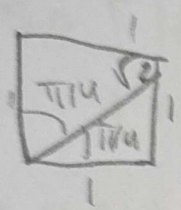


20) Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en positivt orienterad ON-bas för planet. Bilda en ny bas \underline{t} genom att vrida \vec{e}_1 och \vec{e}_2 $\frac{\pi}{4}$ moturs

$$\vec{t}_1 = F(\vec{e}_1) = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ där } \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

$$\vec{t}_2 = F(\vec{e}_2) = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$



vi ser också oavsett vad är alltid $\alpha = 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$

detta ger också

$$\vec{t}_1 = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{t}_2 = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}$$

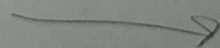
Basbytesmatrisen är

$$P = [\vec{t}_1 \ \vec{t}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

kom ihåg basbytes sambandet

$$\underline{t} = \underline{e}P$$

a)



b) Avgör om basbyxmatrisen P är en ON-matris

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Teorin säger att } P \text{ är en ON matris} \\ \text{om raderna är parvis ortogonala,} \\ \text{och har längd 1} \end{array} \right.$$

$$\text{Så } \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

De är ortogonala!

$$\text{men } |\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = 1$$

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

$$|\vec{f}_2| = \frac{\quad}{\quad} = 1$$

Svar:

Ja, P är en ON matris. Konsekvent är $P^{-1} = P^t$

c) Låt $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2$.

uttryck y_1, y_2 i x_1 och x_2

Teorin säger

$$\vec{u} = \underline{e} x_{\underline{e}} = \underline{f} x_{\underline{f}} \quad / \text{Låt } \underline{f} = \underline{e} P /$$

$$\underline{e} x_{\underline{e}} = \underline{e} P x_{\underline{f}} \quad / \text{ta } \underline{e}^{-1}$$

$$\underbrace{\underline{e}^{-1} \underline{e}}_{\underline{I}} x_{\underline{e}} = \underbrace{\underline{e}^{-1} \underline{e} P}_{\underline{I}} x_{\underline{f}} \Rightarrow \boxed{x_{\underline{e}} = P x_{\underline{f}}}$$

Detta kan skrivas som:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\underline{e}} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\underline{f}}}$$

Men vi vill ha det omvänt så
ta inversen! $\cdot P^{-1}$

$$P^{-1} x_{\underline{e}} = P^{-1} P x_{\underline{f}} \Rightarrow \boxed{x_{\underline{f}} = P^{-1} x_{\underline{e}}}$$

$$\text{eller } \boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\underline{f}} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\underline{e}}}$$

$$P \text{ är en ON matris så } P^t = P^{-1} \quad \left| \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

så

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{2 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1) \cdot (x_1) \\ (-1) \cdot (x_1) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1) \cdot (x_2) \\ (1) \cdot (x_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) = y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (-x_1 + x_2) = y_2 \end{cases}$$

d) Den linjära avbildningen F uppfyller

$$F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$F(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

Angiv avbildningsmatrisen $A_{\mathcal{E}}$ och $A_{\mathcal{E}}$

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

Vi ser att

$$\underbrace{F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}_{\sqrt{2}\vec{f}_1} = \underbrace{3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}_{3\sqrt{2}\vec{f}_1} \quad \left| \quad \underbrace{F(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}_{\sqrt{2}\vec{f}_2} = \underbrace{\vec{e}_1 - \vec{e}_2}_{\sqrt{2}(-\vec{f}_2)} \right.$$

Så

$$\begin{cases} F(\sqrt{2}\vec{f}_1) = 3\sqrt{2}\vec{f}_1 \\ F(\sqrt{2}\vec{f}_2) = \sqrt{2}(-\vec{f}_2) \end{cases} \quad / \text{ linjäritets egenskaper } /$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} F(\vec{f}_1) = 3\sqrt{2}\vec{f}_1 \\ \sqrt{2} F(\vec{f}_2) = \sqrt{2}(-\vec{f}_2) \end{cases} \quad | : \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} F(\vec{f}_1) = 3\vec{f}_1 \\ F(\vec{f}_2) = -\vec{f}_2 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} F(\vec{f}_1) &= 3 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \\ F(\vec{f}_2) &= 0 \cdot \vec{f}_1 - 1 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Så } A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$$

Nu har vi $A_{\mathcal{E}}$, men för att få $A_{\mathcal{E}}$:

$$A_{\mathcal{E}} = \left| \cancel{P A_{\mathcal{E}} P^{-1}} \right| \rightarrow P^{-1} = P^t$$

Så

$$A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1) \cdot (3) & (1) \cdot (0) \\ (1) \cdot (0) & (1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (3) & (-1) \cdot (0) \\ (-1) \cdot (0) & (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \begin{bmatrix} (3) \cdot (1) & (3) \cdot (-1) \\ (0) \cdot (1) & (0) \cdot (-1) \\ (0) \cdot (1) & (0) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (1) & (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} (3-1) & (3+1) \\ (3-1) & (3+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar $A_{\pm} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $A_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$