F1. FLERVARIABELSANALYS

Vektor

- $R^n = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{R}\}$

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$

$t \cdot \bar{x} = (t \cdot x_1, \dots, t \cdot x_k), t \in \mathbb{R}$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_k \cdot y_k$ (skalärp.)

$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$

$|\bar{x} - \bar{y}| \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

OBS: Beräkningen ovan är avstånd

Delmängder till R^n, $n \geq 1$ ($n = 2, 3$)

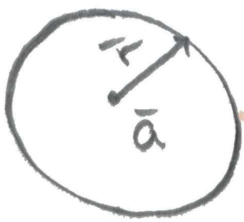
$n = 2$: En cirkel i R^2 med centrum i $\bar{a}$ och med radie $r > 0$:

$\{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| = r\} =$

$= \{\bar{x} \in R^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = r\}$

$\Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$

Bild:



→

Öppen (resp. sluten) cirkelskiva med centrum $\bar{a}$ o radie $r > 0$.

$$\{x \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| < r\} =$$

$$= \{\bar{x} \in R^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r$$

Sluten

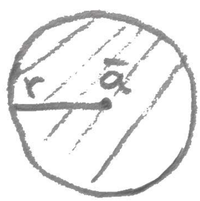
$$\{\bar{x} \in R^2 : |\bar{x} - \bar{a}| \leq r\} =$$

$$= \{\bar{x} \in R^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \leq r\}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2$$

Bild:

Sluten



Öppen

Cirkelskiva

En cirkelskiva i R^2 är alla punkter som ligger inom en cirkel

Förklaring:

Öppen cirkelskiva: alla punkter strikt innanför cirkeln, randen ingår ej

Sluten cirkelskiva: alla punkter innanför cirkeln/randen, randen ingår

$n \geq 3$: Sfär i $\mathbb{R}^3$ med centrum i $\bar{a}$ o radie $r>0$.

$$S(\bar{a},r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : |\bar{x}-\bar{a}| = r\}$$

Öppet klot: i $\mathbb{R}^3$ med centrum i $\bar{a}$ o radie >0

$$K(\bar{a},r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : |\bar{x}-\bar{a}| < r\}$$

Slutet klot: i $\mathbb{R}^3$ med centrum i $\bar{a}$ o radie $r>0$

$$\overline{K}(\bar{a},r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : |\bar{x}-\bar{a}| \leq r\}$$

OBS: $\overline{K}(\bar{a},r) \cup S(\bar{a},r)$ (Snitt)

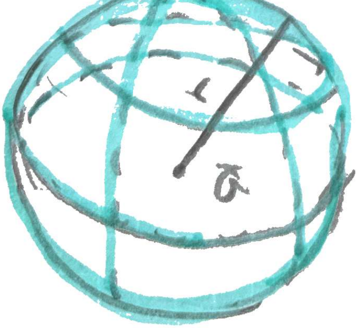
Klot vs Sfär

- **Klot:** är hela innehållet, skalet + innehållet (volymen).

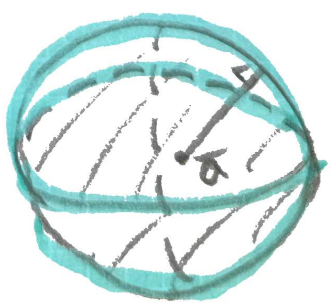
- **Sfär:** är bara ytan, alltså, skalet.

Bild:

Sfär (Skalet)



Klot (skal + V)



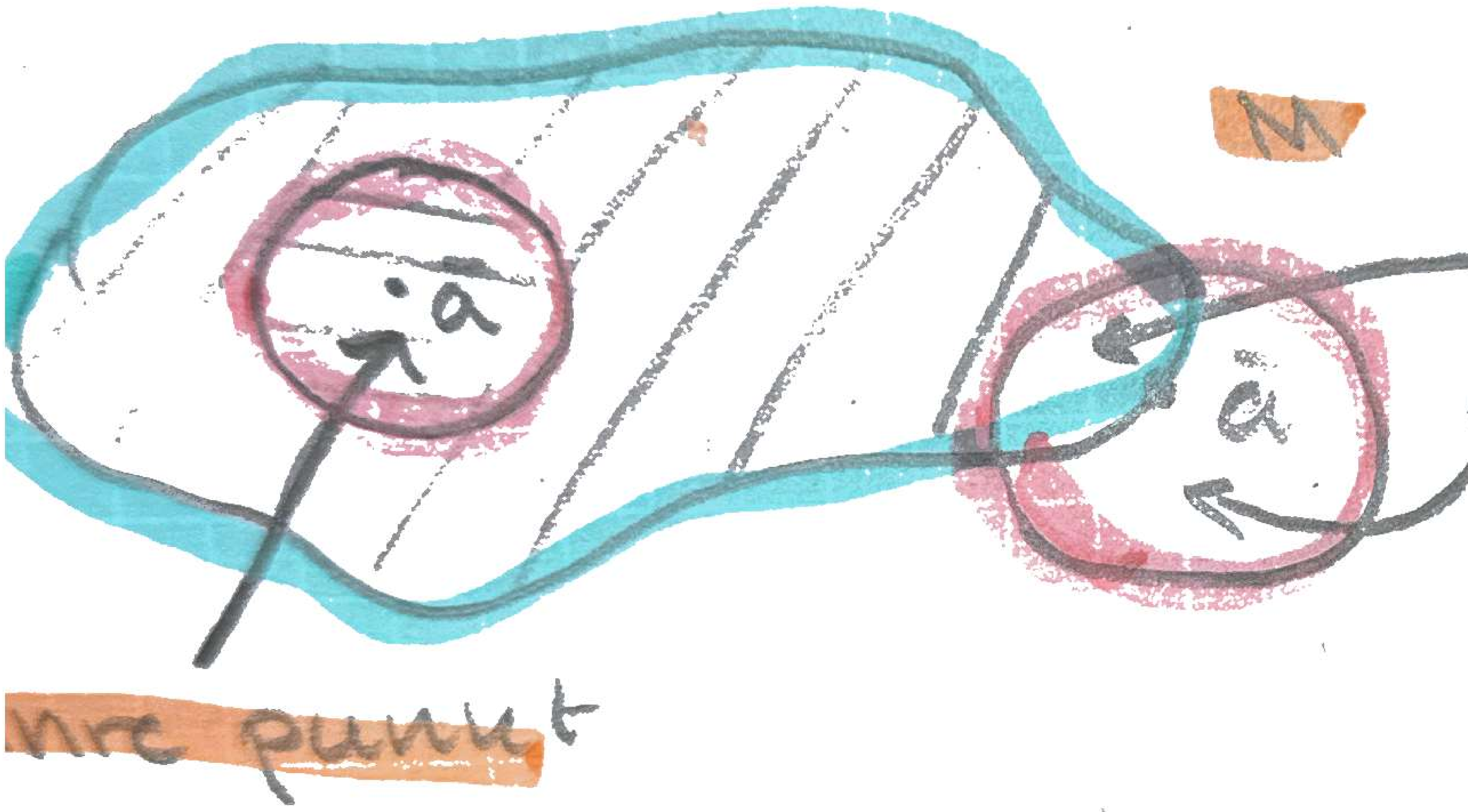
Definition: R^n, $M \subset R^n$, $\bar{a} \in R^n$

nkten $\bar{a}$ sägs vara en inre
nkt till M om det finns ett
tal r

$K(\bar{a}, r)$

å att $K(\bar{a}, r) \subset M$, det inre till M
{alla inre punkter till M}, $\boxed{\text{Int } M}$

Beteckning



En randpunkt till M om varje klot
ring $\bar{a}$ innehåller punkter såväl
från M som CM (= komplement till M)

[Randen till M = {alla randpunkter till M, ∂M}]

Definition: R^n, $M \subset R^n$

Mängd M sägs vara:

- **Sluten** om $Bd\,M \subset M$
- **Öppen** om $Bd\,M \cap M = \emptyset$
- **Begränsad** om det finns ett klot $K(\bar{a}, r)$ sådan att $M \in K(\bar{a}, r)$
- **Kompakt** om M är **sluten** och **begränsad**.

OBS:

- $Bd\,M = Bd\,CM$
- M är sluten <=> CM är öppen

Exempel:

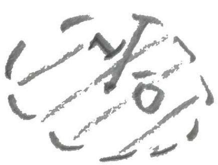
- $M_1 = \{\bar{x} \in R^2 \text{ s.a } |\bar{x}| < 1\}$
- $M_2 = \{\bar{x} \in R^2 \text{ s.a } |\bar{x}| = 1\}$
- $M_3 = \{\bar{x} \in R^2 \text{ s.a } |\bar{x}| > 1\}$

M_1: punkter enast i cirkel

M_2: punkter på randen

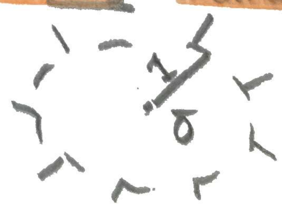
M_3: punkter bara utanför rand & cirkel

M_1



M_2

M_3



$\mathrm{Bd}M_1 = \mathrm{Bd}M_2 = \mathrm{Bd}M_3 = M_2$

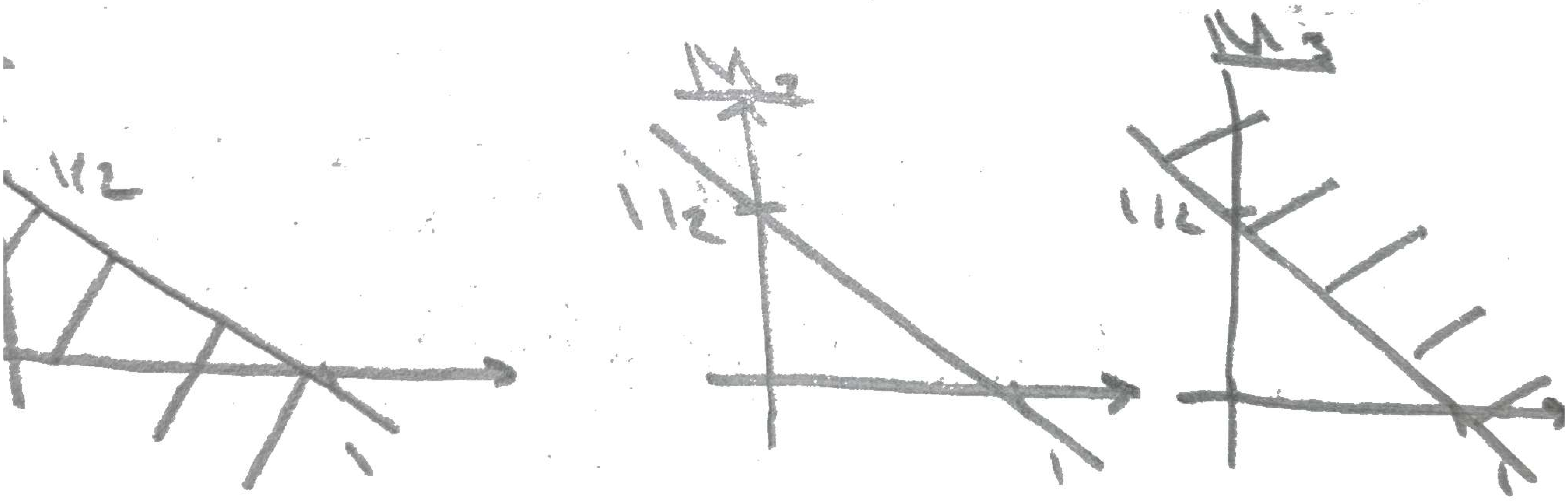
öppen, icke sluten, begränsad, icke kompakt
Sluten, icke öppen, begränsad, kompakt

Exempel:

$M_1 = \{\bar{x} \in R^2 : x_1 + 2x_2 \leq 1\}$

$M_2 = \{\bar{x} \in R^2 : x_1 + 2x_2 = 1\}$

$M_3 = \{\bar{x} \in R^2 : x_1 + 2x_2 > 1\}$



OBS:

$\mathrm{Bd}M_1 = \mathrm{Bd}M_2 = \mathrm{Bd}M_3 = M_2$

M_1: Sluten, icke öppen, icke begränsad, icke-kompakt

M_2: Sluten, icke öppen, icke begränsad, icke-kompakt.

Funktioner av flera variabler

$f : D_f \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- D_f : Definitionsmängden för f
- V_f : $\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n$: det finns $\bar{x} \in D_f$ s.a $\bar{y} = f(\bar{x}) \}$

Värdemängden till funtionen f.

Skalära funtioner

$f : D_f \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

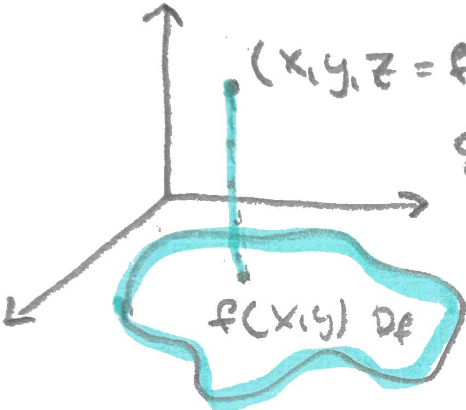
$m = 2 : f(x, y)$

För att åskådligöra f, använder man grafer.

$\text{graf } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$

Det finns olika sätt att rita grafer, bla, punktvis och skärningar

Punktvis:



$(x, y, z = f(x,y)) \in$ graf

(görs för varje punkt från D_f.)

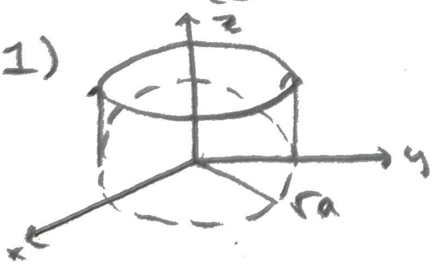
Använd skärningar av grafen med plan:

$z = a \quad x = b \quad y = c$

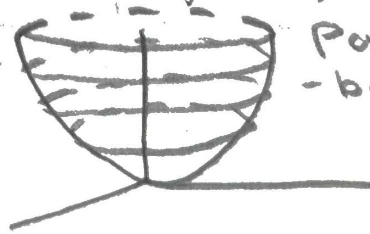
Exempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\underline{z = a}: \begin{cases} z = x^2 + y \\ z = a \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a, \geq 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$

1)



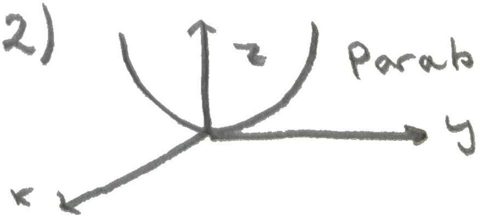
3)



Para-boloid

Om $x = 0: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow z = y^2$

2)



Parabol

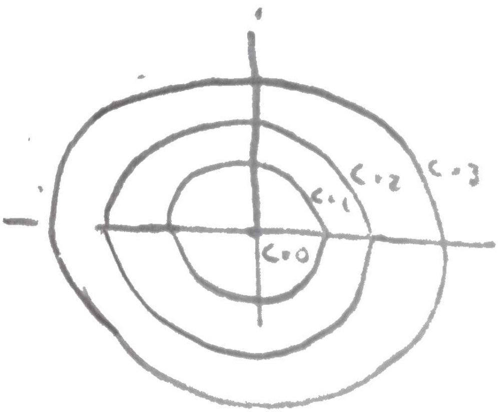
Nivåkurvor:

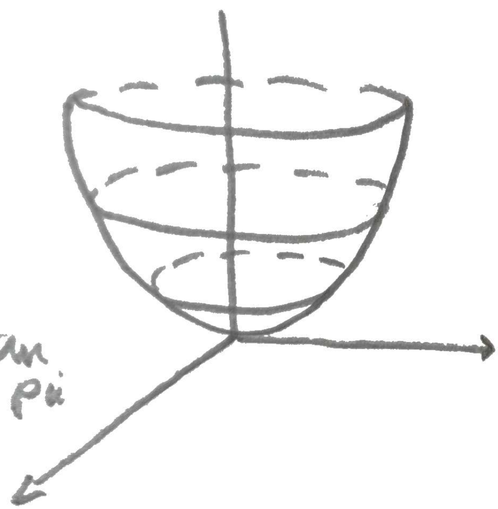
Nivåkurvor är ett sätt att åskådliggöra funktioner:

$$f(x,y) = C, \; C \in \mathbb{R}$$

Exempel:

$\underline{f(x,y) = x^2+y^2}$, $x^2+y^2 = C$, $C>0$





Man kan se det som ett sätt att kolla på en 3 dim graf ovan från

$m = 3$: $f : D_f \subset R^3 \to R$

$f(x, y, z)$, Åskådligör grafen i 3 dim

Nivåkurvor: $f(x, y, z) = C$, $C \in R$

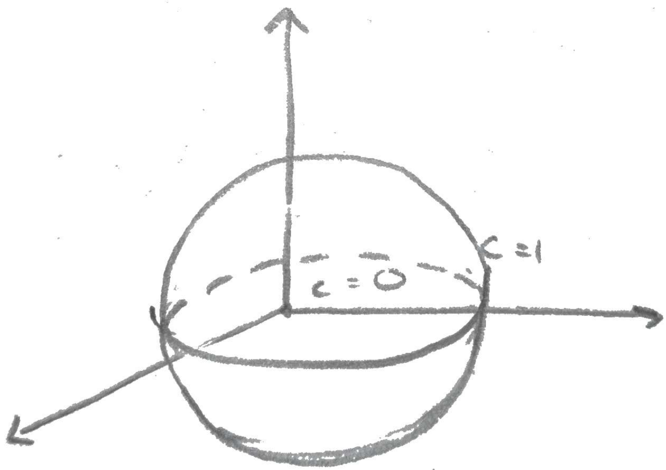
Exempel:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Nivåkurvor: $x^2 + y^2 + z^2 = C$, $C \in R$

$x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{C})^2$, alltså en sfär!

Bild



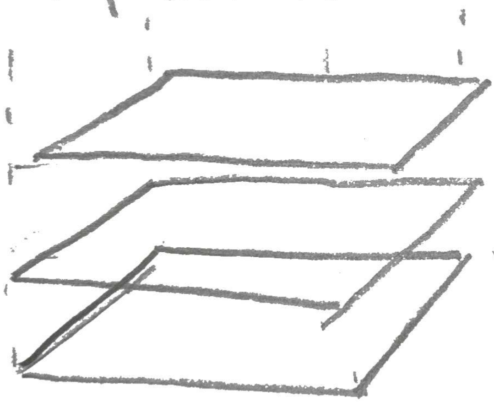
Exempel:

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

Nivåytor:

$$x + 2y + 3z = C$$

Vi noterar ett plan som beror på C, alltså är alla plan oberoende av C, parallella.



OBS: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektorvärda funktioner $\bar{f}$

$\bar{f}: D_f \subset R^m \to R^n$, $n>1$, strikt!

Exempel: Streck ovan visar att det är en vektorvärde funktion

$\bar{f}(x,y) = [f_1(x,y), f_2(x,y) =$
$= (x+2y, x \cdot y) : R^2 \to R^2)]$

Partikulära fall:

1) $\bar{f}(\bar{x}) = A\vec{x}$, $\bar{x} \in R^m$, $A(n \times m)$ matris

Vi noterar ovan att vi har en linjär avbildning från $R^n \to R^n$!

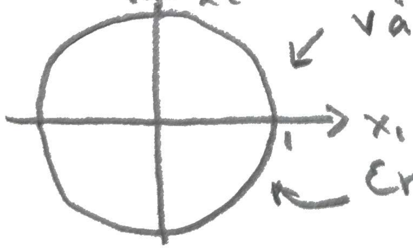
2) $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x), \dots f_n(x)) : R \to R^n$

Notera att ovan är en kurva

Ex:

$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) : R \to R^2$

$\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$



värdemängd av $\bar{x}(t)$

Enhetscirkeln