15) Låt $\underline{e}$ vara en bas för planet.

Sätt $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$

a) Visa att $\vec{f_1}$ och $\vec{f_2}$ är en bas för planet.

Vi vill undersöka om det finns en trivial lösning.

Beroende ekvationen är:

$$\boxed{a\vec{f_1} + b\vec{f_2} = \vec{0}}$$

$\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ | Men överkomplicera det ej!

$\vec{f_2} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$$a(\vec{e_1} + \vec{e_2}) + b(2\vec{e_1} - \vec{e_2}) = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$a\vec{e_1} + a\vec{e_2} + 2b\vec{e_1} - b\vec{e_2} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$a\vec{e_1} + 2b\vec{e_1} + a\vec{e_2} - b\vec{e_2} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$(a+2b)\vec{e_1} + (a-b)\vec{e_2} = \vec{0}$$

$$(a+2b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+2b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2b\\a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

I ett ekvsystem blir det:

$$\begin{cases} a+2b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \quad / ek_1 - ek_2 / \Leftrightarrow 3b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Sätt in $b = 0$ i ek2 $\Rightarrow a - 0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Det vill säga, vi har den triviala lösningen

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{för} \quad a\vec{f_1} + b\vec{f_2} = 0$$

Villkoret medför att vektorerna är linjärt oberoende och spänner upp en bas i $\mathbb{R}^2$.

b) Beräkna koordinaterna för vektorn

$\vec{u} = \vec{f_1} + 3\vec{f_2}$ i basen $\underline{e}$.

Teorin säger

$\vec{x} = \boxed{\underline{e}X_e = \underline{f}X_f}$

$\underline{f} = \underline{e}P$ så

$\underline{e}X_{\underline{e}} = \underline{e}PX_{\underline{f}} \quad / \underline{e}^{-1}$

$\underbrace{\underline{e}^{-1}\underline{e}}_{I}X_{\underline{e}} = \underbrace{\underline{e}^{-1}\underline{e}}_{I}PX_f$

$\boxed{X_{\underline{e}} = PX_{\underline{f}}}$

antså Sambandet mellan koordinaterna, där P är basbytesmatrisen

Vi har givet att

$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{f_2} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} \end{cases}$

Sätt nu in

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och vi vet

att $\vec{u} = \vec{f_1} + 3\vec{f_2}$

antså

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$

Så använd nu sambandet:

$X_{\underline{e}} = PX_{\underline{f}} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{X_{\underline{f}}} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (1+6) \\ (1-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}_{\underline{e}}$

Svar: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$

c) Beräkna koordinaterna för

$\vec{v} = 5\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ i basen $\underline{f}$

Teorin säger

$$\boxed{X_{\underline{e}} = P X_{\underline{f}}}$$

Men detta kan ju inte funka då vi vill

ha $X_{\underline{f}} = \ldots$

Så ta $| \cdot P^{-1}$

$$\boxed{X_{\underline{f}} = P^{-1} X_{\underline{e}}} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{, kontroll}$$

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$, P^{-1} finns

$$\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \longrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$ | $\underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}}_{X_e}$ | $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{3 \cdot 3}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (15 + 12) \\ (15 - 6) \end{bmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\underline{f}}$$