7) Antag att f är en linjär avbildning för vilken följande gäller:

$$\begin{cases} F(\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}) = 2\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3} \\ F(\vec{e_2}+\vec{e_3}) = -\vec{e_1}+3\vec{e_3} \\ F(e_2-\vec{e_3}) = \vec{e_1}+2\vec{e_2}+\vec{e_3} \end{cases}$$

Bestäm fs avbildningsmatris A i basen $\underline{e}$. Kontrollera ditt svar genom att verifiera att ovanstående relationer är uppfyllda. Beräkna också $f(2\vec{e_1}-\vec{e_2}+2\vec{e_3})$.

En avbildningsmatris är

$$A = [F(\vec{e_1})\ F(\vec{e_2})\ F(\vec{e_3})]$$

Linearitetsegenskaperna ger

$$\begin{cases} 1)\ F(\vec{e_1})+F(\vec{e_2})+F(\vec{e_3}) = 2\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3} \\ 2)\ F(\vec{e_2})+F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1}+3\vec{e_3} \\ 3)\ F(\vec{e_2})-F(\vec{e_3}) = \vec{e_1}+2\vec{e_2}+\vec{e_3} \end{cases}$$

ek 1 + ek 2 ger

$$F(\vec{e_2})+F(e_3)+F(e_2)-F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1}+\vec{e_1}+\vec{e_3}+3\vec{e_3}+2\vec{e_2}$$

$$\boxed{2F(\vec{e_2}) = 4\vec{e_3}+2\vec{e_2}}$$

$$F(\vec{e_2}) = \vec{e_2}+2\vec{e_3}$$

Sätt nu in i ekvation 2:

$$\vec{e_2}+2\vec{e_3}+F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1}+3\vec{e_3} \quad | -\vec{e_2}, -2\vec{e_3}$$

$$\boxed{F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}}$$

Nu sätter vi in $F(\vec{e_2})$ och $F(\vec{e_3})$ i ekvation 1 för att få $F(\vec{e_1})$

→

Så vi har

$$\begin{cases} F(\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} \end{cases}$$

Sätt in i: $F(\vec{e_1}) + \overset{2\cdot 2}{F(\vec{e_2})} + F(\vec{e_3}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - 3\vec{e_3}$

Börja med $f(\vec{e_2})$

$\cancel{f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) + \vec{e_3}}$

$f(\vec{e_1}) + 2f(\vec{e_3}) + \vec{e_2} + 2\vec{e_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - 3\vec{e_3} \quad \Big| \begin{matrix} -\vec{e_2} \\ -2\vec{e_3} \end{matrix}$

$f(\vec{e_1}) + 2f(\vec{e_3}) = 2\vec{e_1} - 5\vec{e_3}$

Sätt nu in $f(\vec{e_3})$

$F(\vec{e_1}) + 2(-\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}) = 2\vec{e_1} - 5\vec{e_3}$

$F(\vec{e_1}) - 2\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} = 2\vec{e_1} - 5\vec{e_3} \quad \Big| \begin{matrix} +2\vec{e_1} \\ +2\vec{e_2} \\ -2\vec{e_3} \end{matrix}$

$$\boxed{F(\vec{e_1}) = 4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 7\vec{e_3}}$$

Då vet vi att

$$\begin{cases} F(\vec{e_1}) = 4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 7\vec{e_3} \\ F(\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ F(\vec{e_3}) = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + e_3 \end{cases}$$

Avbildningsmatrisen A blir då

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Och $F(2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}) = \left(2\begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 8-0-2 \\ 4-1-2 \\ -14-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} = 6\vec{e_1} + \vec{e_2} - 14\vec{e_3}$

Svar:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{O}$ $F(2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}) = 6\vec{e_1} + \vec{e_2} - 14\vec{e_3}$