 是 $\boldsymbol{k}$ 重特征根。

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之一

定理10 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（不必各不相同），那么

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n] \quad -\infty < t < +\infty$$

是常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ **(5.33)**

的一个基解矩阵。

证明 每一个向量函数 $e^{\lambda_j i}\boldsymbol{v}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$

都是(5.33)的一个解， $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的，

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\neq 0$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n] \qquad -\infty<t<+\infty$$

基解矩阵。

注1　**推论** 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 $\boldsymbol{n}$ 个互不相同的特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 它们对应的特征向量分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,

那么 $\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]\quad -\infty<t<+\infty$

是常系数线性微分方程组 $x'=Ax$ 的一个基解矩阵。

注2　标准基解阵一定为实矩阵。

标准基解阵的表示 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$

$\exp \boldsymbol{A}t$　$\boldsymbol{\Phi}(t)$　$\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$　$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$

注3

若实系数线性方程组

$$x' = Ax \qquad \textbf{(5.33)}$$

有复值解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$，则其实部$\boldsymbol{u}(t)$与虚部$\boldsymbol{v}(t)$都是（5.33）的解.

例5　试求

解

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

解　**1 求 A 的特征值和特征向量**

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 5i$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad \begin{cases} -iu_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - iu_2 = 0 \end{cases}$$

对于任意常数 $\alpha \neq 0$ $u = \alpha\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ 是对应于

$\lambda_1 = 3+5i$ 的特征向量，

类似的，可以求出对应于 $\lambda_2 = 3-5i$

的特征向量为 $v = \beta\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$ 其中 $\beta \neq 0$

2 求实基解矩阵

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{(3+5i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = e^{(3-5i)t}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵。

$$\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

求实基解矩阵的步骤(利用定理10)

1 计算特征值，特征向量；

2 求解基解矩阵，求标准基解矩阵（实）；

3* 写出方程的通解。

课堂练习

试求解 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 5e^{3it} & 5e^{-3it} \\ (1-3i)e^{3it} & (1-3i)e^{-3it} \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t & -\frac{5}{3}\sin 3t \\ \frac{2}{3}\sin 3t & \cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t \end{bmatrix}$$

作业　　**P.244, 第4(2) 题。**

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之二

假设A是一个 $n\times n$ 矩阵，其不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$

它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ $\quad n_1+n_2+\cdots+n_k=n$

那么，对于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.48)}$$

的解全体构成 $\boldsymbol{n}$ 维欧几里得空间的一个n_j 维

子空间 U_j $(j=1,2,\cdots,k)$，且 $\boldsymbol{n}$ 维欧几里得空间 U

$$U=U_1\dot{+}U_2\dot{+}\cdots\dot{+}U_k$$

对于$\boldsymbol{n}$维欧几里得空间的每一个向量$\boldsymbol{u}$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}_j \in U_j$ （$j=1,2,\cdots,k$） 使得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_k \qquad \textbf{(5.49)}$$

$k=n$ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相同，对应的特征向量分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$， $\forall \boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$

$k=1$ $\boldsymbol{A}$ 有一个n 重特征值 λ

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.48)}$$

的解全体就构成$\boldsymbol{n}$维欧几里得空间， $\forall \boldsymbol{u}$ 不必分解。

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax,\ (5.33)}$$

设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.33)的满足$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解，η 是 $\boldsymbol{n}$ 维向量

则存在唯一的 $\boldsymbol{v}_j \in U_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \qquad \textbf{(5.50)}$$

且 $\boldsymbol{v}_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j} \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.48)}$$

由此可推得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \quad l \ge n_j, \quad j=1,2,\cdots,k \qquad \textbf{(5.51)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp\boldsymbol{A}t)(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k)$$

$$e^{\boldsymbol{\lambda}_j t}\exp(-\boldsymbol{\lambda}_j \boldsymbol{E} t)$$

$$= e^{\boldsymbol{\lambda}_j t}\begin{bmatrix} e^{-\boldsymbol{\lambda}_j t} & & & \\ & e^{-\boldsymbol{\lambda}_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\boldsymbol{\lambda}_j t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$(\exp \boldsymbol{A} t)\boldsymbol{v}_j = (\exp \boldsymbol{A} t)\left[e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E} t)\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t}\exp\left[(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})t\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t} \exp[(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})t] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t} [\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E}) + \frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^2 + \cdots$$

$$+ \frac{t^{n_j - 1}}{(n_j - 1)!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j - 1}] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t} [\sum_{i=0}^{n_j - 1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^i] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp \boldsymbol{A}t)(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (5.33)}$

(5.33)的满足 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解：

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j \tag{5.52}$$

$\boldsymbol{v}_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \tag{5.48}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp \boldsymbol{A}t)(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} \left[\sum_{i=0}^{n_j - 1} \frac{t^i}{i!} (\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^i\right] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}$$

$$= \left[(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2, \cdots, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n \right]$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_i$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = [\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)]$$

当 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征根时，无需将特征向量分解为**(5.50)**。这时对于任何 $\boldsymbol{u}$ 都有

$$(A-\lambda E)^n u = 0$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{\lambda t} \exp(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})t$$

$$= e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \quad \textbf{(5.53)}$$

例4 试求解 $\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$ $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

解 1 求 A 的特征值

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

2 代入公式，求初值问题的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^i\right] \cdot \boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \cdot \boldsymbol{u}$$

$$= e^{3t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

3 求 A 的标准基解矩阵 $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

例5 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

试求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$

并求expAt。

解 1 求 A 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 2$$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{和} \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

2 确定 $\boldsymbol{\eta}$ 的分解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{cases}2u_1-u_2+u_3=0\\ 2u_1-u_2+u_3=0\\ u_1-u_2+u_3=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

其中α为任意常数。子空间 U_1 是由向量$\boldsymbol{u}_1$ 所生成的。

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-u_1+u_2=0\\-u_1+u_2=0\end{cases}\qquad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\chi\end{bmatrix}$$

其中 β,χ 是任意常数。子空间 U_2 是由向量

$\boldsymbol{u}_2$ 所张成的。

$$\boldsymbol{v}_1 \in U_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \in U_2 \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \chi \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \chi \end{bmatrix}$$

$$\beta = \eta_1 \quad \alpha + \beta = \eta_2, \quad \alpha + \chi = \eta_3$$

解之得到

$$\alpha = \eta_2 - \eta_1, \quad \beta = \eta_1, \quad \chi = \eta_3 - \eta_2 + \eta_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

3 求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

根据公式(5.52)，

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot\boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^t\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_1+e^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\right)\boldsymbol{v}_2$$

$$=e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & -t & t \\ 2t & 1-2t & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

4 求出 exp At

依次令 η $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

得到三个线性无关的解。以这三个解作为列，得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t} + (1+t)e^{2t} & e^{t} - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} & e^{t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

5 求通解 $x(t)=(\exp At)c$

作业　**P.244, 第5（1）题。**

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之三

利用若当标准型计算基解矩阵Axp(At)

根据线性代数知识，对每一个n阶矩阵A，存在n阶非奇异矩阵P，使得

$$A = PJP^{-1}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

为若当标准型. 假设若当块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mathbf{1} & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

是 n_i 阶的 $i = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, m$; $n_{\mathbf{1}} + n_{\mathbf{2}} + \cdots + n_m = n$

则 J_i 有如下分解式

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

第一个矩阵具有 $\lambda_i E$ 形式,第二个矩阵是幂零矩阵,由于矩阵$\lambda_i E$ 和任何矩阵可以交换,因此有

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} E \left\{ E + t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\frac{x^2}{\mathbf{2}!} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$
+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\right\}
$$

由此得到它的初等函数有限和的形式,即

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & t & \dfrac{t^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}!} & \cdots & \cdots & \dfrac{t^{n_i-\mathbf{1}}}{(n_i-\mathbf{1})!} \\ & \mathbf{1} & t & \cdots & \cdots & \dfrac{t^{n_i-\mathbf{2}}}{(n_i-\mathbf{2})!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}!} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

根据分块对角矩阵的运算可得到

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$$

因此基解矩阵为 $e^{At} = e^{PJtP^{-1}} = Pe^{Jt}P^{-1}$

$$e^{At} = p\begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}p^{-1}$$

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之四

利用递推法计算基解矩阵

结论
$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j$$

其中 $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}_j = \prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{E}),\ j = 1,2,\cdots,n$

$r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1 \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \qquad\qquad (j = 2,3,\cdots,n) \\ r_1(0) = 1, r_j(0) = 0 \end{cases}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\left\{ (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}) \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} \right\}' = (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}) \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}'$$

$$= (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_1,\lambda_2\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{P}_{n-1})$$

$$=(\lambda_1\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_1,\lambda_2\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{P}_{n-1}+\boldsymbol{P}_n)$$

$$=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{n-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1})$$

$$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{P}_j=\prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E}),\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\lambda_j\boldsymbol{P}_{j-1}+\boldsymbol{P}_j=(\lambda_j\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}_{j-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{j-1}$$

$$\left\{ (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}) \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} \right\}' = \boldsymbol{A} (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}) \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) \boldsymbol{P}_j = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}) \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\exp(\mathbf{A}0) = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \cdots \\ r_n(0) \end{pmatrix}$$

$$= (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j$$ 为标准基本解矩阵

例6 求$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基本解矩阵$\exp At$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解 1 求 A 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2$$

2 解方程组

$$\begin{cases} r_1' = r_1 \\ r_2' = r_1 + 2r_2 \\ r_3' = r_2 + 2r_3 \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, r_3(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1(t) = e^t \\ r_2(t) = -e^t + e^{2t} \\ r_3(t) = e^t + (t-1)e^{2t} \end{cases}$$

3 确定 $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$

$$\exp \boldsymbol{A}t = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$P_0 = E, \qquad P_1 = A - 1E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (A - 1E)(A - 2E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp At = r_1(t)P_0 + r_2(t)P_1 + r_3(t)P_2$$

$$= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + (1+t)e^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

例7　求$x' = Ax$ 的标准基本解矩阵$\exp At$。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解　1　求 A 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = -1$$

2 解方程组

$$\begin{cases} r_1' = 2r_1 \\ r_2' = r_1 - r_2 \\ r_3' = r_2 - r_3 \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, r_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1(t) = e^{2t} \\ r_2(t) = \frac{1}{3}(-e^{-t} + e^{2t}) \\ r_3(t) = \frac{1}{3}[(1+t)e^{-t} + e^{2t}] \end{cases}$$

3 确定 $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$

$$\exp \boldsymbol{A}t = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$P_0 = E\,,\quad P_1 = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (A - 2E)(A + 1E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp At = r_1(t)P_0 + r_2(t)P_1 + r_3(t)P_2$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

关于常系数非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad (5.60)$$

$\boldsymbol{A}$常矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ 为连续的向量函数。

常数变易法公式　设(5.60)有解如 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t)$

$$\boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f}(t) \quad \boldsymbol{c}'(t) = [\exp(-\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} [\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\int_{t_0}^{t}[\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t}[\exp \boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

方程(5.60)的满足 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ **的解：**

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\exp \boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

例8 试求方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$ 满足初始条件

$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解。 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$

解 齐次方程的基解矩阵

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \exp(\boldsymbol{A}t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t [\exp \boldsymbol{A}(t-s)] \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} \cos 5(t-s) & \sin 5(t-s) \\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix} + \int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} e^{-s}\cos 5(t-s) \\ -e^{-s}\sin 5(t-s) \end{bmatrix} ds$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix} +$$

$$e^{3t}\int_0^t e^{4s}\begin{bmatrix} \cos 5t\cos 5s + \sin 5t\sin 5s \\ -\sin 5t\cos 5s + \cos 5t\sin 5s \end{bmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix} 4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t} \\ 46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

作业 P.244，第题。

5.3.3 拉普拉斯变换的应用

定义

$$\boldsymbol{F}(s)=L[\boldsymbol{f}(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\boldsymbol{f}(t)dt$$

这里 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维向量函数，要求它的每一个分量

都存在拉普拉斯变换。

定理12 如果对向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$，存在常数 $M>0$ 和 $\sigma>0$ 使不等式

$$\|f(t)\| \le Me^{\sigma t} \tag{5.62}$$

对所有充分大的 t 成立，则初值问题

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\eta}$$

的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 及其导数 $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ 均象 $\boldsymbol{f}(t)$ 一样满足类似(5.62)的不等式从而它们的拉普拉斯变换都存在。

例12 试求方程组 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$

满足初始条件 $\varphi_1(0)=0, \varphi_2(0)=1$ 的解 $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

并求出它的基解矩阵。

解 令 $X_1(s) = L[x_1(t)], X_2(s) = L[x_2(t)]$

假设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 满足微分方程组

对方程组施行拉普拉斯变换，有：

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=2X_1(s)+X_2(s) \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=-X_1(s)+4X_2(s) \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} (s-2)X_1(s)-X_2(s)=\varphi_1(0)=0 \\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\varphi_2(0)=1 \end{cases}$$

解出 $X_1(s), X_2(s)$ 有:

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2}, X_2=\frac{s-2}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2},\qquad X_2=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

取反变换，得:

$$\varphi_1(t)=te^{3t},\varphi_2(t)=e^{3t}+te^{3t}=(1+t)e^{3t}$$

为了寻求基解矩阵，再求满足初始条件

$\psi_1(0)=1,\psi_2(0)=0$ 的解 $(\psi_1(t),\psi_2(t))$

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\psi_1(0)=1\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\psi_2(0)=0\end{cases}$$

其解为:

$$X_1(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2},X_2(s)=\frac{-1}{(s-3)^2}$$

$$\psi_1(t)=(1-t)e^{3t},\psi_2(t)=-te^{3t}$$

基解矩阵是 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \varphi_1(t)\\ \psi_2(t) & \varphi_2(t)\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}$

作业　**P.236, 第6(a)题**（用拉普拉斯变换法）。

1 应用拉普拉斯变换可以将求解线性微分方程组的问题转化为求解线性代数方程组的问题。

2 应用拉普拉斯变换还可以直接解高阶的常系数线性微分方程组，不必先化为一阶的常系数线性微分方程组。

3 拉普拉斯变换提供了一种寻求常系数线性微分方程组

$$x' = Ax \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.33)$$

的基解矩阵的又一种方法。

可化为常系数线性方程组的类型

1 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\left(Ay+g(x)\right)$$

利用自变量的代换 $x=e^t$

可将方程化为常系数线性方程组

$$\frac{dy}{dt}=Ay+g\left(e^t\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & n-2 \\ -2 & -1 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -(n-1) & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

利用自变量的代换 $x = e^t$ 与

$$Y_1 = y_1,\ Y_2 = e^t y_2,\ Y_3 = e^{2t} y_3, \cdots,\ Y_n = e^{(n-1)t} y_n$$

可将方程化为常系数线性方程组

2

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{a_{11}}{x} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} x y_3 + \cdots + a_{1n} x^{n-2} y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{a_{21}}{x^2} y_1 + \dfrac{a_{22}}{x} y_2 + a_{23} y_3 + \cdots + a_{2n} x^{n-3} y_n \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{a_{n1}}{x^n} y_1 + \dfrac{a_{n2}}{x^{n-1}} y_2 + \dfrac{a_{n3}}{x^{n-2}} y_3 + \cdots + \dfrac{a_{nn}}{x} y_n \end{cases}$$

a_{ij}为常数，x的次数有以下规律：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \cdots + a_{1n}y_n \\
\dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + (a_{12} - 1)y_2 + a_{23}y_3 + \cdots + a_{2n}y_n \\
\dfrac{dy_2}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + (a_{33} - 2)y_3 + \cdots + a_{2n}y_n \\
\cdots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + a_{n3}y_3 + \cdots + [a_{nn} - (n-1)]y_n
\end{cases}
$$

例1 求解方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例2 求解方程组 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{2}{x^2} y_1 + \dfrac{2}{x} y_2 \end{cases}$

解 $x = e^t$ $\quad Y_1 = y_1,\ Y_2 = e^t y_2$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{e^t dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{e^t dt} = -\dfrac{2}{e^{2t}} y_1 + \dfrac{2}{e^t} y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = e^t y_2 \\ \dfrac{e^t dy_2}{dt} = -2y_1 + 2e^t y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = e^t y_2 \\ e^t y_2 + \dfrac{e^t dy_2}{dt} = -2y_1 + 2e^t y_2 + e^t y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = e^t y_2 \\ e^t y_2 + \dfrac{e^t dy_2}{dt} = -2y_1 + 2e^t y_2 + e^t y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \dfrac{dY_2}{dt} = -2Y_1 + 3Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

属于 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 的特征向量分别为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 原方程组的基解组为 $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 \\ 2x \end{bmatrix}$