פתרון שאלת אינדוקציה

נתון לנו סכום n האיברים הראשונים בסדרה:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

חלק א: הוכחה באינדוקציה

שלב 1: בסיס האינדוקציה (עבור n=1)

נבדוק אם הנוסחה מתקיימת עבור n=1:

צד שמאל: $\frac{1^2}{1\cdot3}=\frac{1}{3}$

צד ימין: $\frac{1(1+1)}{2(2\cdot1+1)}=\frac{1\cdot2}{2\cdot3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

הצדדים שווים! לכן הנוסחה נכונה עבור n=1.

שאלה 1

שלב 2: הנחת האינדוקציה

נניח שהנוסחה נכונה עבור איזשהו k טבעי:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

שלב 3: צעד האינדוקציה

עלינו להוכיח שהנוסחה נכונה גם עבור k+1:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה ונוסיף את האיבר ה-(k+1):

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

נחשב את הסכום הזה:

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)(2k+3)}{2(2k+1)(2k+3)}+\frac{2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[2k^2+3k+2k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[2k^2+5k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}$$

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח! לכן הנוסחה נכונה לכל n טבעי.

חלק ב: מציאת k כאשר האיבר במקום ה-(k+1) שווה ל-36/143

האיבר הכללי במקום ה-n בסדרה הוא: $\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

האיבר במקום ה-(k+1) הוא: $\frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

נשתמש בהנחת האינדוקציה ונוסיף את האיבר ה-(k+1):

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

נחשב את הסכום הזה:

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)(2k+3)}{2(2k+1)(2k+3)} + \frac{2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2+3k+2k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2+5k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}$$

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח! לכן הנוסחה נכונה לכל n טבעי.

חלק ב: מציאת k כאשר האיבר במקום ה-(k+1) שווה ל-36/143

האיבר הכללי במקום ה-n בסדרה הוא: $\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

האיבר במקום ה-(k+1) הוא: $\frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

נתון שהאיבר הזה שווה ל-36/143:

$$\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{36}{143}$$

נכפול את שני האגפים ב-$(2k+1)(2k+3)$:

$$(k+1)^2 = \frac{36}{143} \cdot (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{36}{143} \cdot (4k^2+8k+3)$$

$$= \frac{144k^2+288k+108}{143}$$

כעת נכפול את שני האגפים ב-143:

$$143(k+1)^2 = 144k^2 + 288k + 108$$

$$143(k^2+2k+1) = 144k^2 + 288k + 108$$

$$143k^2 + 286k + 143 = 144k^2 + 288k + 108$$

$$143k^2 - 144k^2 + 286k - 288k + 143 - 108 = 0$$

$$-k^2 - 2k + 35 = 0$$

$$k^2 + 2k - 35 = 0$$

נפתור את המשוואה הריבועית באמצעות נוסחת השורשים:

$$k = \frac{-2\pm\sqrt{4+140}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{-2\pm12}{2}$$

$k = \frac{-2+12}{2} = 5$ או $k = \frac{-2-12}{2} = -7$

מכיוון ש-k חייב להיות מספר טבעי (כי הוא מייצג מיקום בסדרה), התשובה היא $k = 5$.

לסיכום: האיבר במקום ה-6 (שהוא $k + 1$ כאשר $k = 5$) שווה ל-36/143.

פתרון שאלה בחדו"א

שאלה 2

נתון:

- גרף הפונקציה f(x) עובר בנקודה (-1,-8)
- הנגזרת: $f'(x) = 3m^2 - 3/x^2$
- $m > 0$
- נקודת הקיצון של f(x) נמצאת על הישר $y = 19$ (כלומר ערך y שלה הוא 19)
- שיעור ה-x של נקודת הקיצון חיובי

שלב 1: נמצא את נקודות הקיצון

נקודות קיצון מתקבלות כאשר הנגזרת מתאפסת, לכן:

$f'(x) = 0$
$3m^2 - 3/x^2 = 0$
$3m^2 = 3/x^2$
$m^2 = 1/x^2$
$x^2 = 1/m^2$
$x = \pm 1/m$

מכיוון שנתון ששיעור ה-x של נקודת הקיצון חיובי, נקבל: $x = 1/m$

שלב 2: נמצא את הפונקציה f(x)

כדי למצוא את הפונקציה עצמה, נשתמש בנגזרת ונחשב אינטגרל:

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3m^2 - 3/x^2)\,dx = 3m^2x + 3/x + C$

כאשר C הוא קבוע האינטגרציה.

שלב 3: נשתמש בנקודה הנתונה (-1,-8) למציאת C

נציב את הנקודה (-1,-8) בפונקציה:

$f(-1) = -8$
$3m^2(-1) + 3/(-1) + C = -8$
$-3m^2 - 3 + C = -8$
$C = -8 + 3m^2 + 3$
$C = -5 + 3m^2$

לכן, הפונקציה היא: $f(x) = 3m^2x + 3/x + (-5 + 3m^2) = 3m^2x + 3/x - 5 + 3m^2$

נפשט: $f(x) = 3m^2(x + 1) + 3/x - 5$

שלב 4: נשתמש בתנאי נקודת הקיצון

נתון שנקודת הקיצון נמצאת על הישר $y = 19$, כלומר $f(1/m) = 19$

נציב את $x = 1/m$ בפונקציה:

$f(1/m) = 3m^2(1/m + 1) + 3/(1/m) - 5$
$f(1/m) = 3m^2(1/m) + 3m^2(1) + 3m - 5$

$f(1/m) = 3m + 3m^2 + 3m - 5$

$f(1/m) = 6m + 3m^2 - 5 = 19$

נפתור את המשוואה:

$6m + 3m^2 - 5 = 19$

$3m^2 + 6m - 24 = 0$

$m^2 + 2m - 8 = 0$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$m = (-2 \pm \sqrt{(4 + 32)})/2 = (-2 \pm \sqrt{36})/2 = (-2 \pm 6)/2$

$m = (-2 + 6)/2 = 2$ או $m = (-2 - 6)/2 = -4$

מכיוון שנתון $m > 0$, התשובה היא $m = 2$.

שלב 5: נציב את $m = 2$ בפונקציה

$f(x) = 3(2)^2(x + 1) + 3/x - 5$

$f(x) = 3(4)(x + 1) + 3/x - 5$

$f(x) = 12(x + 1) + 3/x - 5$

$f(x) = 12x + 12 + 3/x - 5$

$f(x) = 12x + 3/x + 7$

התשובה הסופית:

הפונקציה היא: $f(x) = 12x + 3/x + 7$

פתרון שאלה בסדרות הנדסיות

נתונים בשאלה:

- סדרה הנדסית a שכל איבריה חיוביים
- יש בסדרה מספר זוגי של איברים (n הוא זוגי)
- לאחר שמחליפים את סימני האיברים האי-זוגיים, מתקבלת סדרה הנדסית חדשה
- סכום הסדרה החדשה קטן פי 3 מסכום הסדרה המקורית

חלק א: מציאת מנת הסדרה המקורית

שאלה 3

נסמן את האיבר הראשון של הסדרה המקורית ב-a_1 ואת המנה ב-q.

הסדרה המקורית: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$

הסדרה החדשה (אחרי החלפת הסימנים במקומות האי-זוגיים):

$-a_1, a_1q, -a_1q^2, a_1q^3, \ldots$

הסדרה החדשה היא גם הנדסית, לכן המנה שלה קבועה. נבדוק:

$(-a_1q)/(-a_1) = q$

$(a_1q^2)/(-a_1q) = -q$

$(-a_1q^3)/(a_1q^2) = -q$

נקבל שהמנה של הסדרה החדשה היא $-q$.

סכום סדרה הנדסית סופית עם n איברים, איבר ראשון a_1 ומנה q הוא:

$S = a_1(1-q^n)/(1-q)$ כאשר $q \neq 1$

לכן סכום הסדרה המקורית:

$S_{\text{המקורית}} = a_1(1-q^n)/(1-q)$

סכום הסדרה החדשה:

$S_{\text{החדשה}} = -a_1(1-(-q)^n)/(1-(-q))$

מכיוון ש-n זוגי, נקבל:

$(-q)^n = q^n$

לכן:

$S_{\text{החדשה}} = -a_1(1-q^n)/(1+q)$

לפי הנתון: $S_{\text{החדשה}} = (1/3) \cdot S_{\text{המקורית}}$

נציב:

$-a_1(1-q^n)/(1+q) = (1/3) \cdot a_1(1-q^n)/(1-q)$

נקצר את $a_1(1-q^n)$ משני האגפים:

$-1/(1+q) = (1/3) \cdot 1/(1-q)$

נכפול ב-$(1+q)(1-q)$:

$-(1-q) = (1/3)(1+q)$

$-(1-q) = (1+q)/3$

$-3(1-q) = 1+q$

$-3+3q = 1+q$

$-3+3q-q = 1$

$-3+2q = 1$

$2q = 4$

$q = 2$

התשובה לחלק א: מנת הסדרה המקורית היא $q = 2$

חלק ב: היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים האי-זוגיים

הסדרה המקורית: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$

סכום האיברים במקומות הזוגיים ($q = 2$):

$S_{\text{זוגי}} = a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 + \ldots + a_1q^{n-1}$

$= a_1q(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{n-2})$

נשים לב שזו סדרה הנדסית עם איבר ראשון 1 ומנה q^2. מספר האיברים הוא $n/2$ (כי n זוגי).

לכן:

$S_{\text{זוגי}} = a_1q \cdot (1-(q^2)^{(n/2)})/(1-q^2)$

$= a_1q \cdot (1-q^n)/(1-q^2)$

$= a_1 \cdot 2 \cdot (1-2^n)/(1-4)$

$= 2a_1 \cdot (1-2^n)/(-3)$

$= 2a_1(2^n-1)/3$

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים:

$S\_{אי-זוגי} = a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-2}$

$= a_1(1 + q^2 + q^4 + ... + q^{n-2})$

זו סדרה הנדסית עם איבר ראשון a_1 ומנה q^2. מספר האיברים הוא $n/2$.

לכן:

$S\_{אי-זוגי} = a_1 \cdot (1-(q^2)^{(n/2)})/(1-q^2)$

$= a_1 \cdot (1-q^n)/(1-q^2)$

$= a_1 \cdot (1-2^n)/(1-4)$

$= a_1 \cdot (1-2^n)/(-3)$

$= a_1(2^n-1)/3$

היחס המבוקש:

$S\_{זוגי} / S\_{אי-זוגי} = (2a_1(2^n-1)/3) / (a_1(2^n-1)/3) = 2$

התשובה לחלק ב: היחס בין סכום האיברים הזוגיים לסכום האיברים האי-זוגיים הוא 2

חלק ג: מציאת סכום הסדרה החדשה

נתון שממשיכים את הסדרה המקורית מעבר לאיבר ה-n.

מגדירים סדרה חדשה b כאשר האיבר ה-n שלה הוא:

$b_n = 1/a_n^2 = 1/(a_1q^{(n-1)})^2 = 1/(a_1^2q^{(2n-2)})$

נמצא את סכום הסדרה b:

$S\_b = \Sigma(1/(a_1^2q^{(2n-2)})) = \Sigma(1/(a_1^2 \cdot 2^{(2n-2)}))$

כיוון ש-$q = 2$, נקבל:

$S\_b = (1/a_1^2) \cdot \Sigma(1/2^{(2n-2)}) = (1/a_1^2) \cdot \Sigma(1/4^{(n-1)})$

זוהי סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון $1/a_1^2$ ומנה $1/4$.

סכום סדרה הנדסית אינסופית כאשר $|q| < 1$ הוא:

$S = a_1/(1-q)$

במקרה שלנו:

$S\_b = (1/a_1^2)/(1-1/4) = (1/a_1^2)/(3/4) = 4/(3a_1^2)$

נתון ש-$S\_b = 4/3$, לכן:

$4/(3a_1^2) = 4/3$

$1/a_1^2 = 1$

$a_1^2 = 1$

$a_1 = 1$ (כי כל איברי הסדרה המקורית חיוביים)

התשובה לחלק ג: $a_1 = 1$ ולכן סכום הסדרה החדשה b הוא 4/3

הסבר מילולי:

חלק א:

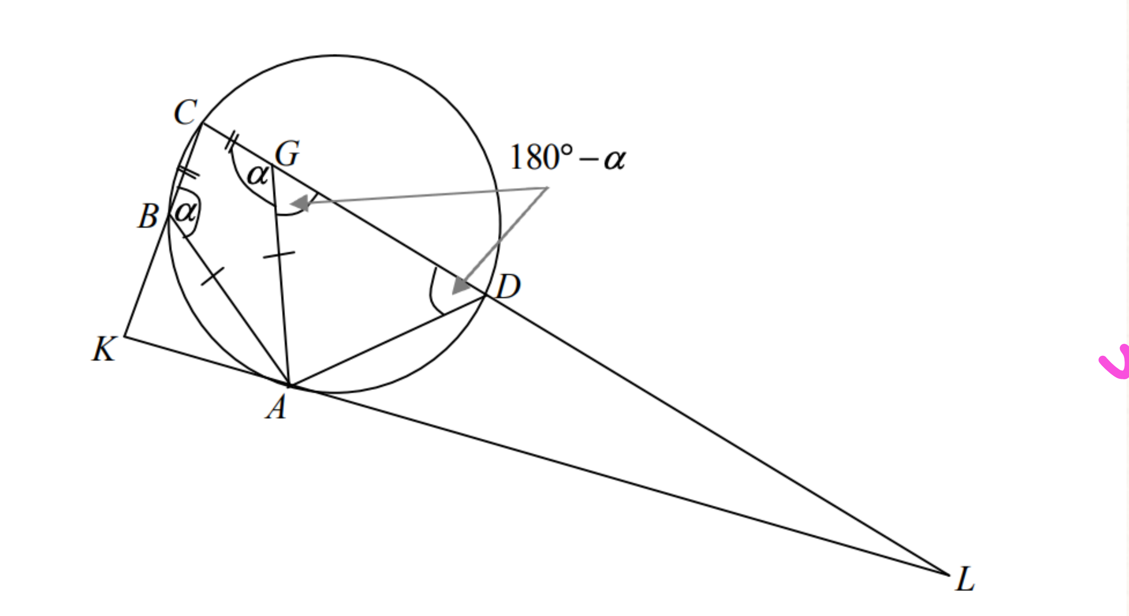
כאשר מחליפים את הסימנים של האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנדסית, יש לכך השפעה על צורת הסדרה. במקרה הנתון, הסדרה החדשה גם היא הנדסית, אבל עם מנה שלילית (-q). השוויתי את היחס בין הסכומים של שתי הסדרות ומצאתי שהמנה המקורית חייבת להיות 2. זה אומר שכל איבר בסדרה המקורית הוא פי 2 מהאיבר שלפניו.

חלק ב:

חישבתי בנפרד את סכום האיברים במקומות הזוגיים ואת סכום האיברים (q=2), לאחר שמצאנו את המנה במקומות האי-זוגיים. התברר שסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא בדיוק פי 2 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. זה הגיוני כי כל איבר זוגי הוא פי 2 מהאיבר האי-זוגי שלפניו.

חלק ג:

על ידי לקיחת ההופכי של הריבוע של כל איבר בסדרה המקורית (שממשיכה b כשאנחנו יוצרים סדרה חדשה לאינסוף), אנחנו מקבלים סדרה הנדסית עם מנה 1/4. הסכום שלה נתון כ-4/3, וזה מוביל למסקנה שהאיבר הראשון בסדרה המקורית חייב להיות 1.



שאלה 4

סעיף א'

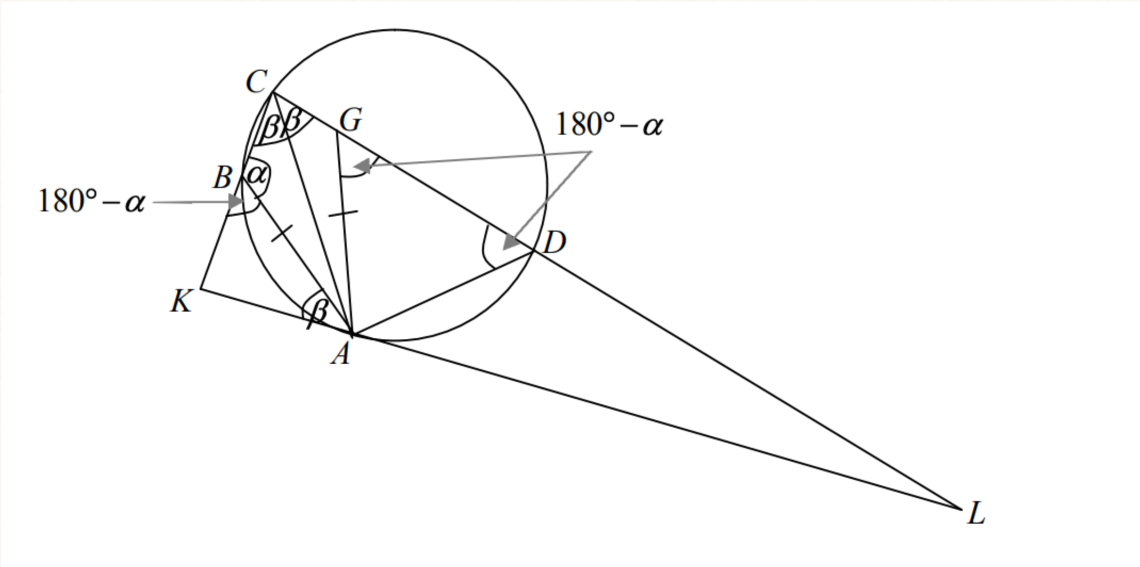
נעבור על הנתונים:

טענה	נימוק
מרובע ABCD חסום במעגל	נתון
∠ABC + ∠ADC = 180°	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180 מעלות
∠ABC = α נסמן	הצבה
∠ADC = 180° - α	הצבה
AB = AG, CB = CG	נתון
מרובע ABCG דלתון	מרובע בו שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו הוא דלתון
∠ABC = ∠AGC = α	זוויות בסיס בדלתון שוות זו לזו + כלל המעבר
∠AGD + ∠AGC = 180°	סכום זוויות צמודות שווה 180 מעלות
∠AGD = 180° - α	הצבה

נוכיח AD = AG:

טענה	נימוק
∠ADC = 180° - α	הוכחנו
∠AGD = 180° - α	הוכחנו
∠ADC = ∠AGD	כלל המעבר
AD = AG	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

מ.ש.ל סעיף א'



סעיף ב' (1)

טענה	נימוק
$\angle ABC = \alpha$	על פי סימון
$\angle KBA + \angle ABC = 180°$	סכום זוויות צמודות שווה 180 מעלות
$\angle KBA = 180° - \alpha$	הצבה
$\angle KBA = \angle GDA = 180° - \alpha$	כלל המעבר
דלתון מרובע ABCG	הוכחנו
$\angle BCA = \angle GCA = \beta$	בדלתון האלכסון הראשי חוצה את שתי זוויות הראש + סימון
AL משיק למעגל	נתון
$\angle KAB = \angle BCA = \beta$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר + כלל המעבר
$\angle KAB = \angle GCA = \angle DCA = \beta$	כלל המעבר

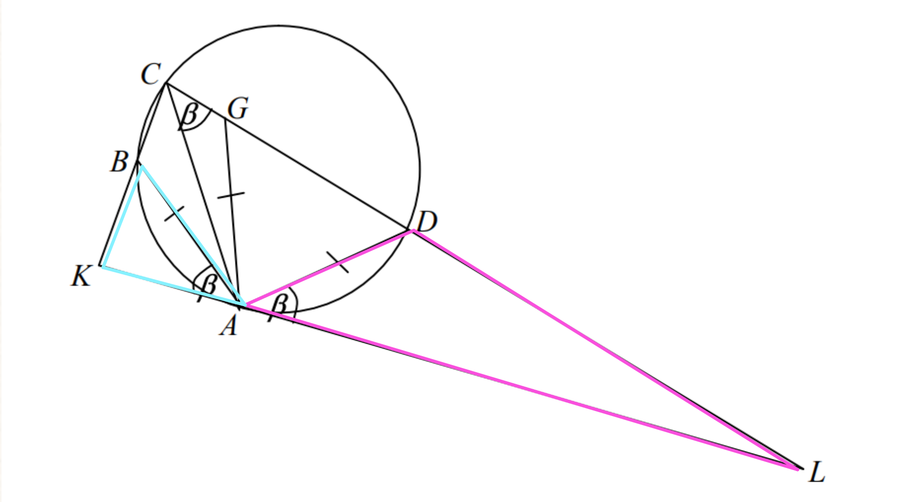
נוכיח דמיון משולשים $\triangle ABK \sim \triangle CDA$:

טענה	נימוק
1. $\angle KBA = \angle GDA = 180° - \alpha$	הוכחנו
2. $\angle KAB = \angle DCA = \beta$	הוכחנו
$\triangle ABK \sim \triangle CDA$	משפט דמיון (ז,ז)

מ.ש.ל סעיף ב' (1)

סעיף ב' (2)

טענה	נימוק
$\triangle ABK \sim \triangle CDA$	הוכחנו
$AD/BK = CD/AB$	במשולשים דומים, יחסי צלעות מתאימות שווים
$AB = AG$	נתון
$AD = AG$	הוכחנו
$AB = AD$	כלל המעבר
$AD/BK = CD/AD$	הצבה
$AD^2 = BK \cdot CD$	מ.ש.ל סעיף ב' (2)



סעיף ג'

טענה	נימוק
AL משיק למעגל	נתון
$\angle LAD = \angle ACD = \beta$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר + כלל המעבר

נחשב את שטח המשולש $\triangle LDA$:

$S\triangle LDA = (LA \cdot AD \cdot \sin\beta)/2$

נחשב את שטח המשולש $\triangle KAB$:

$S\triangle KAB = (AK \cdot AB \cdot \sin\beta)/2$

נחשב את יחס שטחי המשולשים:

$S\triangle LDA/S\triangle KAB = (LA \cdot AD)/(AK \cdot AB)$

מכיוון ש-$AB = AD$, נקבל:

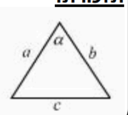
$S\triangle LDA/S\triangle KAB = LA/AK$

מ.ש.ל סעיף ג'

נחשב את שטח המשולש $S_{\triangle LDA}$

תזכורת:

$S = \frac{a\cdot b\sin\alpha}{2}$



$$S_{\triangle LDA} = \frac{LA\cdot AD\cdot\sin\overbrace{\sphericalangle LAD}^{\beta}}{2} = \boxed{\frac{LA\cdot AD\cdot\sin\beta}{2}}$$

נחשב את שטח המשולש $S_{\triangle LDA}$

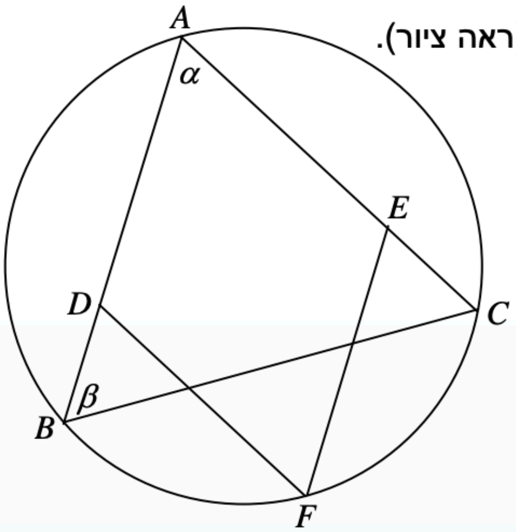
$$S_{\triangle KAB} = \frac{AK\cdot AB\cdot\sin\overbrace{\sphericalangle BAK}^{\beta}}{2} = \boxed{\frac{AK\cdot AB\cdot\sin\beta}{2}}$$

נחשב את יחס שטחי המשולשים $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}}$

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{\frac{LA\cdot AD\cdot\cancel{\sin\beta}}{\cancel{2}}}{\frac{AK\cdot AB\cdot\cancel{\sin\beta}}{\cancel{2}}} = \frac{LA\cdot AD}{AK\cdot\underbrace{AB}_{AD}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{הוכחנו}\\ AB=AD}}{=} \frac{LA\cdot\cancel{AD}}{AK\cdot\cancel{AD}} = \frac{LA}{AK} \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}}$$

מ.ש.ל סעיף ג'

ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה,
והנקודה F נמצאת על הקשת BC כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$.



א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ABF$

(2) הבע באמצעות R, α ו- β את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R, α ו- β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

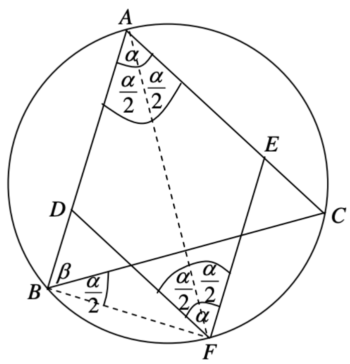
ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2\tan\frac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\frac{3}{5}R$.

ד. חשב את β .

סעיף א (1)

נשים לב: $\triangle ABF$, $\triangle ABC$
חסומים במעגל שרדיוסו R
כי שלושת קדקודיהם
נמצאים על המעגל



שאלה 5

בניית עזר
צלע BF, אלכסון המעוין AF

הנתונים:

- משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R
- נקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה
- נקודה F נמצאת על הקשת BC כך שהמרובע ADFE הוא מעוין
- נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$

סעיף א(1): למצוא את הזווית ABF

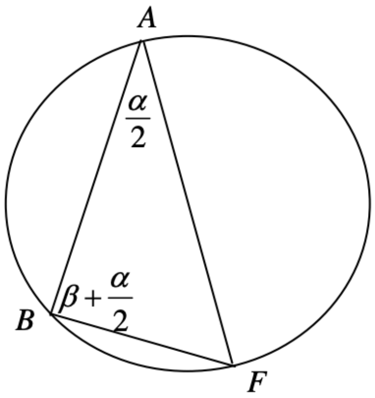
הסבר פשוט:

כדי למצוא את הזווית ABF, נשים לב שזו הזווית המורכבת מהזווית ABC (שהיא β) ומהזווית CBF. הזווית CBF היא זווית היקפית הנשענת על אותה קשת כמו הזווית FAC, שהיא α/2 (כי אלכסונים במעוין חוצים את הזוויות).

פתרון:

1. ADFE הוא מעוין, ולכן כל הצלעות שלו שוות: AD = DF = FE = AE
2. במעוין, הזוויות הנגדיות שוות: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFE = \alpha$
3. אלכסונים במעוין חוצים את הזוויות: $\sphericalangle DFA = \sphericalangle AFE = \alpha/2$
4. זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות: $\sphericalangle FBC = \sphericalangle FAC = \alpha/2$
5. נחשב את $\sphericalangle ABF$ על ידי חיבור זוויות: $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBF = \beta + \alpha/2$

תשובה: $\sphericalangle ABF = \beta + \alpha/2$



סעיף א(2): למצוא את אורך האלכסון AF

הסבר פשוט:

שבו אנחנו יודעים את שתי הזוויות. במשולש חסום במעגל, משפט ,ABF נשתמש במשפט הסינוסים במשולש הסינוסים אומר שיחס הצלע לסינוס הזווית שמולה שווה לקוטר המעגל.

פתרון:

נשתמש במשפט הסינוסים במשולש ABF:

- הזווית ABF = β + α/2 (מסעיף א1)
- במשולש חסום במעגל, sin(זווית) / 1 = צלע שמולה/(2R)

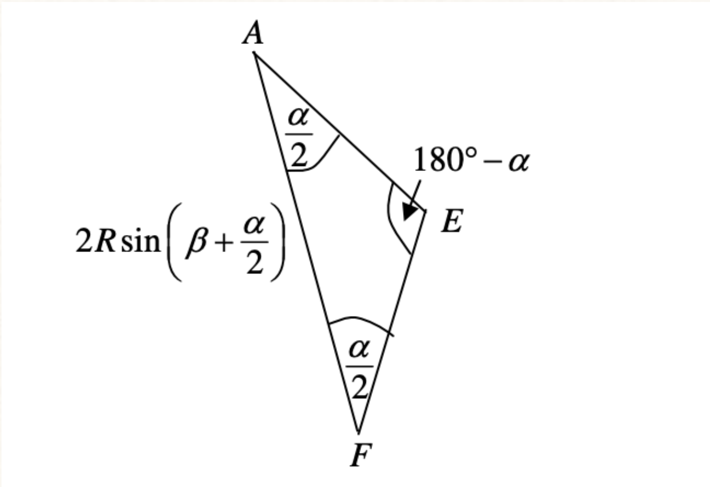
נקבל:

$$\frac{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}{AF} = \frac{1}{2R}$$

מכאן:

$$AF = 2R\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$$

תשובה: AF = 2R·sin(β + α/2)



סעיף ב: למצוא את אורך צלע המעוין

הסבר פשוט:

נחשב את אורך הצלע AE של המעוין. נשתמש במשולש AEF ובמשפט הסינוסים. נצטרך למצוא את הזווית AEF ולהשתמש באורך AF שחישבנו קודם.

פתרון:

1. במשולש AEF, סכום הזוויות הוא 180°
2. הזווית ∢AFE = α/2 (אלכסון המעוין חוצה את הזווית)
3. הזווית ∢EAF = α/2 (מסיבה דומה)
4. לכן הזווית ∢AEF = 180° - α = 180° - (α/2 + α/2)

נשתמש במשפט הסינוסים במשולש AEF:

$$\frac{AE}{\sin(\angle AFE)} = \frac{AF}{\sin(\angle AEF)}$$

מכאן:

$$AE = \frac{AF \cdot \sin(\angle AFE)}{\sin(\angle AEF)} = \frac{2R\sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

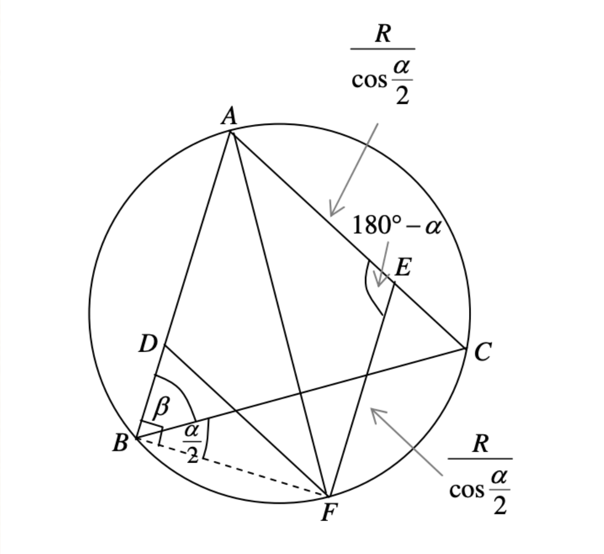
נדע ש-sin(180° - α) = sin(α), ולכן:

$$AE = \frac{2R\sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\alpha)}$$

נשתמש בנוסחה של sin(α) = 2sin(α/2)cos(α/2), ונקבל:

$$AE = \frac{2R\sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})}{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{R\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})}$$

תשובה: אורך צלע המעוין = R·sin(β + α/2)/cos(α/2)



סעיף ג: למצוא את שטח המעוין כאשר AF הוא קוטר במעגל

הסבר פשוט: נשתמש בכך ש- AF הוא קוטר במעגל, ולכן הזווית ABF היא 90° (זווית היקפית הנשענת על קוטר). נוכל לחשב את שטח המעוין כשני משולשים.

פתרון:

נתון ש- AF הוא קוטר במעגל, לכן ∢ABF = 90° (זווית היקפית הנשענת על קוטר).

מצד שני, בסעיף א מצאנו: ∢ABF = β + α/2.

מכאן: β + α/2 = 90° או β = 90° - α/2.

מצאנו קודם שאורך צלע המעוין הוא:

$$\frac{R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}{(\frac{\alpha}{2})\cos} = AE$$

כעת נציב β + α/2 = 90°, ונקבל:

$$\frac{R}{(\frac{\alpha}{2})\cos} = \frac{R\sin(90^\circ)}{(\frac{\alpha}{2})\cos} = AE$$

שטח המעוין שווה לשטח של שני משולשים: AEF ו-ADF.

נחשב את שטח המשולש AEF:

$$\sin(\angle EAF)\cdot AF\cdot AE\cdot\frac{1}{2} = {}_{AEF}S$$

נציב את הערכים:

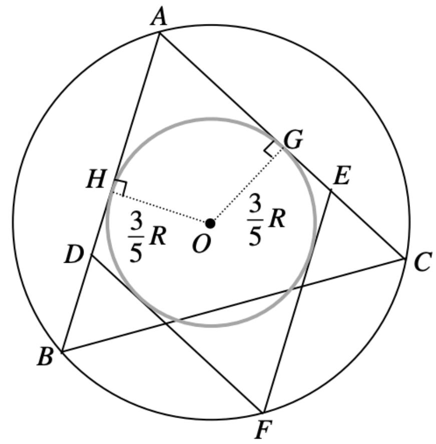
$$(\frac{\alpha}{2})\sin\cdot 2R\cdot\frac{R}{(\frac{\alpha}{2})\cos}\cdot\frac{1}{2} = {}_{AEF}S$$

$$(\frac{\alpha}{2})\tan\cdot {}^{2}R = \frac{(\frac{\alpha}{2})R^2\cdot\sin}{(\frac{\alpha}{2})\cos} = {}_{AEF}S$$

שטח המעוין הוא פי 2 משטח המשולש:

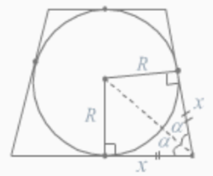
$$(\frac{\alpha}{2})\tan\cdot {}^{2}2R = {}_{AEF}S\cdot 2 = {}_{\text{מעוין}}S$$

תשובה: שטח המעוין = $2R^2\cdot\tan(\alpha/2)$



תזכורת:

מרובע חוסם מעגל



הגדרה:
מרובע חוסם מעגל הוא מרובע שכל צלעותיו משיקות למעגל

סעיף ד: מציאת β כאשר רדיוס המעגל החסום במעוין הוא 3R/5

הסבר פשוט:

נוכיח שמרכז המעגל החסום במעוין הוא גם מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. נסמן את מרכז המעגל החסום במעוין בנקודה O. נשתמש במשולש AOG כדי למצוא את α, ואז נמצא את β.

פתרון:

נסמן את מרכז המעגל החסום במעוין בנקודה O.

נסמן את נקודות ההשקה של המעגל עם צלעות המעוין AE ו-AD בנקודות G ו-H.

רדיוס המעגל החסום במעוין הוא 3R/5, ולכן OG = OH = 3R/5.

נוכיח ש-O הוא גם מרכז המעגל שרדיוסו R החוסם את המשולש ABC:

נוכיח ש-OG ו-OH הם אנכים אמצעיים במשולש ABC:

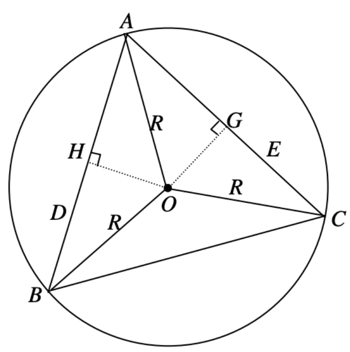
OG ⊥ AC (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).

AG = CG (במשולש שווה שוקיים AOC, הגובה והתיכון מתלכדים).

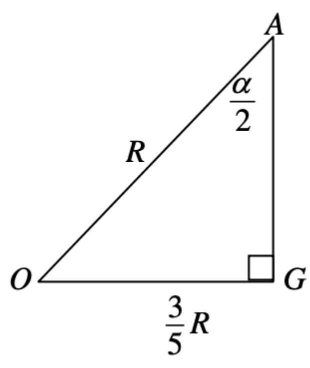
OH ⊥ AD.

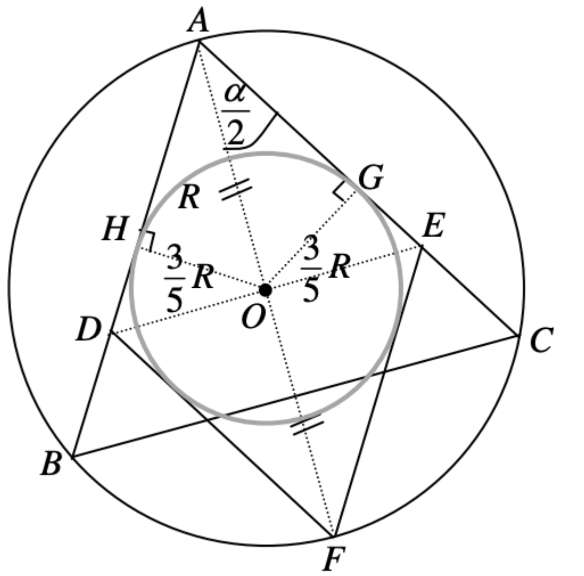
AH = BH (במשולש שווה שוקיים AOB, הגובה והתיכון מתלכדים).

בניית עזר: רדיוסים AO, BO, CO



$\triangle AOG$ משולש עם 4 נתונים (2 זוויות, 2 צלעות) ← נמצא את α בעזרת משפט הסינוסים





נוכיח ש-O היא נקודת מפגש אלכסונים במעוין:

- AF הוא קוטר במעגל, ולכן O נמצאת על AF (O היא אמצע הקוטר).
- AF הוא אלכסון במעוין, ואלכסונים במעוין חוצים זה את זה.
- לכן O היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין.

במשולש AOG:

- AO = R (רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC).
- GO = 3R/5 (רדיוס המעגל החסום במעוין).
- ∢OAG = α/2 (אלכסונים במעוין חוצים את הזוויות).
- ∢AGO = 90° (רדיוס מאונך למשיק).

נשתמש במשפט הסינוסים במשולש AOG:

$$\frac{AO}{GO} = \frac{\sin(\angle AGO)}{\sin(\angle OAG)}$$

נציב את הערכים:

$$\frac{R}{\frac{3R}{5}} = \frac{\sin(90^\circ)}{(\frac{\alpha}{2})\sin}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1}{(\frac{\alpha}{2})\sin}$$

$$\frac{3}{5} = (\frac{\alpha}{2})\sin$$

מכאן:

$$36.87^\circ \approx \left(\frac{3}{5}\right)\arcsin = \frac{\alpha}{2}$$

לכן:

$$73.74^\circ \approx \alpha$$

נמצא את β מהקשר β + α/2 = 90° (מסעיף ג):

$$53.13^\circ = 36.87^\circ - 90^\circ = \frac{\alpha}{2} - 90^\circ = \beta$$

תשובה:

β = 53.13°

פתרון מלא: פונקציה עם פרמטר ואסימפטוטות אופקיות

נתוני השאלה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx}{\sqrt{x^2+9m^2}}$

נתון שהמרחק בין האסימפטוטות האופקיות הוא 8 יחידות.

נדרש למצוא:

1. את ערך הפרמטר m
2. את תחום ההגדרה של הפונקציה
3. שיעורי נקודות קיצון וסוגן
4. שיעורי נקודות חיתוך עם הצירים
5. תחומי עלייה וירידה

שאלה 6

חלק א: מציאת ערך הפרמטר m

מציאת האסימפטוטות האופקיות

אסימפטוטות אופקיות מתקבלות כאשר x שואף לאינסוף חיובי או שלילי.

נבדוק מה קורה כאשר x שואף לאינסוף:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx}{\sqrt{x^2+9m^2}}$

נחלק מונה ומכנה ב-$|x|$:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx/|x|}{\sqrt{x^2/x^2+9m^2/x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{m\cdot\text{sign}(x)}{\sqrt{1+\frac{9m^2}{x^2}}} = \frac{m\cdot\text{sign}(x)}{1} = m\cdot\text{sign}(x)$

כאשר $x\to+\infty$, הגבול הוא m. כאשר $x\to-\infty$, הגבול הוא $-m$

לכן האסימפטוטות האופקיות הן:

- $y = m$ (כאשר $x \to +\infty$)
- $y = -m$ (כאשר $x \to -\infty$)

חישוב ערך הפרמטר

נתון שהמרחק בין האסימפטוטות הוא 8 יחידות.
המרחק בין $y = m$ ל-$y = -m$ הוא $|m-(-m)| = 2|m|$

לכן: $2|m| = 8|m| = 4m = \pm4$

בהנחה שנדרש ערך חיובי של m (מקובל כך אם לא צוין אחרת): $m = 4$

חלק ב: תחום ההגדרה

תחום ההגדרה של הפונקציה כולל את כל הערכים של x שעבורם:

1. המכנה אינו מתאפס
2. לא מתקבל שורש ממספר שלילי

נבדוק את תנאי 2: $x^2 + 9m^2 > 0$

מכיוון ש- $x^2 \geq 0$ לכל x, ו- $9m^2 > 0$ (כי $m = 4 \neq 0$), מתקיים $x^2 + 9m^2 > 0$ לכל x.

לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x ממשי, או בכתיב מתמטי: $(-\infty, \infty)$

חלק ג: נקודות קיצון

עם $m = 4$, הפונקציה היא: $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9\cdot4^2}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+144}}$

חישוב הנגזרת

נגזור את הפונקציה בעזרת כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{4\cdot\sqrt{x^2+144} - 4x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}}{x^2+144}$$
$$= \frac{4\sqrt{x^2+144} - \frac{4x^2}{\sqrt{x^2+144}}}{x^2+144}$$
$$= \frac{4[(x^2+144)-x^2]}{\sqrt{x^2+144}\cdot(x^2+144)}$$
$$= \frac{4\cdot144}{(x^2+144)^{3/2}}$$
$$= \frac{576}{(x^2+144)^{3/2}}$$

בדיקת נקודות קיצון

נקודות קיצון מתקבלות כאשר $f'(x) = 0.$

מכיוון ש- $0576 >$ תמיד, והמכנה $(x^2 + 0144)^{3/2} >$ תמיד (כי $x^2 + 0144 >$), נקבל ש- $0f'(x) >$ לכל $x.$

מסקנה: הפונקציה תמיד עולה ואין לה נקודות קיצון.

חלק ד: נקודות חיתוך עם הצירים

חיתוך עם ציר ה-y

כאשר $x = 0$:
$f(0) = \frac{4 \cdot 0}{\sqrt{0^2+144}} = \frac{0}{12} = 0$

לכן נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0, 0).$

חיתוך עם ציר ה-x

כאשר $f(x) = 0$:
$\frac{4x}{\sqrt{x^2+144}} = 0$

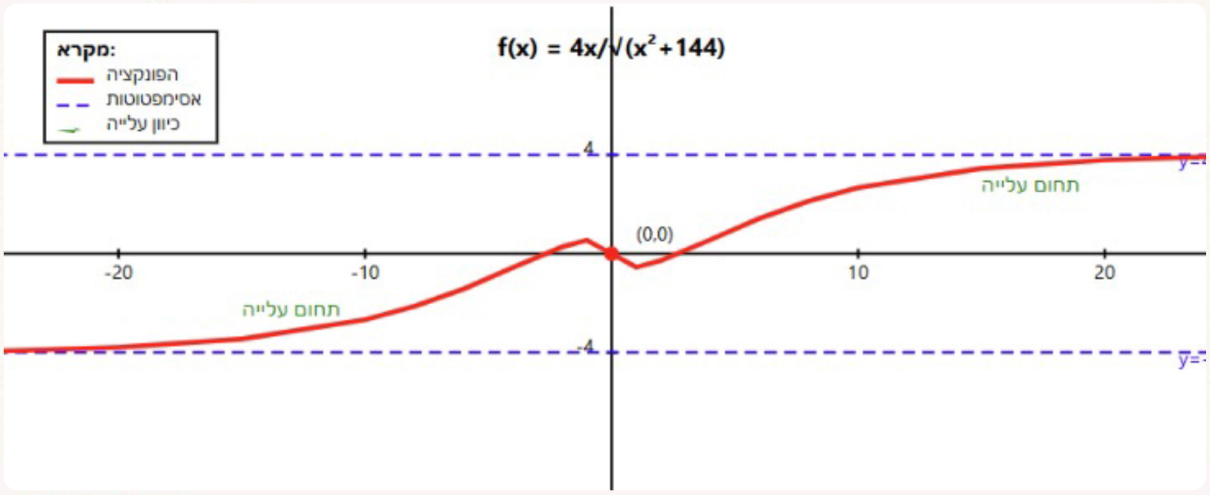
המונה חייב להיות 0, כלומר $04x =$, ולכן $x = 0.$

לכן נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא $(0, 0).$

חלק ה: תחומי עלייה וירידה

מכיוון שמצאנו ש- $0f'(x) >$ לכל x, הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

תחום עלייה: $(-\infty, \infty)$ תחום ירידה: אין



סיכום הפתרון

1. **ערך הפרמטר**: $m = 4$
2. **תחום ההגדרה**: כל x ממשי, או $(-\infty, \infty)$
3. **נקודות קיצון:** אין נקודות קיצון לפונקציה, מכיוון שהנגזרת תמיד חיובית
4. **נקודות חיתוך עם הצירים**: נקודה אחת בלבד - $(0, 0)$, שהיא נקודת חיתוך גם עם ציר ה-x וגם עם ציר ה-y
5. **תחומי עלייה וירידה**:
   - תחום עלייה: $(-\infty, \infty)$ (הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה)
   - תחום ירידה: אין
6. **התנהגות הפונקציה**:
   - כאשר $x \to -\infty$ הפונקציה מתקרבת לאסימפטוטה $-4y =$
   - כאשר $x \to \infty$ הפונקציה מתקרבת לאסימפטוטה $4y =$
   - המרחק בין האסימפטוטות הוא 8 יחידות, כנדרש

משמעות מילולית: הפונקציה מתארת התנהגות של פונקציה מונוטונית עולה שמתחילה קרוב לערך -4 (כאשר x שלילי מאוד), עוברת דרך ראשית הצירים $(0, 0)$, וממשיכה לעלות עד שהיא מתקרבת לערך 4 (כאשר x חיובי מאוד). הפונקציה אף פעם לא יוצאת מהתחום שבין שתי האסימפטוטות האופקיות.

1. הישרים $x = 16$ ו- $x = p$ חותכים את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{mx}{\sqrt{x^2+9m^2}}$
2. השטח המוגבל בין שני הישרים ברביע הראשון הוא p
3. גרף הפונקציה בציר ה-x מוגבל לאורך 20 ס"מ
4. נתון כי $0 < p < 16$
5. צריך למצוא את הערך של p

חלק א: הפונקציה והשטח

מהחלק הקודם אנחנו יודעים ש- $m = 4$, לכן הפונקציה היא:
$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+144}}$

השטח המבוקש הוא:
$A = \int_p^{16} f(x)\,dx = \int_p^{16} \frac{4x}{\sqrt{x^2+144}}\,dx$

חלק ב: חישוב האינטגרל

נחשב את האינטגרל בעזרת החלפת משתנים:
$u = x^2 + 144du = 2x\,dxx\,dx = \frac{du}{2}$

כעת האינטגרל הופך להיות:
$A = \int_p^{16} \frac{4x}{\sqrt{x^2+144}}\,dx = \int_{p^2+144}^{16^2+144} \frac{4}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2} = 2\int_{p^2+144}^{400} u^{-1/2}\,du$

פתרון האינטגרל:
$A = 2 \cdot [2u^{1/2}]_{p^2+144}^{400} = 4[\sqrt{400} - \sqrt{p^2+144}] = 4[20 - \sqrt{p^2+144}]$

חלק ג: הצבת תנאי השאלה

לפי השאלה, השטח A שווה ל-p:
$p = 4[20 - \sqrt{p^2+144}]p = 80 - 4\sqrt{p^2+144}$

נעביר איברים:
$4\sqrt{p^2+144} = 80 - p\sqrt{p^2+144} = 20 - \frac{p}{4}$

נעלה בריבוע את שני הצדדים:
$p^2 + 144 = \left(20 - \frac{p}{4}\right)^2 = 400 - 10p + \frac{p^2}{16}$

נפשט:
$p^2 + 144 = 400 - 10p + \frac{p^2}{16}p^2 - \frac{p^2}{16} = 400 - 144 - 10p\frac{15p^2}{16} = 256 - 10p15p^2 = 16(256 - 10p) = 4096 - 160p15p^2 + 160p - 4096 = 0$

חלק ד: פתרון המשוואה הריבועית

נשתמש בנוסחה לפתרון משוואה ריבועית:
$p = \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-4096)}}{2 \cdot 15}p = \frac{-160 \pm \sqrt{25600+245760}}{30}p = \frac{-160 \pm \sqrt{271360}}{30}$

חישוב מדויק:
$\sqrt{271360} \approx 520.92$

$p_1 = \frac{-160+520.92}{30} \approx 12.03p_2 = \frac{-160-520.92}{30} \approx -22.7$

מכיוון שנתון $0 < p < 16$, הפתרון היחיד שמתאים הוא:
$p \approx 12.03$

אימות התוצאה

נציב את $p \approx 12.03$ בביטוי המקורי:
$p = 4[20 - \sqrt{p^2+144}]12.03 \approx 4[20 - \sqrt{12.03^2+144}]12.03 \approx 4[20 - \sqrt{288.72}]12.03 \approx 4[20 - 16.99]12.03 \approx 4 \cdot 3.0112.03 \approx 12.04$

התוצאה מתאימה (עם שגיאת עיגול זניחה).

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-y (כאשר $x = 0$):

$f(0) = \frac{a\sin^2(0)}{1-\sin(0)} = \frac{a\cdot 0^2}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$

הנקודה $(0,0)$ היא נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

חיתוך עם ציר ה-x (כאשר $f(x) = 0$):

$f(x) = 0 \implies \frac{a\sin^2 x}{1-\sin x} = 0$

זה מתקיים כאשר $a\sin^2 x = 0$, כלומר כאשר $\sin x = 0$ (בהנחה ש- $a \neq 0$).

בתחום הנתון $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, ערכי x שעבורם $\sin x = 0$ הם:
$x = 0$ ו-$x = \pi$

לכן נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: $(0,0)$ ו-$(\pi,0)$.

2. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן:

שאלה ד

נמצא את הנגזרת של $f(x)$ ונשווה אותה ל-0:

נשתמש בכלל המנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

כאשר $u = a\sin^2 x$ ו-$v = 1-\sin x$

$u' = a\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 2a\sin x\cos x$ $v' = -\cos x$

לכן:

$f'(x) = \frac{2a\sin x\cos x\cdot(1-\sin x)-a\sin^2 x\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2a\sin x\cos x-2a\sin^2 x\cos x+a\sin^2 x\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{a\sin x\cos x(2-2\sin x+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{a\sin x\cos x(2-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

נקודות קיצון יתקבלו כאשר $f'(x) = 0$, כלומר כאשר:

- $\sin x = 0$, או
- $\cos x = 0$, או
- $2-\sin x = 0 \implies \sin x = 2$

מכיוון ש-$\sin x$ לעולם לא שווה ל-2, אפשרות זו לא רלוונטית.

בתחום הנתון $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$:

- $\sin x = 0$ כאשר $x = 0$ או $x = \pi$
- $\cos x = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2}$ או $x = \frac{3\pi}{2}$

עלינו לבדוק כל נקודה:

1. $x = 0$: כבר מצאנו שזו נקודת חיתוך $(0,0)$
2. $x = \pi$: כבר מצאנו שזו נקודת חיתוך $(\pi,0)$
3. $x = \frac{\pi}{2}$: כאן $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, וזה יגרום למכנה של $f(x)$ להיות 0, לכן זו אסימפטוטה אנכית ולא נקודת קיצון.
4. $x = \frac{3\pi}{2}$: כאן $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$, לכן:

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{a\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{1-\sin(\frac{3\pi}{2})} = \frac{a\cdot(-1)^2}{1-(-1)} = \frac{a}{2}$

לבדיקת סוג הקיצון, נבדוק את שינוי סימן הנגזרת.

עבור $x = 0$:

- $f'(x)$ מתבטלת כי $\sin x = 0$
- עבור $x < 0$ (מחוץ לתחום): $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, לכן $f'(x) < 0$
- עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, לכן $f'(x) > 0$

לכן $x = 0$ היא נקודת מינימום.

עבור $x = \pi$:

- $f'(x)$ מתבטלת כי $\sin x = 0$
- עבור $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, לכן $f'(x) < 0$
- עבור $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$: $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, לכן $f'(x) > 0$

לכן $x = \pi$ היא נקודת מינימום.

לכן נקודות הקיצון הן:

- מינימום ב-$(0, 0)$
- מינימום ב-$(\pi, 0)$
- קיצון ב-$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{a}{2}\right)$ שנבדוק את סוגו על ידי חישוב הנגזרת השנייה או בדיקת שינוי סימן הנגזרת.

עבור $x = \frac{3\pi}{2}$:

- בנקודה זו $\cos x = 0$ ולכן $f'(\frac{3\pi}{2}) = 0$
- עבור x קצת לפני $\frac{3\pi}{2}$: $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, לכן $f'(x) > 0$
- עבור x קצת אחרי $\frac{3\pi}{2}$ (מחוץ לתחום): $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, לכן $f'(x) < 0$

לכן $x = \frac{3\pi}{2}$ היא נקודת מקסימום.

3. האסימפטוטות האנכיות:

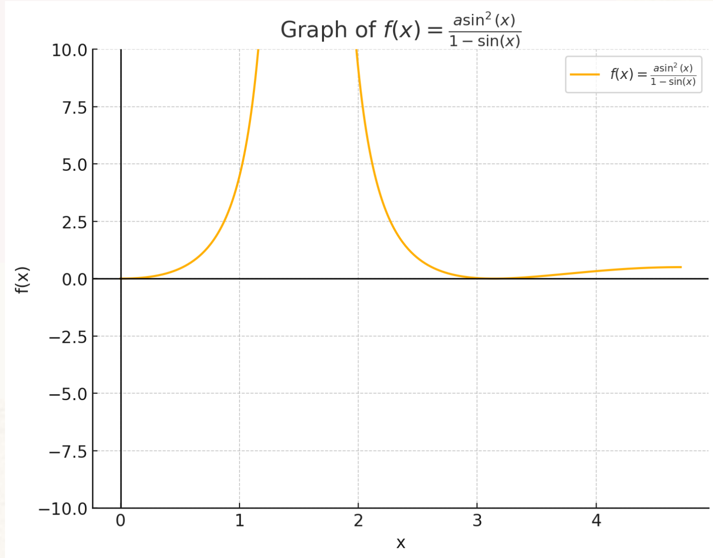
אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה של $f(x)$ שווה ל-0, כלומר כאשר:
$1 - \sin x = 0 \implies \sin x = 1$

בתחום הנתון, זה קורה כאשר $x = \frac{\pi}{2}$.

לכן האסימפטוטה האנכית היא $x = \frac{\pi}{2}$.

סיכום:

1. נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$ ו-$(\pi,0)$
2. נקודות קיצון:
   - מינימום ב-$(0,0)$
   - מינימום ב-$(\pi,0)$
   - מקסימום ב-$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{a}{2}\right)$
3. אסימפטוטה אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$



חלק 1: מציאת ערך a כך שנקודת המקסימום של $g(x)$ היא מרכז של מעגל המשיק לשני הצירים

ראשית, נפשט את הביטוי של $g(x)$:

$$g(x) = \frac{a\sin^2(x+\pi)}{1-\sin(x+\pi)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית: $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

לכן:

$$g(x) = \frac{a\sin^2(x+\pi)}{1-\sin(x+\pi)} = \frac{a(-\sin x)^2}{1-(-\sin x)} = \frac{a\sin^2 x}{1+\sin x}$$

כעת נמצא את נקודת המקסימום של $g(x)$ על ידי גזירה והשוואה לאפס:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a\sin^2 x}{1+\sin x}\right)$$

נשתמש בכלל המנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

כאשר $u = a\sin^2 x$ ו-$v = 1+\sin x$:

$u' = 2a\sin x\cos x$ $v' = \cos x$

אז:

$$g'(x) = \frac{2a\sin x\cos x\cdot(1+\sin x) - a\sin^2 x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{a\cos x(2\sin x + 2\sin^2 x - \sin^2 x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{a\cos x(2\sin x+\sin^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

נקודות קיצון יתקבלו כאשר $g'(x) = 0$, כלומר כאשר:

- $\cos x = 0$, או
- $2\sin x + \sin^2 x = 0 \implies \sin x(2+\sin x) = 0$

פתרונות האפשריים עבור $\sin x(2+\sin x)=0$ הם:

- $\sin x = 0$
- $\sin x = -2$ (לא אפשרי מכיוון ש-$-1 \le \sin x \le 1$)

בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$:

- $\sin x = 0$ כאשר $x = 0$
- $\cos x = 0$ כאשר $x = \pm\frac{\pi}{2}$

בנקודה $x = 0$:
$g(0) = \frac{a\sin^2(0)}{1+\sin(0)} = \frac{0}{1} = 0$

בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$:
$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{a\sin^2(\frac{\pi}{2})}{1+\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{a\cdot 1^2}{1+1} = \frac{a}{2}$

בנקודה $x = -\frac{\pi}{2}$:
$g(-\frac{\pi}{2}) = \frac{a\sin^2(-\frac{\pi}{2})}{1+\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{a\cdot 1^2}{1+(-1)} = \frac{a}{0}$ (לא מוגדר)

לכן, בתחום הנתון, הנקודות הקריטיות הן $(0,0)$ ו-$(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{2})$.

כדי לקבוע איזו נקודה היא מקסימום, נבדוק את שינוי סימן הנגזרת או נשתמש בנגזרת שנייה.

עבור $x = 0$:
לפני הנקודה ($x<0$): $\sin x<0$, $\cos x>0$, לכן $g'(x)<0$ אחרי הנקודה ($x>0$): $\sin x>0$, $\cos x>0$, לכן $g'(x)>0$ לכן $x=0$ היא נקודת מינימום.

עבור $x = \frac{\pi}{2}$:
לפני הנקודה ($x<\frac{\pi}{2}$): $\sin x<1$, $\cos x>0$, לכן $g'(x)>0$ אחרי הנקודה ($x>\frac{\pi}{2}$): מחוץ לתחום, אבל הנגזרת משנה סימן
לכן $x=\frac{\pi}{2}$ היא נקודת מקסימום.

עכשיו, נתון שנקודת המקסימום של $g(x)$ היא מרכז של מעגל המשיק לשני הצירים.

אם מעגל משיק לשני הצירים (ציר x וציר y), אז המרכז שלו חייב להיות בצורה (r,r) כאשר r הוא הרדיוס של המעגל.

נקודת המקסימום שמצאנו היא $(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{2})$.

כדי שזו תהיה מרכז המעגל המשיק לשני הצירים, צריך:
$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2}$

כלומר:
$a = \pi$

חלק 2: השוואת הביטויים האינטגרליים

עלינו להשוות בין:

1. $\int_{\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$
2. $\int_{-0.25\pi}^{0.5\pi} g(x)dx$

כעת שאנחנו יודעים ש-$a = \pi$, נוכל להשוות ביניהם.

נעשה החלפת משתנים באינטגרל של $g(x)$:
נציב $u = x + \pi$, אז $x = u - \pi$ ו-$dx = du$

גבולות האינטגרציה החדשים:
כאשר $x = -0.25\pi$, $u = -0.25\pi + \pi = 0.75\pi$ כאשר $x = 0.5\pi, u = 0.5\pi + \pi = 1.5\pi$

ונקבל:
$\int_{-0.25\pi}^{0.5\pi} g(x)dx = \int_{0.75\pi}^{1.5\pi} g(u-\pi)du$

מכיוון ש:
$g(x) = \frac{\pi \sin^2 x}{1+\sin x}$ $g(u-\pi) = \frac{\pi \sin^2(u-\pi)}{1+\sin(u-\pi)} = \frac{\pi(-\sin u)^2}{1+(-\sin u)} = \frac{\pi \sin^2 u}{1-\sin u} = f(u)$

לכן:
$\int_{-0.25\pi}^{0.5\pi} g(x)dx = \int_{0.75\pi}^{1.5\pi} f(u)du$

כעת נשווה:

1. $\int_{\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$ - אינטגרל על פני תחום $[\pi, 1.5\pi]$
2. $\int_{0.75\pi}^{1.5\pi} f(u)du$ - אינטגרל על פני תחום $[0.75\pi, 1.5\pi]$

גבול עליון זהה (1.5π), אבל הגבול התחתון שונה.

מכיוון ש-$0.75\pi < \pi$, האינטגרל השני מכסה תחום גדול יותר.

בתחום $[0.75\pi, \pi]$, הפונקציה $f(x)$ יכולה להיות חיובית או שלילית. נבדוק את הסימן של $f(x)$ בתחום זה:

בתחום זה, $0.75\pi < x < \pi$:

- $\sin x > 0$ (חיובי)
- $1 - \sin x > 0$ (חיובי)
- $\sin^2 x > 0$ (חיובי)

לכן $f(x) = \frac{\pi \sin^2 x}{1-\sin x} > 0$ בתחום זה.

מכיוון שהפונקציה חיובית בתחום $[0.75\pi, \pi]$, הוספת האינטגרל על פני תחום זה תגדיל את ערך האינטגרל הכולל.

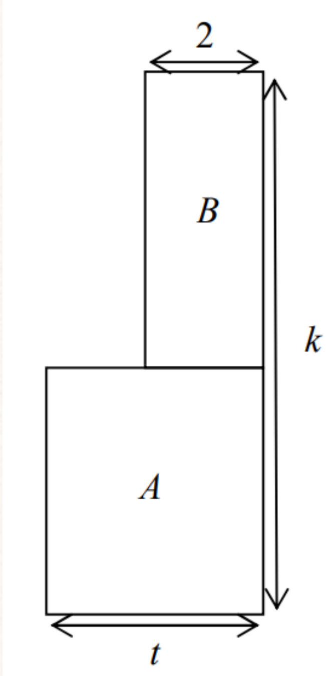
לכן:
$\int_{0.75\pi}^{1.5\pi} f(u)du > \int_{\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$

כלומר:
$\int_{-0.25\pi}^{0.5\pi} g(x)dx > \int_{\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$

הביטוי השני (ii) גדול יותר בערכו.

נתון כי הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t+2$ מ"ר. לכן :

$$\text{האורך של גינה B}\cdot 2 = 2t+2 \;\rightarrow\; \text{האורך של גינה B} = \frac{2t+2}{2} = \boxed{t+1}$$



נתון כי האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. לכן :

$$\text{האורך של גינה A} = k-(t+1) = \boxed{k-t-1}$$

נתון כי הרוחב של גינה A הוא t מטרים. נמצא את השטח הגינה A :

$$\text{השטח של גינה A} = (k-t-1)\cdot t = \boxed{kt-t^2-t}$$

תשובה סופית סעיף א'

<u>סעיף ב'</u>

שלב א': נסמן את היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A כ- $f(t)$.
נמצא את $f(t)$:

$$f(t) = \frac{S_B}{S_A} = \boxed{\frac{2t+2}{kt-t^2-t}}$$

שאלה 8

שלב ב': $f'(t)=0$

$$f(t) = \frac{2t+2}{kt-t^2-t}$$

$$f'(t) = \frac{2(kt-t^2-t)-(k-2t-1)(2t+2)}{(kt-t^2-t)^2} = \frac{2kt-2t^2-2t-(2kt+2k-4t^2-4t-2t-2)}{(kt-t^2-t)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2kt}-2t^2\cancel{-2t}\cancel{-2kt}-2k+4t^2+4t\cancel{+2t}+2}{(kt-t^2-t)^2} = \boxed{\frac{2t^2+4t+(2-2k)}{(kt-t^2-t)^2}=0}$$

$$2t^2+4t+(2-2k) \xrightarrow{:2} t^2+2t+(1-k)=0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(1-k)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{\cancel{4}\cancel{-4}+4k}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{k}}{2} = -1\pm\sqrt{k}$$

$$\cancel{t=-1-\sqrt{k}} \qquad \boxed{t=\sqrt{k}-1}$$

$$(t>2\,,\; k>t)$$

שלב ג' : נציב בטבלה:

t	2	$\downarrow$ ($\sqrt{k}-1.1$)	$\sqrt{k}-1$	$\downarrow$ ($\sqrt{k}$)
$f'(t)$		$(-)$		$(+)$
$f(t)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

נציב בנגזרת:

$$f'(t)=\frac{2t^2+4t+(2-2k)}{\underbrace{(kt-t^2-t)^2}_{(+)}}$$

מונה $f'(\sqrt{k}-1.1)=2\cdot(\sqrt{k}-1.1)^2+4\cdot(\sqrt{k}-1.1)+2-2k=2\cdot(k-2.2\sqrt{k}+1.21)+4\sqrt{k}-4.4+2-2k$

$$=\cancel{2k}-4.4\sqrt{k}+2.42+4\sqrt{k}-4.4+2\cancel{-2k}=0.02-0.4\sqrt{k}=\underbrace{0.02}_{(+)}\underbrace{(1-20\sqrt{k})}_{(-)}<0$$

מונה $f'(\sqrt{k})=2\cdot(\sqrt{k})^2+4\cdot(\sqrt{k})+2-2k=\cancel{2k}+4\sqrt{k}+2\cancel{-2k}=+4\sqrt{k}+2>0$

שלב ד': נשיב על המתבקש

הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי הוא $\boxed{t=\sqrt{k}-1}$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

שלב א': נסמן את היחס ביו שטח הגינה A ובין שטח הגינה B כ- $g(t)$.

נמצא את $g(t)$:

$$g(t)=\frac{S_A}{S_B}=\frac{1}{f(t)}$$

שלב ב': $g'(t)=0$

$$g(t)=\frac{1}{f(t)}$$

$$g'(t)=\boxed{\frac{-f'(t)}{(f(t))^2}=0}$$

$$-f'(t)=0 \rightarrow f'(t)=0 \rightarrow t=-1\pm\sqrt{k}$$

$$\cancel{t=-1-\sqrt{k}} \qquad \boxed{t=\sqrt{k}-1}$$

$$(t>2\ ,\ k>t)$$

שלב ג' : נציב בטבלה:

t	2	$\underset{\downarrow}{\sqrt{k}-1.1}$	$\sqrt{k}-1$	$\underset{\downarrow}{\sqrt{k}}$
$f'(t)$		(+)		(-)
$f(t)$		$\nearrow$	max	$\searrow$

<u>נציב בנגזרת:</u>

$$g'(t)=\frac{-f'(t)}{\underbrace{\left(f(t)\right)^2}_{(+)}}$$

מונה $g'\left(\sqrt{k}-1.1\right)=-\left(\underbrace{f'\left(\sqrt{k}-1.1\right)}_{<0}\right)>0$

מונה $g'\left(\sqrt{k}\right)=-\left(\underbrace{f'\left(\sqrt{k}\right)}_{>0}\right)<0$

שלב ד': נשיב על המתבקש

הערך של t שעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי הוא $\boxed{t=\sqrt{k}-1}$

תשובה סופית סעיף ג'