Låt Π vara planet genom punkterna $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Illustrera med en figur!

a) Rita ~~—~~ riktningsvektorer. Ange ekvationen för Π på parameterform. Kontrollera att planet verkligen går genom de givna punkterna.

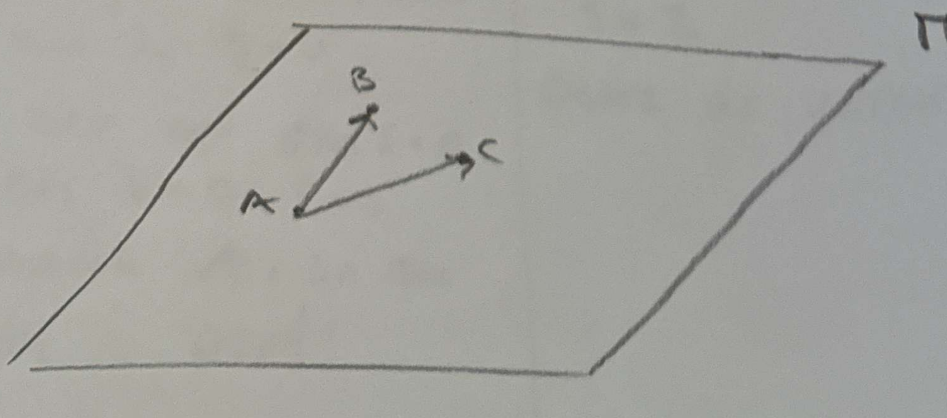
b) Ange ännu en punkt P som ligger i planet, och markera dess ungefärliga läge. Ange också en punkt Q som ej ligger i planet

c) Ange planets ekvation i parameterfri form, dvs normalform. Kontrollera att planet verkligen går igenom punkterna.

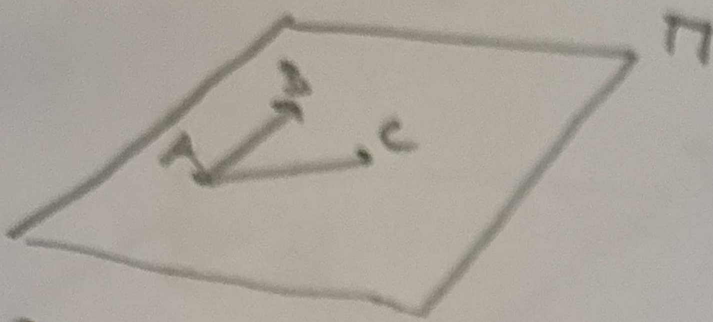
d) Ange ett plan som är parallellt med Π

e) Ange en linje som ligger i planet

f) Ange ett plan som är vinkelrät mot Π



a) Börja alltid med en illustration!



$A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}1-1\\0-1\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix}3-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Planets ekvation i parameterform är

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + s\cdot\vec{v_1} + t\cdot\vec{v_2}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$\vec{AC}$ och $\vec{AB}$ är riktningsvektorerna.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Kontroll

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - s - t \\ z = -s + t \end{cases}$$

A:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 1 = 1 - s - t \\ 0 = -s + t \end{cases}$$

I ek ger $t=0$, Sätt i ek 2 $s=0$

visar att om $s=0$ och $t=0$ fås punkten A, så den finns i planet!

B:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 0 \quad 1 - s - t \\ -1 = -s + t \end{cases}$$

ek 1 ger $t=0$

Sätt in i ek 3

$-s = -1$

$s = 1$

Detta är korrekt!

C:

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 0 = 1 - s - t \\ 1 = -s + t \end{cases}$$

ek 1 ger

$3 = 1 + 2t$

$2t = 2 \iff t = 1$

ek 3 ger

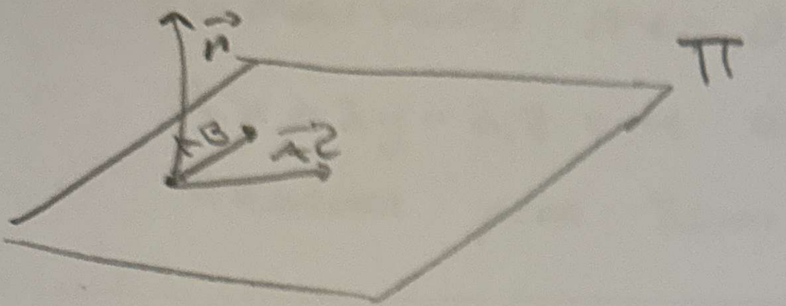
$1 = -s + (t=1)$

$1 = -s + 1$

$-s = 0 \iff s = 0$

korrekt!

c) för att ange normalekvation se bild!



Πs ekv i normalform

$Ax+By+Cz+D=0$

där $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Blanda inte ej ihop n:s koordinater med de i planet, dumt tänkt av mig med benämningen.

Vi finner normalvektorn genom att kryssa riktningsvektorerna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 - 32 \\ 31 - 13 \\ 12 - 21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 - (-1)(-1) \\ (-1)\cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0(-1) - 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ -2 - 0 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kontroll

$\vec{AB} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 2 - 2 = 0$

$\vec{AC} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$

} korrekt, detta är normalvektorn!

Då blir planet $-2x - 2y + 2z + D = 0 \;/(-1)$

$2x + 2y - 2z - D \iff$ / sätt en koordinat Ooh lu 0 / =

$2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2\cdot 0 - D = 0$

$= 4 - D = 0 \iff D = 4$

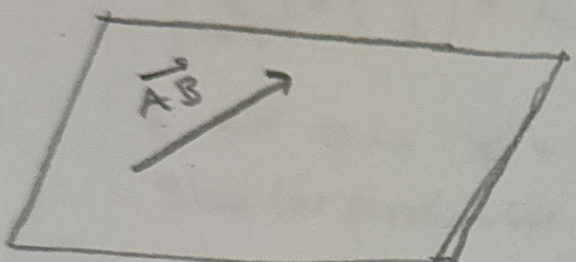
planets ekv i Normalform är $\boxed{2x + 2y - 2z - 4 = 0}$

kontroll av koordinat

$A = (1, 1, 0)$	$B = (1, 0, -1)$	$C = (3, 0, 1)$
$2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 4 = 0$	$2\cdot 1 - 2(-1) - 4 = 0$	$2\cdot 3 - 2\cdot 1 - 4 = 0$
Stämmer! finns i planet	$2 + 2 - 4 = 0$ Stämmer!	Stämmer

d) För att planet skall vara parallellt, måste det ha samma ~~riktnings vektor~~ Normalvektor men olika D, t.ex. $2x+2y-2z=4$ är parallellt, men ej samma plan som $2x+2y-2z=8$

e) Om man vill ange en linje i planet börjar man med att rita upp det



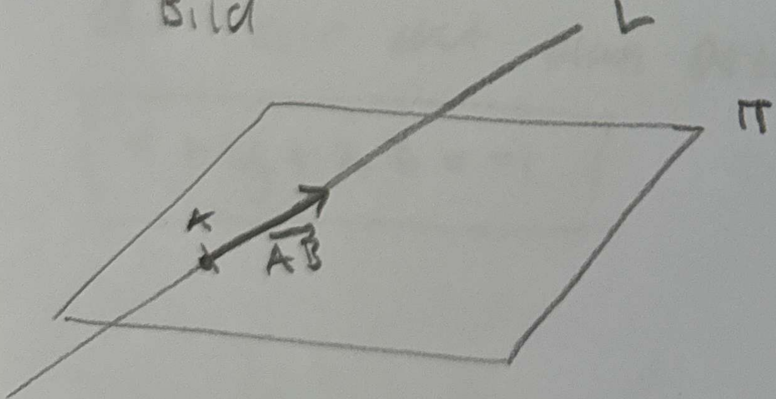
$\pi = 2x+2y-2z=4$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Låt oss välja $\vec{AB}$ som riktningsvektor. Och en punkt, säg $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nu har vi allt för att bilda en linje!

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}}$$

Bild



f) För att planet ska vara vinkelrätt mot nya planet måste normalvektorn vara ortogonal mot πs.

$\pi: 2x + 2y - 2z = 4$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 2y - 2z = 0$

t. ex om $x = 1, y = 1$, och $z = 2$, då är skalärprodukten 0!

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$

Planets nya ekvation är då

$\Pi_2: x + y + 2z + D = 0$

Vi väljer valfri D, tex $= -1$

då blir det plan ortogonal mot π_1,

$$\boxed{x + y + 2z = -1}$$