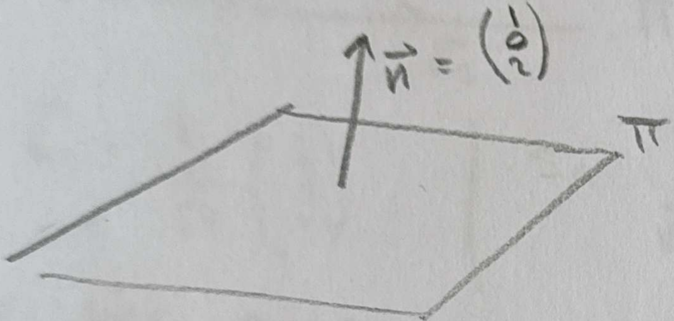
21) Låt F vara ortogonalprojektionen i planet $x+2z=0$. koordinaterna är med avseende på basen $\underline{\underline{e}}$.

a) Finn en ON bas $\underline{f}$ sådan att $\vec{f_1}$ är ortogonal mot planet, och $\vec{f_2}$ och $\vec{f_3}$ är parallella med planet. kontrollera

Vi har planet

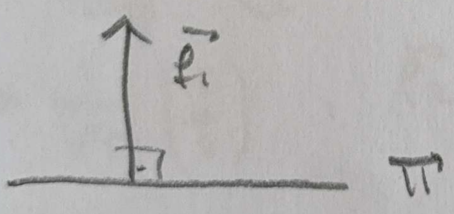


Vi väljer $\vec{f_1} = \vec{n}$, men ON bas kräver att vektorns längd är 1, så

$$\boxed{\left|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\right|} = 1 \text{ längdenhet!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{f_1}$$

Se ny bild!



Vi vill nu välja $\vec{f_2}$ och f_3 så de ligger i planet, börja med $\vec{f_2}$!

$\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = 0$ ger en vektor parallell med planet!

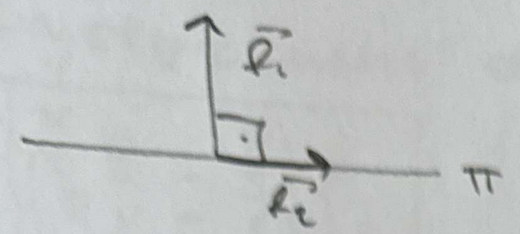
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

men vektor $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ är ej 1 l.e så $\frac{1}{|f_2|}\vec{f_2}$

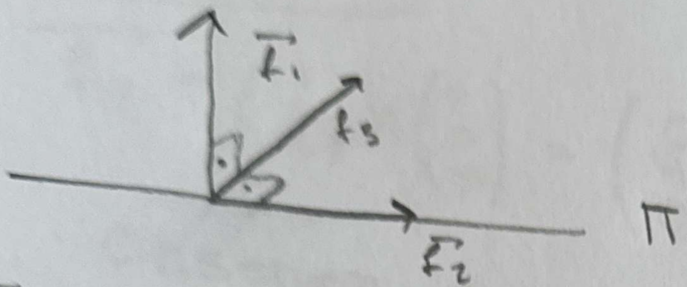
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \vec{f_2}}$$

→

Nu har vi !



vektor $\vec{f_3}$ måste ligga i planet och se ut något som:



Så $\vec{f_2}$ ska vara ortogonal med $\vec{f_3}$

$\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ | Så $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x-z)$

Vi ser om:

$\boxed{x = 1 \text{ och } 2}$ blir skalärprodukten 0!

$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ men: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Då har vi

$\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{f_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Vi ser dock att detta ej stämmer

$\vec{f_3}$ blev ej som tänkt!

OBS

För att $\vec{f_3}$ ska bli ortogonal mot både $\vec{f_1}$ och $\vec{f_2}$ tar vi kryssprodukten av $\vec{f_1}$ och $\vec{f_2}$!

Så $f_3 = \vec{f_1} \times \vec{f_2}$

Kryssprodukten defineras som

$$\boxed{\begin{array}{cc} x\ y & \ \ x\ y \\ \left(\begin{array}{c} 2\ 3 \\ 3\ 1 \\ 1\ 2 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -\ 5\ 2 \\ -\ 1\ 3 \\ -\ 2\ 1 \end{array}\right) \end{array}}$$

$$\vec{f_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\4+1\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$$

= OBservera att vi tog icke-normaliserade vektorer, det ändrar inget, endast längden på vektorn.

Normalisera $\vec{f_3}$

$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{V} => \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

kontroll

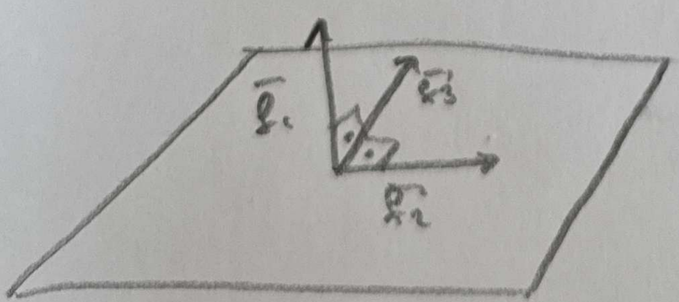
$\boxed{\vec{f_1} \cdot \vec{f_3} = 0}$ och $\boxed{\vec{f_2} \cdot \vec{f_3} = 0}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

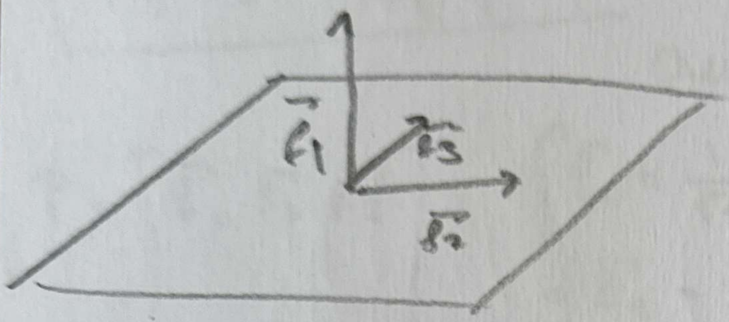
Så ja, det stämmer och $|\vec{f_3}| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$

alltså har vi nu en bas (ON) som:



b) Ange Fs matris $A_{\underline{f}}$ i basen $\underline{f}$

Eftersom avbildningsmatrisen är en ortogonalprojektions-matris, se bild



Ortogonal projektionen (skuggan) av $\vec{f_1}$ kommer att bli $\vec{0}$, $\vec{f_2}$ och $\vec{f_3}$ kommer att blir $\vec{f_2}$ & $\vec{f_3}$.

Så

$$F(\vec{f_1}) = 0\cdot\vec{f_1} + 0\cdot\vec{f_2} + 0\cdot\vec{f_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$F(\vec{f_2}) = 0\cdot\vec{f_1} + 1\cdot\vec{f_2} + 0\cdot\vec{f_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$F(\vec{f_3}) = 0\cdot\vec{f_1} + 0\cdot\vec{f_2} + 1\cdot\vec{f_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

Avbildningsmatrisen $A_{\underline{f}}$ definieras som:

$$A_{\underline{f}} = \left[F(\vec{f_1})\ F(\vec{f_2})\ F(\vec{f_3})\right] = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

c) Beräkna Avbildningsmatrisen ($A_{\underline{e}}$) i basen $\underline{e}$

Teorin säger

$\boxed{A_{\underline{e}} = P A_{\underline{f}} P^{-1}}$ där P är basbytesmatrisen, om P är ON mats är då $P^{-1} = P^t$

$$P = \begin{bmatrix} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) \\ \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) \\ \vec{f_3} = (0,1,0) \end{cases}$$

Så P är

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\underline{e}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{\underline{f}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}}_{P^t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (0+0+0) & (0+2+0) & (0+0+0) \\ (0+0+0) & (0+0+0) & (0+0+\sqrt{5}) \\ (0+0+0) & (0-1+0) & (0+0+0) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{25}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (0+4+0) & (0+0+0) & (0-2+0) \\ (0+0+0) & (0+0+5) & (0+0+0) \\ (0-2+0) & (0-2+0) & (0-2+0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = A_t$$