

7) Antag att  $f$  är en linjär avbildning  
för vilken följande gäller:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm  $f$ 's avbildningsmatris  $A$  i basen  $e$ . Kontrollera ditt svar genom att verifiera att överstående relationer är uppfyllda. Beräkna också  $f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$ .

En avbildningsmatris är

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)]$$

Linearitets egenskaperna ger

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ 2) \quad & f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ 3) \quad & f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$c_1 e_1 + c_2 e_2$  ger

$$f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2$$

$$2f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 \quad , \text{ väntatsvärde}$$

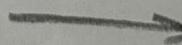
$$\hookrightarrow f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

Sätt nu in i ekvation 2:

$$\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad | -\vec{e}_2, -2\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Nu sätter vi in  $f(\vec{e}_2)$  och  $f(\vec{e}_3)$  i ekvation 1  
för att få  $f(\vec{e}_1)$



Så vi har

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\text{Sätt in i: } f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) \stackrel{2 \cdot 2}{=} 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

Börja med  $f(\vec{e}_1)$

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \quad | -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3;$$

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

Sätt nu in  $f(\vec{e}_3)$

$$f(\vec{e}_1) + 2(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_1) = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3 \quad | +2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$$

Då vet vi att

$$f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Aubilagsmetoden A blir då

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Och  $f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = (2\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) =$   
 $= \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 1\vec{e}_3$

Svar:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\Omega} \quad f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 1\vec{e}_3$$