

齐次方程	$Ax = 0$ ----- 求基础解系 x , 给定条件求 A
非齐次方程	$Ax = b$ ----- 求基础解系 x , 给定条件求 A
特征方程	$Ax = \lambda x$ ----- 求特征向量 x , 求特征值 λ
相似	$A = P^{-1}BP$ ----- 给定条件求 A, B, P
相似对角化	$A = P^{-1} \wedge P$ ----- 给定条件求 A, \wedge, P
二次型正定	$A = C^TBC$ ----- 给定条件求 A, B, C
两方程同解	----- 求公共解
正交单位化	----- 直接求矩阵 借助基本方程, 矩阵关系分析性质
主思路	$\begin{cases} Ax = b \rightarrow \bar{A} \rightarrow Ax = 0 \\ Ax = \lambda x \rightarrow (\lambda E - A)x = 0 \rightarrow Ax = 0 \\ A = P^{-1}BP \rightarrow A = P^{-1} \wedge P \rightarrow (\lambda E - A)x = 0 \rightarrow Ax = 0 \\ A = C^TBC \rightarrow A = C^{-1}BC \rightarrow A = C^{-1} \wedge C \rightarrow (\lambda E - A)x = 0 \rightarrow Ax = 0 \end{cases}$

转置矩阵:	$(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (A+B)^T = A^T + B^T, (\lambda A)^T = \lambda A^T$
可逆矩阵:	$A \cdot A^* = A E, [A E] \xrightarrow{\text{行变化}} [E A^{-1}]$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
伴随矩阵:	$(AB)^* = B^*A^*, A^* = A ^{n-1}$, $(kA)^* = k^{n-1}A^*, (A^*)^* = A \cdot A ^{n-2}$
相似矩阵:	$A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP, A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B), f(A) = f(B) , \text{tr}A = \text{tr}B,$ $ A - \lambda E = B - \lambda E \Rightarrow f(A) = f(B)$ 【相同特征值特征向量不一定相同】
对角矩阵:	$A \sim \wedge, A = \wedge = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
矩阵正交:	$AB = 0$
正交矩阵:	$A^T A = AA^T = E, A^T = A^{-1}, A = 1 \text{ 或 } -1$
可交换矩阵:	$AB = BA \Leftrightarrow$ 对称正定矩阵
等价矩阵:	$A \xrightarrow{\text{初等变化}} B, A \cong B$
对称矩阵:	$A^T = A$, 反对称矩阵, $A^T = -A$
实对称矩阵:	特征值是实数, 不同特征值对应的特征向量必定正交, 必可相似对角化 与唯一对角阵合同 A, B 是实对称矩阵则 AB 或 BA 也是

基本思路
① 借助最简符合条件的矩阵分析性质
② 添加中间量: $\pm 1 \leftrightarrow \pm E \leftrightarrow \pm A \cdot A^{-1}$ (提公因式) $AE = EA$
③ 两边取行列式
④ 反证法 (线性关系, 逆阵)
⑤ 方程法 \leftrightarrow 矩阵: 抽象【分析】 \Leftrightarrow 具体【变形】
⑥ 同时左乘或右乘 $f(A)$

线性代数重点

初等变化 (习惯用法)

行列式计算	可同时行变化和列变化	----引起符号变化
	换行或换列	-----引起符号变化
	提公因式	-----要代入计算
矩阵求秩	仅行变化 (或列)	-----不考虑符号变化
	换行或换列	-----不考虑符号变化
	提公因式	-----不用代入计算
方程系数矩阵: 初等变化的时候, 注意不要打乱方程顺序		
矩阵间直接运算不允许变化		

左下三角变化 (仅行变化)

选择数字结构最简单的作第一行
从第二行第一元素化起化 “0”

带参数讨论 (左下三角为最简)

方阵: 化左下三角, 最后一行只有一个元素即可讨论
非方阵: 化左下三角, 最后一行可能出现多个元素, 可分同时为0或 $\neq 0$ 讨论

$r(A) = r(B)$, A与B列数相同, 则用行变化求行秩相同即可

矩阵运算

①添加中间量: $\pm 1 \leftrightarrow \pm E \leftrightarrow \pm A \cdot A^{-1}$, $AE = EA$

②同时左乘或右乘 $f(A)$, 两边取行列式
低于3次的都可以直接法求

- ①连乘用乘法结合律: $B^3 = AP\left(A^{-1} \cdot A\right)P\left(A^{-1} \cdot A\right)PA^{-1} = AP^3A^{-1}$
- ②拆项法 $B^3 = (A + E)^3$
- ③提公因数 $B^3 = (kA)^3 = k^3 \cdot A^3$

高次处理

- ④数学归纳法 A, A^2, \dots, A^n
- ⑤利用特征值: $A \sim \lambda$ 则 $|A| = |\lambda| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, A^n$ 特征值 $\lambda^n \Rightarrow |A^n|$
- ⑥利用分块对角阵性质 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}$ 选块对角法 $\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$

求矩阵参数

- ①一般采用特征多项式方程求 $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$
- ②正交矩阵, 相似矩阵 $\Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \Rightarrow f(\lambda) = g(\lambda)$ 待定系数法

极大无关组B: 满足 $r(A) = r(B)$

求行列式

①直接展开(证明常用) $\sum (-1)^{i(p_1 p_2 p_3 \dots)} a_{1,p_1} a_{2,p_2} a_{3,p_3} \dots$

②某项的符号: $\tau_i + \tau_j =$ 奇数为负

按某行或列展开(先“+”, 后“-”间隔)

③加边法 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = |A|$ (证明常用)

④数学归纳法/利用递推法 $D_n = f(D_{n-1}) \rightarrow$ 求数列

$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} \rightarrow$ 特征方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 求通解

$$\begin{cases} D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n (\lambda_1 \neq \lambda_2) \\ D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_2^n (\lambda_1 = \lambda_2) \end{cases}$$

⑤代数余子式法: 别的行 $\times A = 0$, 两次运用解方程可得所求 (P340)

⑥范德蒙行列式计算, 克拉默法则: $x_n = D_n / D$ (课本P35)

⑦拆项法 $|A, B| = |A| + |B|$

⑧初等变化化上三角或下三角

$AB = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} r(A) + r(B) \leq n \\ \Rightarrow |A| \cdot |B| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ 或 } |B| = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{若 } A \neq 0 \Rightarrow r(B) < n \Rightarrow |B| = 0 \\ \text{若 } B \neq 0 \Rightarrow r(A) < n \Rightarrow |A| = 0 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{若 } |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}AB = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \text{若 } |B| \neq 0 \Rightarrow ABB^{-1} = 0 \Rightarrow A = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{推导线性关系, 解关系} \\ \text{【反证】与非零矩阵矛盾} \end{array} \\
 AB = 0 \quad \text{特殊: } A \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0, A^T \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0 \\
 \left. \begin{array}{l} \text{间接判断关系: 左乘或右乘非零 } C, ABC = 0 \\ \Rightarrow |BC| = 0 \\ \text{若 } A \neq 0 \Rightarrow BC = 0 \\ \text{若 } |A| \neq 0 \Rightarrow BC = 0 \\ \text{若 } AB \neq 0 \Rightarrow |C| = 0 \\ \text{若 } |AB| \neq 0 \Rightarrow C = 0 \end{array} \right\}
 \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} AB = (AB_1, AB_2) = \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B_1, \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B_2 \right) = \left[\begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 B_2 \\ A_2 B_2 \end{bmatrix} \right] \\
 \text{矩阵与向量组 } A(B_1, B_2) = (AB_1, AB_2) = 0 \Rightarrow AB_1 = AB_2 = 0 \\
 \text{矩阵与单向量 } B_i: AB_i = (A_1 B_i, A_2 B_i) \\
 \text{矩阵与系数 } k: kB = (kB_1, kB_2) \\
 A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i \Rightarrow A(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\lambda_1 \varepsilon_1, \lambda_2 \varepsilon_2) \text{ 【抽象分析注意: 非矩阵关系相乘得】}
 \end{array} \right\}
 \end{array} \right.$$

$AC = B$ 【左右矩阵所有对应元素或对应向量相等】

$$\left\{ \begin{array}{l} r(AC) = r(B), r(A) \leq r(B) \\
 AC = B \Rightarrow A(C_1, C_2, C_3) = (B_1, B_2, B_3) \Rightarrow \begin{cases} AC_1 = B_1 \\ AC_2 = B_2 \\ AC_3 = B_3 \end{cases}
 \end{array} \right.$$

$Ax = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{①矩阵法} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{通解 } x = \eta k \xrightarrow[\substack{\text{将k变回x}}]{\substack{\text{原形}}} x = \eta x \\
 Ax = 0 \xrightarrow{\text{化同解最简方程}} A'x = 0 \text{ 判断 } \eta \text{ 个数} \\
 \text{确保解系个数: } A' \rightarrow A'', r(A') = 2, \text{ 化2行: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = E - A'' \\
 \text{②方程法} \left\{ \begin{array}{l}
 Ax = 0 \xrightarrow{\text{化同解最简方程}} A'x = 0, \text{ 判断 } \eta \text{ 个数} \\
 x = \eta \text{ 方程组按 } x_i \text{ 对齐, } \begin{cases} \text{式子内空补 } 0 \cdot x_i, \\ \text{空式子 [个数: } n - r(A') \text{] 补 } x_i = x_i \end{cases}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \\
 \text{③关于解} \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{cases} Ax = 0 \\ A\varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon \text{ 是方程 } Ax = 0 \text{ 的解} \\
 r(A') = n \text{ 时, 仅有一解 } x = 0 \\
 \text{注意: 基础解系 } \eta \text{ 不唯一}
 \end{array} \right. \\
 \text{④} r(A) = r < n, \eta \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解则有} \left\{ \begin{array}{l}
 Ax = 0 \text{ 的通解, } x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-r}), n - r \text{ 个无关组} \\
 Ax = 0 \text{ 的通解, } x = (\eta, \eta + \varepsilon_1 \cdots \eta + \varepsilon_{n-r}) n - r + 1 \text{ 个无关组}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$Ax = B$

- ① 关于解 $\left\{ \begin{array}{l} \text{唯一解: } r(\bar{A}) = r(A) = n \\ \text{无穷解: } r(\bar{A}) = r(A) < n, \eta \text{ 个数} = n - r(A) \\ \text{无解: } r(\bar{A}) \neq r(A) \end{array} \right.$
 - ② 与 $Ax = 0$ 关系 $\left\{ \begin{array}{l} \text{① } Ax = B \text{ 唯一解} \Rightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ \text{② } Ax = B \text{ 无穷解} \Rightarrow Ax = 0 \text{ 有无穷解} \\ \text{③ } x=0 \text{ 必是 } Ax = 0 \text{ 解, 必不是 } Ax = b \text{ 解} \\ \text{④ } \begin{cases} Ax_1 = B \\ Ax_2 = B \end{cases} \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0, x_1 - x_2 \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 解} \end{array} \right.$
 - ③ 矩阵法: $\left\{ \begin{array}{l} \text{通解 } x = \eta k + b' \xrightarrow{\substack{\text{原形} \\ \text{将k变回x}}} x = \eta x + B' \\ Ax = b \xrightarrow{\substack{\text{化同解最简方程} \\ A'x = B'}} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = E - A'$
 - ④ 方程法: 判断 $r(\bar{A})$, 对齐与求 $Ax = 0$ 相同, 特解部分也对齐
 - ⑤ 知通解 $\eta = \eta_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$ 求 A

$$\left. \begin{array}{l} A\eta_0 = B \text{ (常有比例关系 } c = \frac{B}{\eta_0} \text{)} \Rightarrow \lambda_0 = c \text{ 及 } \varepsilon_0 \\ A\eta_1 = 0 \cdot \eta_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ 及对应特征向量 } \varepsilon_1 \\ A\eta_2 = 0 \cdot \eta_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ 及对应特征向量 } \varepsilon_2 \\ A = P \wedge P^{-1}, P = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{array} \right\} \Rightarrow P \wedge \wedge \rightarrow A$$
 - ⑦ 方程间解关系 **写出具体方程判断** (例: $\eta_1 - \eta_2$ 是对应齐次的解, $2\eta_1 - \eta_2$ 齐次的解)
 - ⑧ 线性关系转化方程 $\left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ 能由 } \alpha \text{ 线性表示则 } r[\alpha | \beta] = [\alpha | \beta] \text{ 有解} \\ \beta \text{ 不能由 } \alpha \text{ 线性表示则 } r[\alpha | \beta] \neq [\alpha | \beta] \text{ 无解} \end{array} \right.$
 - ⑨ 矩阵计算满足: 行 \times 列, 行个数 = 列个数 $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{右乘矩阵: [列向量组} \cdot [\text{矩阵}] = [\text{列向量组}] \\ \text{左乘矩阵: [矩阵} \cdot [\text{行向量组}] = [\text{行向量组}] \end{array} \right.$

$Ax = \lambda x$

- ① 判断：是否特征向量和特征值用定义 $Ax = \lambda x \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$
- ② $A \sim B \Rightarrow \begin{cases} \text{迹} \sum a_{ii} = \sum b_{ii} \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \begin{cases} \Rightarrow \text{特征值相同} \\ \not\Rightarrow A \sim B \\ \Rightarrow \text{特征多项式相等} \end{cases}$
- ③ $Ax = 0, \eta$ 不唯一 \Rightarrow (很多情况) 特征向量可能不同
- ④ 计算 $\begin{cases} ① |\lambda E - A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0 \text{ 特征方程} \Rightarrow \lambda_i \\ ② \text{分别求 } (\lambda_i E - A)x = 0 \text{ 对应基础解系} \Rightarrow \eta_i \end{cases}$ 【通常有一组变化后可提公因数】
- ⑤ 推论：AB与BA有相同的特征值和相同的迹 ($AB \neq 0$)
- ⑥ $A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$
- ⑦ 拆项法： $A = B + C \Rightarrow \lambda_{Ai} = \lambda_{Bi} + \lambda_{Ci}$
特殊矩阵的特征值： $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \lambda_1 = na, \lambda_{i+1} = 0, E$ 特征值 $\lambda_i = 1$
- ⑧ n 阶阵对应 n 个 λ (重复计算重根)， a 重根 λ 可对应一个或 $\leq a$ 个特征向量
每个特征向量对应一个 λ ，对应 a 个必是 a 重根

$AP = PB$

- $Ax = xB \Rightarrow B = x^{-1}Ax, A \sim B, A$ 与 B 特征值相同 $\rightarrow B$ 特征值
- $AB = \lambda B$ 三阶阵 $AB = 2B, r(B) = 2 \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$
- 区别： $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \lambda(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \Rightarrow A_i\beta_i = \lambda_i\beta_i$
- $AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP, B \sim A$
- 构造 A^3x 法：条件 $\Rightarrow A^3x = 3Ax - 2A^2x, P = [x, Ax, A^2x]$
- $AP = A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x]$
- $[Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x] = [x, Ax, A^2x] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB$
- $\Rightarrow AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP$

$A = P^{-1} \wedge P \Leftrightarrow P^{-1}AP = \wedge$

- 可对角化条件 $\begin{cases} ① n - r(\lambda_i E - A) = k_i, K \text{ 重根} \lambda \text{ 对应} K \text{ 个特征向量} \\ ② A \text{ 恰有} n \text{ 个线性无关的特征向量} \\ ③ n \text{ 个不相等的特征值} \end{cases}$
- $P = (P_1, P_2, P_3), A = P^{-1} \wedge P \rightarrow AP = P \wedge \Rightarrow AP_i = P_i \wedge \wedge A\eta_i = \lambda_i \bullet \eta_i \Rightarrow A\eta_i = \eta_i \bullet \lambda_i \Rightarrow P_i \rightarrow \eta_i, \text{ 则} \wedge_i \rightarrow \lambda_i$
- P, \wedge 的求法 $\begin{cases} |\lambda E - A| \Rightarrow \lambda_i \text{ 特征值} \Rightarrow \text{与} \lambda_i \text{ 对应的} \eta_i \\ \text{将} \eta_i \text{ 组成基础解系, 令} P = [\eta_1, \eta_2, \dots], \wedge = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{cases}$

$$A = P^{-1} B P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ① A \sim B \Leftrightarrow A = P^{-1}BP, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{A_i} = \lambda_{B_i} \\ \text{可对角化} \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow A \sim \Lambda \sim B$$

$$\textcircled{2} A \sim B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1} \\ |A| = |B|, r(A) = r(B) \end{array} \right\} \text{任一必要条件不成立} \Rightarrow \text{不可相似}$$

③知A, B求P步骤

1. 求出A特征向量组 α 和特征值组 λ_α , B特征向量组 β 特征值组 λ_β , 判断 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ 则A, B可相似
2. 令 $\alpha^{-1} A \alpha = \beta^{-1} B \beta = \wedge \Rightarrow A = (\alpha \beta^{-1}) B (\beta \alpha^{-1}) = \alpha (\beta^{-1} B \beta) \alpha^{-1} = \alpha \wedge \alpha^{-1}$
 (注: 若取 $P = \alpha^{-1}$ 求得使A对角化 $A = P^{-1} \wedge P$ 的P若 $P = \beta \alpha^{-1}$ 求得的是使 $B = P \alpha \beta^{-1}$,
 若 $P = \beta \alpha^{-1}$ 求得的是使 $B = P^{-1} A P$)
3. 分清所求表达式 → 按要求取得P → 求出P

④知 $P, f(A) = 0$, 求 B 构造法: AP(抽象) = PB(具体) \Rightarrow 系数阵 B (P446)

$$A = C^T BC \text{ (合同变换)}$$

$$P, \wedge \text{能对应} \left\{ \begin{array}{l} \text{正交变换} \left\{ \begin{array}{l} A \text{求 } \varepsilon \xrightarrow[\text{正交矩阵 } \eta^T = \eta^{-1}]{\text{单位化, 正交化}} \eta, \text{ 取 } P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ 则 } P^T = P^{-1} \\ \text{对角化原理 } \Rightarrow A = P^{-1} \wedge P \end{array} \right\} \Rightarrow \wedge = P \wedge P^T \\ \text{--配方--} \left\{ \begin{array}{l} f = x^T \wedge x, \text{ 取 } x = Py \text{ 则 } f = y^T P^{-1} A P y \\ f = y^T \wedge y \end{array} \right\} \Rightarrow \wedge = P^{-1} A P \end{array} \right.$$

--配方法-- {

- ①将各项积和式配方成平方和式，令平方项 $=y_i$
- ②混合项可令： $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_n = y_n$
- ③重组方程 \Leftrightarrow 循环直到只有平方项
- ④令 $X = PY$ 即 $(x_1, x_2, x_3)^T = P \cdot (y_1, y_2, y_3)^T \Rightarrow P$

正交变换法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{①求出 } A \text{ 的特征值和对应特征向量组 } \varepsilon \\ \text{② } \varepsilon \text{ 单位化, 正交化 } \rightarrow \eta, \text{ 令 } P = \eta \Rightarrow P \\ (\text{ABC实对称矩阵特征向量必可正交化, 正交化可省略} \rightarrow \text{推导实对称矩阵}) \end{array} \right.$

求正交矩阵 $\begin{cases} A \text{的正交矩阵 } C: A = C^{-1} \wedge C = C^T \wedge C(C \text{为所求}) \text{ (C单位正交化后 } C^T = C^{-1}) \\ \text{二次型正交矩阵 } C: f = x^T Ax, x = Cy \rightarrow f = y^T C^T A C y = y^T \wedge y \end{cases}$

[①以上 \Rightarrow 经过正交变换,前后二次型矩阵A~Λ相似且合同
②配方法变换前后二次型矩阵不能确认是否相似]

正交

α 与 β 正交定义: $(\alpha, \beta) = \sum \alpha_I \beta_I = 0$

内积性质: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$, $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

正交矩阵: $AA^T = A^T A = E$

正交化条件: 向量组 α 线性无关 (方程法 \Rightarrow 线性无关向量组)

简化技巧: 使第一个求出的向量与已知向量正交即: $\eta^T \alpha_1 = 0$, 可少用一次公式

可不用正交化情况: 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交

正交化步骤	①正交定义令: $x^T \alpha_1 = 0$
	②方程($x^T \alpha_1 = 0$)基础解系均与 α_1 正交, 令 $\alpha_2 = \eta_1, \alpha_3 = \eta_2$
	$\alpha_2 \cdot \alpha_1 = 0$ 正交, $\alpha_3 \cdot \alpha_1 = 0$ 正交
	③两两正交公式 $\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 \\ &\dots \text{类推} \end{aligned}$

单位化: $\beta_1 / |\beta_1|$

方程同解

类型	两个齐次方程: $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) = r(B)$
	两个非齐次方程: $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解 $\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} A & \beta \\ B & \gamma \end{bmatrix} = r(A) = r(B)$
方法	①将(I)与(II)联立起来 \rightarrow 新方程, 它的解就是通解
	②用(I)与(II)各自同解求
	③已知(I)通解, 将该通解代入(II)中找出(I)通解中的任意常数所
	满足(II)的关系式而求出公共解
	④(I)A解全是(II)B的解: $n-r(A) \leq n-r(B) \Rightarrow r(A) \geq r(B)$
	合并方程是交集: $(I) \cap (II) = (I) \Leftrightarrow (I) \text{ 与 } (II) \text{ 同解} \Rightarrow r(A) = r(C)$

二次型 $f(x_1, x_2, \dots) = x^T A x$ 或 $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ (A 叫二次型矩阵)

性质	1. A 与 B 合同 ($A \sim B$): $B = C^T A C$ (A, B 为实对称矩阵, C 为可逆矩阵)
	2. $A \sim B \Rightarrow A \simeq B \Rightarrow r(A) = r(B)$ [注意: $A \simeq B \not\Rightarrow A \sim B$ 勿乱使用相似的性质]
	3. 两个矩阵合同 \Leftrightarrow 正负惯性指数相同 \Leftrightarrow 秩与正惯性指数分别相等
	4. $r(A) =$ 正惯性指数 (规范型中正项个数 P =正特征值个数) + 负惯性指数
	5. 符号差: $2P - r(A)$
	6. 标准型: $f(x_1, x_2, \dots) = x^T A x \xrightarrow{\text{合同变换 } x = Cy, \text{ 变换矩阵 } B = C^T A C} f = \sum_1^n d_i y_i$ (标准型表达式不唯一, 非零系数的个数 $= r(A)$ 唯一, A 特征值是平方项的系数)
	7. 规范型: 标准型中系数 $d_i = -1$ 或 1 或 0
	1. 正定二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x > 0$, 合同变换不改变正定性
正定	2. 正定二次型 \Leftrightarrow 正惯性指数 $= n \Leftrightarrow A$ 的特征值全 $> 0 \Leftrightarrow A$ 的所有顺序余子式 > 0 (P463) $\Leftrightarrow \exists$ 可逆 P 使用 $A = P^T P \Leftrightarrow$ 正交阵 Q , 使 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda$, Λ 中各项 $\lambda > 0$
	① $x^T A x \Leftrightarrow$ 展开式 $f(x_1, x_2, \dots) \Rightarrow A$ (特殊: 展开 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j = (x_1, x_2, \dots) A (x_1, x_2, \dots)^T$)
-求A	② 展开式 (不全的补0项) 平方项的系数放对角线, 其它各项拆分成相同的两项, 对应系数以对角为对称轴两边对称按顺序摆放。

逆阵证明

- ① A 为具体形式: $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆
- ② A 为抽象形式: 变形 $\Rightarrow AB = E$, 取行列式 $\Rightarrow |A||B| = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆
- ③ 反证法: 若 A 不可逆则 $|A| = 0$ (用此式推导矛盾关系 P367)
- ④ 利用行向量或列向量线性无关性

关于秩

	$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ $r(AB) + n \geq r(A) + r(B) \geq r(A \pm B)$ $A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) \geq 1, A = 0 \Leftrightarrow r(A) = 0$ $r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B) \leq r \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(A'') = r(kA)$ $r(A) = r \sim \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 等价标准型
基本公式	$\min\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ $0 \leq r(A_{mn}) \leq \min(m, n)$ $r(A_{mn}, E_m) = m$ $AB = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$ $r(ABC) + r(B) \geq r(AB) + r(BC)$ G 为列满秩, H 为行满秩 $\Rightarrow r(GA) = r(AH) = r(A)$
	$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n - 1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n - 1 \end{cases}$
	$A_{mn} \begin{cases} r(A) = m \Rightarrow A \text{ 的行向量线性无关} \\ r(A) = n \Rightarrow A \text{ 的列向量线性无关} \end{cases}, 0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$
	$A_{mn}, B_{ns}, \text{ 若 } r(AB) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(B) \leq n \\ B \text{ 的列向量全部是 } Ax = 0 \text{ 的解} \end{cases}$
非方阵	$r(A_{mn}) = n \Rightarrow \begin{cases} Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ (\text{具有可逆性质}) \begin{cases} r(AB) = r(B) \text{ 可逆不影响秩} \\ AB = 0 \Rightarrow B = 0 \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{cases} \end{cases}$ $\left. \begin{array}{l} AB_{ns} = A(B_{n1} B_{n2} \cdots B_{ns}) = 0 \Rightarrow AB_{n1} = 0 \\ A_{mn}B = (A_{1n} A_{2n} \cdots A_{mn})B = 0 \Rightarrow A_{1n}B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{1n} B_{n1} = 0 \text{ 都满足 } A \text{ 行数} = B \text{ 列数}$
线性关系	$\left. \begin{array}{l} A \text{ 与 } B \text{ 等价向量组} \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\beta_1, \beta_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\ Ax = B \text{ 有解} \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \Rightarrow r(\beta_1, \beta_2) \leq r(\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right.$

秩的证明

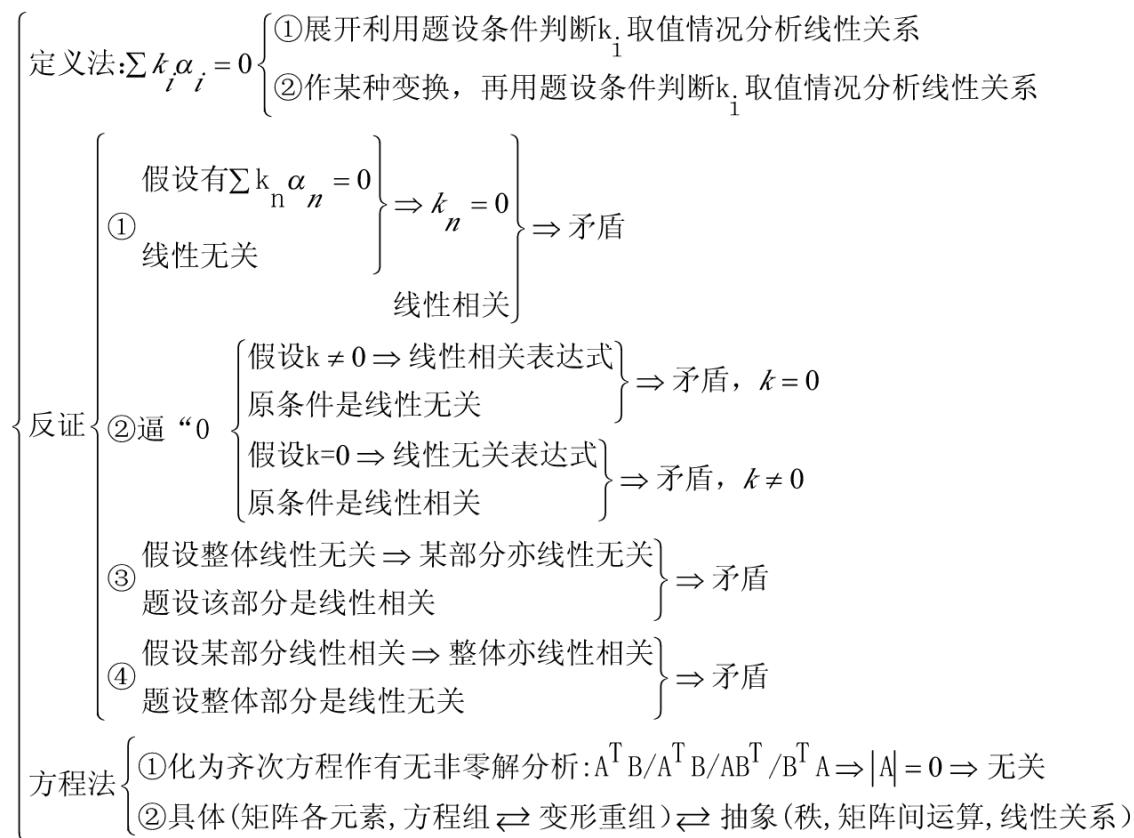
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{不等式证明} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{①矩阵初等变化为矩阵最简型分析 (p369)} \\ \text{②利用分块矩阵的乘法, 结合齐次方程分析} \end{array} \right. \\ \text{等式证明} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{夹逼(两端)} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{①} r(A) + r(B) = n \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n \text{ 且} \\ A + B = kE \Rightarrow r(A) + r(B) \geq r(A + B) = n \end{cases} \\ \text{②} r(A) = r(B) \Leftrightarrow r(A) \leq r(B) \text{ 且 } r(A) \geq r(B) \\ \text{③} r(A) \leq n \\ r(A) \geq r(AB) = r(E) = n \end{array} \right\} \Rightarrow r(A) = n \\ \text{夹逼(中间)} : r(A) \leq n \leq r(B), r(A) = r(B) \Rightarrow r(A) = n = r(B) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

线性关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A由B线性表示: } A = kB \quad \text{从A到B的线性表示: } B = kA \\ \text{A能由} \alpha, \beta \text{线性表示} \\ A \text{是} \alpha, \beta \text{的线性组合} \\ \left. \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性无关} \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \text{线性相关} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \text{能由} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表示且唯一 (非齐次方程)} \\ \text{向量组的个数大于维数, 则线性相关} \\ \left. \begin{array}{l} \text{①可补0行} \rightarrow \text{方阵} |A| = 0 \\ \text{②多余向量: } r(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \end{array} \right. \\ \text{矩阵的秩=列向量秩=行向量秩, 初等变化不改变秩} \\ \text{向量组的极大无关组不唯一, 但极大无关组个数唯一} \\ \text{任一向量组和极大无关组等价, 任意两组极大无关组等价} \\ \text{单个零向量线性相关, 单个非零向量组线性无关} \\ \text{零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交} \\ \text{向量组等价: } \alpha \text{与} \beta \text{可相互表示} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{关系} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{个数变化} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{整体无关} \Rightarrow \text{部分无关} \\ \text{部分相关} \Rightarrow \text{整体相关} \end{array} \right. \\ \text{维数变化} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{原向量组无关} \Rightarrow \text{接长向量组无关} \\ \text{接长向量组相关} \Rightarrow \text{原向量组相关} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{方程} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{秩与线性无关个数} S \text{相等: } r(A) = S \\ \text{秩与基础解系个数} J \text{互补: } r(A) + J = n \\ \text{基础解系个数} = \text{极大无关解的个数} = \text{解空间的维数} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

向量组线性关系证明



条件作用

- 1. $f(A) = 0 \Rightarrow$ 特征方程 $\Rightarrow \lambda$
- 2. $|A| = C \Rightarrow f(\lambda) = 0$ 特征多项式
- 3. $\lambda = K$ 代入方程 $f(\lambda) = 0$
- 4. 矩阵类型 \Rightarrow 相关性质
- 5. 线性相关 $\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$
- 6. $\alpha_n = 1 \Rightarrow$ 画矩阵图 \leftrightarrow 方程

[矩阵 \Leftrightarrow 方程组 \Leftrightarrow 向量组]

①相似矩阵 $A \sim B$: $A = P^{-1}BP$ 或 PBP^{-1} (分清题意求 $P=Q$ 还是 $P=Q^{-1}$)

令 $P=Q^{-1}$ 则 $A=QBQ^{-1}$ 两式中求得的 P 不同, 它们的关系是 $PQ=E$

②构造法: 已知 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, $P=[x, Ax, A^2x]$

$$\left. \begin{array}{l} AP = A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x] \\ [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x] = [x, Ax, A^2x] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB \end{array} \right\} \Rightarrow AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{③区分 } \varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ x(x_1, x_2) \\ x\varepsilon \neq \varepsilon x \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \beta = x \cdot \varepsilon^T = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 & \text{方程表示法} \\ \beta = \varepsilon \cdot x^T = \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2x_2 & \text{方程表示法} \end{array} \begin{array}{l} \beta = x^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} x_1\varepsilon_1 \\ x_2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \text{向量表示法} \\ \beta = \varepsilon^T \cdot x = \begin{bmatrix} \varepsilon_1x_1 \\ \varepsilon_2x_2 \end{bmatrix} \text{向量表示法} \end{array} \right.$$

矩阵 A 变向量说法: 行向量组 A 内部各元素是行向量, 所有行向量组合成一个整体列向量 A

$$\left. \begin{array}{l} \text{④二次型} \\ \text{向量形式: } f(x_1x_2 \cdots x) = x^T Ax \\ \text{函数形式: } f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = x \cdot A \cdot x^T \end{array} \right\}$$

⑤ $AB = C$: (行向量) A 行 \times (列向量) B 列 $= C$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{行向量 } A \text{ 右乘作行变化得到 } C \\ \text{列向量 } B \text{ 左乘作列变化得到 } C \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} \text{矩阵行对应变化} \\ \left. \begin{array}{l} A \cdot A^{-1} = EE \\ AE = EA \end{array} \right\} \Rightarrow [A|E] \rightarrow [E|A^{-1}] \\ \left. \begin{array}{l} A\alpha = \beta E \\ E\alpha = \alpha E \end{array} \right\} \Rightarrow [A|\beta] \rightarrow [E|\alpha] \Rightarrow \alpha \text{ 是解向量} \\ \left. \begin{array}{l} A = P^{-1} \wedge P \rightarrow AP = P \cdot \wedge \\ A\eta = \eta \cdot \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow [\eta|\lambda] \rightarrow [P|\wedge] \end{array} \right\}$$

⑥ 向量 \rightarrow 矩阵 【注意区分系数与矩阵】 $\alpha(\alpha_1, \alpha_2), \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) \cdot (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}$$

因为: $A(\alpha_1, \alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) \neq (\lambda_1, \lambda_2) \cdot (\alpha_1, \alpha_2)$

⑦ 矩阵 A 的两个多项式总是可以交换: $g(A)f(A) = f(A)g(A)$

⑧ $BAX=0, AX=0 \Rightarrow AX=0$ 的解全部是方程 $BAX=0$ 的解 (两方程交集为 $BAX=0$)