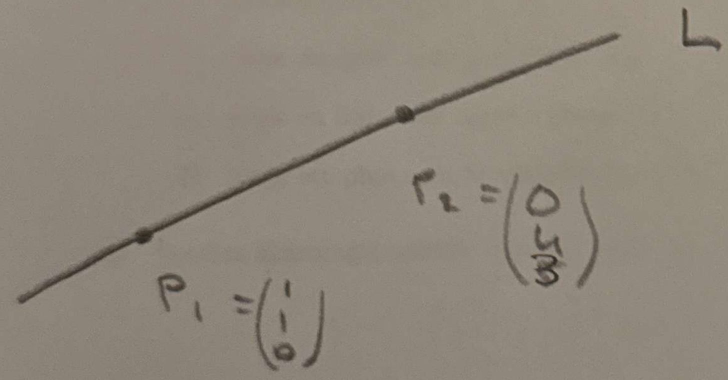
38) Låt L vara en rät linje genom punkterna (1,1,0) och (0,4,3). Illustrera med en figur!

a) Rita en riktningsvektor. Bestäm L:s ekvation på parameterform. Kontrolla att linjen går genom punkterna.

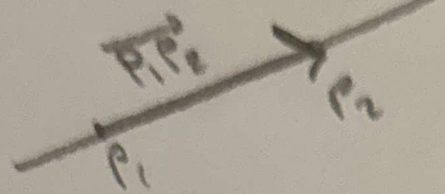
b) Ange ännu en punkt som ligger på L och markera dess ungefärliga läge i figuren. Ange också en punkt Q som inte ligger på L! kontrollera.

c) Bestäm L:s ekvation på parameterform. Kontroll-era att linjen ligger på linjen.

d) Ange en linje L som skär L. Ange också en linje som är parallel med L!



a) Bild



$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 4-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Linjens ekv

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Linjens ekv blir då

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

För att kontrollera om punkterna verkligen går genom linjen gör vi om till ett system

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Om vi nu sätter in respektive punkter skall det visa att $t = t = t$, annars är det ej på linjen.

P_1:

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ t = \frac{y-1}{3} \\ t = \frac{z-1}{2} \end{cases}$$

Sätt nu in respektive koordinat. Om punkten finns på linjen skall ett specifikt t finnas. Det får ej finnas olika t, då är ej punkten på linjen

För $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} t = 1 - 1 = 0 \\ t = \frac{1-1}{3} = 0 \\ t = \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$$

För $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} t = 1 - 0 = 1 \\ t = \frac{4-1}{3} = 1 \\ t = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Alltså $t=0$ ger punkt P_1 och $t=1$ ger punkt P_2. De finns på linjen.

b) Sätt $t=-1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En punkt på linjen är $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, vilket ges av $t=-1$.

En punkt som ej ligger på punkten. Detta är enkelt. Gör såhär:

1: Skriv i parameterfriform:

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+3t \\ z = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1-x \\ t = \frac{y-1}{3} \\ t = \frac{z-1}{2} \end{cases}$$

2: Välj koordinater (x, y, z) som gör att $t \neq t \neq t$.

$$\begin{cases} t = 1-3 = -2 \\ t = \frac{1-1}{3} = 0 \\ t \ \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases},$$

alltså $t \neq t \neq t$

$-2 = 0 = 0$, det stämmer ej så punkten: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ finns ej på linjen!

c) Bestäm L:s ekvation på parameterform

detta gjordes tidigare; se a och b]

d)

En linje som är paralel med denna

har samma riktningsvektor

t.ex $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

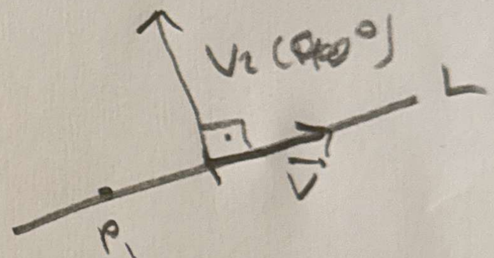
Eftersom riktningsvektor är i samma riktning måste dem vara paralel.

En linje som skär L

första linjen är

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Om den andra linjen ska skära denna, kan man finna en vinkelrät vektor mot riktningsvektorn och ha denna som riktningsvektor för andra linjen.



alltså

$\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$

$-x + 3y + 2z = 0$

Finn nu koordinater som uppfyller detta!

$-3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$

$\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ är vinkelrät mot riktningsvektorn!

Nu skapar vi linjen!

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} t \in \mathbb{R}$

Det bör se ut som: