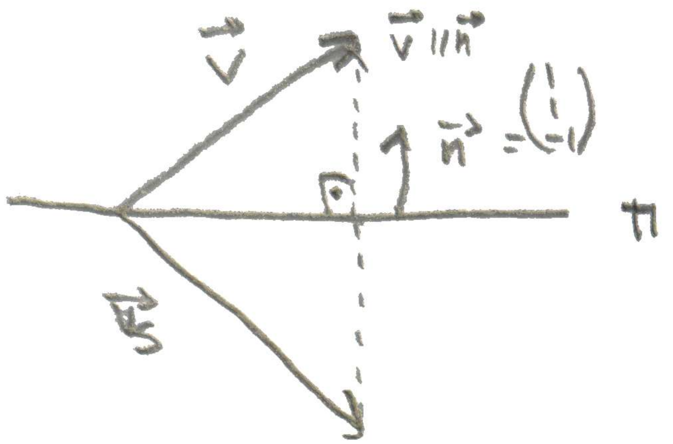
uppgift 6.13) Låt F vara speglingen i planet. $\pi: x+y-z=0$

a) Ange F:s avbildningsmatris A. Kontrollera planets normal samt två icke-parallella vektorer bildas som avsett



$$\vec{v}_{\parallel \vec{n}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} \quad \text{där}$$

$\vec{v}$ är en $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{v}_s = \vec{v} - 2\vec{v}_{\parallel \vec{n}}}$$

Detta innebär att Relationen ovan ger koordinaterna för avbildningsmatrisen, A.

$$\vec{v}_{\parallel \vec{n}} = \frac{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+y-z\\x+y-z\\z-x-y\end{pmatrix}$$

Sedan får man

$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}x+y-z\\x+y-z\\-x-y+z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}x+y-z\\x+y-z\\-x-y+z\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-x-y+z\\-x-y+z\\x+y-z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2x-2y+2z\\-2x-2y+2z\\2x+2y-2z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x-2y+2z\\-2x+y+2z\\2x+2y+z\end{pmatrix}$$ i formen $Ax = b$ $$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

kontroll :

Två icke parallella vektorer innebär t.ex. att ortogonal mot normalvektorn !

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, så vi vill hitta två vektorer som $\vec{n} \cdot \vec{f} = 0$ och $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{f}} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{f}} = F(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1 + 0 + 2) \\ (-2 + 0 + 2) \\ (2 + 0 + 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ korrekt !

kontroll av normalen

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1 - 2 - 2) \\ (-2 + 1 - 2) \\ (2 + 2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow -1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

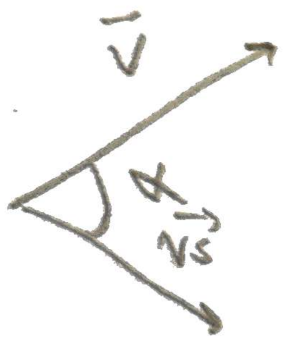
korrekt !

b) Använd a) till att beräkna punkten $(2,0,-1)$s spegling i planet. Beräkna också vinkeln mellan vektorn $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ och dess spegling

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}(2+0-2)\\(-4+0-2)\\(4+0-1)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\-6\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Låt oss kalla dessa $\vec{V} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{Vs} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$



$$\boxed{\vec{V}\circ\vec{Vs} = |\vec{V}||\vec{Vs}|\cdot\cos\alpha}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$-1 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$$

$$-1 = \sqrt{5\cdot5}\cdot\cos\alpha$$

$$-1 = \sqrt{25}\cdot\cos\alpha \quad /\sqrt{25}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{25}} = \cos\alpha \iff -\frac{1}{5} = \cos\alpha$$

Svar: $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$