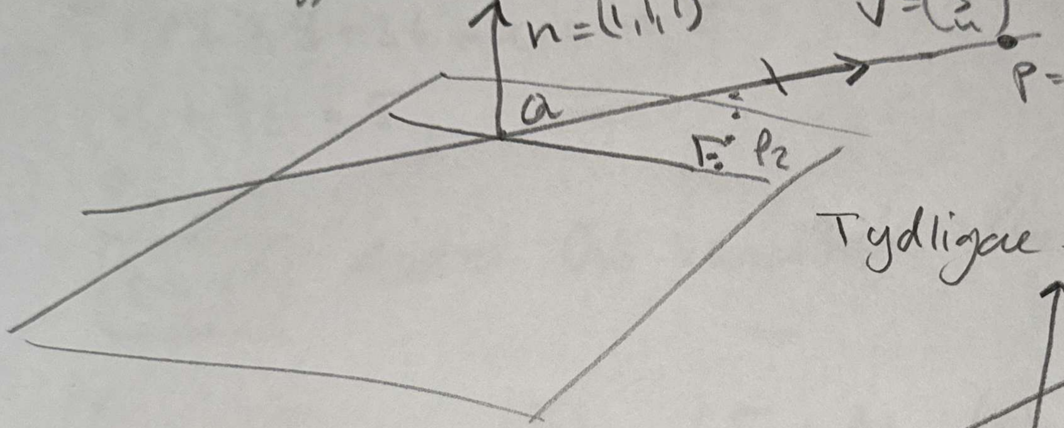
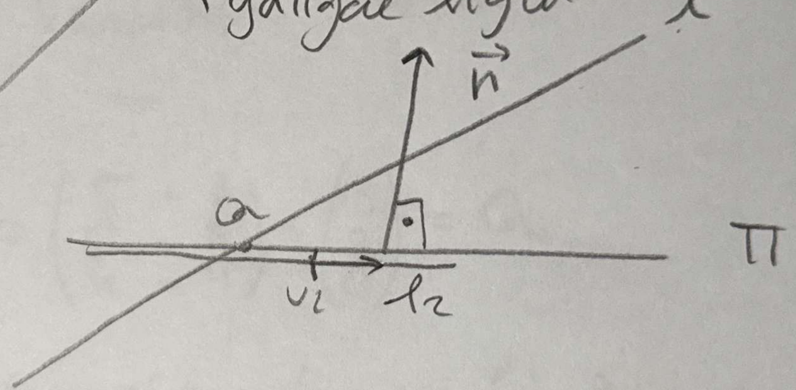
48) Bestäm ortogonalprojektionen av linjen
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ i planet $\Pi: x+y+z=5$.
Beräkna avståndet mellan $\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}$ och planet.

Man kan notera att Ps koordinater satisfierar ej Planets e
alltså ligger punkten utanför



Tydligare ligger



Vi har alltså en linje genom planet (l_1) och en linje som är ortogonalprojektion i planet av linje l_1.

<u>Börja med projektionssaken:</u>

Vi vill ha riktningsvektorn av den nya linjen. Den fås genom
$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_{\parallel n}$ Så $\Rightarrow$ $\vec{V} - \vec{V}_{\parallel n} = \vec{V}_1$

Så beräkna:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{9}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Sök nu a:s koordinater, där a är skärningspunkten för l med π

$$\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+4t \end{cases} \quad \text{i } \pi: x+y+z=5$$

$5+2t+5+3t+4+4t=5$

$14+9t=5$

$9t=-9$

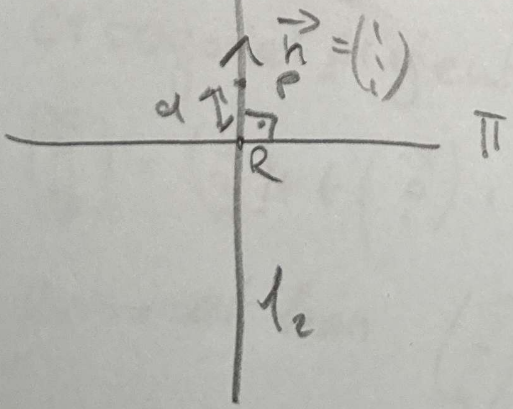
$\boxed{t=-1}$ Alltså a:s koordinater fås av $t=-1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a$$

Linjens ekvation (ortogonal projektion av l_1) blir den

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}}$$

Vi vill nu beräkna avståndet mellan $P=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ och planet



$$l_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

l_2 skär π i punkten R

där $|\vec{RP}| = d$, alltså det sökta avståndet!

Sätt nu in linjens ekv i planets ekvation

$$\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+4t \end{cases} \quad i \quad \pi = x+y+z=5$$

$$5+2t+5+3t+4+4t=5$$
$$t=-3$$

Alternativ 1

$t=-3$ ger Rs koordinater

$$R = \begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-3\\5-3\\4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix}5-2\\5-2\\4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3\cdot 9} =$$
$$= 3\sqrt{3}$$

Svar:

Ortogonal projektionen av l på π är

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

avståndet från $\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}$ till π är $3\sqrt{3}$ l.e.!

Alternativ 2

För $t=-3$ blir $d=$

$$d = \left|(-3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$