

# FÖRELÄSNING 3

## Partiella derivator & differentierbarhet

---

### Partiella derivator

$$f(x, y): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \in D \quad (\text{En öppen mängd})$$

### DEFINITION:

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

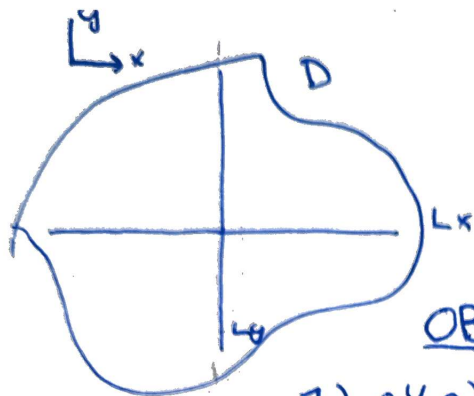
Detta är den partiella derivatan av funktionen  $f$  i  $(a, b)$  m.a.p.  $x$

EX:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Alltså är den partiella derivatan i denna punkt i origo, 0.



vi antar  
restriktioner:

$$f|_{L_x} = f(x, b) = g(x)$$

OBS:

$$1) g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$= f'_x(a, b)$$

$$2) f'(x, y) = (f(x, y))'_x$$

Här deriverar vi m.a.p. x och  
håller y, fryst. SE exempel:

$$\text{EX: } f(x, y) = 3x^2y - \cos(xy)$$

Beräkna  $f'_x(x, y) =$  / frys y, och derivera  
m.a.p. x som i vanl

$$f'_x = 6xy + \sin(xy) \cdot (xy)'_x$$

$$= 6xy + \sin(xy)y$$

Analogt inför man partiell derivata  
av  $f$  m.a.p. y i (a, b),  $f'_y(a, b)$

•  $f'_y(x, y)$  | Och även partiella derivator  
av 3 variabler etc:  
 $f'_x, f'_y, f'_z$

EX:  $f(x, y, z) = z \cdot e^{xy}$

•  $f'_x = [\text{frys } y \text{ o } z, \text{ derivera m.a.p. } x]$   
 $= z e^{xy} \cdot y$  OBS: kedjeregeln

•  $f'_y = [\text{frys } x \text{ o } z, \text{ derivera m.a.p. } y]$   
 $= z e^{xy} \cdot x$

•  $f'_z = [\text{frys } x \text{ o } y, \text{ derivera m.a.p. } z]$   
 $= e^{xy}$  OBS:  $xy$  är som en konstant den försvinner.

Högre derivator:  $f(x, y)$

•  $(f'_x)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

•  $(f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

•  $(f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

OBSERVERA:

2: används i flervariabelsanalys.  
 Och har samma betydelse som  
 d i envariabels analys

OBSERVERA ordningen på de två  
 sista derivatorna

## Ett exempel på beteckningar

$$\bullet f_{xxy}''' = f_{xxy}^{(3)}$$

$$\text{EX: } f(x, y) = e^{2x+y^2}$$

$$\bullet f'_x = e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_x = e^{2x+y^2} \cdot 2$$

OBSERVERA, när vi deriverar m.p.  $x$  hanteras alla andra variabler som konstanter som försvinner vid deriveringen.

$$\bullet f'_y = e^{2x+y^2} \cdot 2y$$

$$\bullet f''_{xy} = (f'_x)'_y = (e^{2x+y^2} \cdot 2)'_y = e^{2x+y^2} \cdot 4y$$

$$\bullet (f'_y)'_x = f''_{yx} = (e^{2x+y^2} \cdot 2y)'_x = e^{2x+y^2} \cdot 4y$$

OBS  
de är  
lika.

## DEFINITION:

$f \in C^k$  om alla r:te derivator  $r \leq k$  är kontinuerliga funktioner

$C^k =$  "k gånger deriverbar & derivatorna är kontinuerliga upp till ordning k."

SATS:  $f(x, y)$ , om  $f \in C^2$  ( $\equiv f, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xx}, f''_{yy}$  är kontinuerliga)  
Så är:

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad (\text{ordningen saknar betydelse.})$$

Ex: Bestäm om det är möjligt) alla funktioner  $f(x,y)$  så att:

$$f'_x = 2x + y = P(x,y) \quad (1)$$

$$f'_y = x + 2y = q(x,y) \quad (2)$$

OBSERVERA: Lösning till systemet kallas potential till  $(p,q)$

Lösning: Välj (1), frys  $y$ , & integrera m.p.  $x$

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x + y, \quad f = \int f'_x dx = \int (2x + y) dx \\ &= x^2 + yx + C(y) \quad (3) \end{aligned}$$

OBSERVERA: Det är ej en vanlig konstant,  $C$ , utan  $C$  beror på  $y$ . pga vi fryser  $y$  så  $C$  blir en funktion av  $y$ .

• Derivera (3) m.p.  $y$ , & jämför med (2) vi vill alltså leta efter  $C(y)$

$$f'_y = (x^2 + yx + C(y))'_y = [x + C'(y)] \stackrel{(2)}{=} x + 2y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C'(y) &= 2y \Rightarrow C(y) = \int 2y dy \\ &= y^2 + d, \text{ där } d \text{ är en godtycklig konstant.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + yx + y^2 + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

OBSERVERA: Man kan visa att potential existerar, t.g.:

$P'_y = Q'_x$		<u>Ex:</u>
		$P'_x = xy = P \quad \text{OBS: } P'_y = x \neq y = q'_x$
		$q'_y = xy = q \quad \Rightarrow \text{Systemet saknar lösning ar.}$

# DIFFERENTIERBARHET

OBSERVERA: I envariabelsanalysen  
Säger vi att om  $f(x)$  är deriverbar  
i  $a$ , då är  $f$  kontinuerlig i  $a$ .

## Flervariabelsanalys:

Om  $f(x,y)$  har partiella derivator:

- $f'_x(a,b)$
- $f'_y(a,b)$

Så garanteras ej kontinuitet av  $f$  i  $(a,b)$

EX:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Repetera att  $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$   
men  $f(x,y)$  är diskontinuerlig i origo  
ty,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy / (x^2+y^2))$  existerar ej  
och därmed är  $f$  diskontinuerlig i  $f$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \begin{bmatrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{Polära koordinater}$$
$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos \theta \sin \theta)$$

= finns ej gränsvärde

## DEFINITION:

$f(x, y)$  är differentierbar i  $(a, b)$  om det finns två tal  $A$  &  $B$  s.a

$$(*) \quad \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$\rightarrow 0$  då  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

I så fall gäller det att:

- $f'_x(a, b) = A$
- $f'_y(a, b) = B$

EX: Visa att  $f(x, y) = xy$  är differentierbar i  $(1, 1)$  enligt definitionen.

Bervis: 
$$\frac{(1+h)(1+k) - 1 - \underset{f'_x}{1 \cdot h} - \underset{f'_y}{1 \cdot k}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \frac{1 + h + k + hk - 1 - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow ?$$

då  $(h, k) \rightarrow 0$

OBSERVERA:

$$\frac{h \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow \forall h, k$$

Begränsat, t.g.  $\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$

## Tydligare förklaring

vi försöker visa att:

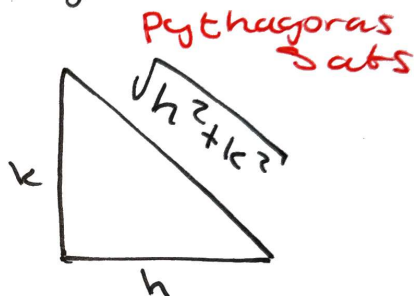
$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (h,k) \rightarrow (0,0)$$

Alltså  $hk$  dominerar, ju närmare talet vi anger, då kryper uttrycket mot 0.

Nyckeln: Geometrin

Tänk en triangel

- kateter  $h$  och  $k$
- hypotenusan  $\sqrt{h^2+k^2}$



vi ser att:

$$\sqrt{h^2+k^2} \geq |h| \text{ och } \sqrt{h^2+k^2} \geq |k|$$

$$\frac{|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = |k| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Nämnumaren dominerar:  $\frac{\text{något}}{\text{något större}}$

alltså oavsett tal i täljaren kommer hela uttrycket alltid kunna bli mer eller mindre!

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ta tillbaka} \\ |k| \end{array} \right| \quad |k| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1 \cdot |k|$$

$$\text{D.v.s. } \left| \frac{hk}{h^2+k^2} \right| \leq |k|$$

OBSERVERA:

$$h \rightarrow 0 \text{ o } k \rightarrow 0$$

$$\text{så } |k| \rightarrow 0$$

Därför är gränsvärdet 0

## SATS:

(1)  $f \in C^1 \Rightarrow f$  är diff  $\Rightarrow$   $f$  är partielt deriverbar (2)  $f$  är partielt deriverbar  $\nRightarrow$   $f$  är kontinuerlig (3)  $f$  är kontinuerlig  $\nRightarrow$   $f$  är diff (4)  $f$  är diff  $\nRightarrow$   $f$  är partielt deriverbar (5)  $f$  är partielt deriverbar  $\nRightarrow$   $f$  är kontinuerlig

2) Om  $f$  är differentierbar är  $f$  även partielt deriverbar.

3) Om  $f$  är differentierbar är  $f$  även kontinuerlig.

4) Att  $f$  är partielt deriverbar medför ej att  $f$  är kontinuerlig.

5) Att  $f$  är kontinuerlig medför ej att  $f$  är partielt deriverbar.

Bevis (3):

$$(*) \Rightarrow 0 = f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - bk - \epsilon(h, k)$$

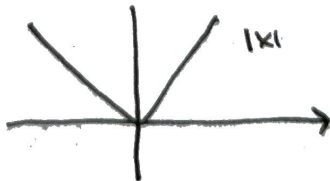
konvergensgränsvärde  $\rightarrow 0$   
då  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

## OBSERVERA:

$f(a+h, b+k) \rightarrow f(a, b)$  då  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$   
 $\Rightarrow f$  är kontinuerlig i  $(a, b)$

(5) Betrakta  $f(x, y) = |x|$ , OBS:  $f'_x(0, 0)$

Saknas:



EX:  $f(x,y) = xy$  är differentierbar  
i vilken punkt som helst i  
planet.

OBS:  $f'_x = y$  &  $f'_y = x$  är kontinuerliga  
funktioner,  $f$  är kontinuerlig  $\Rightarrow$

$f \in C^1$  (på hela planet)

(Satsen visar påståendet)

Uttrycket  $f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k$

$= df(a,b)(h,k)$  kallas för

differentialen av  $f$  i  $(a,b)$

OBSERVERA: Denna är en linjär funktion  
m.a.p.  $h, k$

Kort beteckning:  $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

EX:

$$f(x,y) = x^2 \cdot y, \quad df = 2yx \cdot dx + x^2 dy$$

Feluppskattning med  $df$

Om  $\bar{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$  &  $f$  är  
differentierbar. Så är:

$$(*) \quad f(\bar{x} + \bar{\Delta x}) - f(\bar{x}) =$$

$$= f'_x \cdot \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \cdot \Delta x_n + \underbrace{\chi(\bar{\Delta x}) \cdot |\bar{\Delta x}|}_{\rightarrow 0}$$

OBSERVERA: Detta försummas & går  
mot 0.

$\Rightarrow$

$$f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}) \approx \underbrace{f'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n}_{\text{Detta är differentialet}}$$

Detta är differentialet  
 $df(\Delta \bar{x})$