FÖRELÄSNING 2:

1) Gränsvärde för funktioner av flera variabler

Definition:

Låt $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Vi säger att:

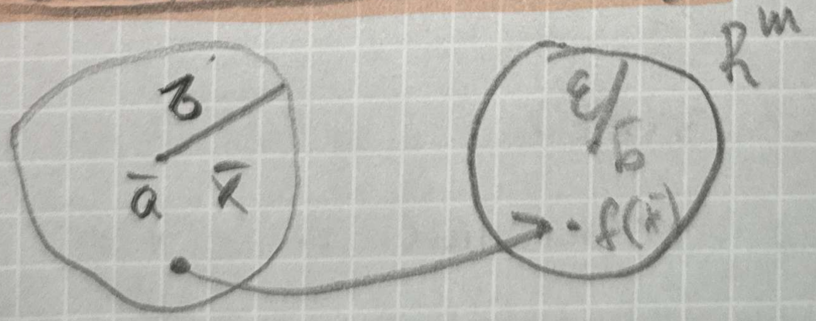
$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$$

OM för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådan att

$$|f(\bar{x}) > \varepsilon| \text{ om } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta, \ \bar{x} \in D_f$$

Tolkning: Vi säger att $\bar{f}(\bar{x})$ närmar sig $\bar{b}$ då $\bar{x} \to \bar{a}$ om för givet att för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådan att $|f(\bar{x}) > \varepsilon|$ och $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, $\bar{x} \in D_f$

Geometrisk tolkning:



Faktum: $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) = \bar{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

Då gäller ekvivalens:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_i(\bar{x}) = \bar{b}, \ i \le m$$

Exempel med $\varepsilon - \delta$ + satser

Visa att: $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2) = a_1$

Lösning:

Betrakta godtyckligt $\varepsilon > 0$ och $\delta = \varepsilon$ och observera:

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < \delta$$

Då gäller särskilt:

$$|x_1-a_1| < \delta = \varepsilon$$

Men: $|f(x_1,x_2)-a| = |x_1-a_1| < \varepsilon$

SATS: Vanliga räkneregler från envariabel-analysen gäller fortfarande:

- Summa
- Produkt
- Kvot
- Instängningssatsen

Förtydligande:

1) $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})\cdot g(\bar{x}) = 0$ om $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = 0$ och $g(x)$ är begränsad nära $\bar{a}$.

2) Sammansättningsregeln om $\bar{f}(\bar{x}) \to \bar{b}$ då $\bar{x}\to\bar{a}$ och $\bar{g}(\bar{y}) \to \bar{c}$ då $\bar{y}\to\bar{b}$ så är följande:

$$g(f(\bar{x})) \to \bar{c} \quad \text{då } \bar{x}\to\bar{a}$$

Exempel: Insättning i uttrycket

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(\frac{xy+1}{x^2+y}\right) = \frac{1\cdot 2+1}{1^2+2} = \frac{3}{3} = 1$$

Exempel: Begränsad kvot

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \left(\frac{u^2\cdot v}{u^2+v^2}\right) = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = G \text{ (gränsvärde)}$$

Sätt $V = \left(\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)\cdot v \to 0$ då $(u,v)\to(0,0)$ enligt 1)

Kvoten måste vara begränsad, ≤ 1

Här gäller: $0 \leq \frac{u^2}{u^2+v^2} \leq 1$

Men $v \to 0$ så
Drf går hela mot 0.

Svar: $G = 0$

Exempel: Sammansättning flytta punkt till origo.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}\right) = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right]$$

Sätt $u = x-1$ och $v = y+1$ Då gäller
$(x,y)\to(1,-1) \Leftrightarrow (u,v)\to(0,0)$

Uttryckt blir $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \left(\frac{u^2v}{u^2+v^2}\right)$

$\longrightarrow$

$\bar{f}(x,y) = (x-1, y+1)$ och vidare

$\bar{g}(u,v) = \frac{u^2 v}{u^2+v^2}$

$\bar{f}(x,y) \to \underbrace{(0,0)}_{\bar{b}}$ då $(x,y) \to \underbrace{(1,-1)}_{\bar{a}}$

och

$\bar{g}(u,v) \to 0$ då $(u,v) \to 0$

$g(\bar{f}(x,y)) = \left(\frac{(x-1)^2 (y+1)}{(x-1)^2 (y+1)^2}\right) \to 0$

då $(x,y) \to (1,-1)$

Varför?

För $\left(\frac{u^2 \cdot v}{u^2+v^2}\right) = \left(\frac{u^2}{u^2+v^2}\right) v$

om $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \left(\frac{u^2}{u^2+v^2}\right) v \to 0$

eftersom $v \to 0$ går hela

gränsvärdet och blir noll

Varför blir G för $g(\bar{f}(x,y)) = 0$

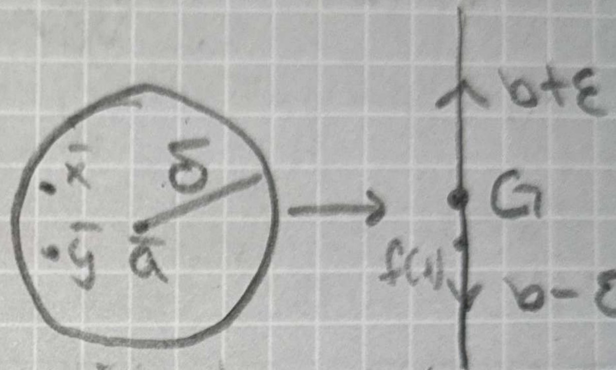
För att $g(u,v) \to$ $\Rightarrow g(\bar{f}(x,y)) \to 0$

Exempel: När G saknas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

Allmän geometri:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = b$$

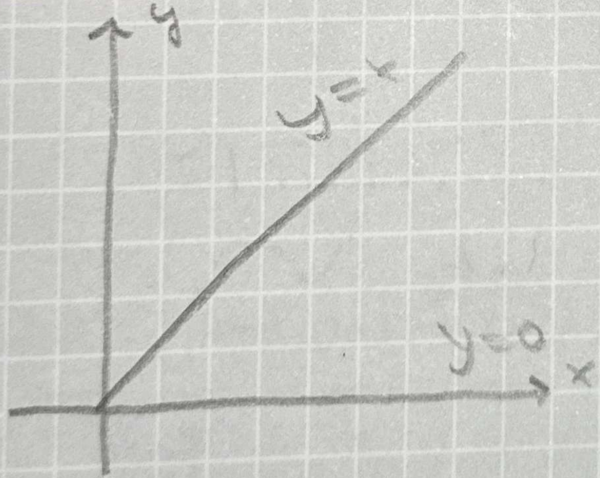


Vi ser att varje punkt som avbildas i intervallet

OBS: $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \\ f(\bar{y}) \end{array}\right\}$ är ε-närmare b

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < 2\varepsilon$$

TEST



1) Gå mot origo längs x-axeln (0,0) i $y=0$

Så $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$

2) Gå längs (0,0) längs $y=x$

$$f(x,y=x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$0 \neq \frac{1}{2}$ därför saknas gränsvärdet!

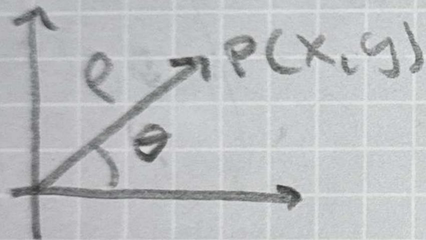
1) Vi kollar alla x då y hålls till 0

2) Vi testar samma värden vilket innebär att $y=x$,

Anmärkning om gränsvärden:

- Om test av värden längs olika riktningar eller kurvor ger olika värden, då saknas gränsvärden
- Test visar endast om gränsvärde finns eller ej

Recap: Polära koordinater



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

SATS

Om $|f(x,y) - A| \le \psi(\rho)$ där $\psi(\rho) \to 0$ då $\rho \to 0$ så är: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$

Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) \to f(x,y)$$

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0\right| \le \frac{\rho^3}{\rho^2} = \rho = \psi(\rho), \text{ OBS}$$

$\psi(\rho) \to 0$ då $\rho \to 0$

Motivering:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Polära koordinater

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad x^2+y^2 = \rho^2}$$

$x^3 = \rho^3\cos^3\theta$

$x^2+y^2 = \rho^2$

Därför blir:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \left(\frac{\rho^3}{\rho^2}\right)\cos\rho = \rho\cos^3\rho$$

ρ = Avståndet till origo

När man går mot $(0,0)$ betyder att ~~att~~ $x \to 0$ och $y \to 0$

Då går även: $\rho^2 = x^2+y^2$

$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+0^2}$

Alltså pga $(x,y) \to 0$ så $\rho \to 0$

Därför blir $A=0$, alltså gränsvärdet blir noll

Exempel: 3 variabler

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}\right)$$

$$A = f(x,0,0) = \frac{x\cdot 0\cdot 0}{x^2+0^2+0^2} = \frac{0}{x^2} = 0 = A$$

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}\right| \leq \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}{x^2+y^2+z^2}$$

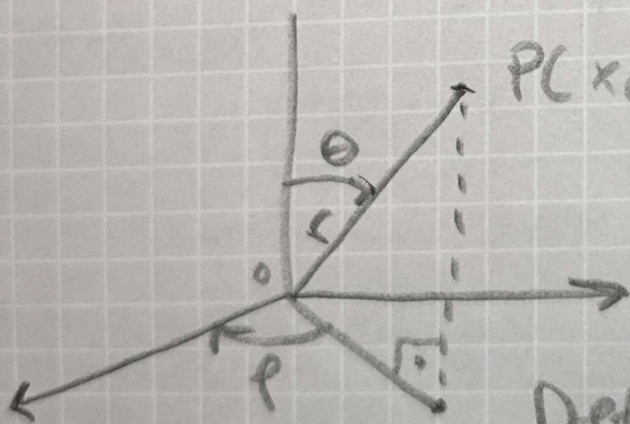
OBSERVERA ATT: Pythagoras sats

$$|x|, |y|, |z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$-\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\to 0} \leq \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\to 0}$$

Alltså är gränsvärdet 0!

Definition: Sfäriska koordinater



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{array}{|l} r > 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

Detta är definitionen av sfäriska koord-inater.

Tillbaka till exemplet

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = \begin{bmatrix} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{r^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2 + r^2\cos^2\theta} \leq 1$$

$\boxed{\text{OBS: Tänk } (x^2+y^2+z^2)+z^2}$

Så $\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}\right| \leq r = \psi(r),\ \psi(r) \to 0$

då $r \to 0$

Så det medför att gränsvärdet blir 0.

SISTA →

KONTINUITET

Definition:

$\bar{f}: R^n \to R^m$ är kontinuerlig i $\bar{a} \in R^n$ om $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{a})$

Exempel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

OBSERVERA: f är kontinuerlig i $(0,0)$ därför att $f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = 0$

Även f är kontinuerlig på R^2

SATS: Varje kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar största och minsta värde.

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Betrakta på mängden $M = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

OBSERVERA, M är kompakt, enligt sats antar f största/minsta värde på M.

Beteckning: restriktion

$$f\big|_{x\text{-axeln}} = f(x,0)$$

$$f\big|_{y\text{-axeln}} = f(0,y)$$

Dessa är våra restriktioner som ger oss våra kandidater.

Förtydligande av Sats

$$|f(x,y) - A| \leq \psi(\rho)$$

Vi säger att $\psi(\rho) \to 0$ då $\rho \to 0$,
Så då undrar man, vad är ρ?

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, och $\rho^2 = x^2 + y^2$

Detta är polära koordinater

Om vi har att $(x,y) \to (0,0)$
Då måste $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0+0}$
altså $\rho \to 0$ då $(x,y) \to 0$

Förtydligande: kontinuitet

En funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i punkten (a,b) om och endast om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

T.ex

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \neq (0,0) \\ 0 & = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} (x^2+y^2) = 0$$

och

$$f(0,0) = 0$$

Alltså stämmer det att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

och funktionen är då kontinuerlig i varje punkt