11) För vilka x är vektorerna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x+3 \end{pmatrix}$$

linjärt beroende?
uttryck $\vec{w}$ som en linjär kombination av $\vec{u}$ & $\vec{v}$?

Lösning:

Teorin säger att om $\det A$ är noll är volymen för parallellepipeden 0, alltså en parallellepiped uppspänns ej upp. Det medför att vektorerna ligger i samma plan och är linjärt beroende.

Vi skriver beroende ekvationen:

$$\boxed{\lambda_1 \vec{w} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{u} = \vec{0}} \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I formen $A\vec{x} = \vec{b}$ är det:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2x+3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Nu löser vi $\det A = 0$, och finner de x som ger det.

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2x+3 \end{vmatrix} = \Big/ \text{löser med Sarrus regel} \Big/ = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2x+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{matrix}$$

$$= x^2(2x+3) + 2 + 1 - x - 2x - (2x+3)$$

$$= 2x^3 + 3x^2 + \cancel{3} - 3x - 2x - \cancel{3}$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$$

$$= x(\underbrace{2x^2 + 3x - 5}_{0}) = 0$$

Lös med kvadratkomplettering.

$$x(2x^2+3x-5)=0$$

$$2x^2+3x-5=0 \quad |:2$$

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{5\cdot 8}{2\cdot 8}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{40}{16}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}=0 \quad |(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)|$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{10}{4}\right)\left(x-\frac{4}{4}\right)=0$$

$$\boxed{\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)=0}$$

Då har vi $\det A=0$ som

$$x\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)\right)=0$$

Alltså $x=0$, eller $x=-\frac{5}{2}$ eller $x=1$

Dessa ger att $\det A$ är noll

Alltså: Då $x=0$, $x=-\frac{5}{2}$, $x=1$ är vektorerna linjärt beroende och spänner ej upp en parallellepiped.

om $x = 0$ fås:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}}}$$

Nu löser vi det homogena systemet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim / \text{Rad } 3 - \text{Rad } 2 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim / R_3/2 /$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim / \text{Rad } 3 - \text{Rad } 1 / \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad | \text{ sätt } \lambda_3 = t \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -t \\ \lambda_1 = -t \\ \lambda_3 = t \end{cases}$$

alltså en linje:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tag nu t.ex $t = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

| och vi har
$\lambda_1 \vec{w} + \lambda_2 \vec{u} + \lambda_3 \vec{v} = 0$
sätt in respektive lambda

$$-\vec{w} - \vec{u} + \vec{v} = 0 \quad | + \vec{w}$$

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

Sedan gör man samma då $x = -1$ osv