

7) Antag att f är en linjär avbildning för vilken följande gäller:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm f s avbildningsmatris A i basen \underline{e} . Kontrollera ditt svar genom att verifiera att ovanstående relationer är uppfyllda. Beräkna också $f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$.

En avbildningsmatris är

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]$$

Linearitet säger oss om vi ger

$$\begin{aligned} 1) & f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ 2) & f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ 3) & f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

och vi får

$$f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) - f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2$$

$$\boxed{2f(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2}, \text{ vilket ger}$$

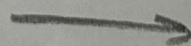
$$\hookrightarrow f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Sätt nu in i ekvation 2:

$$\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \quad | -\vec{e}_2, -2\vec{e}_3$$

$$\boxed{f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3}$$

Nu sätter vi in $f(\vec{e}_2)$ och $f(\vec{e}_3)$ i ekvation 1 för att få $f(\vec{e}_1)$



Så vi har

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\text{Sätt in i: } f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

Börja med $f(\vec{e}_1)$

~~$f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3)$~~

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \quad \left| \begin{array}{l} -\vec{e}_2 \\ -2\vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

Sätt nu in $f(\vec{e}_3)$

$$f(\vec{e}_1) + 2(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_1) - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3 \quad \left| \begin{array}{l} +2\vec{e}_1 \\ +2\vec{e}_2 \\ -2\vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$$

Då vet vi att

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Avbildningsmatrisen A blir då

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Och } f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \left(2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ -14 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 14\vec{e}_3$$

Svar:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{0} \quad f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 14\vec{e}_3$$