24) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Visa att ekvationsystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ saknar lösning.

b) Finn det $\vec{x}$ som minimerar $|\vec{b} - A\vec{x}|$ och beräkna det minimala värdet. Kontrollera beräkningarna.

c) Använd b) till att finna $\vec{b}$s ortogonal projektion i planet, π, som går genom origo och är parallellt med vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vilket är avståndet från $\vec{b}$ till planet? Rita figur!

a) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Vi skriver i en utökad matris och löser med Gauss elimination.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right) \sim /ek\,1+ek\,2/ \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&4\\1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right)$$

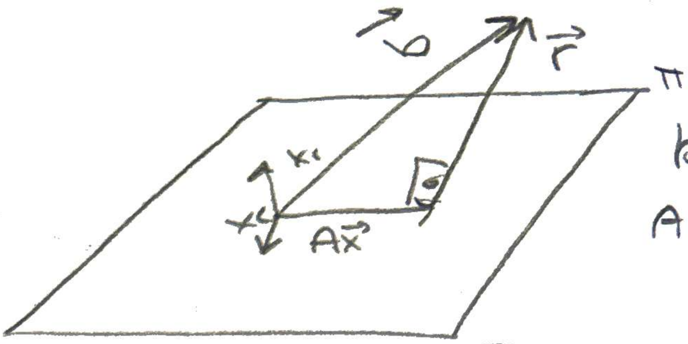
Ekvationsystemet säger alltså att

$$\begin{cases}x_1=4\\x_1=-1\\x_2=1\end{cases}$$

Vi ser en motsägelse. Dvs ek-systemet saknar lösning.

---

b) Nu vill vi finna minsta kvadrat! SE bild!



För att finna $\vec{r}=Ax-\vec{b}$ behöver vi lösa normalek:

$$A^tAx=A^t\vec{b}$$

$$A^tA\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(1+1+0)&(-1+0+0)\\(-1+0+0)&(1+0+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3-1+0)\\(-3+0+1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

Nu löser vi ut (x_1, x_2) dessa är lösni-ngarna

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim / ek2 \cdot 2 / \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim / ek2 + ek1 / \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim / ek1 \cdot 3 / \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim / ek1 + ek2 / \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim / ek1/2 / \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim / ek1/2, ek2/2 / \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nu har vi koordinaterna!

Residualvektorn ges av

$$\vec{r} = A\vec{x} - b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{3 \times 2 \quad 2 \times 1}_{3 \times 1} \quad \times 3 \times 1$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{A\vec{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ \left(\frac{2}{3} + 0\right) \\ \left(0 - \frac{2}{3}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}}_{A\vec{x}} + \begin{bmatrix} -9/3 \\ 3/3 \\ -3/3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -5/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}}^{\vec{r}}$$

Om korrekt är $A\vec{x} \cdot \vec{r} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} = -\frac{20}{3} + \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = 0$$, beräkningen

är korrekt, nu kan $|\vec{r}|$ beräknas

$$|\vec{r}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{9}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Detta är svaret, men finare att skriva såhär:

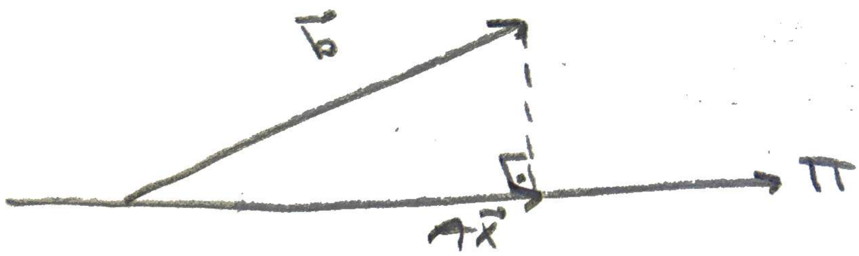
$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \Big/ \cdot \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{5\cancel{\sqrt{9}}}{\sqrt{3}\cancel{\sqrt{9}}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Svar:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} \quad |\vec{r}| = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad \text{och} \quad \vec{x} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

c) Ortogonal projektionen av $\vec{b}$ i planet är $A\vec{x}$ =



Vi vet att $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och

avståndet är detsamma som tidigare $|\vec{r}|$

alltså $\frac{5}{\sqrt{3}}$ Svar: $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ & $\frac{5}{\sqrt{3}}$