

6) Vilken volym har parallellpipedet
med vektorerna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ och } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Teorin säger att 3 vektorer krävs för att spänna upp en parallelepiped, och dess volym är absolutbeloppet av determinanten:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ här oss}$$

beräkna det A genom att använda Laplace utveckling i första kolonnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 1(-1)^{(3+1)} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}_{-16} + (1)(-1)^{(1+1)} \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_7 \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}_{(2 \cdot 2 - 4 \cdot 5)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{(5 \cdot 1 - (-2))} \\ &= -16 + 7 = -9 \end{aligned}$$

$|\det A| = |-9| = 9$, dts parallellpipedens volym är 9 enheter.