1. Bevezető

a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n-ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n. \tag{2}$$

Konvenció szerint $0! = 1$.

c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \tag{3}$$

ahol a faktoriálist (1) szerint definiáljuk.

d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$sgn(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha x} > 0, \\ 0, & \text{ha x} = 0, \\ -1, & \text{ha x} < 0. \end{cases} \tag{4}$$

2. Determináns

a) Legyen
$$[n] := \{1, 2, \cdots, n\} \tag{5}$$
a természetes számok halmaza 1-től n-ig.

b) Egy n-edrendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$-ből $[n]$-be. Az n-edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n-nel jelöljük.

c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverziónak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.

d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:
$$I(\sigma) := \Big|\{(i, j) \mid i, j \in [n], i < j, \sigma i > \sigma j\}\Big| \tag{6}$$

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, egy $n \times n$-es (négyzetes) valós mátrix:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$
Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:
$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} \tag{8}$$

3. Logikai azonosság

Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	x ∨ y	x ∧ y	x → y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

(9)

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \to d = a \to (b \to (c \to d)). \tag{10}$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \to y = \bar{x} \vee y \tag{11}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{12}$$

A (10) bal oldala, (11) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \to d \underset{(11)}{=} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d \underset{(12)}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d. \tag{13}$$

A (10) jobb oldala, (11) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \to (b \to (c \to d)) &= \bar{a} \vee (b \to (c \to d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (c \to d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (\bar{c} \vee v)), \end{aligned} \tag{14}$$

ami a $\vee$ asszociativitása miatt egyenlő (13) egyenlettel.

4. Binomiális tétel

$$
\begin{align}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}\right) \tag{15a}\\
&= \cdots \nonumber\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-k}b^{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{(n+1)-k}b^{k} \tag{15b}\\
&= \cdots \nonumber\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k} \tag{15c}\\
&+ \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1}. \nonumber\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k}. \tag{15d}
\end{align}
$$