

11)

Lös ekvationerna:

a)  $\det \begin{bmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 2 & 8 & 32 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} = 0$

b)  $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{bmatrix} = 0$

Lösning:

a) Enklast blir att använda Sarrusregel:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 2 & 8 & 32 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 46 + 12x^4 + 96x^2 - 24x^4 - 192 - 24x^2 \\
 \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 2 & 8 & 32 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -192 + 96 - 24x^2 + 96x^2 - 24x^4 + 12x^4 \\
 \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 2 & 8 & 32 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -96 + 72x^2 - 12x^4$$

Alltså

$$-12x^4 + 72x^2 - 96 = 0$$

Vi har 12, och  $72 = 12 \cdot 6$ , och  $12 \cdot 8 = 96$ 

Så skriv om!

$$-12(x^4 - 6x^2 + 8) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Gör substitution!} \\ u = x^2 \end{array} \right.$$

$$-12(u^2 - 6u + 8) = 0$$

$$(u - \frac{6}{2})^2 - (\frac{6}{2})^2 + 8$$

$$(u - 3)^2 - 9 + 8 \Leftrightarrow (u - 3)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (u - 3 - 1)(u - 3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (u - 4)(u - 2)$$

Så:

$$-12((u - 4)(u - 2)) = 0$$

Sätt tillbaka  $x^2 = u$ 

$$-12(x^2 - 4)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \longrightarrow \\ x = \pm \sqrt{2}$$

Ekvationen blir alltså 0 om

$$x = \pm 2 \text{ eller } x = \pm \sqrt{2}$$

Svar: se ovan!

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad / \text{dått oss använde /} \\ \text{Sarrus regel}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2x^2 + 6 - 3x - 2x - 6 \\ = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\text{alltså: } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \quad = [\text{kvadrat-komplettering}]$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 8} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{24}{16} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 \quad / \text{kan skrivas som:}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0 \quad / (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$\left(x - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{6}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1) = 0$$

$$\text{Alltså svaren är } x = \frac{3}{2} \text{ eller } x = 1$$

$$\text{Svar: } x = \frac{3}{2} \text{ eller } x = 1$$