FÖRELÄSNING 5: GRADIENT & RIKTNINGSDERIVATA

DEFINITION

$f(x_1, \dots x_n)$ är en funktion med gradient
$\text{grad } f = \nabla f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$

$f(x,y)$, $P = (a,b)$, $\nabla f = (f'_x(a,b), f'_y(a,b))$

Hessianen av f

Beteckning: H_f

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}, & \dots, & f''_{x_1,x_n} \\ f''_{x_2x_1}, & \dots, & f''_{x_2,x_n} \\ - & - & - \\ f''_{x_nx_1}, & \dots, & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$ = Andra ordningens partiell derivator.

$f \in C^2$, $\Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$, om $f \in C^2$ är H_f symmetrisk

Ex:

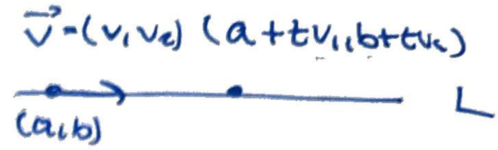
- $f(x,y) = x^2y$ och $P = (1,3)$
- $\nabla f = (2xy, x^2)$, $\nabla f(P) = (2 \cdot 1 \cdot 3, 1^2) = (6, 1)$
- $f''_{xx} = (2xy)'_x = 2y$
- $f''_{xy} = (2xy)'_y = 2x$
- $f''_{yy} = (x^2)'_y = 0$

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

RIKTNINGSDERIVATA AV f i riktning $\bar{v}$

- $f(x,y)$
- $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $|\bar{v}| = 1$
- $P = (a,b)$



$f'_{\bar{v}}(P)$ mäter hur mycket f ändras i $\bar{v}$:s riktning:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv_1,\ b+tv_2) - f(a,b)}{t}$$

ELLER

$$f'_{\bar{v}} = \nabla f \cdot \bar{v}$$

$$f'_{\bar{v}} = f(a+tv_1,\ b+tv_2)$$

EX:

- $f(x,y) = x^2 y$
- $P = (1,3)$
- $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

OBS: $\bar{v}$ måste vara normerad.

$$\nabla f = (2xy,\ x^2),\quad \nabla f\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = (6,1)$$

$$\nabla f \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

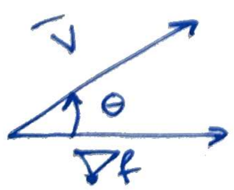
UR DEF av $f'_{\bar{v}}(P)$

Om $f'_{\bar{v}}(a,b) > 0$ så är $\nabla f > 0$ så funktionen växer i $\bar{v}$:s riktning vid punkten P.

Om $f'_{\bar{v}}(a,b) < 0$ så är $\nabla f < 0$ så funktionen avtar i $\bar{v}$:s riktning vid punkten P.

MER

$$f'_{\bar{v}}(P) = \nabla f \cdot \bar{v} = |\nabla f| \cdot \underbrace{|\bar{v}|}_{=1} \cdot \cos\theta = |\nabla f| \cdot \cos\theta$$



1) Om $\theta = 0$ är $f'_{\bar{v}}(P) = |\nabla f(P)|$ störst $\Rightarrow$ $\nabla f(P)$ har samma riktning som $\bar{v}$

2) Om $\theta = \pi$ är $f'_{\bar{v}}(P) = -|\nabla f(P)|$ minst $\Rightarrow$ ∇f har motsatt riktning till $\bar{v}$.

EX:

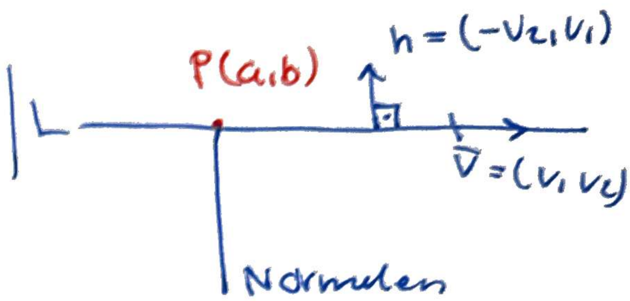
$f(x,y) = x^2 y \quad \nabla f(P) = (6,1)$

f växer som snabbast vid P i riktningen $\nabla f = (6,1)$.

f avtar som snabbast vid P i riktningen $-\nabla f(P) = -(6,1)$

KURVOR

Räta linjer i planet ges av



Linjen definieras av:

$$\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Normalen definieras som

$$\begin{cases} x = a + t(-v_2) \\ y = b + tv_1 \end{cases}$$

Linjen: $(-v_2)(x-a) + v_1(y-b) = 0$

Normalen: $v_1(x-a) + v_2(y-b) = 0$

ELLER ENKLARE FORMULERAT

$\bar{T}$ = Tangentvektor

$\bar{N}$ = Normalvektorn

TANGENT linjen ges av:

$\bar{N} \cdot (x-a, y-b)$

NORMALlinjen ges av:

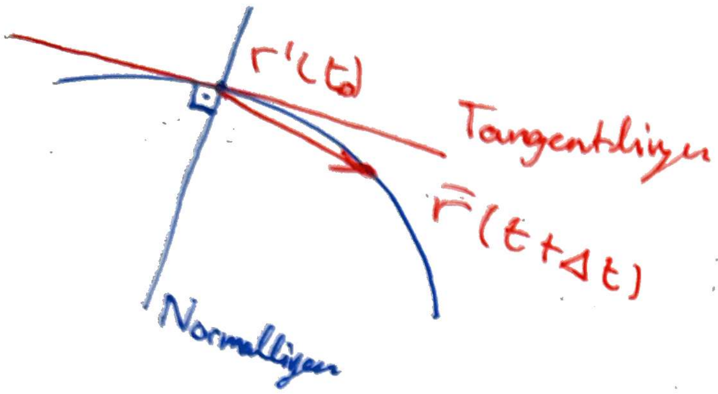
$\bar{T} \cdot (x-a, y-b)$

KURVOR I PLANET

Vi introducerar den vektorvärda funktionen

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$

$x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara!



$\bar{r}(t+\Delta t)$ innebär att vi gör en liten tids förskutning

Differansen är $\dfrac{\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}$

Gränsvärdet då $\Delta t \to 0$ blir:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} \right) = (x'(t), y'(t))}$$

Detta är tangentvektor, $r'(t)$ till kurvan i $\bar{r}(t)$:

$$\boxed{\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = r'(t)}$$

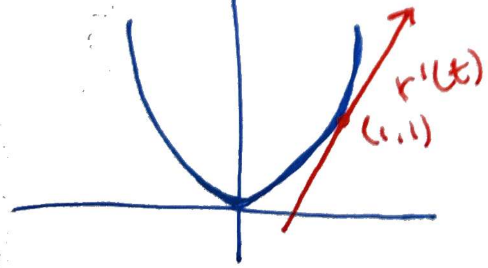
Tangentlinjen till kurvan i $\bar{r}(t_0)$

$$T: \begin{cases} x = x(t) + s\,x'(t) \\ y = y(t) + s\,y'(t) \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Normallinjen till kurvan i $\bar{r}(t_0)$

$$N: \begin{cases} x = x(t) + s(-y'(t)) \\ y = y(t) + s(x'(t)) \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

EX: $\bar{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in (a, b)$



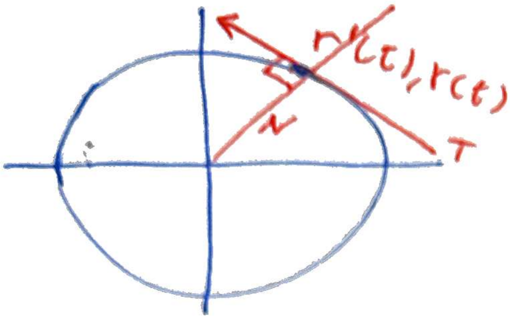
$\bar{r}'(t) = (1, 2t)$, $P = (1,1)$

$\bar{r}'(1) = (1, 2)$

$$T: \begin{cases} x = 1 + s \cdot 1 \\ y = 1 + s \cdot 2 \end{cases} \qquad N: \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 1 + s \end{cases}$$

Tangentlinje / Normallinje via P.

$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



$r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

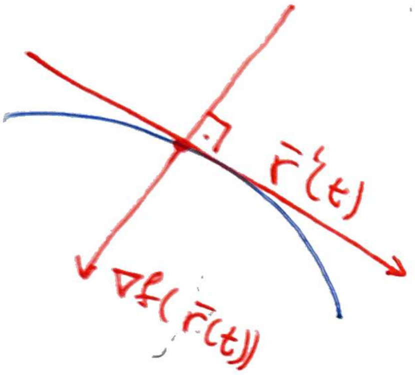
$\bar{r}(t) \bullet \bar{r}'(t) = 0$ Skalärprodukt.

Ty $\bar{r}(t) \perp r'(t)$

$\bar{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\bar{r}(t)$
= acceleration

NIVÅKURVOR

$f(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, Antag att kurvan kan parametriseras.



$f = C \Leftrightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$

$f(x(t), y(t)) = C$, om $f \in C^1$ så är derivatan av VL = (VL)'

$f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0$

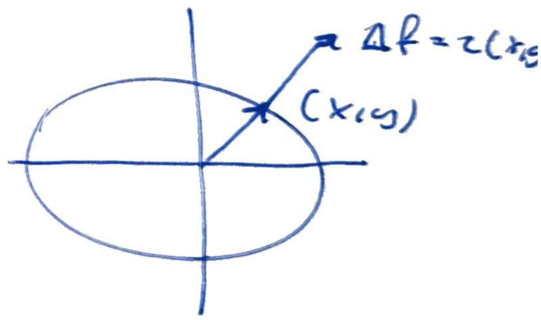
$\Rightarrow \nabla f(r(t) \bullet r'(t)) = 0$

EX:

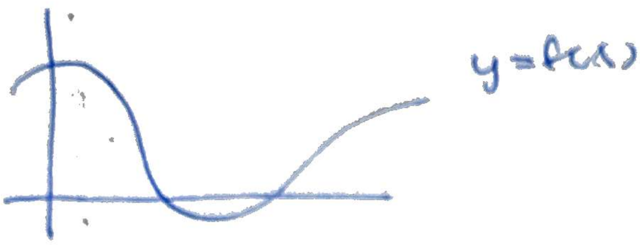
$f(x,y) = x^2 + y^2$, och $c = 1$

$x^2 + y^2 = 1$ är enhetscirkeln

$\nabla f = (2x, 2y) = 2(x,y)$



GRAFER I PLANET



Grafer i planet, $y=f(x)$, $x \in (a,b)$

1) kan presenteras på parameterform:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

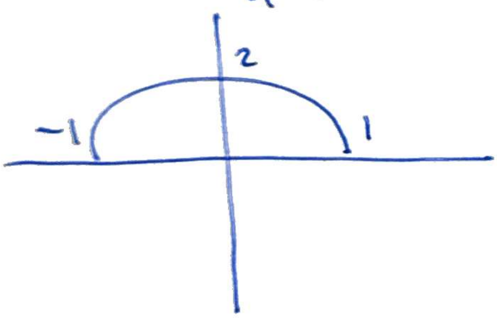
2) KAN presenteras som NIVÅKURVOR:

$F(x,y) = f(x) - y$

Nivåkurvan $F(x,y) = 0$ är grafen $y = f(x_0)$

EX Betrakta övre delen av ellipsen.

$k: x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ (nivåkurva) $\Rightarrow y = \sqrt{4-4x^2} = f(x)$



1) $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) = \sqrt{4-4x^2} \end{cases}$

Eller

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

Kurvor i R^3

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

EX:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in R \\ z = t \end{cases}$$

x och y bildar en cylinder, men z växer linjärt