417) Låt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Bestäm den punkt Q i planet: $x+z=0$ som ligger närmast P. Vad blir avståndet från P till planet? Rita en figur. Kontrollera att vektorn $\vec{PQ}$ blir ortogonal mot planet

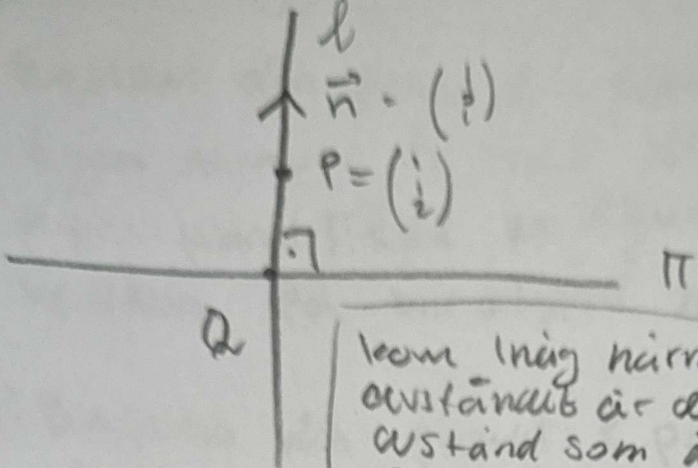
b) Bestäm den punkt R på linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Som ligger närmast P. Vad blir avståndet från P till linjen?

c) Samma som uppgift (a) men planet är istället $x-z=1$

1 a) Planet: $\Pi = x+z=0$



kom ihåg närmsta avståndet är det avstånd som är en vinkelrät linje

Vad vi gör är att skapa en linje mha normalvektorn och punkten P. Skärningspunkten mellan Π och l ger oss Q, där Q:s koordinater måste uppfylla Πs ekvation.

Linjen

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vi har oändligt med punkter nu! Skriv om i ett ekv-system för enkel se!

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases}$$

Dessa sätter vi in i Πs ekvation

$\Pi: x+z=0$

$1+t+2+t=0$

$\boxed{t=-3/2}$

Detta innebär i sin tur att $t=-\frac{3}{2}$ ger Qs punkter

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/2\\2/2\\4/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3/2\\0\\-3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\2/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$= Q$

Nu kan vi bilda $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2-2/2\\1-2/2\\1/2-4/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\0\\-3/2\end{pmatrix}$

Kontroll: Är $\vec{PQ}$ parallell med $\vec{n}$?

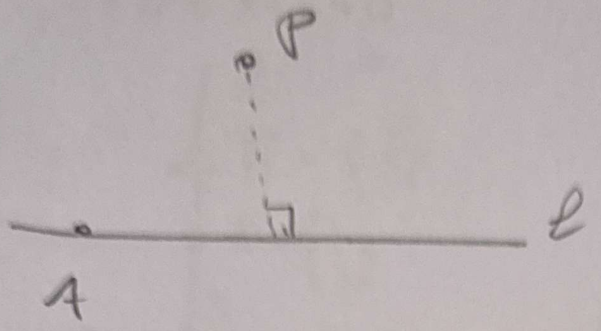
$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}-3/2\\0\\-3/2\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Ja! $\vec{PQ}$ är parallell med $\vec{n}$ ($\vec{PQ} \perp \vec{n}$)

Avståndet blir $|\vec{PQ}| = \sqrt{(-3/2)^2+0^2+(-3/2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}}$

$= \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ kan skriva som $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i.e!

b)



Vi vill bilda $\vec{AP}$, Projicera ned på planet

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix}1-1\\1-0\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

Projektionssatsen ger

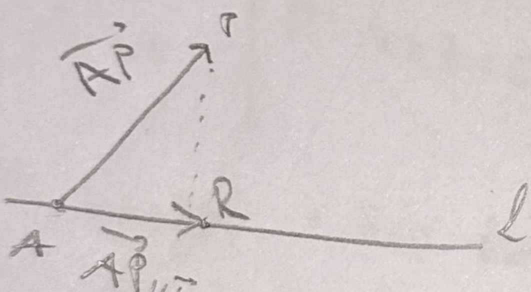
$$\vec{AP}_{\parallel \vec{v}} = \frac{\vec{AP}\cdot v}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

ℓ:s ekv

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$$

Nu så har vi



Nu har vi projektion. För att komma till R tar vi då

$$R = A + \vec{AP}_{\parallel\vec{v}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/5+2/5\\0+1/5\\-5/5+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/5\\1/5\\-5/5\end{pmatrix}$$

kom ihåg

Punkt + vektor = ny punkt

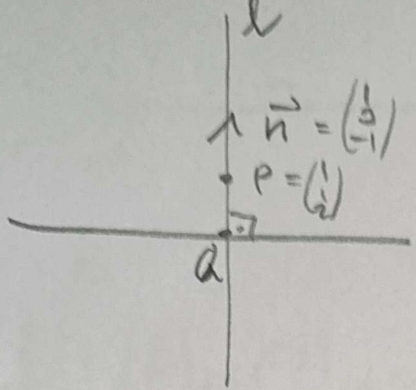
Nu beräknar vi

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix}7/5-5/5\\1/5-5/5\\-5/5-10/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/5\\4/5\\-15/5\end{pmatrix} \Rightarrow d = |\vec{PR}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{-15}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}+\frac{225}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{5}$$

c) $\Pi: x - z = 1$



Bilda linjen

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, t \in R$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 2-t \end{cases}$$

Sätt in l i Π:

$1+t-(2-t) = 1$

$1+t-2+t = 1$

$2t-1 = 1$

$2t = 2 \Rightarrow \boxed{t = 1}$

Sätt in t och l i Q

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = Q$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix}2-1\\1-1\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\vec{PQ} = \vec{n} \Leftrightarrow \vec{PQ} \perp \vec{n}$

$d = |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Så avståndet från Q till P är $\sqrt{2}$ l.e