FÖRELÄSNING 4
KEDJEREGELN o PDE

Envariabelsanalys

$$f(t),\ g(x),\ f(g(x)) = (f\circ g) = h(x)$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ex: $\sin(2x + x^2)$

$$\frac{d(\sin(2x+x^2))}{dx} = \overbrace{\cos(2x+x^2)}^{f'(g(x))} \cdot \overbrace{(2+2x)}^{g'(x)}$$

yttre derivata inre der.

GENERALISERING TILL FLERVARIABELANALYS

$$\begin{tikzcd}
 & f(g(\bar{x})) \arrow[dr] & & \\
f(g(x)) \arrow[ur, "(1)"] \arrow[dr, "(2)"'] & & f(\bar{g}(x)) \arrow[r] & \bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) \\
 & f(\bar{g}(\bar{x})) \arrow[ur, "(3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

I Näst-kommande Sidor presenteras exempel på generaliseringarna.

(1) $g(x,y)$, $f(t)$, $f(g(x,y)) = h(x,y)$

Partiell derivatan blir:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left| \text{frys } y \right| = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \left| \text{frys } x \right| = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

Som vi noterar är detta simpelt kedjeregeln från envariabelsanalys.

<u>EX: $\cos(xy) = h(x,y)$</u>

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h'_x = -\sin(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = h'_y = -\sin(xy) \cdot x$$

EX: visa att $x \cdot h'_x - y h'_y = 0$
$\forall\, h(x,y) = f(xy)$ där $f(\cdot)$ är en envar funktion

Bevis: $h'_x = f'(xy) \cdot y$ & $h'_y = f'(xy) \cdot x$

Insättning ger:

$$x \cdot f'(xy) y - y f'(xy) x = 0$$

<u>OBSERVERA</u>: Detta gäller för $h(x,y) = \cos(xy)$

(2) $\bar{g}(x) = (g_1(x), g_2(x))$, $f(s,t)$

$$f(\bar{g}(x)) = f(g_1(x), g_2(x)) = h(x)$$

$$h'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{h(x+t) \cdot h(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{g_1(x+t)}^{=s+h}, \overline{g_2(x+t)}^{=k+h}) - f(\overline{g_1(x)}^{=s}, \overline{g_2(x)}^{=t})}{t}$$

Låt g_1, g_2 derivera i x:

$$g_1(x+t) - g_1(x) = g_1'(x) \cdot t + t$$

(2) f är en funktion av 2 variabler $f(s,t)$

$\bar{g}(x) = (g_1(x), g_2(x))$ g stoppar in ett x och ger 2 tal

Vi vill studera sammansättningen:

$(f \circ g)(x) = f(g_1(x), g_2(x))$

Derivatans definition:

$$\frac{d\, f(\bar{g}(x))}{dx} = \lim_{l \to 0} \frac{f(g_1(x+l), g_2(x+l)) - f(g_1(x), g_2(x))}{l}$$

vi byter nu beteckningar:

$$\left[\begin{array}{ll} s = g_1(x) & \& \quad t = g_2(x) \\ h = g_1(x+l) - g_1(x) & \& \quad k = g_2(x+l) - g_2(x) \end{array}\right]$$

Då fås istället: $f(s+h, t+k) - f(s,t)$

OM $g_1(x)$ är deriverbar i x så gäller:

$g_1(x+l) - g_1(x) = g_1'(x)l + \underbrace{(\text{liten felterm})}_{O(l^2)}$

$\longrightarrow 0$ då $l \to 0$ vilket medför

$$\frac{g_1(x+l) - g(x)}{l} \to g_1'(x)$$

alltså att g_1 är deriverbar, och det samma gäller för g_2

om $\boxed{f \text{ är differentierbar}}$ kan man approximera:

$\underline{f(s+h, t+k) - f(s,t) \approx f_s(s,t)h + f_t(s,t)k}$

Så därför om f är differenti-erbar i punkten (s,t) gäller:

$$f(s+h, t+k) - f(s,t) =$$

$$= f'_s(s,t)\cdot h + f'_k(s,t)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\alpha(h,k)$$

där $\alpha(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

Så:

$$h'(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left(f'_s(s,t)h + f'_t(s,t)k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\alpha(h,k)\right)$$

$$= \lim_{\tau \to 0} f'_s(s,t)\cdot \underbrace{\boxed{\frac{h}{\tau}}}_{g'_1(x)} + f'_t(s,t)\underbrace{\boxed{\frac{k}{\tau}}}_{g'_2(x)} + \underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{k^2}{\tau^2}}}}_{\text{begränsad}}\cdot\underbrace{\boxed{\alpha(h,k)}}_{0}$$

$$= f'_s(s,t)\cdot g'_1(x) + f'_t(s,t)\cdot g'_2(s,t) \implies$$

$$h'(x) =$$
$$= f_s(g_1(x), g_2(x))\cdot g'_1(x) + f'_t(g_1(x), g_2(x))\cdot g_2'(x)$$

$$= f(g_1(x), g_2(x))$$

OBSERVERA:

detta är endast en härledning.

Simpelt: $\dfrac{df}{dx} = f'_s \cdot s'(x) + f'_t \cdot t'(x)$

(3) $g(x) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$
, $f(s,t)$

$$h(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left| f\,r\,y\,s\,y \right| = f'_s \cdot s'_x + f'_t \cdot s'_t$$

(1) och (2) ger (3)

Låt $\bar{g}(\bar{x}) = \underbrace{(g_1(x,y), g_2(x,y))}_{f(s,t)}$

$f(\bar{g}(\bar{x}))$ = En 2 var - funktion.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{g}(\bar{x})) = f'_s \cdot s'_x + f'_t \cdot t'_x$$

Detta gäller för $n \geq 3$ var.

Detta blir då

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$f'_t = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

Som vi ser är detta simpelt yttre och inre derivatan.

I Matrisform:

$$(f'_x \; f'_y) = (f'_s, f'_t) \cdot \begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix}$$

PARTIELLA DIFFEKVATIONER

LÖS PDE.

$f'_x - f'_y = y - x$, med villkor $f(x,0) = x^3+1$

Börja med att införa nya variabler

$$\begin{cases} s = x+y \\ t = xy \end{cases}, \quad s'_x = 1 \quad s'_y = 1, \quad t'_x = y \quad t'_y = x$$

vi har följande formler:

$$\begin{cases} f'_x = f'_s \cdot s'_x + f'_t \cdot t'_x \\ f'_y = f'_s \cdot s'_y + f'_t \cdot t'_y \end{cases}$$

Insättning ger:

$$\begin{cases} f'_x = f'_s \cdot 1 + f'_t \cdot y = f'_s + f'_t y \\ f'_y = f'_s \cdot 1 + f'_t \cdot x = f'_s + f'_t x \end{cases}$$

$f'_x - f'_y = y - x \quad \Leftrightarrow$

$f'_s + f'_t y - f'_s - f'_t x = y - x$

$f'_t y - f'_t x = y - x$

$f'_t (y-x) = y - x \quad /:(y-x)$

$f'_t = 1$, Nu måste vi integrera f'_t

$f(t,s) = \int f'_t \, dt = t + C(s)$

Gå nu tillbaka till

$f(x,y) = xy + g(x+y)$

$f(x,0) = x \cdot 0 + g(x+0) = x^3+1$

$= g(x) = x^3+1$

tån $s = x+y$

$\Rightarrow g(x+y) = (x+y)^3+1$

$\Rightarrow f(x,y) = xy + (x+y)^3+1$

är lösningen som satisfierar villkorl