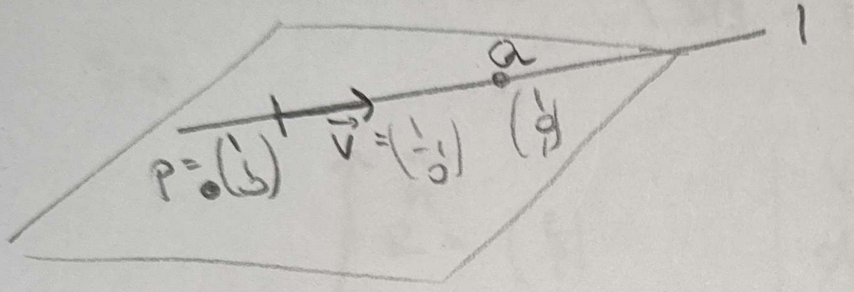
50) Bestäm avståndet mellan punkten $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ och det plan som innehåller punkten $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, samt den räta linjen! $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$

Först, vi vet att linjen ligger i planet. Rita en bild



Så vi vill finna π:s ekvation, vilket kräver två vektorer och en punkt. Vi saknar den andra vektorn!

Skapa $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Nu kryssar vi $\overrightarrow{PQ}$ och $\vec{v}$ för att få normalen, så vi kan få π:s ekv:

$Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$

Kryssprodukten:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23-32\\31-13\\12-21\end{pmatrix}=\overset{\overrightarrow{QP}}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\times\overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0-1\\-1-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

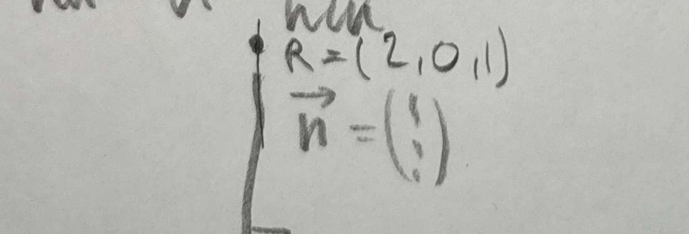
Så $\pi=\boxed{x+y+z+D=0}$

$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 1+1+0+D=0$

$D=2$

π:s ekvation blir $\boxed{x+y+z=2}$

Då har vi nu



Vi söker nu l:s skärningspunkt med π

$\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$ | i π:

$2+t+t+1+t=2$

$\boxed{t=-\frac{1}{3}}$ ⟶

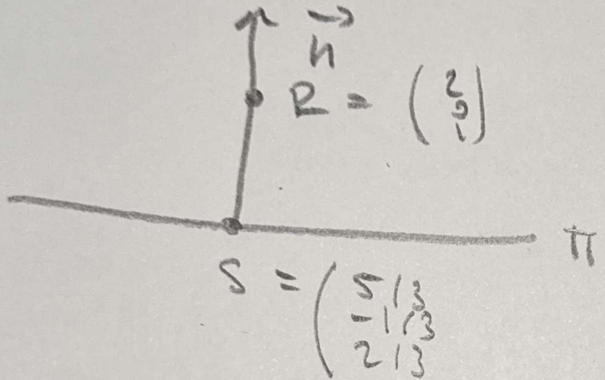
Observera att vi skapade en linje vars riktningsvektor är parallell med $\vec{n}$ och linjen går genom punkten vi vill finna.

Okej nu när man vet att $t=-\frac{1}{3}$ ger skärningspunkten i plant fås konsekvent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/3 - 1/3 \\ 0 - 1/3 \\ 3/3 - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Så



Vi söker alltså

$$d = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{SR}|$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 5/3 - 6/3 \\ -1/3 - 0 \\ 2/3 - 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Svar

Alternativ lösning:

$$d = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{SR}| = \left|t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$