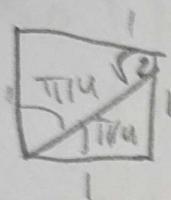


20) Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en positivt orienterad ON-bas för planet. Bilda en ny bas $\{\vec{e}\}$ genom att vrida \vec{e}_1 och \vec{e}_2 $\frac{\pi}{n}$ moturs

$$\vec{f}_1 = F(\vec{e}_1) = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ där } \alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$\vec{f}_2 = F(\vec{e}_2) = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Vi ser att i oavtl
Vad är antid $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

denna giv anta

$$\vec{f}_1 = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{f}_2 = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}$$

Basbytetensialet är

$$P = [\vec{e}_1 \vec{e}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kom ihåg basbytessambanden!

$$\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{e}} P$$

a) \vec{J}



b) Avgör om basbyrsmatsen P är en ON-mats

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorin säger att P är en ON mats om ledärerna är parvis ortogonala, och har längda 1

så $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

De är ortogonala!

men $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = 1$

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

$$|\vec{f}_2| = \sqrt{\dots} = 1$$

Svar:

Ja, P är en ON mats. Konsekvent är $P^{-1} = P^t$

$$C) \text{ Låt } \vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2.$$

Utryck y_1, y_2 i x_1 och x_2

Teorin säger

$$\vec{u} = \underline{e} x_e = \underline{f} x_f \quad | \text{ Låt } f = e^P |$$

$$\underline{e} x_e = \underline{e} P x_f \quad | \text{ ta } e^{-1}$$

$$\underbrace{\underline{e}^{-1} \underline{e} x_e}_{\text{I}} = \underbrace{\underline{e}^{-1} \underline{e} P x_f}_{\text{I}} \Rightarrow \boxed{x_e = P x_f}$$

Detta kan skrivas som:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_f}$$

Men vi vill ha det omvänt så
ta inverken! $\cdot P^{-1}$

$$P^{-1} \underline{x}_e = P^{-1} P x_f \Rightarrow \boxed{x_f = P^{-1} \underline{x}_e}$$

eller $\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_f = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e}$

$$P är en ON matris så $P^T = P^{-1} \quad | \quad P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$$

så

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1) \cdot (x_1) + (1) \cdot (x_2) \\ (-1) \cdot (x_1) + (1) \cdot (x_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) = y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (-x_1 + x_2) = y_2 \end{cases}$$

d) Den linjära avbildningen F uppfyller

$$\begin{cases} F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ F(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$$

Ange avbildningsmatrisen A_F och A_E

$$\vec{f}_1 = \sqrt{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

Vi ser att

$$\underbrace{F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}_{\sqrt{2}f_1} = \underbrace{3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}_{3\sqrt{2}f_1} \quad \left| \begin{array}{l} F(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \sqrt{2}(-\vec{f}_2) \end{array} \right.$$

Så

$$\begin{cases} F(\sqrt{2}\vec{f}_1) = 3\sqrt{2}\vec{f}_1 \\ F(\sqrt{2}\vec{f}_2) = \sqrt{2}(-\vec{f}_2) \end{cases} \quad \text{linearitets egenskaperna ger}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}F(\vec{f}_1) = 3\sqrt{2}\vec{f}_1 \\ \sqrt{2}F(\vec{f}_2) = \sqrt{2}(-\vec{f}_2) \end{cases} \quad | : \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} F(\vec{f}_1) = 3\vec{f}_1 \\ F(\vec{f}_2) = -\vec{f}_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} F(\vec{f}_1) = 3 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \\ F(\vec{f}_2) = 0 \cdot \vec{f}_1 - 1 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E \end{array} \right.$$

$$\text{Så } A_E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_E$$

Nu har vi A_F , men för att få A_E :

$$A_E = \boxed{P A_F P^{-1}} \quad \rightarrow P^{-1} = P^t$$

Så

$$A \in = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-1) \cdot (3) & (-1) \cdot (0) \\ (1) \cdot (3) & (1) \cdot (0) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \begin{bmatrix} (3) \cdot (1) & (3) \cdot (1) \\ (3) \cdot (-1) & (3) \cdot (-1) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (3-1) & (3+1) \\ (3+1) & (3+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar $A \in = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $A \in = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$