

线性代数重点

齐次方程	$Ax=0$ -----求基础解系 x ,给定条件求 A
非齐次方程	$Ax=b$ -----求基础解系 x ,给定条件求 A
特征方程	$Ax=\lambda x$ -----求特征向量 x ,求特征值 λ
相似	$A=P^{-1}BP$ -----给定条件求 A,B,P
相似对角化	$A=P^{-1}\wedge P$ -----给定条件求 A,\wedge,P
二次型正定	$A=C^TBC$ -----给定条件求 A,B,C
两方程同解	-----求公共解
正交单位化	-----直接求矩阵
主思路	<div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: 20px;"> 借助基本方程, 矩阵关系分析性质 $Ax=b \rightarrow \overline{A} \rightarrow Ax=0$ $Ax=\lambda x \rightarrow (\lambda E-A)x=0 \rightarrow Ax=0$ $A=P^{-1}BP \rightarrow A=P^{-1}\wedge P \rightarrow (\lambda E-A)x=0 \rightarrow Ax=0$ $A=C^TBC \rightarrow A=C^{-1}BC \rightarrow A=C^{-1}\wedge C \rightarrow (\lambda E-A)x=0 \rightarrow Ax=0$ </div>

转置矩阵: $(A^T)^T=A, (AB)^T=B^T A^T, (A+B)^T=A^T+B^T, (\lambda A)^T=\lambda A^T$

可逆矩阵: $A \cdot A^* = |A| E, [A|E] \xrightarrow{\text{行变化}} [E|A^{-1}], (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

伴随矩阵: $(AB)^*=B^*A^*, |A^*|=|A|^{n-1}, (kA)^*=k^{n-1}A^*, (A^*)^*=A \cdot |A|^{n-2}$

相似矩阵: $A \sim B \Leftrightarrow B=P^{-1}AP, A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B), |f(A)|=|f(B)|, trA=trB,$
 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E| \Rightarrow f(A)=f(B)$ 【相同特征值特征向量不一定相同】

对角矩阵: $A \sim \wedge, |A|= \wedge = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

矩阵正交: $AB=0$

正交矩阵: $A^T A = A A^T = E, A^T = A^{-1}, |A|=1 \text{ 或 } -1$

可交换矩阵: $AB=BA \Leftrightarrow$ 对称正定矩阵

等价矩阵: $A \xrightarrow{\text{初等变化}} B, A \cong B$

对称矩阵: $A^T=A$, 反对称矩阵, $A^T=-A$

实对称矩阵: 特征值是实数, 不同特征值对应的特征向量必定正交, 必可相似对角化
 与唯一对角阵合同 A, B 是实对称矩阵则 AB 或 BA 也是

基本思路

- ① 借助最简符合条件的矩阵分析性质
- ② 添加中间量: $\pm 1 \leftrightarrow \pm E \leftrightarrow \pm A \cdot A^{-1}$ (提公因式) $AE=EA$
- ③ 两边取行列式
- ④ 反证法 (线性关系, 逆阵)
- ⑤ 方程法 \leftrightarrow 矩阵: 抽象【分析】 \rightleftharpoons 具体【变形】
- ⑥ 同时左乘或右乘 $f(A)$

初等变化（习惯用法）

行列式计算	{	可同时行变化和列变化-----引起符号变化
		换行或换列-----引起符号变化
		提公因式-----要代入计算
矩阵求秩	{	仅行变化（或列）-----不考虑符号变化
		换行或换列-----不考虑符号变化
		提公因式-----不用代入计算
方程系数矩阵：初等变化的时候，注意不要打乱方程顺序		
矩阵间直接运算不允许变化		

左下三角变化（仅行变化）

- { 选择数字结构最简单的作第一行
- { 从第二行第一元素化起化 “0”

带参数讨论（左下三角为最简）

- { 方阵：化左下三角，最后一行只有一个元素即可讨论
- { 非方阵：化左下三角，最后一行可能出现多个元素, 可分同时为0或 $\neq 0$ 讨论

$r(A) = r(B)$, A与B列数相同，则用行变化求行秩相同即可

矩阵运算

①添加中间量: $\pm 1 \leftrightarrow \pm E \leftrightarrow \pm A \cdot A^{-1}$, $AE = EA$

②同时左乘或右乘 $f(A)$, 两边取行列式

低于3次的都可以直接法求

①连乘用乘法结合律: $B^3 = AP \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A \end{pmatrix} P A^{-1} = AP^3 A^{-1}$

②拆项法 $B^3 = (A + E)^3$

③提公因数 $B^3 = (kA)^3 = k^3 \cdot A^3$

高次处理 ④数学归纳法 A, A^2, \dots, A^n

⑤利用特征值: $A \sim \Lambda$ 则 $|A| = |\Lambda| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, A^n$ 特征值 $\lambda^n \Rightarrow |A^n|$

⑥利用分块对角阵性质 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}$ 选块对角法 $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & C \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

求矩阵参数 ①一般采用特征多项式方程求 $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$

②正交矩阵, 相似矩阵 $\Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \Rightarrow f(\lambda) = g(\lambda)$ 待定系数法

极大无关组B: 满足 $r(A) = r(B)$

求行列式

①直接展开(证明常用) $\sum (-1)^{i(p_1 p_2 p_3 \dots)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} a_{3 p_3} \dots$

②某项的符号: $\tau_i + \tau_j = \text{奇数为负}$

按某行或列展开(先“+”, 后“-”间隔)

③加边法 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = |A|$ (证明常用)

④数学归纳法/利用递推法 $D_n = f(D_{n-1}) \rightarrow$ 求数列

$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} \rightarrow$ 特征方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 求通解 $\begin{cases} D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n (\lambda_1 \neq \lambda_2) \\ D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_2^n (\lambda_1 = \lambda_2) \end{cases}$

⑥代数余子式法: 别的行 $\times A = 0$, 两次运用解方程可得所求 (P340)

⑦范德蒙行列式计算, 克拉默法则: $x_n = D_n / D$ (课本P35)

⑧拆项法 $|A, B| = |A| + |B|$

⑨初等变化化上三角或下三角

$$AB = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 r(A) + r(B) \leq n \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{若 } A \neq 0 \Rightarrow r(B) < n \Rightarrow |B| = 0 \\
 \text{若 } B \neq 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0
 \end{array} \right\} \text{推导线性关系, 解关系} \\
 \text{若 } |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}AB = 0 \Rightarrow B = 0 \\
 \text{若 } |B| \neq 0 \Rightarrow ABB^{-1} = 0 \Rightarrow A = 0
 \end{array} \right\} \text{【反证】与非零矩阵矛盾} \\
 \\
 AB = 0 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ 或 } |B| = 0 \\
 \text{特殊: } A \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0, A^T \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0 \\
 \\
 \text{间接判断关系: 左乘或右乘非零 } C, ABC = 0 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{若 } A \neq 0 \Rightarrow |BC| = 0 \\
 \text{若 } |A| \neq 0 \Rightarrow BC = 0 \\
 \text{若 } AB \neq 0 \Rightarrow |C| = 0 \\
 \text{若 } |AB| \neq 0 \Rightarrow C = 0
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{区分} \left\{ \begin{array}{l}
 AB = (AB_1, AB_2) = \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B_1, \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B_2 \right) = \left[\begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 B_2 \\ A_2 B_2 \end{bmatrix} \right] \\
 \text{矩阵与向量组 } A(B_1, B_2) = (AB_1, AB_2) = 0 \Rightarrow AB_1 = AB_2 = 0 \\
 \text{矩阵与单向量 } B_1: AB_1 = (A_1 B_1, A_2 B_1) \\
 \text{矩阵与系数 } k: kB = (kB_1, kB_2) \\
 A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i \Rightarrow A(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\lambda_1 \varepsilon_1, \lambda_2 \varepsilon_2) \text{【抽象分析注意: 非矩阵关系相乘得】}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$$AC = B \text{【左右矩阵所有对应元素或对应向量相等】}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 r(AC) = r(B), r(A) \leq r(B) \\
 \\
 AC = B \Rightarrow A(C_1, C_2, C_3) = (B_1, B_2, B_3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 AC_1 = B_1 \\
 AC_2 = B_2 \\
 AC_3 = B_3
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$$Ax = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{①矩阵法} \left\{ \begin{array}{l} \text{通解 } x = \eta k \xrightarrow[\text{将 } k \text{ 变回 } x]{\text{原形}} x = \eta x \\ Ax = 0 \xrightarrow{\text{化同解最简方程}} A'x = 0 \text{ 判断 } \eta \text{ 个数} \\ \text{确保解系数个数: } A' \rightarrow A'', r(A') = 2, \text{ 化2行: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = E - A'' \\ \\ \text{②方程法} \left\{ \begin{array}{l} Ax = 0 \xrightarrow{\text{化同解最简方程}} A'x = 0, \text{ 判断 } \eta \text{ 个数} \\ x = \eta \text{ 方程组按 } x_i \text{ 对齐, } \begin{cases} \text{式子内空补 } 0 \cdot x_i, \\ \text{空式子 [个数: } n - r(A')] \text{ 补 } x_i = x_i \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \\ \\ \text{③关于解} \left\{ \begin{array}{l} \text{方程 } \eta \text{ 个数: } n - r(A') \\ x=0 \text{ 总是方程 } Ax = 0 \text{ 的解} \\ \left. \begin{array}{l} Ax = 0 \\ A\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon \text{ 是方程 } Ax = 0 \text{ 的解} \\ r(A') = n \text{ 时, 仅有一解 } x=0 \\ \text{注意: 基础解系 } \eta \text{ 不唯一} \end{array} \right. \\ \\ \text{④ } r(A) = r < n, \eta \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解则有 } \begin{cases} Ax = 0 \text{ 的通解, } x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-r}), n-r \text{ 个无关组} \\ Ax = 0 \text{ 的通解, } x = (\eta, \eta + \varepsilon_1 \cdots \eta + \varepsilon_{n-r}) n-r+1 \text{ 个无关组} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$Ax = B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{①关于解} \left\{ \begin{array}{l} \text{唯一解: } r(\bar{A}) = r(A) = n \\ \text{无穷解: } r(\bar{A}) = r(A) < n, \eta \text{ 个数} = n - r(A) \\ \text{无解: } r(\bar{A}) \neq r(A) \end{array} \right. \\ \\ \text{②与 } Ax = 0 \text{ 关系} \left\{ \begin{array}{l} \text{① } Ax = B \text{ 唯一解} \Rightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ \text{② } Ax = B \text{ 无穷解} \Rightarrow Ax = 0 \text{ 有无穷解} \\ \text{③ } x=0 \text{ 必是 } Ax = 0 \text{ 解, 必不是 } Ax = b \text{ 解} \\ \text{④ } \left. \begin{array}{l} Ax_1 = B \\ Ax_2 = B \end{array} \right\} \Rightarrow \wedge (x_1 - x_2) = 0, x_1 - x_2 \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 解} \end{array} \right. \\ \\ \text{③矩阵法: } \left\{ \begin{array}{l} \text{通解 } x = \eta k + b' \xrightarrow[\text{将k变回x}]{\text{原形}} x = \eta x + B' \\ Ax = b \xrightarrow{\text{化同解最简方程}} A'x = B' \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = E - A' \\ \\ \text{④方程法: 判断 } r(\bar{A}), \text{ 对齐与求 } Ax = 0 \text{ 相同, 特解部分也对齐} \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax = B, \text{ 构造 } [A|B] \xrightarrow{\text{初等行变化}} [E|x] \text{ } x \text{ 是通解或直接法 } Ax = B \Rightarrow x = A^{-1}B \\ xA = B, \text{ 转置 } A^T x^T = B^T \text{ 求出 } x^T \text{ 再转置求 } x \\ AxB = C, x = A^{-1}CB^{-1} \end{array} \right. \\ \\ \text{⑤知通解 } \eta = \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \text{ 求 } A \\ \left. \begin{array}{l} A\eta_0 = B (\text{常有比例关系 } c = \frac{B}{\eta_0}) \Rightarrow \lambda_0 = c \text{ 及 } \varepsilon_0 \\ A\eta_1 = 0 \cdot \eta_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ 及对应特征向量 } \varepsilon_1 \\ A\eta_2 = 0 \cdot \eta_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ 及对应特征向量 } \varepsilon_2 \\ A = P \wedge P^{-1}, P = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{array} \right\} \Rightarrow P \text{ 或 } \wedge \rightarrow A \\ \\ \text{⑦方程间解关系 写出具体方程判断 (例: } \eta_1 - \eta_2 \text{ 是对应齐次的解, } 2\eta_1 - \eta_2 \text{ 齐次的解)} \\ \\ \text{⑧线性关系转化方程} \left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ 能由 } \alpha \text{ 线性表示则 } r[\alpha] = [\alpha | \beta] \text{ --- 有解} \\ \beta \text{ 不能由 } \alpha \text{ 线性表示则 } r[\alpha] \neq [\alpha | \beta] \text{ --- 无解} \end{array} \right. \\ \\ \text{⑨矩阵计算满足: 行} \times \text{列, 行个数=列个数} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{右乘矩阵: } [\text{列向量组}] \cdot [\text{矩阵}] = [\text{列向量组}] \\ \text{左乘矩阵: } [\text{矩阵}] \cdot [\text{行向量组}] = [\text{行向量组}] \end{array} \right.$$

线性代数重点

$$Ax = \lambda x$$

- ①判断: 是否特征向量和特征值用定义 $Ax = \lambda x \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$
- ② $A \sim B \Rightarrow \begin{cases} \text{迹} \sum a_{ii} = \sum b_{ii} \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \begin{cases} \Rightarrow \text{特征值相同} \\ \not\Rightarrow A \sim B \\ \Rightarrow \text{特征多项式相等} \end{cases}$
- ③ $Ax = 0$, η 不唯一 \Rightarrow (很多情况) 特征向量可能不同
- ④计算 $\begin{cases} \text{① } |\lambda E - A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0 \text{ 特征方程} \Rightarrow \lambda_i \text{【通常有一组变化后可提公因数】} \\ \text{② 分别求 } (\lambda_i E - A)x = 0 \text{ 对应基础解系} \Rightarrow \eta_i \end{cases}$
- ⑤推论: AB 与 BA 有相同的特征值和相同的迹 ($AB \neq 0$)
- ⑥ $A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$
- ⑦拆项法: $A = B + C \Rightarrow \lambda_{Ai} = \lambda_{Bi} + \lambda_{Ci}$
- 特殊矩阵的特征值: $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \lambda_1 = na, \lambda_{i+1} = 0, E \text{ 特征值 } \lambda_i = 1$
- ⑧ n 阶阵对应 n 个 λ (重复计算重根), a 重根 λ 可对应一个或 $\leq a$ 个特征向量
每个特征向量对应一个 λ , 对应 a 个必是 a 重根

$$AP = PB$$

- $Ax = xB \Rightarrow B = x^{-1}Ax, A \sim B$, A 与 B 特征值相同 $\rightarrow B$ 特征值
- $AB = \lambda B$ 三阶阵 $AB = 2B, r(B) = 2 \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$
- 区别: $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \lambda(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \Rightarrow A\beta_i = \lambda_i\beta_i$
- $AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP, B \sim A$
- 构造 A^3x 法: 条件 $\Rightarrow A^3x = 3Ax - 2A^2x, P = [x, Ax, A^2x]$
- $AP = A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x]$
- $[Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x] = [x, Ax, A^2x] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB \Rightarrow AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP$

$$A = P^{-1} \wedge P \Leftrightarrow P^{-1}AP = \wedge$$

- 可对角化条件 $\begin{cases} \text{① } n - r(\lambda_i E - A) = k_i, K \text{ 重根 } \lambda \text{ 对应 } K \text{ 个特征向量} \\ \text{② } A \text{ 恰有 } n \text{ 个线性无关的特征向量} \\ \text{③ } n \text{ 个不相等的特征值} \end{cases}$
- $P = (P_1, P_2, P_3), A = P^{-1} \wedge P \rightarrow AP = P \wedge \Rightarrow AP_i = P_i \wedge$
 $A\eta_i = \lambda_i \cdot \eta_i \Rightarrow A\eta_i = \eta_i \cdot \lambda_i \Rightarrow P_i \rightarrow \eta_i, \text{ 则 } \wedge_i \rightarrow \lambda_i$
- P, \wedge 的求法 $\begin{cases} |\lambda E - A| \Rightarrow \lambda_i \text{ 特征值} \Rightarrow \text{与 } \lambda_i \text{ 对应的 } \eta_i \\ \text{将 } \eta_i \text{ 组成基础解系, 令 } P = [\eta_1, \eta_2, \dots], \wedge = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{cases}$

$$A = P^{-1}BP$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} A \sim B \Leftrightarrow A = P^{-1}BP, \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{Ai} = \lambda_{Bi} \\ \text{可对角化} \end{array} \right\} \Leftrightarrow A \sim \wedge \sim B \\ \textcircled{2} A \sim B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1} \\ |\lambda E - A| = |\lambda E - B|, |A| = |B| \\ r(A) = r(B) \end{array} \right\} \text{任一必要条件不成立} \Rightarrow \text{不可相似} \\ \textcircled{3} \text{知} A, B \text{求} P \text{步骤} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 求出} A \text{特征向量组} \alpha \text{和特征值组} \lambda_\alpha, B \text{特征向量组} \beta \\ \text{特征值组} \lambda_\beta, \text{判断} \lambda_\alpha = \lambda_\beta \text{则} A, B \text{可相似} \\ 2. \text{ 令} \alpha^{-1} A \alpha = \beta^{-1} B \beta = \wedge \Rightarrow A = (\alpha \beta^{-1}) B (\beta \alpha^{-1}) = \alpha (\beta^{-1} B \beta) \alpha^{-1} = \alpha \wedge \alpha^{-1} \\ \text{(注: 若取} P = \alpha^{-1} \text{求得使} A \text{对角化} A = P^{-1} \wedge P \text{的} P \text{若} P = \beta \alpha^{-1} \text{求得的是使} B = P A P^{-1}, \\ \text{若} P = \beta \alpha^{-1} \text{求得的是使} B = P^{-1} A P \text{)} \\ 3. \text{ 分清所求表达式} \rightarrow \text{按要求取得} P \rightarrow \text{求出} P \end{array} \right. \\ \textcircled{4} \text{知} P, f(A) = 0, \text{求} B \text{构造法: } AP(\text{抽象}) = PB(\text{具体}) \Rightarrow \text{系数阵} B \text{ (P446)} \end{array} \right.$$

$$A = C^T B C (\text{合同变换})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P, \wedge \text{能对应} \left\{ \begin{array}{l} \text{正交变换} \left\{ \begin{array}{l} A \text{求} \varepsilon \xrightarrow[\text{正交矩阵} \eta^T = \eta^{-1}]{\text{单位化, 正交化}} \rightarrow \eta, \text{取} P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{则} P^T = P^{-1} \\ \text{对角化原理} \Rightarrow A = P^{-1} \wedge P \end{array} \right\} \Rightarrow \wedge = P \wedge P^T \\ \text{--配方--} \left\{ \begin{array}{l} f = x^T \wedge x, \text{取} x = Py \text{则} f = y^T P^T A P y \\ f = y^T \wedge y \end{array} \right\} \Rightarrow \wedge = P^{-1} A P \end{array} \right. \\ \text{--配方法--} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ 将各项积和式配方成平方和式, 令平方项} = y_i \\ \textcircled{2} \text{ 混合项可令: } x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_n = y_n \\ \textcircled{3} \text{ 重组方程} \Leftrightarrow \text{循环直到只有平方项} \\ \textcircled{4} \text{ 令} X = PY \text{即} (x_1, x_2, x_3)^T = P \bullet (y_1, y_2, y_3)^T \Rightarrow P \end{array} \right. \\ \text{正交变换法} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ 求出} A \text{的特征值和对应特征向量组} \varepsilon \\ \textcircled{2} \varepsilon \text{单位化, 正交化} \rightarrow \eta, \text{令} P = \eta \Rightarrow P \\ \text{(ABC实对称矩阵特征向量必可正交化, 正交化可省略} \rightarrow \text{推导实对称矩阵)} \end{array} \right. \\ \text{求正交矩阵} \left\{ \begin{array}{l} A \text{的正交矩阵} C: A = C^{-1} \wedge C = C^T \wedge C \text{(C为所求)} (C \text{单位正交化后} C^T = C^{-1}) \\ \text{二次型正交矩阵} C: f = x^T A x, x = Cy \rightarrow f = y^T C^{-1} A C y = y^T \wedge y \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ 以上} \Rightarrow \text{经过正交变换, 前后二次型矩阵} A \sim \wedge \text{相似且合同} \\ \textcircled{2} \text{ 配方法变换前后二次型矩阵不能确认是否相似} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

正交

α 与 β 正交定义: $(\alpha, \beta) = \sum \alpha_i \beta_i = 0$

内积性质: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha), (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

正交矩阵: $AA^T = A^T A = E$

正交化条件: 向量组 α 线性无关 (方程法 \Rightarrow 线性无关向量组)

简化技巧: 使第一个求出的向量与已知向量正交即: $\eta^T \alpha_1 = 0$, 可少用一次公式

可不用正交化情况: 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交

正交化步骤

- ①正交定义令: $x^T \alpha_1 = 0$
- ②方程($x^T \alpha_1 = 0$)基础解系均与 α_1 正交, 令 $\alpha_2 = \eta_1, \alpha_3 = \eta_2$
 $\alpha_2 \cdot \alpha_1 = 0$ 正交, $\alpha_3 \cdot \alpha_1 = 0$ 正交
- ③两两正交公式

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 \\ \dots \dots \text{类推} \end{cases}$$

单位化: $\beta_i / |\beta_i|$

方程同解

类型

- 两个齐次方程: $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) = r(B)$
- 两个非齐次方程: $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解 $\Leftrightarrow r \begin{bmatrix} A & \beta \\ B & \gamma \end{bmatrix} = r(A) = r(B)$

方法

- ①将(I)与(II)联立起来 \rightarrow 新方程, 它的解就是通解
- ②用(I)与(II)各自同解求

$$\begin{cases} \text{(I) 与 (II) 齐次} & \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \text{(II)} \eta = (\eta_4, \eta_5) \\ \text{则} & r(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = r(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \mid c_1 \eta_4 + c_2 \eta_5) \\ \text{(I) 与 (II) 非齐次} & \eta = \varepsilon_1 + c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2, \\ & \text{(II)} \eta = \varepsilon_2 + c_3 \eta_3 \text{ 则 } r(\eta_1, \eta_2) = r(\eta_1, \eta_2 \mid \varepsilon_2 + c_3 \eta_3 - \varepsilon_1) \end{cases}$$
- ③已知(I)通解, 将该通解代入(II)中找出(I)通解中的任意常数所满足(II)的关系式而求出公共解
- ④(I)A解全是(II)B的解: $n - r(A) \leq n - r(B) \Rightarrow r(A) \geq r(B)$
- 合并方程是交集: $(III) = (I) \cap (II) = (I) \Leftrightarrow (I) \text{ 与 } (II) \text{ 同解} \Rightarrow r(A) = r(C)$
- ⑤特殊: 添加方程成新方程组: 待定系数法
- ⑥合并方程解的集合是原方程的交集, 即是公共解

线性代数重点

二次型 $f(x_1, x_2, \dots) = x^T A x$ 或 $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ (A 叫二次型矩阵)

性质	$\left\{ \begin{array}{l} 1. A \text{ 与 } B \text{ 合同 } (A \simeq B): B = C^T A C \text{ (} A, B \text{ 为实对称矩阵, } C \text{ 为可逆矩阵)} \\ 2. A \sim B \Rightarrow A \simeq B \Rightarrow r(A) = r(B) \text{ [注意: } A \simeq B \not\Rightarrow A \sim B \text{ 勿乱使用相似的性质]} \\ 3. \text{ 两个矩阵合同} \Leftrightarrow \text{正负惯性指数相同} \Leftrightarrow \text{秩与正惯性指数分别相等} \\ 4. r(A) = \text{正惯性指数 (规范型中正项个数 } P = \text{正特征值个数)} + \text{负惯性指数} \\ 5. \text{ 符号差: } 2P - r(A) \\ 6. \text{ 标准型: } f(x_1, x_2, \dots) = x^T A x \xrightarrow{\text{合同变换 } x = Cy, \text{ 变换矩阵 } B = C^T A C} f = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \\ \text{(标准型表达式不唯一, 非零系数的个数} = r(A) \text{ 唯一, } A \text{ 特征值是平方项的系数)} \\ 7. \text{ 规范型: 标准型中系数 } d_i = -1 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 0 \end{array} \right.$
正定	$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 正定二次型 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x > 0, \text{ 合同变换不改变正定性} \\ 2. \text{ 正定二次型} \Leftrightarrow \text{正惯性指数} = n \Leftrightarrow A \text{ 的特征值全} > 0 \Leftrightarrow A \text{ 的所有顺序主子式} > 0 \text{ (P463)} \\ \Leftrightarrow \exists \text{ 可逆 } P \text{ 使用 } A = P^T P \Leftrightarrow \text{正交阵 } Q, \text{ 使 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda, \Lambda \text{ 中各项 } \lambda > 0 \end{array} \right.$
-求A	$\left\{ \begin{array}{l} \text{① } x^T A x \Leftrightarrow \text{展开式 } f(x_1, x_2, \dots) \Rightarrow A \\ \text{(特殊: 展开 } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j = (x_1, x_2, \dots) A^* (x_1, x_2, \dots)^T \text{)} \\ \text{② 展开式 (不全的补0项) 平方项的系数放对角线, 其它各项拆分成相同的两项,} \\ \text{对应系数以对角为对称轴两边对称按顺序摆放。} \end{array} \right.$

逆阵证明

$\left\{ \begin{array}{l} \text{① } A \text{ 为具体形式: } A \neq 0 \Rightarrow A \text{ 可逆} \\ \text{② } A \text{ 为抽象形式: 变形 } \Rightarrow AB = E, \text{ 取行列式 } \Rightarrow A \cdot B = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ 可逆} \\ \text{③ 反证法: 若 } A \text{ 不可逆则 } A = 0 \text{ (用此式推导矛盾关系 P367)} \\ \text{④ 利用行向量或列向量线性无关性} \end{array} \right.$
--

关于秩

基本公式	$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
	$r(AB) + n \geq r(A) + r(B) \geq r(A \pm B)$
	$A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) \geq 1, A = 0 \Leftrightarrow r(A) = 0$
	$r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B) \leq r \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$
	$r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(A A^T) = r(kA)$
	$r(A) = r \sim \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 等价标准型
	$\min\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$
	$0 \leq r(A_{mn}) \leq \min(m, n)$
	$r(A_{mn}, E_m) = m$
	$AB = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$
非方阵	$r(ABC) + r(B) \geq r(AB) + r(BC)$
	G 为列满秩, H 为行满秩 $\Rightarrow r(GA) = r(AH) = r(A)$
	$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n - 1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n - 1 \end{cases}$
	$A_{mn} \begin{cases} r(A) = m \Rightarrow A \text{ 的行向量线性无关} \\ r(A) = n \Rightarrow A \text{ 的列向量线性无关} \end{cases}, 0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$
	$A_{mn}, B_{ns}, \text{若 } r(AB) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(B) \leq n \\ B \text{ 的列向量全部是 } Ax = 0 \text{ 的解} \end{cases}$
	$r(A_{mn}) = n \Rightarrow \begin{cases} Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ \text{(具有可逆性质)} \begin{cases} r(AB) = r(B) \text{ 可逆不影响秩} \\ AB = 0 \Rightarrow B = 0 \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{cases} \end{cases}$
	$AB_{ns} = A(B_{n1} B_{n2} \cdots B_{ns}) = 0 \Rightarrow AB_{n1} = 0$
	$A_{mn} B = (A_{1n} A_{2n} \cdots A_{mn}) B = 0 \Rightarrow A_{1n} B = 0$
	$\left. \begin{aligned} AB_{ns} = A(B_{n1} B_{n2} \cdots B_{ns}) = 0 \Rightarrow AB_{n1} = 0 \\ A_{mn} B = (A_{1n} A_{2n} \cdots A_{mn}) B = 0 \Rightarrow A_{1n} B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{1n} B_{n1} = 0 \text{ 都满足 } A \text{ 行数} = B \text{ 列数}$
	A 与 B 等价向量组 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\beta_1, \beta_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$
线性关系	$Ax = B$ 有解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \Rightarrow r(\beta_1, \beta_2) \leq r(\alpha_1, \alpha_2)$

秩的证明

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{不等式证明} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{矩阵初等变化为矩阵最简型分析 (p369)} \\ \textcircled{2} \text{利用分块矩阵的乘法, 结合齐次方程分析} \end{array} \right. \\ \\ \text{等式证明} \left\{ \begin{array}{l} \text{夹逼(两端)} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} r(A) + r(B) = n \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n \text{ 且} \\ A + B = kE \Rightarrow r(A) + r(B) \geq r(A+B) = n \end{cases} \\ \textcircled{2} r(A) = r(B) \Leftrightarrow r(A) \leq r(B) \text{ 且 } r(A) \geq r(B) \\ \textcircled{3} \left. \begin{array}{l} r(A) \leq n \\ r(A) \geq r(AB) = r(E) = n \end{array} \right\} \Rightarrow r(A) = n \end{array} \right. \\ \text{夹逼(中间)} : r(A) \leq n \leq r(B), r(A) = r(B) \Rightarrow r(A) = n = r(B) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

线性关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{概念} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ 由 } B \text{ 线性表示: } A=kB \quad \text{从 } A \text{ 到 } B \text{ 的线性表示: } B=kA \\ \left. \begin{array}{l} A \text{ 能由 } \alpha, \beta \text{ 线性表示} \\ A \text{ 是 } \alpha, \beta \text{ 的线性组合} \end{array} \right\} A = k_1 \alpha + k_2 \beta \\ \left. \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关} \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \text{ 线性相关} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \text{ 能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示且唯一 (非齐次方程)} \\ \text{向量组的个数大于维数, 则线性相关} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{可补0行} \rightarrow \text{方阵 } |A|=0 \\ \textcircled{2} \text{多余向量: } r(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \end{array} \right. \\ \text{矩阵的秩=列向量秩=行向量秩, 初等变化不改变秩} \\ \text{向量组的极大无关组不唯一, 但极大无关组个数唯一} \\ \text{任一向量组和极大无关组等价, 任意两组极大无关组等价} \\ \text{单个零向量线性相关, 单个非零向量组线性无关} \\ \text{零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交} \\ \text{向量组等价: } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 可相互表示} \end{array} \right. \\ \\ \text{关系} \left\{ \begin{array}{l} \text{个数变化} \left\{ \begin{array}{l} \text{整体无关} \Rightarrow \text{部分无关} \\ \text{部分相关} \Rightarrow \text{整体相关} \end{array} \right. \\ \text{维数变化} \left\{ \begin{array}{l} \text{原向量组无关} \Rightarrow \text{接长向量组无关} \\ \text{接长向量组相关} \Rightarrow \text{原向量组相关} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \text{方程} \left\{ \begin{array}{l} \text{秩与线性无关个数 } S \text{ 相等: } r(A) = S \\ \text{秩与基础解系个数 } J \text{ 互补: } r(A) + J = n \\ \text{基础解系个数=极大无关解的个数=解空间的维数} \end{array} \right.$$

向量组线性关系证明

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义法: } \sum k_i \alpha_i = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{① 展开利用题设条件判断 } k_i \text{ 取值情况分析线性关系} \\ \text{② 作某种变换, 再用题设条件判断 } k_i \text{ 取值情况分析线性关系} \end{array} \right. \\ \\ \text{反证} \left\{ \begin{array}{l} \text{① 线性无关} \left\{ \begin{array}{l} \text{假设有 } \sum k_n \alpha_n = 0 \\ \Rightarrow k_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{矛盾} \\ \text{线性相关} \end{array} \right. \\ \\ \text{② 逼“0”} \left\{ \begin{array}{l} \text{假设 } k \neq 0 \Rightarrow \text{线性相关表达式} \\ \text{原条件是线性无关} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{矛盾, } k = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{假设 } k = 0 \Rightarrow \text{线性无关表达式} \\ \text{原条件是线性相关} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{矛盾, } k \neq 0 \\ \\ \text{③} \left\{ \begin{array}{l} \text{假设整体线性无关} \Rightarrow \text{某部分亦线性无关} \\ \text{题设该部分是线性相关} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{矛盾} \\ \\ \text{④} \left\{ \begin{array}{l} \text{假设某部分线性相关} \Rightarrow \text{整体亦线性相关} \\ \text{题设整体部分是线性无关} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{矛盾} \\ \\ \text{方程法} \left\{ \begin{array}{l} \text{① 化为齐次方程作有无非零解分析: } A^T B / A^T B / AB^T / B^T A \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{无关} \\ \text{② 具体(矩阵各元素, 方程组} \Leftrightarrow \text{变形重组)} \Leftrightarrow \text{抽象(秩, 矩阵间运算, 线性关系)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

条件作用

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. f(A) = 0 \Rightarrow \text{特征方程} \Rightarrow \lambda \\ 2. |A| = C \Rightarrow f(\lambda) = 0 \text{ 特征多项式} \\ 3. \lambda = K \text{ 代入方程 } f(\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ 中的参数} \\ \\ 4. \text{矩阵类型} \Rightarrow \text{相关性质} \\ 5. \text{线性相关} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0 \\ 6. a_{ii} = 1 \Rightarrow \text{画矩阵图} \leftrightarrow \text{方程}$$

[矩阵 \Leftrightarrow 方程组 \Leftrightarrow 向量组]

①相似矩阵 $A \sim B$: $A = P^{-1}BP$ 或 PBP^{-1} (分清题意求 $P=Q$ 还是 $P=Q^{-1}$)

令 $P=Q^{-1}$ 则 $A=QBQ^{-1}$ 两式中求得的 P 不同, 它们的关系是 $PQ=E$

②构造法: 已知 $A^3x=3Ax-2A^2x$, $P=[x, Ax, A^2x]$

$$\left. \begin{aligned} AP &= A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax-2A^2x] \\ [Ax, A^2x, 3Ax-2A^2x] &= [x, Ax, A^2x] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB \end{aligned} \right\} \Rightarrow AP=PB \Rightarrow B=P^{-1}AP$$

$$\left. \begin{aligned} x(x_1, x_2) \\ \text{③区分 } \varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ x\varepsilon \neq \varepsilon x \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \beta = x \cdot \varepsilon^T &= x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 \text{ 方程表示法} \quad -\beta = x^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} x_1\varepsilon_1 \\ x_2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \text{ 向量表示法} \\ \beta = \varepsilon \cdot x^T &= \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2x_2 \text{ 方程表示法} \quad \beta = \varepsilon^T \cdot x = \begin{bmatrix} \varepsilon_1x_1 \\ \varepsilon_2x_2 \end{bmatrix} \text{ 向量表示法} \end{aligned} \right.$$

矩阵 A 变向量说法: **行向量组** A 内部各元素是行向量, 所有行向量组合成一个整体**列向量** A

$$\left. \begin{aligned} \text{④二次型} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \text{向量形式: } f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x^T Ax \\ \text{函数形式: } f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot x^T \end{aligned} \right.$$

⑤ $AB=C$: (行向量) A 行 \times (列向量) B 列 $= C$, $\left\{ \begin{aligned} \text{行向量 } A \text{ 右乘作行变化得到 } C \\ \text{列向量 } B \text{ 左乘作列变化得到 } C \end{aligned} \right.$

$$\left. \begin{aligned} \text{矩阵行对应变化} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \left. \begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= EE \\ \updownarrow & \quad \updownarrow \\ AE &= EA \end{aligned} \right\} &\Rightarrow [A|E] \rightarrow [E|A^{-1}] \\ \left. \begin{aligned} A\alpha &= \beta E \\ \updownarrow & \quad \updownarrow \\ E\alpha &= \alpha E \end{aligned} \right\} &\Rightarrow [A|\beta] \rightarrow [E|\alpha] \Rightarrow \alpha \text{ 是解向量} \\ \left. \begin{aligned} A &= P^{-1} \wedge P \rightarrow AP = P \cdot \wedge \\ A\eta &= \eta \cdot \lambda \end{aligned} \right\} &\Rightarrow [\eta|\lambda] \rightarrow [P|\wedge] \end{aligned} \right.$$

⑥向量 \rightarrow 矩阵 【注意区分系数与矩阵】 $\alpha(\alpha_1, \alpha_2), \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) \cdot (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}$$

因为: $A(\alpha_1, \alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) \neq (\lambda_1, \lambda_2) \cdot (\alpha_1, \alpha_2)$

⑦矩阵 A 的两个多项式总是可以交换: $g(A)f(A) = f(A)g(A)$

⑧ $BAX=0, AX=0 \Rightarrow AX=0$ 的解全部是方程 $BAX=0$ 的解 (两方程交集为 $BAX=0$)