14) För vilka värden på konstanten a har planen

$$x + 2y + az = 1,\quad 2x + ay + 8z = -1$$

och $ax - 2y = -1$ inten skärningspunkt, en skärningspunkt, eller mer än en skärningspunkt? Och i.s.f vad är skärningspunkten?

Lösning:

Vi har 3 plan:

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = -1 \\ ax - 2y = -1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$\vec{x} \subset R^3$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = /R_2 - 2\cdot R_1/ = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a-4 & 8-2a \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & (a-4)\cdot 1 & -2(a-4) \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = (a-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = /\text{Sarrus regel}/$$

$$(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4a - a^2 - 4 - 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= (a-4)(-4a - a^2 - 4) = 0$$

$$(a-4)(-a^2 - 4a - 4) = 0$$

$$(a-4)(-1)(a^2 + 4a + 4) = 0$$

$$(4-a)\underbrace{(a^2 + 4a + 4)}_{(a+2)^2} = 0$$

$$(4-a)(a+2)^2 = 0$$

alltså $\det A = 0$ om $a = 4$ eller $a = -2$

Men låt oss nu se vad som händer då a är dessa

$\underline{a = 4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim / R_2 - R_1 \cdot 2 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Vi har en motsägelse $0 = -3$!
alltså saknar systemet lösning då $a = 4$.
Det innebär att för $a = 4$ har planen ingen skärningspunkt!

$\underline{a = -2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim / R_2 + R_3 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim / R_2 / 8 /$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim / R_1 + R_2 \cdot 2 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 - \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim / R_1 + R_3 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim / R_3 - R_1 \cdot 2 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} R_1 / -1 \\ R_3 / -2 \end{vmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -1/4 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

$a = -2$ és korrekt bör bli en linje med lösningar: $\Longrightarrow$

$\underline{a=-2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Gen totalmatris :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim /\text{Rad 3 byt Rad 2}/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim /R_2+R_3/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right) \sim /\text{Rad 2 med Rad 3}/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \end{array}\right) \sim /\text{Rad 3} - \text{Rad 2}/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim /\text{Rad 1} - \text{Rad 2}/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \end{array}\right) \sim /\text{Rad 2} + \text{Rad 1} \cdot 2/$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -2 \end{array}\right) \sim /\text{Rad 3}/2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim /\text{Rad 2} + \text{Rad 3}/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) = /\text{Sluta nu!}/$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2z=0 \\ -2y+4z=0 \end{cases} = /\text{Sätt } z=t/$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x-2t=0 \\ -2y+4t=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2t \\ 2y=4t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Vi har alltså fått som svar att $a=-2$ ger skärningslinjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$