Faktoranalys För Longitudinell data: Latent Growth Models

> För denna föreläsning rekommenderas följande litteratur:
> Bok: Goldstein, kapitel 6.
> Artikel: Singer 1998 (andra halvan).
> Artikel: Tan, Kan, Hogan 2010.

Faktoranalys (Latent Growth Models)

Latent Growth Models

Latent Growth Models (LGM) är en SEM-baserad longitudinell metod som beskriver **individers utvecklingskurvor över tid** med latenta faktorer (intercept och linjära eller ickelinkära lutningar) för att uppskatta genomsnittlig förändring och individuella skillnader i förändringar, testa prediktorer/meditorer (time-invariant och tie varying kovariater), och hantera mätfel samt vist bortfall (MAR) för att beskriva utvecklingsförlopp.

Vad är då SEM?

SEM står för **Structural Equation Modeling** och är ett ramverk för multivariat analys som kombinerar faktoranalys och regressions-/pathmodeler för att samtidigt modellera **latenta variabler** (mätmodellen) och **relationer mellan dem** (strukturmodellen) utifrån kovariansstrukturen; det används för t.ex konfirmatorisk faktoranalys, mediation/moderation, longitudinella modeler (såsom LGM), hantering av mätfel och saknade värden. Men detta är lite överkurs.

Kort beskrivning av LGM

LGM används för att:

- Modellera förändring över tid i termer av en underliggande latent (dvs ej observerad) process.

- Dessa analyser baseras på faktoranalys (kommer snart).
- Parameterskattningen för LGM ger ungefärligt lika skattningar som GLMM. **Varför?**

Varför blir parameterskattningarna för LGM och GLMM lika?
För att en enkel LGM i praktiken är en omparametrisering av en (G)LMM de beskriver samma medelkurva och slumpmässiga intercept/lutningar och maximerar nästan samma likelihood under samma antaganden → konsekvens blir parameterskattningarna i regel (nästan) identiska, bortsett från små skillnader på grund av estimatorer och modellantaganden.

Faktoranalys

En faktoranalysmodell kan beskriva som en samling regressioner som predicerar observerade variabler Y_i från icke-observerade gemensamma latenta faktorer η_i. Modellen formuleras enligt:

$$
\begin{gathered}
Y_1 = \tau_1 + \lambda_{11}\eta_1 + ... + \lambda_{1m}\eta_m + \epsilon_1 \\
. \\
. \\
. \\
Y_p = \tau_p + \lambda_{p1}\eta_1 + ... + \lambda_{pm}\eta_m + \epsilon_p
\end{gathered}
$$

Följande delar i modellen är:

- τ_p kan ses som intercept och fixerast till 0 (oftast)
- λ_{ij} är faktorladdningar.
- ϵ_p = feltermer.

I matrisform fomuleras modellen enligt:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- $\boldsymbol{Y}$ är en $p \times 1$ vektor av observationer.
- $\boldsymbol{\eta}$ är en $p \times 1$ vektor av intercept.

- $\mathbf{\Lambda}$ är en m $p \times m$ matris med laddningar (ofta fixerade för att definera intercept och olika typer av lutningar).
- $\boldsymbol{\epsilon_i}$ är en $p \times 1$ vektor av unika faktorer $\sim N$. De antas vara normalfördelade.

I modellen (matrisform) kan **faktorerna** uttryckas som avvikelser från faktormedelvärden genom:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu_\eta} + \boldsymbol{\zeta}$$

Variansen för matrisen $\mathbf{Y}$ kan uttryckas som:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda \Psi \Lambda'} + \mathbf{\Theta}_{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Här är följande:

- $\mathbf{\Sigma}$ är en kovariansmatrisen av storlek $p \times p$.
- $\mathbf{\Psi}$ är en kovariansmatris för faktorerna av storlek $m \times m$.
- $\mathbf{\Theta}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ är en kovariansmatris för unika faktorer av samma storlek som $\mathbf{\Sigma}$.

Det förväntade värdet för matrisen $\boldsymbol{Y}$ uttrycks som:

$$\boldsymbol{\mu_Y} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\mu_\eta}$$

Konfirmativ (CFA) och explorativ (EFA) faktoranalys

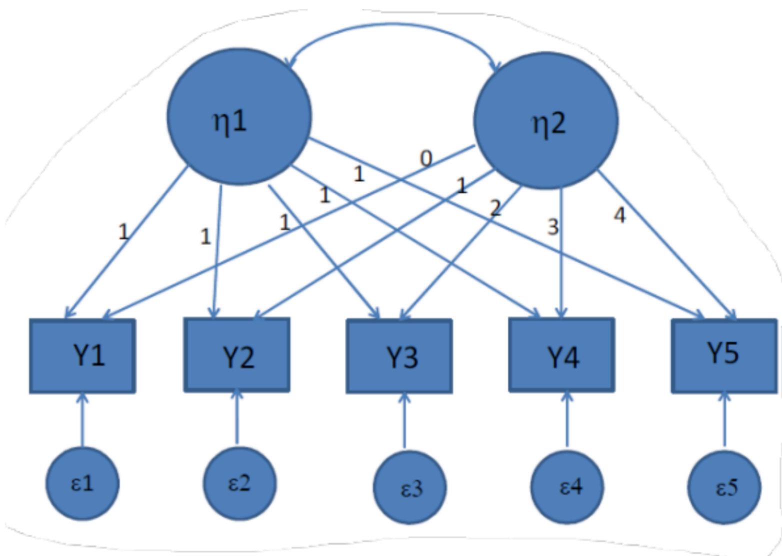
- **CFA:** CFA (Confirmatory Factor Analysis) testar en i förväg specificerad faktorstruktur mot data.
- **EFA:** EFA (Explatory Factor Analysis) söker efter den faktorstruktur som bäst förklarar kovariansmönster i data (utan förhandsantaganden).

Bättre förklarat utgår **CFA** från en modell och ser hur bra den passar data, medan **EFA** utgår från data och försöker anpassa den bästa modellen.

- **LGC:** LGC (Linear Growth Curve) är en version av CFA där man antar att latenta faktorer (intercept och lutning) påverkar värdena på responsvariabeln under olika tidpunkter. Det är möjligt att använda sig av **icke-linjära** faktorer (via polynom i η) om man har mer än två tidpunkter för indidivder.

Latent Growth Curve modell (LGC)

Bilden nedan presenterar en LGC modell som antar linjär utveckling över fem tidpunkter $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.Y_5)$.



Här är:

- $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.Y_5)$: är de observerade mätningarna (t.ex en persons värde på en variabel vid fem olika tidpunkter).
- η_1 är den latenta interceptfaktorn, alltså individens startnivå:
  - Den har lastningar = 1 till alla $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.Y_5)$, vilket betyder intercepten påverkar alla tidpunkter lika mycket
- η_1 är den latenta lutningsfaktorn, alltså individens förändringstakt över tid:
  - Den har lastningar = $1, 2, 3, 4,$, vilket anger hur mycket varje tidpunkt bidrar till den linjära trenden (ökning med tiden).
- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$ är mätfel eller residualer för varje observation.
- Pilarna mellan η_1 och η_2 visar interceotet och lutningen kan vara korrelerade — pesoner som börjar högt kan t.ex öka långsammare eller snabbare

Kort sagt kan modellen beskriva hur varje perosns uppmätta värden $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.Y_5$ kan uttryckas som:

$$Y_{it} = \text{Intercept}_i + \text{lutning}_i \times t + \epsilon_{it}$$

Där är **intercept och lutning** latenta faktorer som kan variera mellan individer och därmed fånga både genomsnittlig utveckling och individuella skillnader i förändringar.

För LGC modellen i tidigare exempel

För LGC modellen i tidigare exempel som antar linjär utveckling över fem tidpunkter har man följande vektorer och matriser:

- $\mathbf{\Lambda}$ är första matrisen med faktorlastningar för intercept och lutningsfaktorn. Notera att kolumn 1 endast har 1:or vilket tillhör interceptet η_1 och i kolumn 2 är lutningarna för η_2

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Kovariansmatrisen för de latenta faktorerna, där $\psi_{11} = Var[\eta_1]$, $\psi_{22} = Var[\eta_2]$, $\psi_{21} = Cov[\eta_1, \eta_2]$.

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}$$

- Medelvärdena för intercept och lutningsfaktorn vilket ger medelkurvan blir:

$$\boldsymbol{\mu}_\eta = \begin{bmatrix} \mu_{\eta_1} \\ \mu_{\eta_2} \end{bmatrix}$$

- Diagonal residualmatrisen vid alla tidpunkter är:

$$\Theta_\epsilon = \text{diag}(\theta_\epsilon, \theta_\epsilon, \theta_\epsilon, \theta_\epsilon, \theta_\epsilon)$$

Där av fås modell-implikerade **medel** och **kovarianser** för observationerna $\boldsymbol{Y}$:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}] = \Lambda\mu_\eta \quad \boldsymbol{\Sigma = \Lambda\Psi\Lambda^T + \Theta_\epsilon}$$

Detta i sin tur innebär att för tidpunkt $t = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = [1 \;\; s]\,\Psi\,[1 \;\; t]^\top, \qquad \mathrm{Var}(Y_t) = [1 \;\; t]\,\Psi\,[1 \;\; t]^\top + \theta_\varepsilon.$$

Skattning av de okända parametrarna

- Elementen i den observerande kovariansmatrisen $\mathbf{\Sigma}$ och medelvärden för alla p variabler uttrycks som funktioner av de okända parametrarna.
- Skattningarna är de värden på parametrarna som reproducerar de observerade kovarianserna och varianserna (implicerad kovariansmatris Σ) och medelvärdena så bra som möjligt.
- ML skattningar:
  - En funktion av avvikelser mellan observerade kovariansmatrisen $\mathbf{S}$. och medelvärden $\bar{\mathbf{y}}$ samt implicerade kovariansmatrisen Σ och medelvärden $(\boldsymbol{\mu})$ minimieras:

$$F_{ML} = \mathrm{Tr}(S\Sigma^{-1}) - p + \ln|\Sigma| - \ln|S| + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$$

- Modellen måste vara “identifiera”:
  - Antal kända bitar information (observerade varianser, kovarianser, medelvärden) måste vara minst lika många som antal okända parametrar.

Test för modellen och dess parametrar:

Man ställer upp hypoteser där man under nollhypotesen antar att:

$$H_0 : \text{Modellen passar data}$$
$$H_a : \text{Modellen passar inte data}$$

Följande statistiska används för att bedöma om nollhypotesen kan förkastas:

$$\chi^2 = (N-1)F \quad \sim \chi^2_{df}$$

- df är antal delar information (antal observerade kovarianser, varianser och medelvärden) minus antal skattade parametrar.

- N är stickprovsstorleken.

Observera:

För stora urval $(N \geq 200)$ förkastar ofta nollhypotesen även om modellen har en bra anpassning till data. **Därav krävs andra anpassningsmått.**

Test för parametrar

Detta är som tidigare delar av kursen:

- t-test.
- z-test

Anpassningsmått

Låt oss nu gå tillbaka lite djupare i teorin kring varför andra anpassningsmått krävs istället för chi2 testet.!

> Så börjar med att ställa frågan **vad är det egentligen vi testar från början?**

När man skattar en SEM/CFA modell (t.ex longitudinell latent growth modell) får man:

- Ett χ^2 test för modellfit som visar:
  - H_0: modellen reproducerar den sanna kovariansmatrisen exakt i populationen; alltså en perfekt fit!
  - Med andra ord: alla restriktioner du lagt på modellen är precis i sanna populationen.

Men det finns **ett problem** med detta!!

- Med för stora stickprov (N) blir χ^2 extremt känsligt.
- Även en pytteliten avvikelse mellan modellen och datan gör att statistikan blir signifkant, konsekvent förkastas nollhypotesen nästan alltid.

Därför blir frågan: modellen kanske är tillräckligt bra i **praktiskt mening,** även om statistikan kan förkastas. **För att säkerställa detta används måtten CFI och RMSEA.**

CFI (Comparative Fit Index): jämförelse mellan nollmodellen

CFI mäter hur mycket bättre din modell är än en helt usel modell (nollmodellen). Statistikan formuleras enligt:

$$\mathrm{CFI} = \frac{(\chi^2 - df)_{\mathrm{noll}} - (\chi^2 - df)_{\mathrm{Modell}}}{(\chi^2 - df)_{\mathrm{noll}}}$$

Nollmodellen är i detta fall "independence model" där alla korrelationer mellan variablerna är 0. Detta innebär en mycket dåligt modell i nästan alla riktiga data.

Modell är den skattade SEM/CFA modellen.

För anpassningsmåtten kan man bedömma att:

- $\mathrm{CFI} > 0.9$ ger en okej anpassning
- $\mathrm{CFI} > 0.95$ ger en mycket bra anpassning.
- ⇒ Ju närmare 1 desto bättre!

Om man vill jämföra olika modellen tyder högre CFI på ett bättre fit (allt annat lika).

RMSEA - Root Mean Squared Error Approximation (fel per frihetsgrad)

RMSEA tittar på hur mycket "missfit" det finns per **frihetsgrad** justerad för urvalsstorleken (N). RMSEA formuleras enligt:

$$\mathrm{RMSEA} = \sqrt{\frac{\chi^2 - df}{df(N-1)}}$$

RMSEA kan tolkas:

- $\mathrm{RMSEA} < 0.1$ är helt okej
- $\mathrm{RMSEA} < 0.05$ är bra vissa säger 0.06 dock.
- ⇒ lägre RMSE = bättre anpassning.

Man använder RMSEA nästan alltid SEM/CFA. Det är användbart när man vill:

- Vill ha måtten på **hur mycket modellen missar den verkliga strukturen.**
- Man har **stort stickprov (N)** istället för att bara säga att chi2 statistikan är signifikant, och hävda att modellen är dåligt kan man se om missanpassningen

är praktiskt liten (t.ex RMSEA = 0.03 - 0.05) eller stor (0.10 +)

GLMM eller LGC modeller för longitudinella data?

- Om man har balanserade data ⇒ alla individer är mätta vid alla tidpunkter kan bägge metoder användas.
- Om man inte har balanserade data (eller om man har bortfall) är det lättare med flernivå-modeller.
- Oberoende variabler kan användas vid bägge metoder.
- Kovariansstruktur för feltermer (unika faktorer) kan användas vid bägge metoder.
- Om någon/några variabler är latent, och mätta med flera indikatorer (t.ex 3 IQ test som antas mäta intelligens vid varje tidpunkt) kan man använda LGC.
- Om man har mer komplicerade modeller såsom att en variabel X_1 påverkar en annan variabel X_2 som i sin tur antas på påverka interceptet och lutningen, kan man använda LGC.
- Om man har mer komplicerade modellen såsom att en utvecklingskurva (intercept och lutning för exempelvis intelligensutveckling) antas påverka en annan utvecklingskurva (intercept och lutning för exempelvis betygsutveckling) kan man använda LGC.
- Multilevel modeller används oftare än LGC, men användningen av LGC modeller ökar!

Demostration i SAS: modellbyggning och tolkning!

Exempel: Ökar självsäkerhet över tid för individer som deltar i ett träningsprogram?

Självsäkerhet är mätt under 5 tidpunkter (lika intervall) för 16 individer som deltar i programmet

```
data growth;
   input y1 y2 y3 y4 y5;
   datalines;
17.6  21.4  25.6  32.1  37.7
13.2  14.3  18.9  20.3  25.4
11.6  13.5  17.4  22.1  39.6
10.7  11.1  13.2  18.2  21.4
18.7  23.7  28.6  31.5  34.0
18.3  19.2  20.5  23.2  25.9
 9.2  13.5  17.8  19.2  21.1
18.3  23.5  27.9  30.2  34.6
11.2  15.6  20.8  22.7  30.4
17.0  22.9  26.9  31.9  35.6
10.4  13.6  18.0  25.6  29.3
17.7  19.0  22.5  28.5  30.7
14.5  19.4  21.1  28.8  31.5
20.0  21.4  28.9  30.2  35.6
14.6  19.3  21.7  28.5  32.0
11.7  15.2  19.1  23.7  28.7
;
```

individ $\longrightarrow$

$Y_{ij} = \eta_{0j}\lambda_{0i} + \eta_{1j}\lambda_{1i} + \varepsilon_{ij}$

SAS-kod

```
proc calis method=ml data=growth;
   lineqs            τ
      y1 = 0. * Intercept + f_int      0 × f_slp + e1,
      y2 = 0. * Intercept + f_int  +  1 * f_slp + e2,
      y3 = 0. * Intercept + f_int  +  2 * f_slp + e3,
      y4 = 0. * Intercept + f_int  +  3 * f_slp + e4,
      y5 = 0. * Intercept + f_int  +  4 * f_slp + e5;
(var) std
      f_int f_slp,      2
      e1-e5 = 5 * evar;   1
   mean
      f_int f_slp;        2
   cov
      f_int f_slp;        1
   run;
                       6 parametrar
```

The SAS System

The CALIS Procedure
Mean and Covariance Structures: Model and Initial Values

Modeling Information	
Maximum Likelihood Estimation	
Data Set	WORK.GROWTH
N Records Read	16
N Records Used	16
N Obs	16
Model Type	LINEQS
Analysis	Means and Covariances

Variables in the Model		
Endogenous	Manifest	y1 y2 y3 y4 y5
	Latent	
Exogenous	Manifest	
	Latent	f_int f_slp
	Error	e1 e2 e3 e4 e5

Number of Endogenous Variables = 5
Number of Exogenous Variables = 7

The SAS System

The CALIS Procedure
Mean and Covariance Structures: Descriptive Statistics

Simple Statistics		
Variable	Mean	Std Dev
y1	14.66875	3.56459
y2	17.91250	4.08736
y3	21.80625	4.60036
y4	26.04375	4.73863
y5	30.84375	5.41701

The SAS System

The CALIS Procedure
Mean and Covariance Structures: Maximum Likelihood Estimation

Fit Summary		
Modeling Info	Number of Observations	16
	Number of Variables	5
	Number of Moments	20
	Number of Parameters	6
	Number of Active Constraints	0
	Baseline Model Function Value	6.6454
	Baseline Model Chi-Square	99.6809
	Baseline Model Chi-Square DF	10
	Pr > Baseline Model Chi-Square	<.0001
Absolute Index	Fit Function	2.0954
	Chi-Square	31.4310
	Chi-Square DF	14
	Pr > Chi-Square	0.0048
	Z-Test of Wilson & Hilferty	2.5819
	Hoelter Critical N	12
	Root Mean Square Residual (RMR)	1.9062
	Standardized RMR (SRMR)	0.1205
	Goodness of Fit Index (GFI)	0.9204
Parsimony Index	Adjusted GFI (AGFI)	0.8863
	Parsimonious GFI	1.2885
	RMSEA Estimate	0.2881
	RMSEA Lower 90% Confidence Limit	0.1525
	RMSEA Upper 90% Confidence Limit	0.4236
	Probability of Close Fit	0.0069
	Akaike Information Criterion	43.4310
	Bozdogan CAIC	54.0665
	Schwarz Bayesian Criterion	48.0665
	McDonald Centrality	0.5800
Incremental Index	Bentler Comparative Fit Index	0.8056
	Bentler-Bonett NFI	0.6847
	Bentler-Bonett Non-normed Index	0.8612
	Bollen Normed Index Rho1	0.7748
	Bollen Non-normed Index Delta2	0.7966
	James et al. Parsimonious NFI	0.9586

Signifikant på 0,05 nivå

CFI

Linear Equations													
y1	=	0	Intercept	+	1.0000	f_int	+	1.0000	e1				
y2	=	0	Intercept	+	1.0000	f_int	+	1.0000	f_slp	+	1.0000	e2	
y3	=	0	Intercept	+	1.0000	f_int	+	2.0000	f_slp	+	1.0000	e3	
y4	=	0	Intercept	+	1.0000	f_int	+	3.0000	f_slp	+	1.0000	e4	
y5	=	0	Intercept	+	1.0000	f_int	+	4.0000	f_slp	+	1.0000	e5	

Estimates for Variances of Exogenous Variables					
Variable Type	Variable	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
Latent	f_int	_Parm1	13.89140	5.81540	2.38873
	f_slp	_Parm2	0.80742	0.42198	1.91342
Error	e1	evar	3.32185	0.70031	4.74342
	e2	evar	3.32185	0.70031	4.74342
	e3	evar	3.32185	0.70031	4.74342
	e4	evar	3.32185	0.70031	4.74342
	e5	evar	3.32185	0.70031	4.74342

Covariances Among Exogenous Variables					
Var1	Var2	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
f_int	f_slp	_Parm3	-0.35281	1.13815	-0.30998

Mean Parameters					
Variable Type	Variable	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
Latent	f_int	_Parm4	14.15875	1.02906	13.75890
	f_slp	_Parm5	4.04813	0.27563	14.68665

Squared Multiple Correlations			
Variable	Error Variance	Total Variance	R-Square
y1	3.32185	17.21324	0.8070
y2	3.32185	17.31505	0.8082
y3	3.32185	19.03169	0.8255
y4	3.32185	22.36317	0.8515
y5	3.32185	27.30948	0.8784

Standardized Results for Covariances Among Exogenous Variables					
Var1	Var2	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
f_int	f_slp	_Parm3	-0.10535	0.32466	-0.32448

Anpassning av modellen

- $\chi^2(14) = 31.43$, $p = 0.0048$
- $CFI = 0.806$, $RMSEA = 0.288$, $90\%CI : (0.152; 0.424)$
- Skattad kovariansmatris medelvärdesvektor för de latenta variablerna:

intercept

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 13.891 & 0 \\ -0.353 & 0.807 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{\eta} = \begin{bmatrix} 14.159 \\ 4.048 \end{bmatrix}$$

← lutning (slope)

- Skattad kovariansmatris för feltermerna

$$\mathbf{\Theta}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 3.322 & & & & \\ 0 & 3.322 & & & \\ 0 & 0 & 3.322 & & \\ 0 & 0 & 0 & 3.322 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.322 \end{bmatrix}$$

SAS-kod

```
proc calis method=ml data=growth;
   lineqs
      y1 = 0. * Intercept + f_int                          + e1,
      y2 = 0. * Intercept + f_int  +  1 * f_slp +  1 * f_qdr + e2,
      y3 = 0. * Intercept + f_int  +  2 * f_slp +  4 * f_qdr + e3,
      y4 = 0. * Intercept + f_int  +  3 * f_slp +  9 * f_qdr + e4,
      y5 = 0. * Intercept + f_int  +  4 * f_slp +  16 * f_qdr + e5;
   std
      f_int f_slp f_qdr,        3
      e1-e5 = 5 * evar;         1
   mean
      f_int f_slp f_qdr;        3
   cov
      f_int f_slp f_qdr;        3
   run;
```

10 parametrar att skatta

The SAS System

The CALIS Procedure
Mean and Covariance Structures: Model and Initial Values

Modeling Information	
Maximum Likelihood Estimation	
Data Set	WORK.GROWTH
N Records Read	16
N Records Used	16
N Obs	16
Model Type	LINEQS
Analysis	Means and Covariances

Variables in the Model		
Endogenous	Manifest	y1 y2 y3 y4 y5
	Latent	
Exogenous	Manifest	
	Latent	f_int f_qdr f_slp
	Error	e1 e2 e3 e4 e5

Number of Endogenous Variables = 5
Number of Exogenous Variables = 8

The CALIS Procedure
Mean and Covariance Structures: Maximum Likelihood Estimation

Fit Summary			
Modeling Info	Number of Observations	16	
	Number of Variables	5	
	Number of Moments	20	
	Number of Parameters	10	
	Number of Active Constraints	0	
	Baseline Model Function Value	6.6454	
	Baseline Model Chi-Square	99.6809	
	Baseline Model Chi-Square DF	10	
	Pr > Baseline Model Chi-Square	<.0001	
Absolute Index	Fit Function	0.7681	
	Chi-Square	11.5209	
	Chi-Square DF	10	
	Pr > Chi-Square	0.3184	rej
	Z-Test of Wilson & Hilferty	0.4732	Sign.
	Hoelter Critical N	24	
	Root Mean Square Residual (RMR)	0.6902	
	Standardized RMR (SRMR)	0.0337	
	Goodness of Fit Index (GFI)	0.9721	
Parsimony Index	Adjusted GFI (AGFI)	0.9442	
	Parsimonious GFI	0.9721	
	RMSEA Estimate	0.1007	
	RMSEA Lower 90% Confidence Limit	0.0000	
	RMSEA Upper 90% Confidence Limit	0.3078	
	Probability of Close Fit	0.3495	
	Akaike Information Criterion	31.5209	
	Bozdogan CAIC	49.2468	
	Schwarz Bayesian Criterion	39.2468	
	McDonald Centrality	0.9536	
Incremental Index	Bentler Comparative Fit Index	0.9830	CFI
	Bentler-Bonett NFI	0.8844	
	Bentler-Bonett Non-normed Index	0.9830	
	Bollen Normed Index Rho1	0.8844	
	Bollen Non-normed Index Delta2	0.9830	
	James et al. Parsimonious NFI	0.8844	

Estimates for Variances of Exogenous Variables

Variable Type	Variable	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
Latent	f_int	_Parm1	10.70646	4.48233	2.38859
	f_slp	_Parm2	2.77431	1.87557	1.47919
	f_qdr	_Parm3	0.28273	0.15140	1.86745
Error	e1	evar	1.71800	0.44358	3.87298
	e2	evar	1.71800	0.44358	3.87298
	e3	evar	1.71800	0.44358	3.87298
	e4	evar	1.71800	0.44358	3.87298
	e5	evar	1.71800	0.44358	3.87298

Covariances Among Exogenous Variables

Var1	Var2	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
f_int	f_slp	_Parm4	3.02204	2.07637	1.45545
f_int	f_qdr	_Parm5	-0.75408	0.59312	-1.27138
f_slp	f_qdr	_Parm6	-0.79128	0.50829	-1.55675

Mean Parameters

Variable Type	Variable	Parameter	Estimate	Standard Error	t Value
Latent	f_int	_Parm7	14.65250	0.90289	16.22847
	f_slp	_Parm8	3.06062	0.57210	5.34977
	f_qdr	_Parm9	0.24688	0.16441	1.50160

Squared Multiple Correlations

Variable	Error Variance	Total Variance	R-Square
y1	1.71800	12.42445	0.8617
y2	1.71800	18.43487	0.9068
y3	1.71800	21.44049	0.9199
y4	1.71800	22.12437	0.9223
y5	1.71800	27.96518	0.9385

Anpassning av andra modellen

- $\chi^2(10) = 11.521$, $p = 0.318$
- $CFI = 0.983$, $RMSEA = 0.101$, $90\% CI : (0.000; 0.308)$
- Skattad kovariansmatris och medelvärdesvektor för de latenta variablerna:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 10.706 & & \\ 3.022 & 2.774 & \\ -0.754 & -0.791 & 0.283 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} 14.652 \\ 3.061 \\ 0.247 \end{bmatrix}$$

- Skattad kovariansmatris för feltermerna

$$\mathbf{\Theta}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1.718 & & & & \\ 0 & 1.718 & & & \\ 0 & 0 & 1.718 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1.718 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.718 \end{bmatrix}$$

Ökar självsäkerhet över tid för individer som deltar i ett träningsprogram? - Tolkning

- En latent tillväxtmodell med kvadratisk utveckling skattades och anpassningen var okej ($CFI = 0.983$, $RMSEA = 0.101$ $(90\% CI : 0.000; 0.308)$)
- Den initiala självsäkerheten skattades till 14.653, med en varians på 10.706
- Den linjära ökningen per tidpunkt skattades till 3.061 med en varians på 2.774, och den kvadratiska ökningen skattades till 0.247 med en varians på 0.283
- Den kvadratiska ökningen var ej signifikant (vilket kan bero på för liten stickprovsstorlek). Detsamma gällde varianserna för den linjära och kvadratiska utvecklingen

Ökar självsäkerhet över tid för individer som deltar i ett träningsprogram? - Tolkning

- Den totala variansen i självsäkerhet mätt under de fem tidpunkterna förklaras till mellan 86% (vid första tidpunkten) och 94% (vid femte tidpunkten) av modellen.

- Sammanfattningsvis så ökar självsäkerheten för individer som deltar i träningsprogrammet, och det finns en tendens till att ökningen blir större över tid.