19) Låt $\underline{e}$ ($\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$) vara en ON bas för planet.

Sätt:

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \frac{1}{2}(\vec{e_1} + \sqrt{3}\,\vec{e_2}) \\ \vec{f_2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\,\vec{e_1} + \vec{e_2}) \end{cases}$$

a) Visa att $\underline{f}$ är en ON bas för planet och ange basbytesmatrisen P för detta basbyte.

Teorin säger att:

$P = [\vec{f_1}\ \vec{f_2}]$ om P är en ON-matris skall $|\vec{f_1}| = |\vec{f_2}| = 1$

om $\vec{f_1}$ och $\vec{f_2}$ ska vara ortogonala! Om det stämmer är $\boxed{P^{-1} = P^t}$

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \\ \vec{f_2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

Så $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{matrix}}_{\vec{f_1}} & \underbrace{\begin{matrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{matrix}}_{\vec{f_2}}\end{bmatrix}$

$|\vec{f_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|\vec{f_2}| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

Så $\vec{f_1}$ o $\vec{f_2}$ har längdenhet 1

Så P är en ON matris om $\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = 0$

kommer från $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

Så:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Så $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$, samt $|\vec{f_1}| = |\vec{f_2}| = 1$

Så $\underline{f}$ är en ON bas och P är en ON matris (konsekvent).

---

b) Avgör om P är en ortogonal matris,

Ja det är den; se ovan.

c) Låt $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2$.

uttryck y_1 och y_2 i x_1 och x_2.

Teorin säger

$\vec{u} = \boxed{\underline{e}x_{\underline{e}} = \underline{f}x_{\underline{f}}}$

Vi vet att basbytessambandet är $\underline{e}P = \underline{f}$ så:

$\underline{e}x_{\underline{e}} = \underline{e}Px_{\underline{f}} \quad | \text{ta} \cdot \underline{e}^{-1}$

Detta är $\underline{e}$s koordinater uttryckt i bas $\underline{f}$

$\underbrace{\underline{e}^{-1}\underline{e}}_{I} x_{\underline{e}} = \underbrace{\underline{e}^{-1}\underline{e}}_{I} P x_{\underline{f}} \Rightarrow \boxed{x_{\underline{e}} = Px_{\underline{f}}}$

Detta blir därför sambandet mellan koordinater.

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

Så vi vill uttrycka

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \dots$ men just nu har vi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

För att vända gör vi följande:

$x_{\underline{e}} = Px_{\underline{f}} \quad | P^{-1} \Rightarrow x_{\underline{f}} = P^{-1}x_{\underline{e}}$ OBS!

ON matris ger $P^t = P^{-1}$ Så $P^{-1} = P^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

Så: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ som blir

Svar:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}$$

d) Den linjära avbildningen F uppfyller

$$F(\vec{e_1}+\sqrt{3}\vec{e_2}) = \sqrt{3}\vec{e_1}+3\vec{e_2}$$
$$F(-\sqrt{3}\vec{e_1}+\vec{e_2}) = 3\vec{e_1}-\sqrt{3}\vec{e_2}$$

Ange först Fs matris A_f i basen f. Beräkna sedan avbildningsmatrisen A_e

Teorin säger

$$\boxed{A_e = PA_fP^{-1}}$$

Det är givet att:

$$\vec{f_1} = \frac{1}{2}(\vec{e_1}+\sqrt{3}\vec{e_2})$$
$$\vec{f_2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\vec{e_1}+\vec{e_2})$$

Vi ser alltså att, först

$$\underbrace{F(\vec{e_1}+\sqrt{3}\vec{e_2})}_{2\vec{f_1}} = \underbrace{\sqrt{3}\vec{e_1}+3\vec{e_2}}_{2\sqrt{3}\vec{f_1}}$$

Alltså

$$F(2\vec{f_1}) = 2\sqrt{3}\vec{f_1}$$

OBS: linearitetsegenskaperna ger

$$2F(\vec{f_1}) = 2\sqrt{3}\vec{f_1} \quad |:2$$

$$\boxed{F(\vec{f_1}) = \sqrt{3}\vec{f_1}}$$

Sedan tar vi

$$\underbrace{F(-\sqrt{3}\vec{e_1}+\vec{e_2})}_{2\vec{f_2}} = \underbrace{3\vec{e_1}-\sqrt{3}\vec{e_2}}_{-2\sqrt{3}\vec{f_2}}$$

alltså:

$$F(2\vec{f_2}) = -2\sqrt{3}\vec{f_2}$$

linearitetsegenskaperna ger:

$$2F(\vec{f_2}) = -2\sqrt{3}\vec{f_2} \quad |:2$$

$$F(\vec{f_2}) = -\sqrt{3}\vec{f_2}$$

Det innebär att bilden av $\vec{f_1}$ respektive $\vec{f_2}$ är

$$\begin{cases} F(\vec{f_1}) = \sqrt{3}\,\vec{f_1} \\ F(\vec{f_2}) = -\sqrt{3}\,\vec{f_2} \end{cases}$$

Teorin säger att avbildningsmatrisen

$$A_{\underline{f}} = [F(\vec{f_1})\ F(\vec{f_2})] =$$

Så:

$$F(\vec{f_1}) = \sqrt{3}\,\vec{f_1} + 0\cdot\vec{f_2} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$F(\vec{f_2}) = 0\cdot\vec{f_1} - \sqrt{3}\,\vec{f_2} = \begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$A_{\underline{f}} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Vi kan sedan tidigare att

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix} \quad\Big|\quad A_{\underline{e}} = P A_{\underline{f}} P^{-1},\ P^{-1} = P^t,\ \text{pga ON}$$

$$P^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix} \quad\Big|\quad A_{\underline{e}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 3\\ 3 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}(\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{3}) & (3+3)\\ (3+3) & (3\sqrt{3} - \sqrt{3})\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}(3+3\sqrt{3}) & 6\\ 6 & 3\sqrt{3} - \sqrt{3}\end{bmatrix}$$