

FÖRELÄSNING 3

Partiella derivator & differentierbarhet

Partiella derivator

$f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \in D$ (En öppen mängd)

DEFINITION:

$$f'_x(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

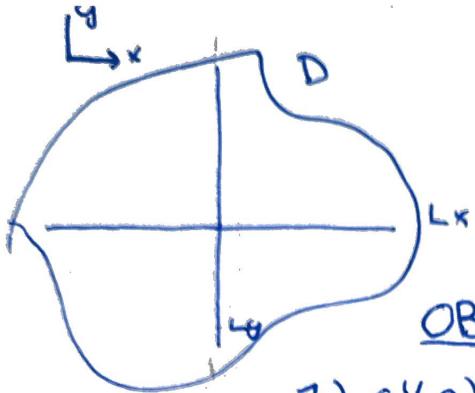
Detta är den partiella derivatan av funktionen f i (a,b) m.a.p. x

EX:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - (0,0)}{h} \\ &= \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Alltså är den partiella derivatan i denna punkt i origo, 0.



Vi antar restriktioner:

$$f|_{Lx} = f(x, b) = g(x)$$

OBS:

$$\begin{aligned} 1) \quad g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \\ &= f'_x(a, b) \end{aligned}$$

$$2) \quad f'(x, y) = (f(x, y))'_x$$

Här deriverar vi m.a. p x och häller y, fryst. SE exempel:

$$\text{EX: } f(x, y) = 3x^2y - \cos(xy)$$

Beräkna $f'_x(x, y) =$ / frys y, och derivera
m.a. p x som i svar

$$f'_x = 6xy + \sin(xy) \cdot (xy)'_x$$

$$= 6xy + \sin(xy)y$$

Analogt inför man partiell derivata
av f m.a. p. y i (a, b), $f'_y(a, b)$

• $f'_y(x, y)$ | Och även partiella derivator
av 3 variabler etc:
 f'_x, f'_y, f'_z

$$\text{EX: } f(x, y, z) = z \cdot e^{xy}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'_x &= [\text{frys } y \text{ o } z, \text{ derivera m.a.p. } x] \\ &= z e^{xy} \cdot y \quad \text{OBS: Kedjeregeln} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'_y &= [\text{frys } x \text{ o } z, \text{ derivera m.a.p. } y] \\ &= z e^{xy} \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'_z &= [\text{frys } x \text{ o } y, \text{ derivera m.a.p. } z] \\ &= e^{xy} \quad \text{OBS: } xy \text{ är som en konstant där försättsinna.} \end{aligned}$$

Högre derivator: $f(x, y)$

$$\bullet (f'_x)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\bullet (f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$\bullet (f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

OBSERVERA:

∂ : används i flervariabelsanalys.
Och har samma betydelse som
 d i envariabels analys

OBSERVERA Ordningen på de två
sista derivatorna

Ett exempel på beteckningar

$$\cdot f'''_{xxy} = f^{(3)}_{xxy}$$

Ex: $f(x,y) = e^{2x+y^2}$

$$\cdot f'_x = e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_x = e^{2x+y^2} \cdot 2$$

OBSERVERA, när vi deriverar med x hanteras alla andra variabler som konstanter som förs vinner vid deriveringens.

$$\cdot f'_y = e^{2x+y^2} \cdot 2y$$

$$\cdot f''_{xy} = (f'_x)'_y = (e^{2x+y^2} \cdot 2)_y = e^{2x+y^2} \cdot 2y$$

$$\cdot (f'_y)'_x = f''_{yx} = (e^{2x+y^2} - 2y)'_x \\ = e^{2x+y^2} \cdot 4y$$

OBS
de är
lika.

DEFINITION:

$f \in C^k$ om alla r:te derivator $r \leq k$ är kontinuerliga funktioner

$C^k = "k$ gånger deriverbar & derivatorna är kontinuerliga upp till ordning $k."$

SATS: $f(x,y)$, om $f \in C^2$ ($\equiv f, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xx}, f''_{yy}$ är kontinuerliga)
Så är:

$f''_{xy} = f''_{yx}$ (ordningen saknar betydelse.)

Ex: Bestäm om det är möjligt att alla funktioner $f(x,y)$ och $g(x,y)$

$$f'_x = 2x+y = p(x,y) \quad (1)$$

$$f'_y = x+2y = q(x,y) \quad (2)$$

OBSERVERA: Lösning till systemet kallas potential till (p,q)

Lösning: Välj (1), tryss ut, Ω integrera mot x

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x+y, \quad \underline{f} = \int f'_x dx = \int (2x+y) dx \\ &= x^2 + yx + C(y) \end{aligned} \quad (3)$$

OBSERVERA: Det är ej en vanlig konstant, C , utan C beror på y . Pga vi tryser y så C blir en funktion av y .

- Diffrivera (3) med y , Ω jämför med (2) vi vill anta leta efter $C(y)$

$$f'_y = (x^2 + yx + C(y))'y = [x + C'(y)] \stackrel{(2)}{=} x+2y$$

$$\Rightarrow C'(y) = 2y \Rightarrow C(y) = \int 2y dy = y^2 + d, \text{ där } d \text{ är en godtycklig konstant.}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + yx + y^2 + d, d \in \mathbb{R}$$

OBSERVERA: Man kan visa att potential existerar, $C(y)$:

Ex:

$P'_y = Q'_x$	$\begin{aligned} f'_x &= xy = p & \text{OBS: } P'_y = x \neq y = Q'_x \\ f'_y &= x^2 = q & \Rightarrow \text{Systemet saknar lösningar.} \end{aligned}$
---------------	---

DIFFERENTIERBARHET

OBSERVERA: I envariabels analysen säger vi att om $f(x)$ är deriverbar i a , då är f kontinuerlig i a .

Flervariabels analys:

Om $f(x,y)$ har partiella derivator:

- $f'_x(a,b)$
- $f'_y(a,b)$

Så garanteras ej kontinuitet av $f(a,b)$

Ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Repetera att $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$
men $f(x,y)$ är diskontinuerlig i origo
ty. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy / x^2+y^2)$ existerar ej

Och därmed är f diskontinuerlig i t.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \left[\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right] \text{Polära koordinater}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos\theta \sin\theta)$$

= finns ej gränsvärde

DEFINITION:

$f(x,y)$ är differentierbar i (a,b) om det finns två tal $A \in B$ s.a

$$(*) \Delta(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$\rightarrow 0$ då $(h,k) \rightarrow (0,0)$

I så fall gäller det att att:

- $f'_x(a,b) = A$
- $f'_y(a,b) = B$

EX: Visa att $f(x,y) = xy$ är differentierbar i $(1,1)$ enligt definitionen.

Bevis: $\frac{(1+h)(1+k) - 1 - 1 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \stackrel{f'_x \quad f'_y}{\longrightarrow} ?$

$$= \frac{1 + h + k + hk - 1 - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow ?$$

då $(h,k) \rightarrow 0$

OBSERVERA:

$$\frac{h \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \xrightarrow[0]{} 0 \text{ då } (h,k) \rightarrow (0,0) \Rightarrow V.h.V$$

Begränsat, t.g. $\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$

Tydligare förklaring

Vi försöker visa att:

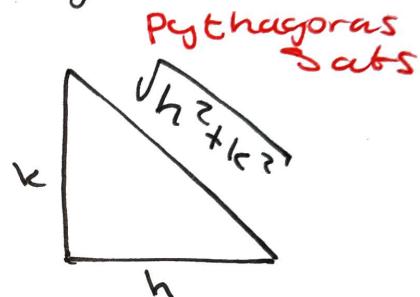
$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (h,k) \rightarrow (0,0)$$

Alltså hk domineras, ju närmare talen vi anger, desto kryper uttrycket mot 0.

Nyckeln: Geometrin

Tänk en triangel

- kateter h och k
- hypotenusan $\sqrt{h^2+k^2}$



Vi ser att:

$$\sqrt{h^2+k^2} \geq |h| \text{ och } \sqrt{h^2+k^2} \geq |k|$$

$$\frac{|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = |k| \cdot \boxed{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}$$

Nämnaren dominerar: högst
högst större

Alltså oavsett tal i täylaen kommer hela uttrycket antid kunna bli max 1 eller mindre!

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ta tillbaka} \\ |k| \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} |k| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |k| \end{array} \right|$$

$$\text{D.v.s.} \quad \left| \frac{hk}{h^2+k^2} \right| \leq |k|$$

OBSERVERA:
 $h \rightarrow 0 \quad \underline{\Omega} \quad k \rightarrow 0$

så $|k| \rightarrow 0$
Därför är gränsvärdet 0

SATS:

" $f \in C^1 \Rightarrow f$ är diff $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f$ är partielt deriverbar
 $(f'x, f'y)$ är kontinuerlig" $\stackrel{(3)}{\Rightarrow}$ f är kontinuerlig

2) Om f är differentierbar är f även partielt deriverbar.

3) Om f är differentierbar är f även kontinuerlig.

4) Att f är partielt deriverbar medför ej att f är kontinuerlig.

5) Att f är kontinuerlig medför ej att f är partielt deriverbar.

Beweis (3):

$$(*) \Rightarrow 0 = f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - bk - x(h, k)$$

$\cdot \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$

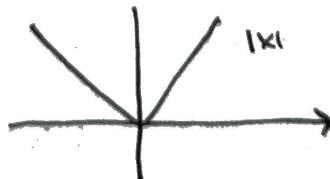
Konst gränsvärde $\rightarrow 0$
då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

OBSERVERA:

$f(a+h, b+k) \rightarrow f(a, b)$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$
 $\Rightarrow f$ är kontinuerlig i (a, b)

(5) Betrakta $f(x, y) = |x|$, OBS: $f'_x(0, 0)$

Saknas:



EX: $f(x,y) = xy$ är differentierbar i vilken punkt som helst i planet.

OBS: $f'_x = y \quad \text{och} \quad f'_y = x$ är kontinuerliga funktioner, f är kontinuerlig $\Rightarrow f \in C^1$ (på hela planet)

(Satsen visar på stärendet)

Uttrycket $f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k$
 $= df(a,b)(h,k)$ kallas för
differentianlen av f i (a,b)

OBSERVERA: Denna är en linjär funktion m. a. P. h,k

Kort beteckning: $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

Ex:

$$f(x,y) = x^2 \cdot y, df = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy$$

Feluppskattning med Df

Om $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \subseteq f$ är differentierbar så är:

$$(*) f(\bar{x} + \bar{\Delta x}) - f(\bar{x}) =$$

$$= f'_{x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \cdot \Delta x_n + \underbrace{x(\bar{\Delta x}) \cdot 1 \Delta x_1}_{\approx}$$

OBSERVERA: Detta termunns \approx går mot 0.

\approx

$$f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x}) \approx f'_x_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + f'_x_n \cdot \Delta x_n$$

Delta är differentiell
 $df(\Delta x)$