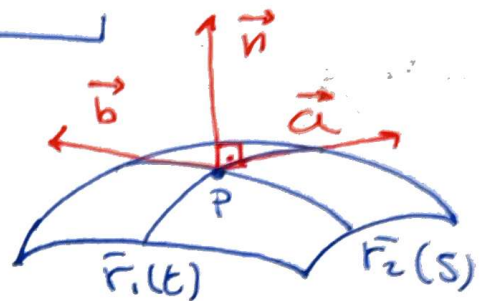
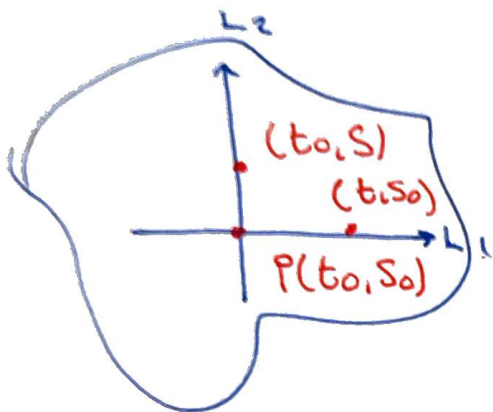


FÖRELÄSNING 6: YTOR OCH TANGENTPLAN

2D yta i \mathbb{R}^3 på parameterform

- $\bar{r}(t,s): \mathcal{D} \subset \mathbb{R}_{t,s}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $\bar{r}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$

differentierbar



Restriktion

$$\bar{r}|_{L_1} = \bar{r}(t, s_0) = \bar{r}_1(t) \quad \bar{r}|_{L_2} = \bar{r}(t_0, s) = \bar{r}_2(s)$$

$$\text{här } \bar{a} = \frac{d\bar{r}_1(P)}{dt}, \quad \bar{b} = \frac{d\bar{r}_2(P)}{ds}, \quad \bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$$

ALLTSÅ

\bar{n} och P definierar ett plan π som går genom punkten P med normalen \bar{n} .

[π kallas för ett tangentplan till ytan i P .]

Om $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ och $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ så har π ekvation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

EX: Bestäm ekvationen för tangent
planet till ytan:

$$\bar{r}(u,v): \begin{cases} x = 2 \cos u \sin v \\ y = u \cos u \cos v \\ z = 2 \sin u \end{cases}, \quad P = \bar{r}(\pi/4, \pi/4)$$

OBSERVERA:

$$P = \bar{r}(u = \frac{\pi}{4}, v = \frac{\pi}{4}) = (1, 2, \sqrt{2}), \text{ finn nu } \underline{\bar{n}}!$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(u) &= \bar{r}(u, \pi/4) = (2 \cos u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 \cos u \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \sin u) \\ &= (\sqrt{2} \cos u, 2\sqrt{2} \cos u, 2 \sin u) \end{aligned}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{r}_1(P)}{du} = \frac{d\bar{r}_1}{du} = (-\sqrt{2} \sin u, -2\sqrt{2} \sin u, 2 \cos u)$$

$$\bar{a} = \bar{r}'_1(\pi/4) = (-1, -2, \sqrt{2})$$

$$\bar{b} = \bar{r}'_2(\pi/4) = (1, -2, 0)$$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{a} \perp \bar{n} \text{ o } \bar{b} \perp \bar{n}$$

$$\Pi = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$2\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2}(y - 2) + 4(z - \sqrt{2}) = 0$$

DETTA är planets ekvation, tangentplanet.

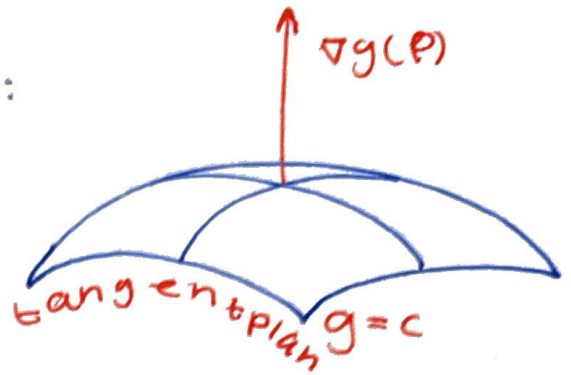
NIVÅ KURVOR

$$g(x, y, z) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Betrakta en kurva på ytan:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$g(\vec{r}(t)) = c \quad \forall t$$



Vi vet sedan tidigare att:

$$\nabla g(P) \cdot \vec{r}'(P) = 0 \Rightarrow \nabla g(P) \text{ är normalvektorn till ytan}$$

$$\nabla g = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

Tangentplanet blir då:

$$f'_x(x-a) + f'_y(y-b) + f'_z(z-c) = 0$$

z blir

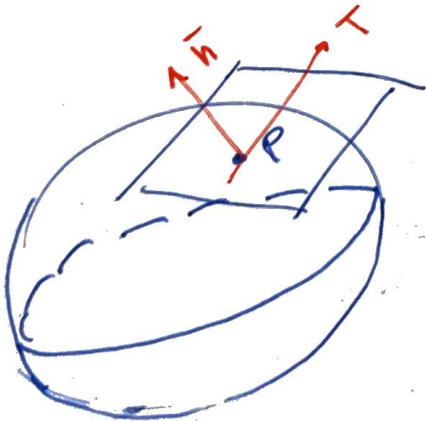
$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)$$

EX: Betrakta ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (sfär)

$$\text{Inför nu } g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Notera att sfären är en nivåyta till funktionen g .

Betrakta punkten $P = (2/3, 1/3, 2/3) \in \text{sfären}$



$$\vec{n} = \nabla g = 2(x, y, z)$$

$$\nabla g(2/3, 1/3, 2/3) = 2(2/3, 1/3, 2/3)$$

$$\sim (2, 1, 2) \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tangentlinjen blir

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$2(x - \frac{2}{3}) + 1 \cdot (y - \frac{1}{3}) + 2(z - \frac{2}{3}) = 0$$

GRAFER I 3DRUM

$$z = f(x, y)$$

vi kan skriva detta som

$$f(x, y) - z = 0$$

Detta kan vi se som en tre-variabels funktion

$$g(x, y, z) = \underline{f(x, y) - z = 0}$$

Grafen g är alltså en nivåyta, $g=0$

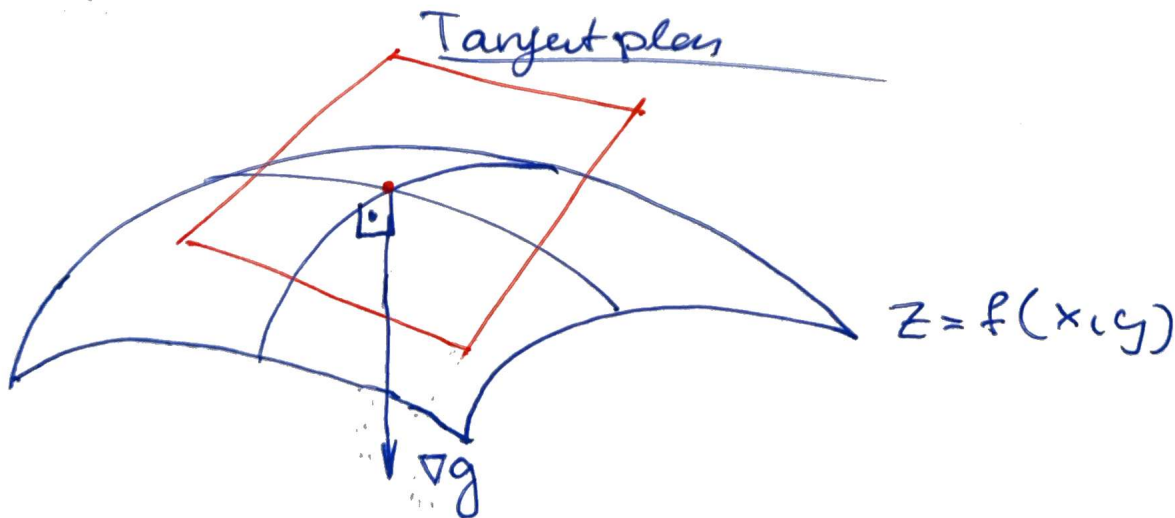
$$\nabla g = (f'_x, f'_y, f'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$$

G kan tolkas som värdemängden till y tan:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = f(t, s) \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

$\bar{r}(t, s)$ är en 2Dim yta

$$P(a, b, c) \in g \Rightarrow c = f(a, b)$$



$$\text{EX: } f(x, y) = xy, P = (1, 1, 1), z = f(x, y)$$

$$z = f(x, y) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) = 0$$
$$= 1 \cdot 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot (y - 1) = 0$$

$$1 + (x - 1) + (y - 1) = 0 \Rightarrow x + y - z - 1 = 0 \quad \text{är} \\ \text{tangentplanet } T!$$

TAYLORS FORMEL

Av ordning 2 för $f(x, y) \in C^3$

Från Envariabels analys

Om $f(t) \in C^3$ på $(c, a) \subset \mathbb{R}$ och $a \in (c, d)$



$$\text{Då är } f(a+t) = f(a) + \frac{f'(a) \cdot t}{1!} + \frac{f''(a)t^2}{2!} + \frac{f'''(a+\theta(t) \cdot t)}{3!} \\ \theta(t) \in [0, 1]$$

$$P_1(t) = f(a) + f'(a)t \quad \text{Taylorpolynom av ordning 1}$$

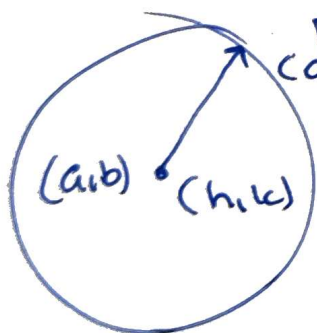
$$P_2(t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f''(a)t^2}{2!} \quad \text{Taylorpolynom av ordning 2.}$$

$$R = \frac{1}{6} f'''(a+\theta(t) \cdot t)t^3 \quad \text{är en restterm.}$$

Om $a=0$ fås Maclaurins formel av grad 2

$$f(t) = f(0) + f'(0) \cdot t + \frac{f''(0) \cdot t^2}{2} + \frac{f'''(\theta(t) \cdot t)t^3}{6}$$

GENERALISERING TILL FLERVARIABLER



Taylorutveckling: Skalar-
produkt

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (h,k) \\ + Hf(a,b) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R$$

$$\Rightarrow f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (h,k) + Hf(a,b) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R$$

Detta blir i sin tur:

$$f(a,b) + f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k + \frac{1}{2} (f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b) \cdot hk + f''_{yy}(a,b)k^2) + O(\sqrt{h^2 + k^2})^3$$

$Q(h,k)$ = kvadratisk form

→

$$P_1(h,k) = f(a,b) + \nabla f(a,b)(h,k)$$

Taylorpolynom
av ordning
1.

$$P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2} (h,k)$$

EXEMPEL

$f(x,y) = \cos(x+2y)$, Taylorutveckla f kring origo.

$$\bullet f(0,0) = 1$$

$$\bullet f'_x = -\sin(x+2y)$$

$$\bullet f'_x(0,0) = 0$$

$$\bullet f'_y = -\sin(x+2y) \cdot 2$$

$$\bullet f'_y(0,0) = -2$$

$$\bullet f''_{xy} = -\cos(x+2y) \cdot 2$$

$$\bullet f''_{xy}(0,0) = -2$$

$$\bullet f''_{yy} = -\cos(x+2y) \cdot 4$$

$$\bullet f''_{yy}(0,0) = -4$$

Taylorutveckling av ordning 2

$$f(h,k) = 1 + 0 \cdot h + 0 \cdot k + \frac{1}{2} (-h^2 + 2(-2)hk + (-4)k^2) + B(h,k) (\sqrt{h^2+k^2})^3$$

där $B(h,k)$ är en begränsad funktion vid 0.

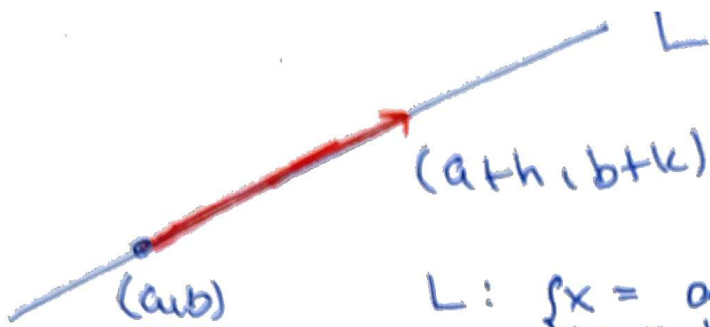
Taylor Polynom

$$P_1(h,k) = 1 \quad \text{Taylorpolynom av ordning 1}$$

$$P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2} (h^2 - 4hk - 4k^2)$$

Taylorpolynom av ordning 2





$$L: \begin{cases} x = a + th \\ y = b + tk \end{cases}$$

Restriktion: $f|_L = (a+th, b+tk) = F(t)$

$$t \in \mathbb{R}, F(t) \in \mathbb{C}^3$$

Betrakta Maclaurin av funktionen F i origo!

$$F(1) = F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0) \cdot 1^2}{2} + \frac{F'''(0) \cdot 1^3}{6}$$

λ ligger mellan $[0, 1]$

$$F(1) = f(a+h, b+k)$$

$$F(0) = f(a, b)$$

$$F'(0) = \nabla f(a, b)(h, k)$$