第一章 质点运动学

§1.1质点与参考系

§1.2描述质点在直角坐标系运动

§1.3描述质点在极坐标系中运动

§1.4描述质点在自然坐标系运动

§1.5相对运动和伽利略变换

图1-1:伽利略 伽利雷

引言

历史简介

任务:引入描述质点运动的参量,给出相互关系

时空开发

位置矢量、速度、加速度及其相互关系

- 单一坐标系下的标量表示
  - 直角坐标
  - 极坐标
  - 自然坐标
- 两种坐标系下的关系（相对运动）
  - 直角坐标
  - 极坐标

本章基本要求与知识点小结

历史简介

物体在空间中位置的变化和时间的概念:可以追溯到古代。

运动和时间先后的描述:追溯到中国战国时期的《墨经》中。

速度的概念:亚里士多德的《物理学》中。

加速度的概念:伽利略在研究等加速直线运动时建立。

运动学的系统建立:牛顿采用微元法建立,并创立了微积分。

本章依据:牛顿的思想总结质点运动学规律

时空的开发

物体的运动是在时间和空间中进行的，运动不能脱离空间，也不能脱离时间。对运动的描述定量化，需要建立空间的坐标系和时间的坐标轴。

在牛顿力学范围内,空、时是脱离物质与运动的独立存在:
空间是延伸到整个宇宙的容纳物质的三维平直框架;
时间则犹如一座始终均匀运转着的钟。
近代的相对论表明:空、时是与物质及其运动紧密联系的。
牛顿力学的绝对时空观只是实际时空性质的一种近似。

图1-2:时空描述

① 时间的单位和标准

1967 年国际计量大会规定,把Cs^{133}原子基态两个精细能级之间跃迁所相应的辐射周期的9 192 631 770倍,定义为1s的时间间隔,称为原子时。

②长度的单位和标准

1983年国际计量大会通过了“m”的新定义:“m是光在真空中1/299 792 458s的时间间隔内所经路径的长度”。

?宇宙的层次和数量级(学物理要“心中有数”)

- 科学记数法:用10的正幂次代表大数,用10的负幂次代表小数,其中指数叫做“数量级”。

- **时间:**

最长时间10^{38}s—最小时间10^{-43}s(普朗克时间);

牛顿力学所涉及的时间尺度大约是:10^{-5}s—10^{15}s;

- **空间:**

最长长度10^{28}m—最小长度10^{-35}m(普朗克长度);

牛顿力学所涉及的空间尺度大约是:10^{-6}m—10^{16}m

- 在牛顿力学中,时、空间隔被认为是绝对的,是独立于所研究对象(物体)和运动而存在的客观实在;
- 时间的流逝与空间位置无关,空间为欧几里德几何空间。

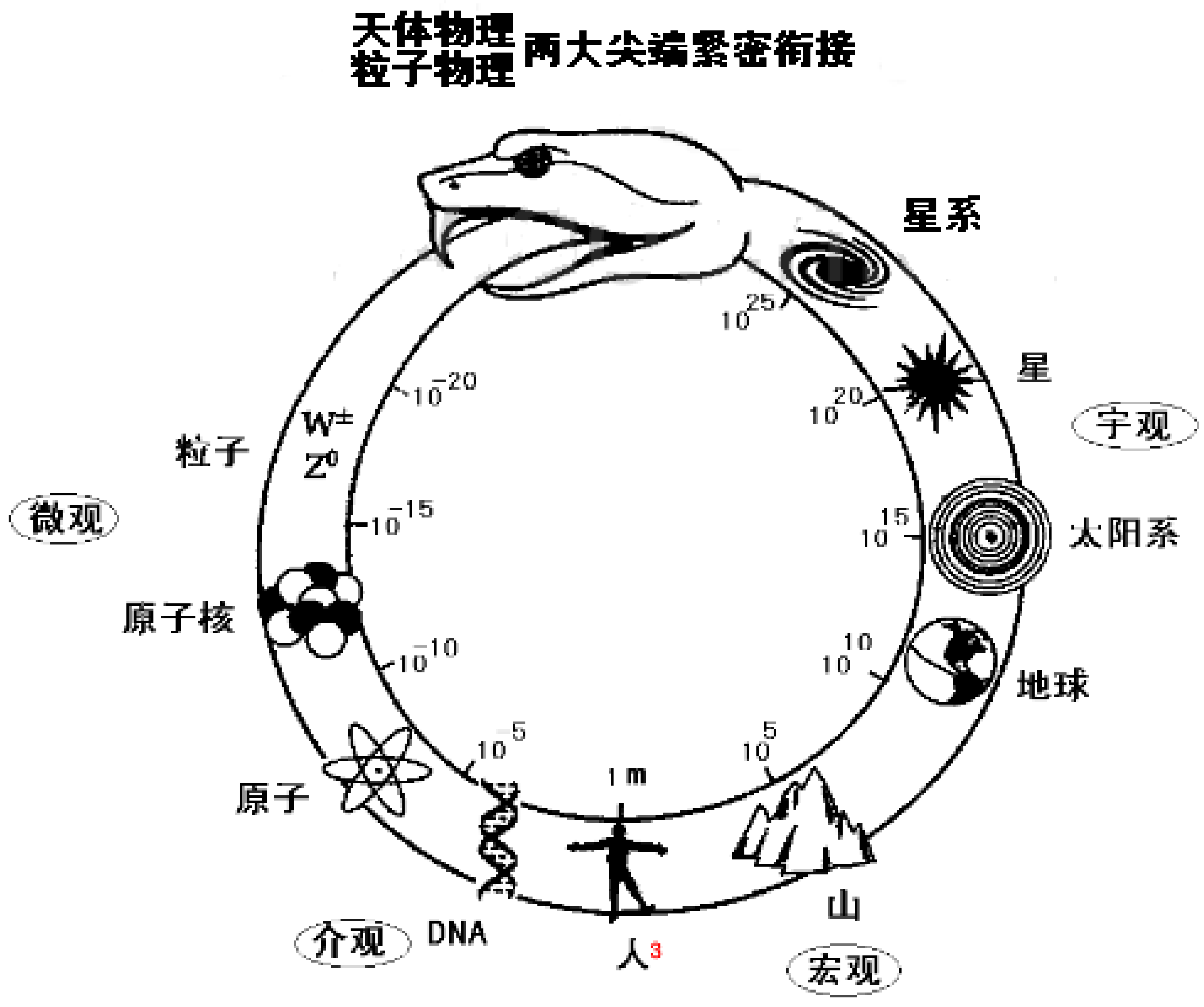


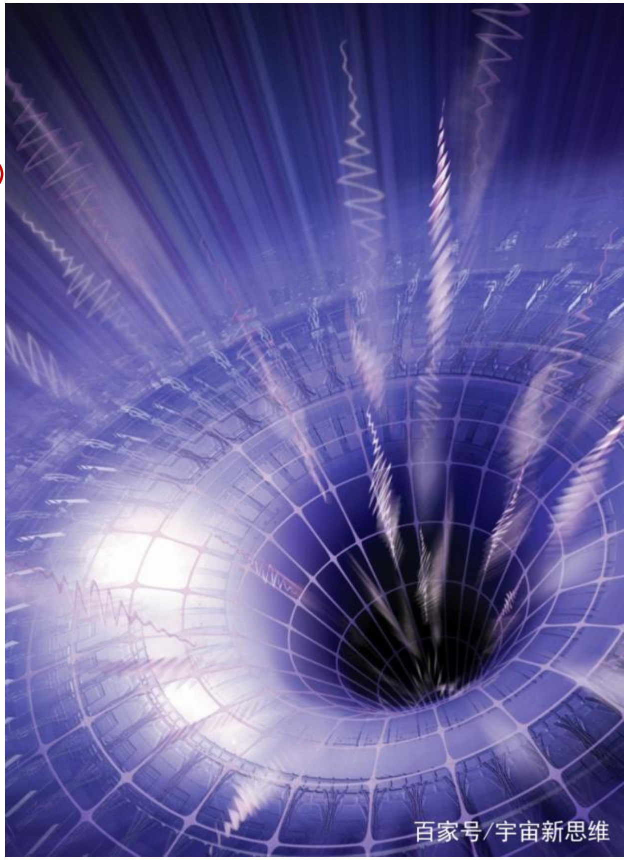
图1-3:宇宙的层次与量级

§1-1:质点与参考系

位置矢量、速度、加速度及其相互关系

相互关系

- 质点、参考系、坐标系
- 位置矢量、速度、加速度及相互关系



质　点：无体积、无形状，而只是具有质量的几何点。

是一种理想化的模型；

要视研究问题而建立；

不是一成不变的。

参考系：被选作参考的物体或物体组叫做参考系。

小小竹排江中游　——地面为参考系

巍巍青山两岸走　——竹排为参考系

有惯性参考系和非惯性参考系之分；

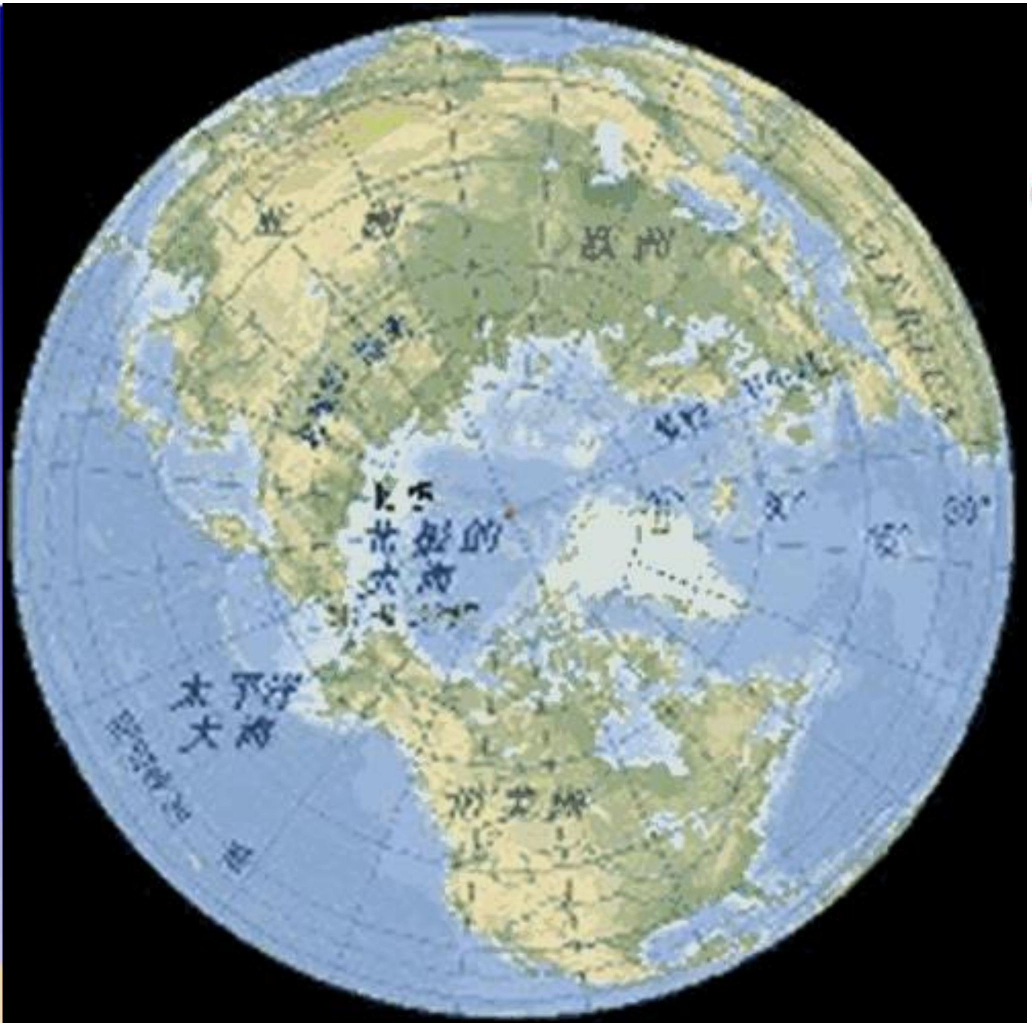
运动学规律在两类参考系中无差别；

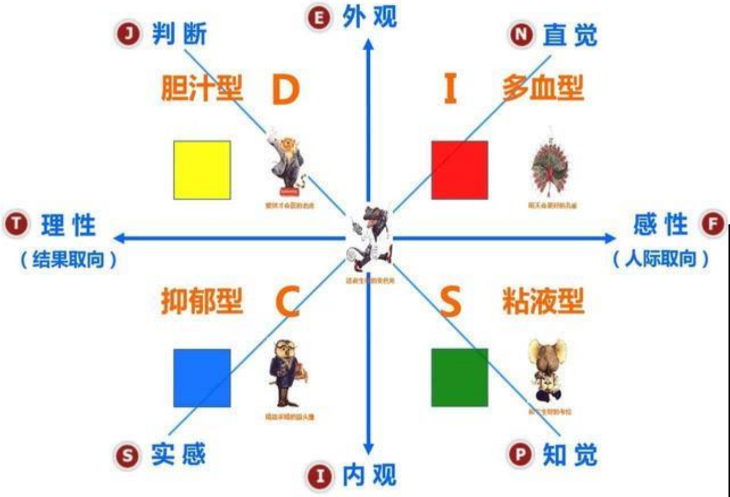
动力学规律在两类参考系中有差别。

图1-4:参考系的选择

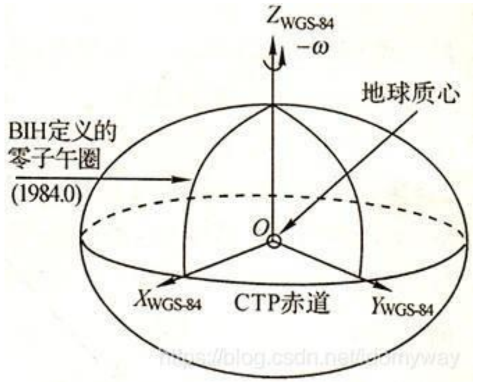
坐标系：定量描述质点在各个时刻相对参考系的位置，

在参考系上选取合适的坐标系——





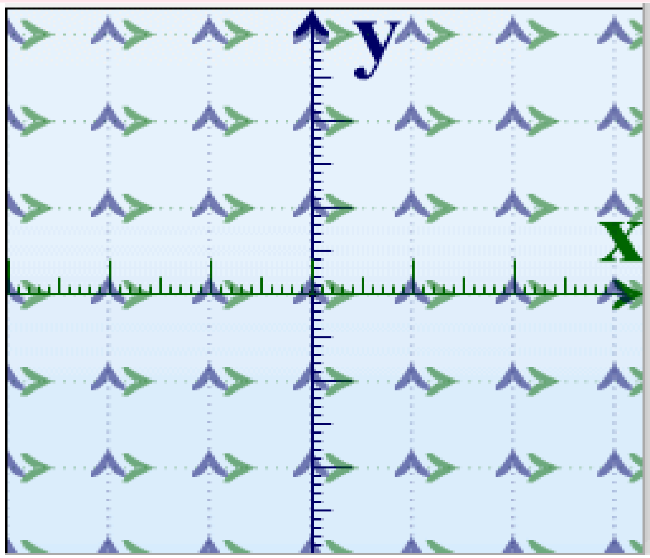
坐标系
- 直角坐标系
- 极坐标系
- 自然坐标系



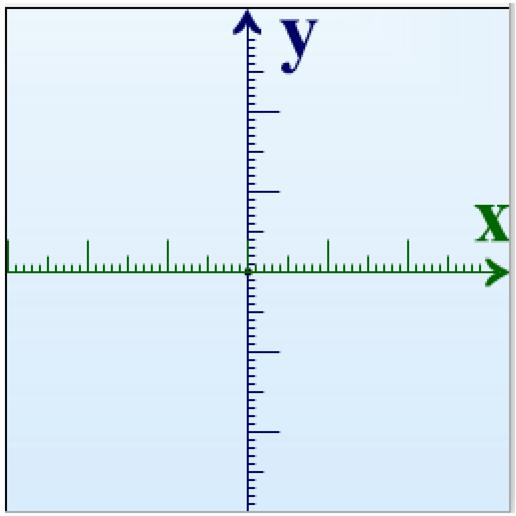
直角坐标系

三个方向的单位矢量分别用$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$来表示。

质点在任一时刻的位置都可由坐标表示出来$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



运动轨迹方程：$f(x, y, z) = 0$



微观粒子并没有确定的轨道，

由粒子在空间出现的概率来表示。

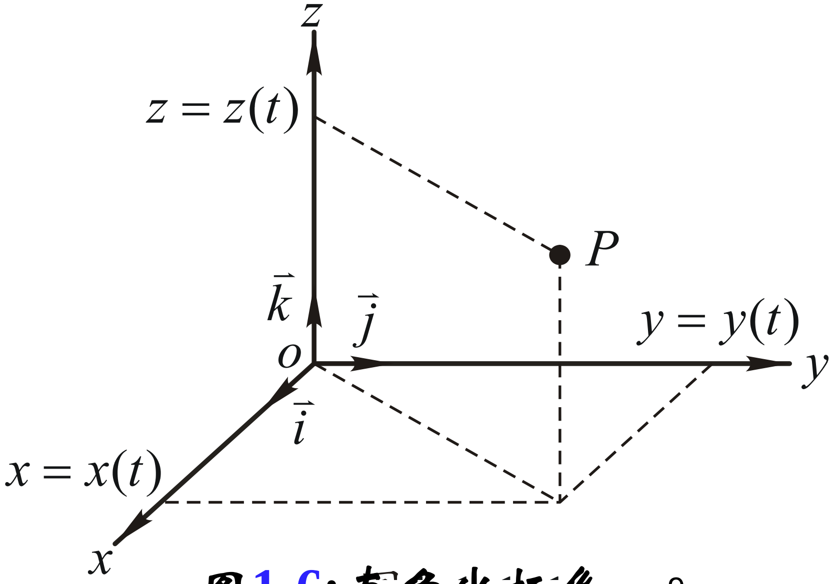


图1-6:直角坐标系

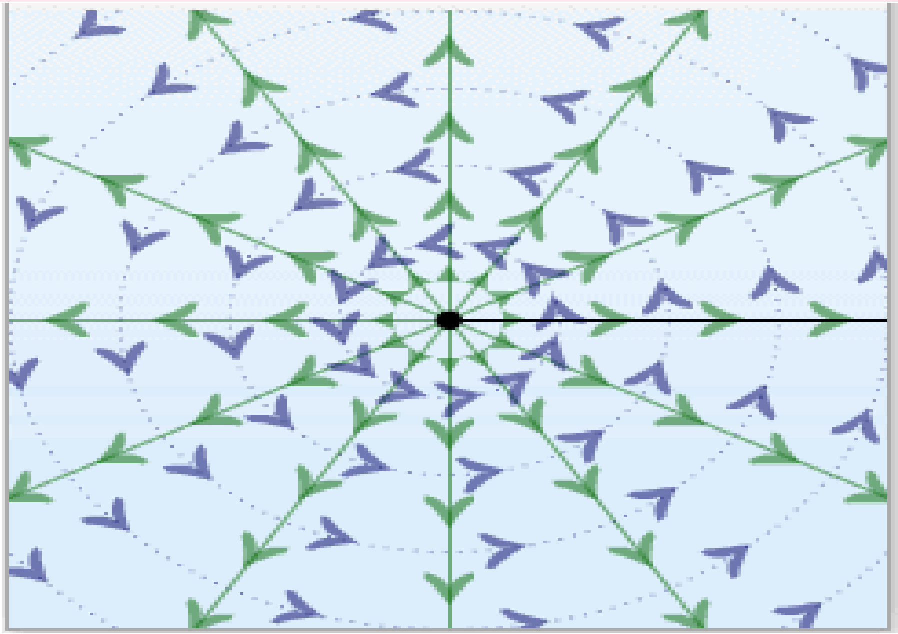
极坐标系

t时刻质点的位置可表示为：$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

运动轨迹方程：$f(r,\theta) = 0$

由几何关系可得直角和极坐标系之间的关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



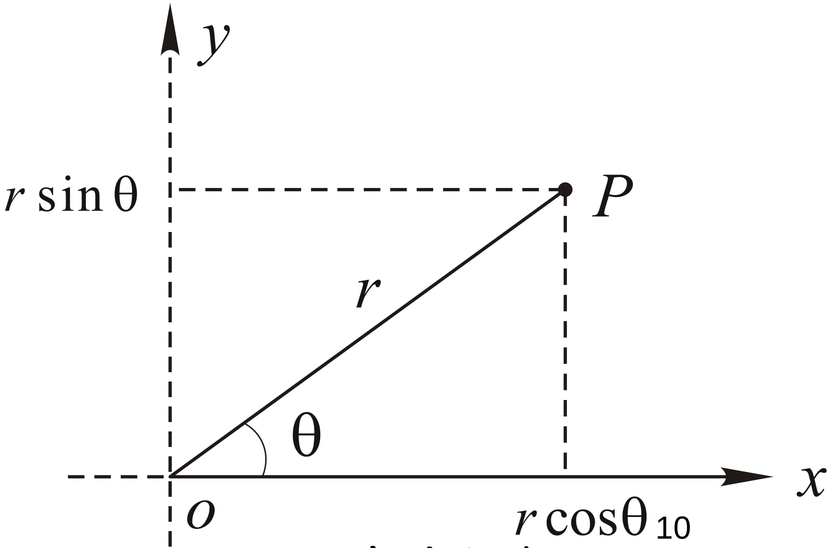


图1-7：极坐标系

自然坐标系

$\vec{e}_t$：代表质点运动切线方向；

$\vec{e}_n$：代表质点法线方向；

随时间变动的坐标系,为本征坐标系,或本性坐标系。

自然坐标系不能用来描述质点在空间所处的位置,

但适合在某些情况下表示质点的速度和加速度。

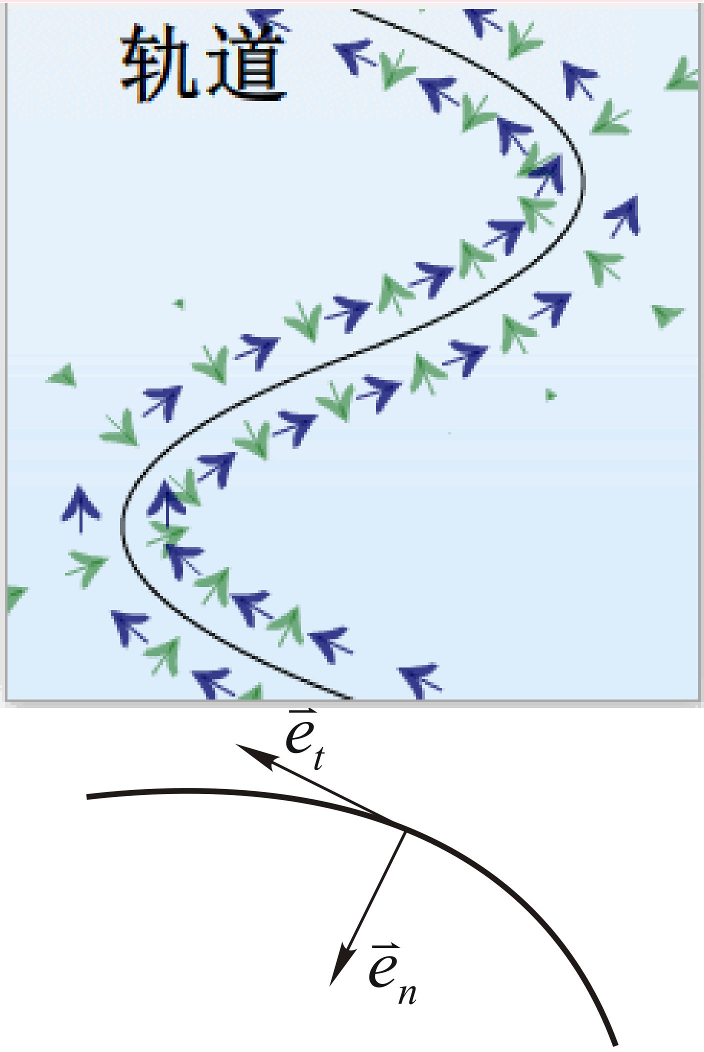


图1-8:自然坐标系

§1-2:描述质点在直角坐标系运动

位置矢量： 从参考点出发作引向P点的一特殊矢量$\vec{r}$

位置矢量并不需要有坐标系存在。

位移： 描述质点位置变化的矢量$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

路程： 质点实际运动距离大小的标量 $\Delta s=s_2-s_1$ 。

路程与位移大小相等条件：

无限小位移； 单向直线运动

质点的路程与位移大小相等。

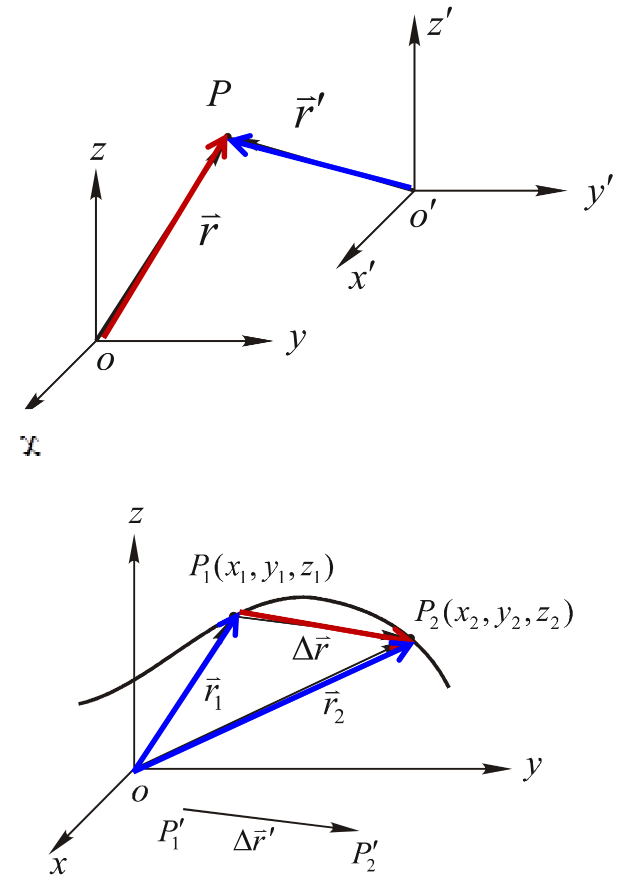


图1-9:位置矢量

设质点在Δt时间内移动的位移为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

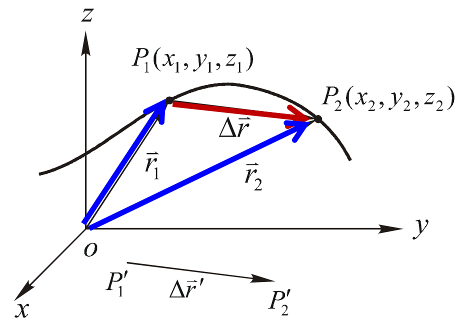


图1-10:位移与平均速度

平均速度:

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

速度:

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

速率: $v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

平均加速度：

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

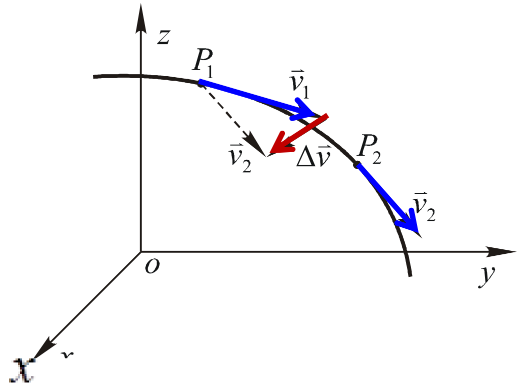


图1-11:平均加速度

加速度：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

位置矢量、速度、加速度三者之间的一般关系：

微分形式：$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

积分形式：$\vec{r} = \int \vec{v}\mathrm{d}t, \vec{v} = \int \vec{a}\mathrm{d}t$

直角坐标系下表示

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$
$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

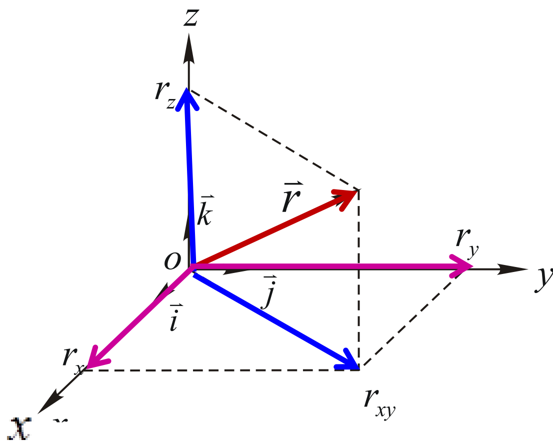


图1-12:直角坐标系下

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$
$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

举例

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$
$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$ 三个分量的标量表示

一维运动几何意义

$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 位移相对时间曲线的斜率对应速度;

$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 速度相对时间曲线的斜率对应加速度;

$x = \int v\,\mathrm{d}t$ 速度相对时间曲线下的面积对应位移;

$v = \int a\,\mathrm{d}t$ 加速度相对时间曲线下的面积对应速度。

描述质点运动的状态参量的特性

状态参量描述运动是必要且相互独立,其包括:

$$\vec{r}(t) \underset{积分}{\overset{微分}{\longleftrightarrow}} \vec{v}(t) \underset{积分}{\overset{微分}{\longleftrightarrow}} \vec{a}(t)$$

$$\boxed{f(x,y,z)=0}$$

①矢量性。注意矢量和标量的区别。

②瞬时性。注意瞬时量和过程量的区别。

③相对性。对不同参照系有不同的描述。

牛顿认为:瞬时情况更基本,不要先探讨物体运动的整体方面,而是先弄清局部细节,再积分得到整体性质。

这种方法是现代物理学的一种基本方法,但在某些局部过程不得要领的情况下,从整体上研究也有其独到之处。

例1.1：质点做匀速直线运动

【解】 v是一常量，$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, x = \int v\mathrm{d}t = vt + C$

当$t = 0$时，$x = x_0 = C$，则$x - x_0 = vt$

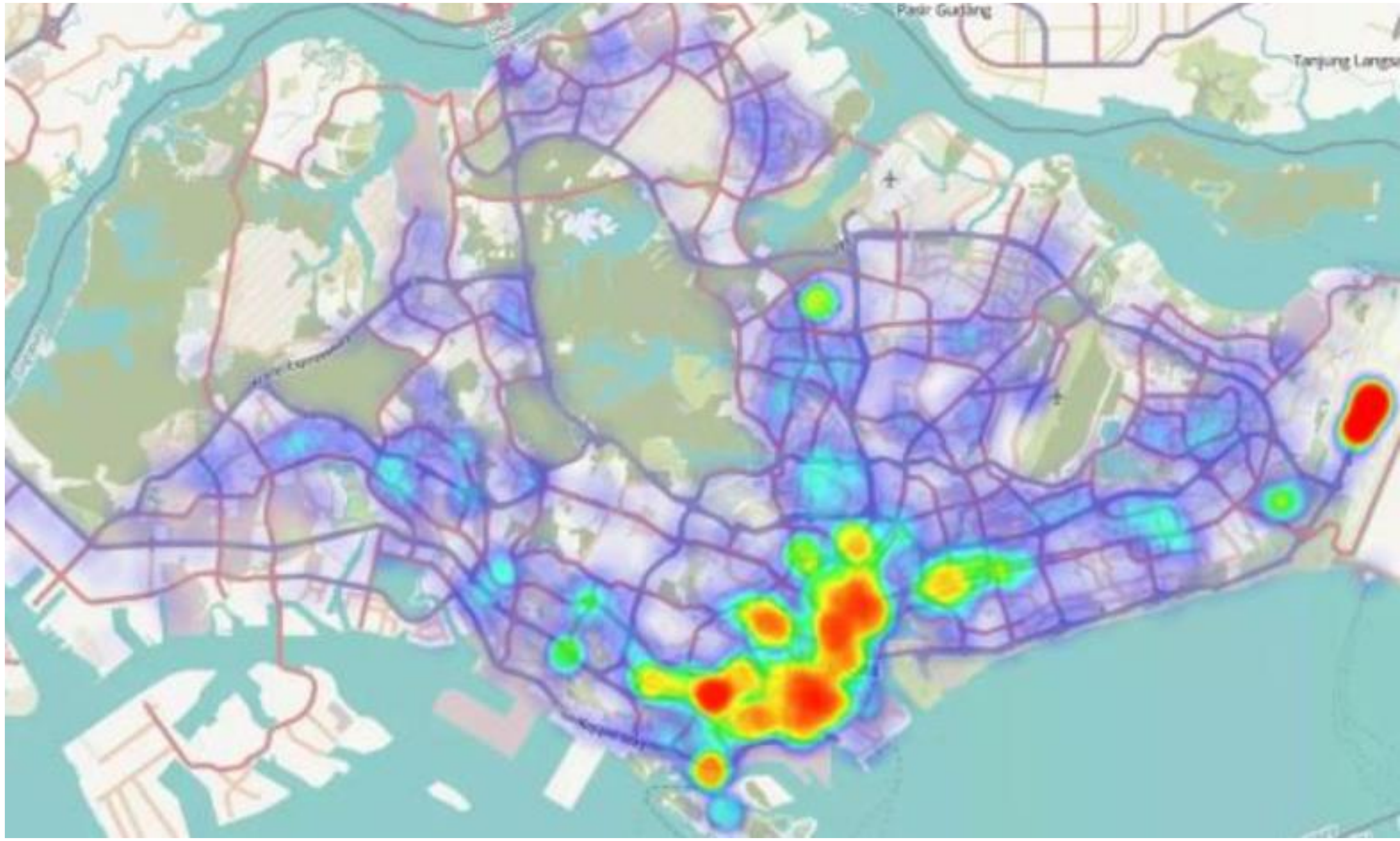
例1.2 匀加速直线运动

【解】 a是一常量，

$$v = \int a\mathrm{d}t = at + C = v_0 + at$$

$$x = \int v\mathrm{d}t = \int (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

$$= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



例1.3：一物体做直线运动，它的运动学方程为$x = at + bt^2 + ct^3$，其中a、b、c均为常量，求：(1) $t = 1$、2 位移、平均速度、和平均加速度；(2) $t = 2$ 时速度和加速度。

【解】 (1)

$$x = at + bt^2 + ct^3 \Longrightarrow v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a + 2bt + 3ct^2$$

$$\Delta x = x(2) - x(1) = a + 3b + 7c$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{a + 3b + 7c}{1} = a + 3b + 7c$$

$$\bar{a} = \frac{v(2) - v(1)}{\Delta t} = 2b + 9c$$

解: $(2)\ x = at + bt^2 + ct^3$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a + 2bt + 3ct^2$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2b + 6ct$$

将$t = 2$代入上述速度和加速度表达式得

$$v(2) = a + 4b + 12c$$

$$a(2) = 2b + 12c$$

例1.4:沿x轴运动的质点,其速度和时间的关系为$v=3t+2\pi\sin\frac{\pi}{6}t$。在$t=0$时,质点的位置$x_0=-2$。试求:

(1)$t=2$时质点的位置。(2)$t=0$和$t=2$两时刻质点的加速度。

解:根据题意$v=3t+2\pi\sin\frac{\pi}{6}t$

积分得位移:$x=\int v\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2-12\cos\frac{\pi}{6}t+C$

微分得加速度:$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3+\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi}{6}t$

由$t=0$时, $x_0=-2$,确定$C=10$。

例1.5: 一质点沿x轴运动,其加速度与位置的关系为$a=3+4x$,已知质点在x=0的速度为3,试求质点在$x=5$处的速度。

【解】根据题意$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3+4x$

$$\boxed{\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}=(3+4x)\mathrm{d}x$$

$$v\cdot\mathrm{d}v=(3+4x)\mathrm{d}x$$

两边积分: $\frac{v^2}{2}=3x+2x^2+C$

由初始条件: $x=0$时, $v=3$ 得: $C=\frac{9}{2}$

将$x=5$代入速度表达式得: $v=11.8$

例1.6: 一质点从位矢为$\vec{r}(0)=4\vec{j}$的位置以初速度$\vec{v}(0)=4\vec{i}$开始运动,其加速度与时间的关系为$\vec{a}=3t\vec{i}-2\vec{j}$。所有的长度以米计,时间以秒计,求:

(1)经过多长时间质点到达x轴;

(2)到达x轴时的位置。

解:根据题意$\vec{a}=3t\vec{i}-2\vec{j}$

积分得: $\vec{v}=\int\vec{a}\mathrm{d}t=\vec{v}(0)+\frac{3}{2}t^2\vec{i}-2t\vec{j}$

由初始条件$\vec{v}(0)=4\vec{i}$得:

$$v(t)=\left(4+\frac{3}{2}t^2\right)\vec{i}-2t\vec{j}$$

对上式进一步积分得：

$$\vec{r}(t)=\int_0^t v\mathrm{d}t=\vec{r}(0)+\left(4t+\frac{1}{2}t^3\right)\vec{i}-t^2\vec{j}$$

由初始条件$\vec{r}(0)=4\vec{j}$得： $\vec{r}(t)=\left(4t+\frac{1}{2}t^3\right)\vec{i}+\left(4-t^2\right)\vec{j}$

(1)到达x轴时，$y=0$，即$4-t^2=0$

解得： t=2 (s)

(2)将t=2s代入$\vec{r}(t)=\left(4t+\frac{1}{2}t^3\right)\vec{i}+\left(4-t^2\right)\vec{j}$得：

解得：$\vec{r}(2)=12\vec{i}$

即$x=12(\mathrm{m})$

例1.7：离水平面高为h的岸边，有人用绳以恒定速率v_0拉船靠岸。

试求：船靠岸的速度和加速度随船至岸边距离变化的关系式？

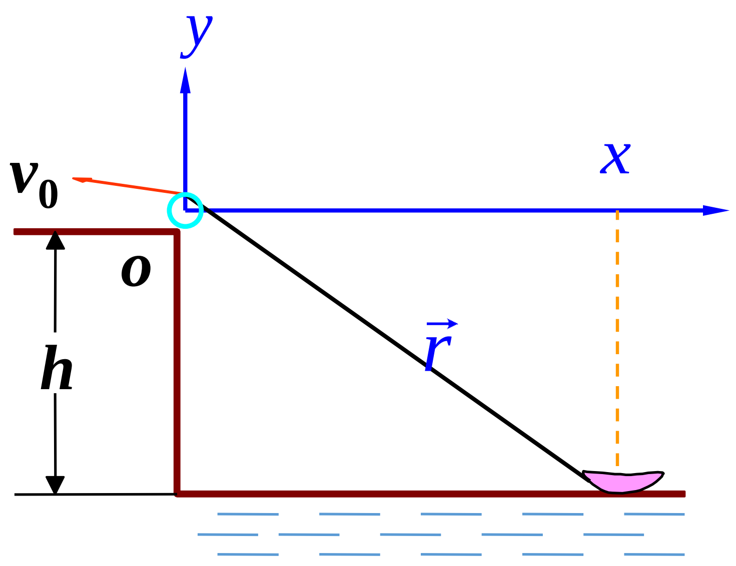
【解】建立如图所示的坐标系oxy中，船的位矢为：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} - h\vec{j}$$

对时间求导得到速度和加速度：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} \qquad (2)$$



由题意知：

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad (3)$$

图1-13：例1.7图

由几何关系：$r^2 = x^2 + h^2$

对时间t 求导：

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{x}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

代入(3) 式得：$v_x = -v_0\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}} = -v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}$ (4)

根据加速度定义$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}=v_0\frac{h^2}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}=-\frac{v_0^2}{x^3}h^2\vec{i}$

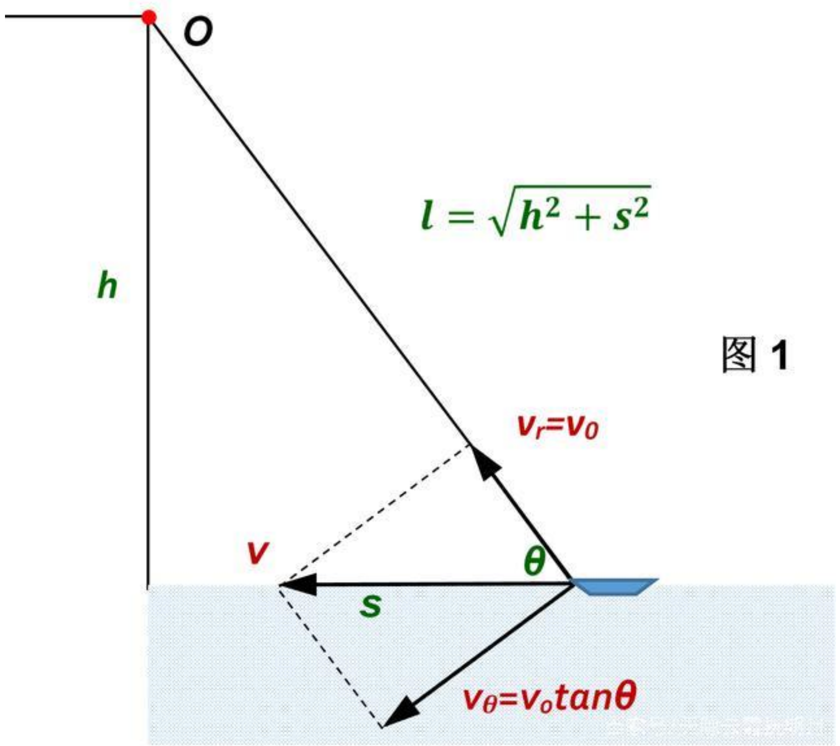


图 1

故得：

$$\begin{cases}\vec{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}=-v_0\sqrt{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}\,\vec{i}\\ \vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}=-\frac{v_0^2}{x^3}h^2\vec{i}\end{cases}$$

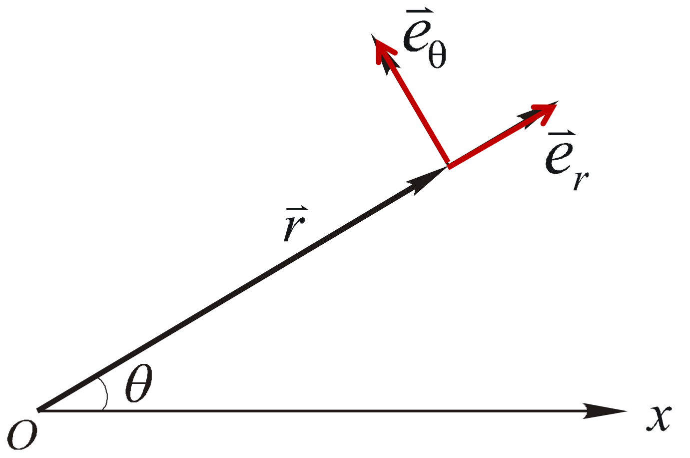
分析船的运动特点：

(1)虽然收绳速率是均匀的，但船的前进方向并不是绳子的方向，故其运动是变速的，加速度也是变化的,且船速大于收绳的速度（?）；

(2)其他解法。

§1-3:描述极坐标系的运动

$$\vec{r}=r\vec{e}_r \qquad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_r}{\Delta t}=\frac{1\cdot\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta=\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

由此整理得:

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)=\ddot{r}\vec{e}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

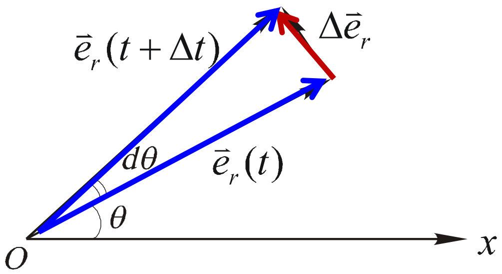


图1-14:描述极坐标系

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_\theta}{\Delta t}=\frac{1\cdot d\theta}{dt}(-\vec{e}_r)=-\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

由此整理得：$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)$

$$=\ddot{r}\vec{e}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

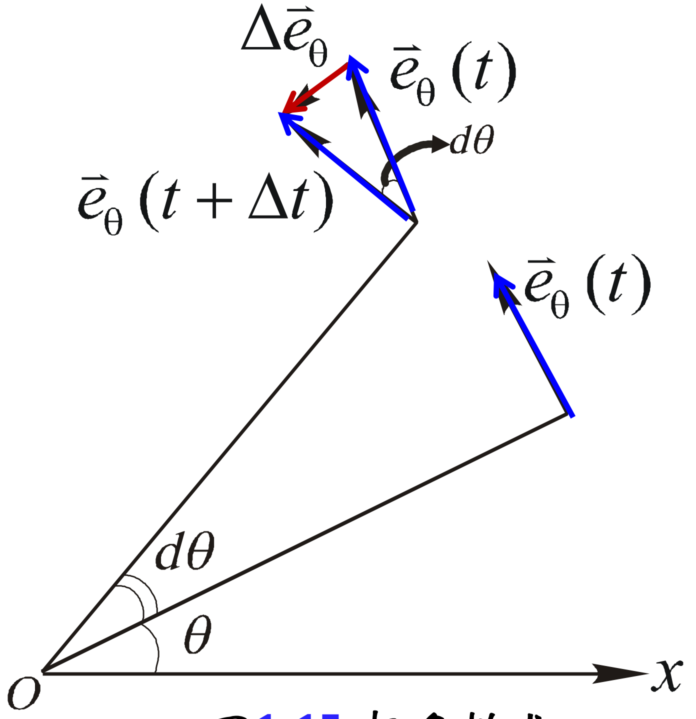


图1-15:极角描述

综上所述,质点的速度、加速度在极坐标下的表示为：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

径向速度；横向速度；

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

径向加速度；　横向加速度；

两个重要公式：

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_\theta\\[2ex]\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\vec{e}_r\end{cases}$$

例1.8 质点的圆周运动问题

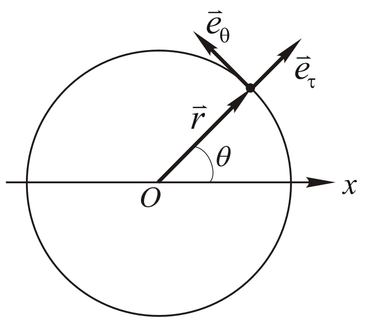


图1-16:圆周运动

解:在某时刻,设质点运动图所示位置,选取极坐标系,对于固定的圆,r是常数,于是有:$\vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)}{dt} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

对于匀速圆周运动,$\dot{\theta} = \omega$,是一常量,所以$\ddot{\theta} = 0$,

由此得:$\begin{cases} \vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta & \text{(切线方向)} \\ \vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r & \text{(向心方向)} \end{cases}$

讨论:

①直线运动: $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r$

②圆周运动: $\vec{a}=-r\omega^2\vec{e}_r+r\alpha\vec{e}_\theta$

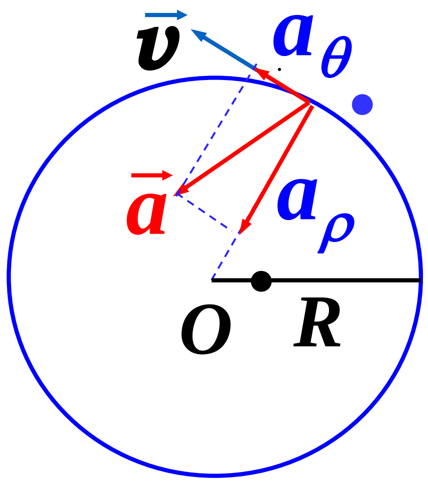
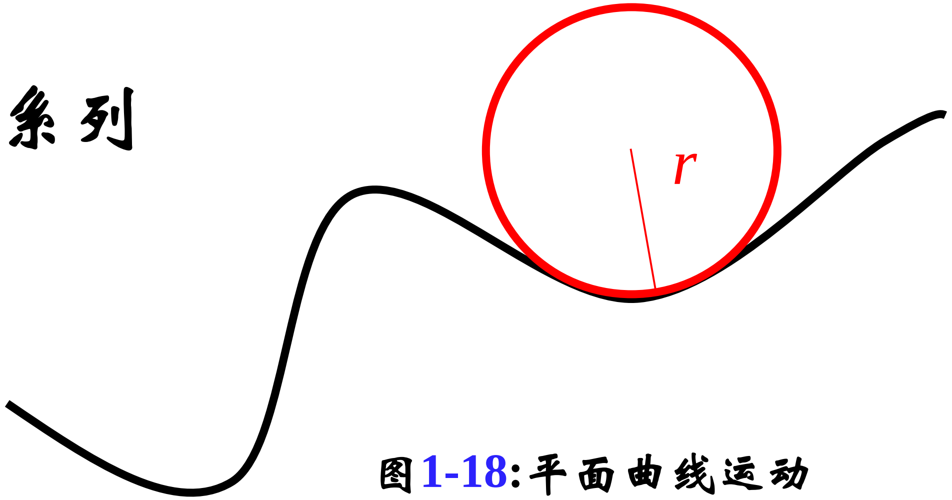


图1-17:圆周运动

其中 $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 成为角加速度, 匀速圆周运动: $\vec{a}=-r\omega^2\vec{e}_r$

③平面曲线运动:

一个任意的平面曲线运动,可以视为由一系列小段圆周运动所组成。



$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

图1-18:平面曲线运动

*圆周运动的矢量描述

角速度矢量$\vec{\omega}$的大小为$\frac{d\theta}{dt}$,方向按右手系指向平行于转轴的方向。

如图1-19所示,当坐标原点选在转轴上时为O,有

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\because\quad \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

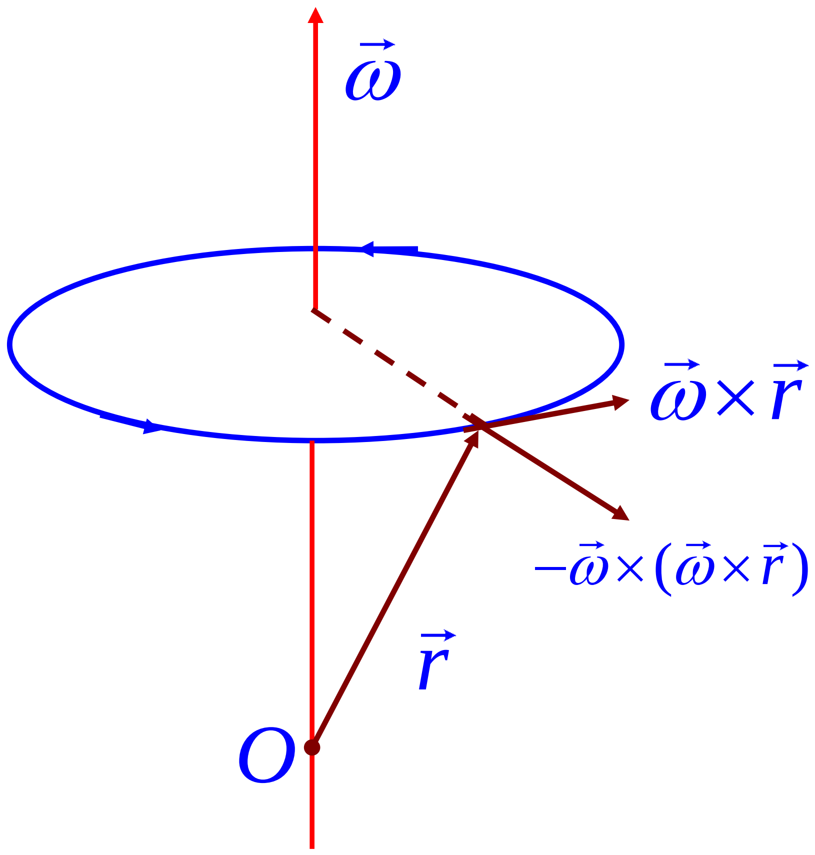
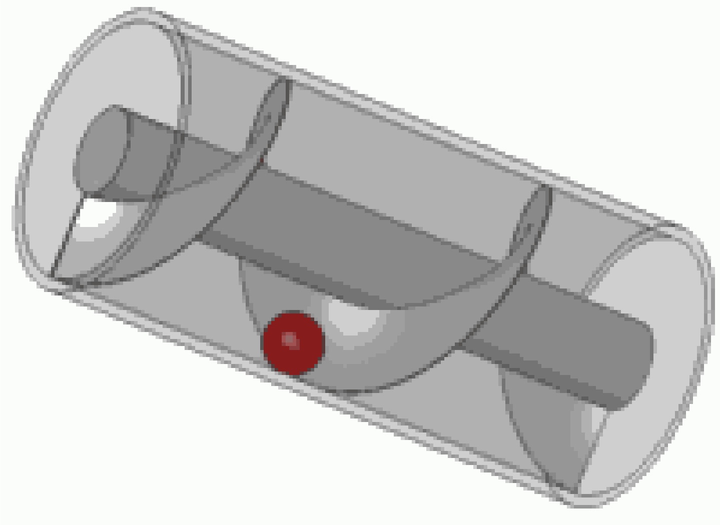


图1-19:圆周运动的矢量描述

例1.9:设质点在匀速转动(角速度为ω)的水平转盘上,从$t=0$开始,从中心出发以恒定的速率u沿半径运动,求质点的轨迹、速度和加速度。

解： 取极坐标,极点取在盘心,则质点沿半径的运动



即为极坐标中的径向运动,则$v_r=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=u$

而横向速度$v_\theta=r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r\omega$

取质点运动所沿的半径在$t=0$时的位置为极轴,则得

$$\begin{cases} r=ut \\ \theta=\omega t \end{cases}$$

消去t,则由运动方程得轨迹方程

$$\boxed{r = \frac{u}{\omega}\theta}$$

故质点轨迹为阿基米德螺线

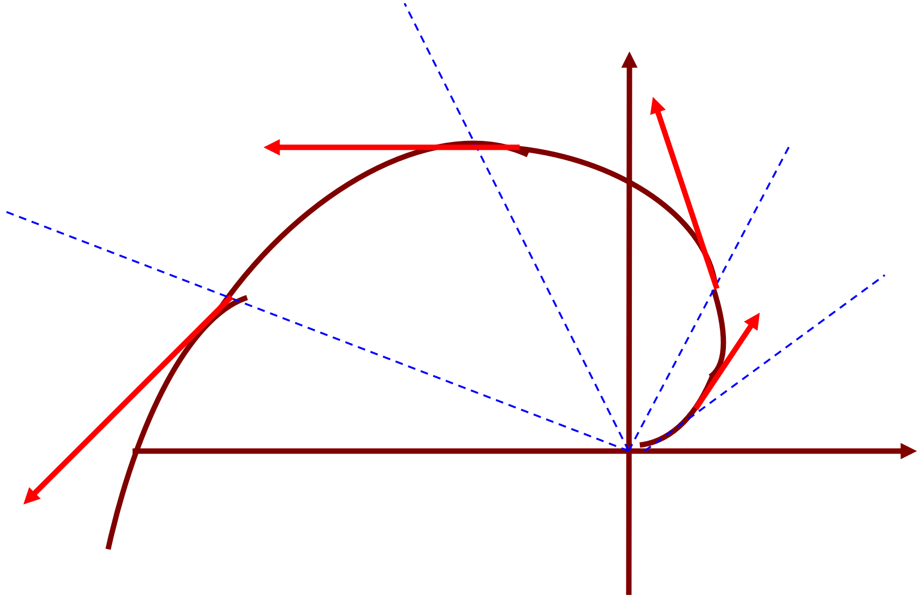


图1-20:阿基米德螺线

在极坐标中,其速度为$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = u\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta$

其加速度为$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$= -r\omega^2\vec{e}_r + 2u\omega\vec{e}_\theta$$

讨论题1.10: Fox(狐狸)沿半径R的圆轨道以恒定速率v奔跑,在狐狸出发的同时,Hound(猎犬)从圆心出发以相同的速率v追击过程中,圆心、猎犬和狐狸始终连成一直线。取圆心O为坐标原点,从O到狐狸初始位置设置极轴,建立极坐标系。(1)导出猎犬v_r、v_θ、a_r、a_θ与r、θ间的关系;(2)确定猎犬的轨迹方程,并画出轨道曲线;(3)判断猎犬能否追上狐狸?

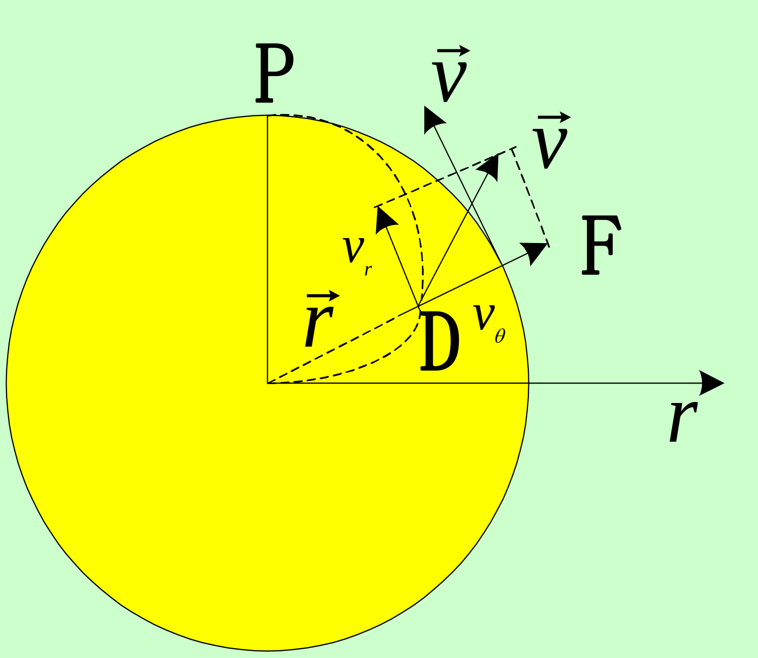


图1-21:讨论题1.10

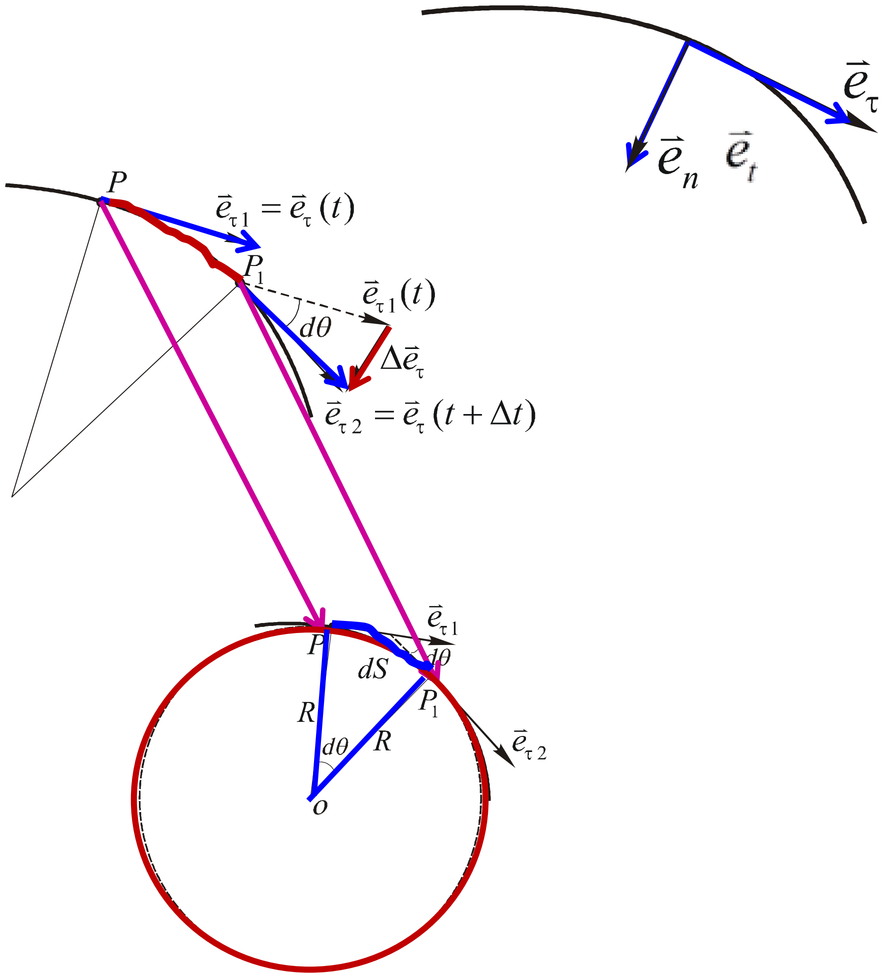
§1-4:描述自然坐标系中运动

$$\vec{v} = v\vec{e}_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_\tau)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e}_\tau(t+\Delta t)-\vec{e}_\tau(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_\tau}{\Delta t}$$

$$= \frac{1\cdot d\theta}{dt}\vec{e}_n = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\theta}{ds}\vec{e}_n = v\cdot\frac{d\theta}{ds}\vec{e}_n$$



$\frac{ds}{d\theta} = R$称为P点处的曲率半径;

联合上述各式整理得: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$

切向　　法向

图1-22:描述自然坐标系中运动

该公式物理意义：

(1)切向加速度a_τ表示质点速率随时间的变化率；

(2)法向加速度a_n表示质点运动方向随时间的变化快慢。

$$a(t)=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)^2}$$

附件：(1)若$\vec{r}=\vec{r}(t)$,求得$\vec{v}(t),\vec{a}(t)$,由于$|\vec{a}\times\vec{v}|=a_n v=\dfrac{v^3(t)}{R(t)}$

故可得轨迹上任意一点的曲率半径为:$R(t)=\dfrac{v^3(t)}{|\vec{a}\times\vec{v}|}$

(2)若以s为坐标,则$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$,类似直线运动,相应公式:

$$v-v_0=\int_{t_0}^{t}a_t\,\mathrm{d}t\quad\Rightarrow\quad s-s_0=\int_{t_0}^{t}v\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\left[v_0+\int_{t_0}^{t}a_t\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t$$

自然坐标系的本征方程

本征方程:$\begin{cases} \vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_\tau \\ \vec{a} = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n \end{cases}$

将切向和法向看成随时间变化的正交坐标系的两个轴:$\vec{e}_1 = \widehat{\vec{v}}, \vec{e}_2 = \widehat{\vec{n}}$,再按右手系的构成法加上第三个轴:$\vec{e}_3 = \widehat{\vec{v}} \times \widehat{\vec{n}} = \widehat{\vec{b}}$,这样构成的正交坐标系。

用自然坐标系描述质点运动的优点:

- 速度只有切向分量,没有法向分量;
- 曲线“直线化”。

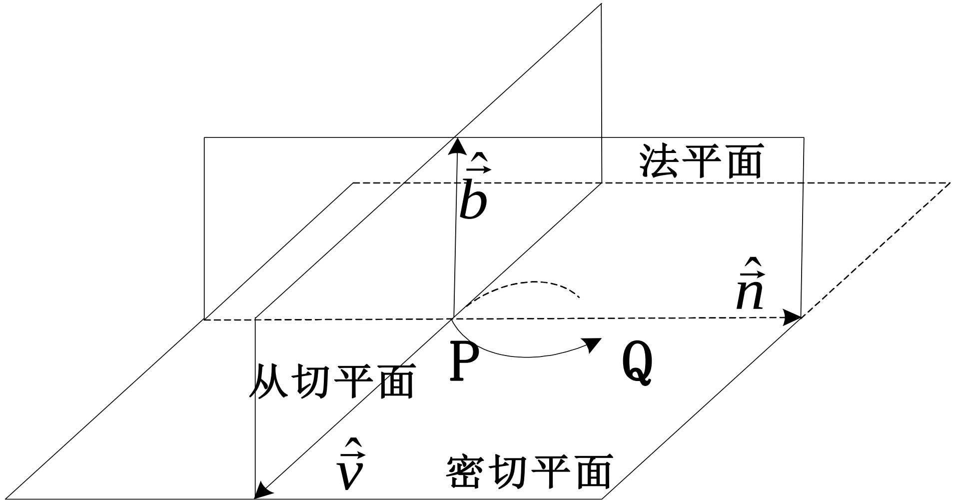


图1-23: 自然坐标系

例1.11:有一只狐狸,以不变的速率v_1沿直线AB逃跑。有一只猎犬以不变速率v_2追捕,其运动方向始终对准狐狸。某时刻,狐狸在F处,猎犬在D处,FD⊥AB,且FD=L,如图1-24所示。试求:此时猎犬的加速度大小。

解:以猎犬为研究对象,建立自然坐标系Otn。

由加速度定义有:$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$

由图分析得知,当$\Delta t \to 0$时,

加速度$\vec{a}$的方向与速度$\vec{v}_2$的方向垂直。

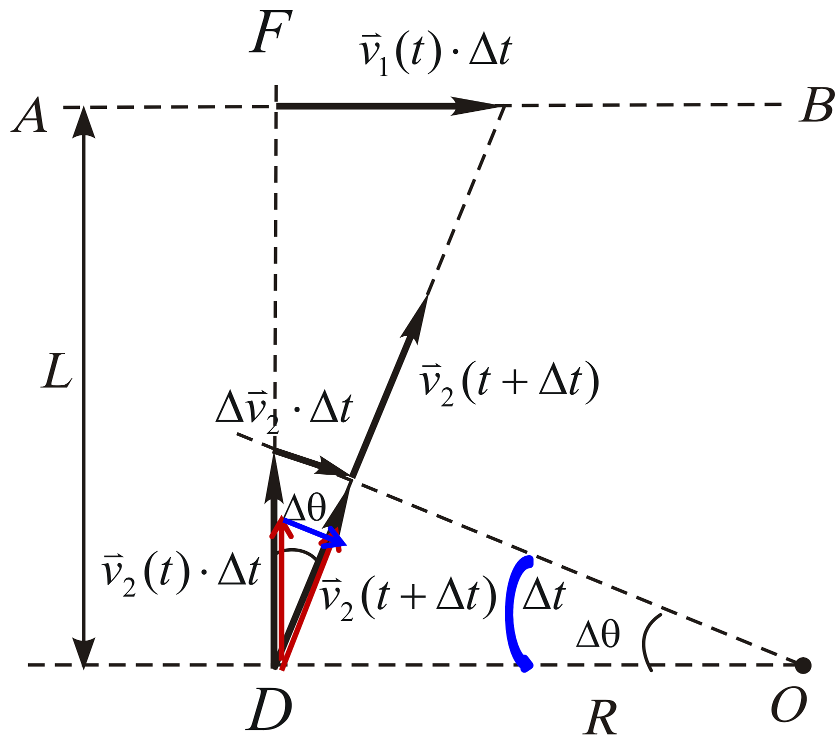


图1-24:猎犬追狐狸

猎犬的加速度为法向加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

法向

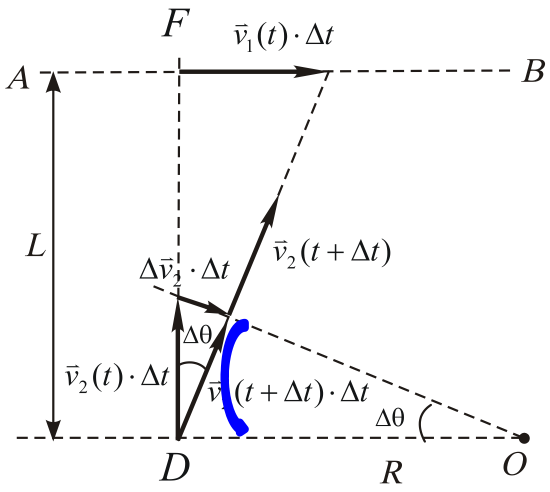


图1-24:猎犬追狐狸

大小为：$a=\dfrac{v_2^2}{R}$

由图几何关系可得：$$\Delta\theta=\frac{v_2\Delta t}{R}=\frac{v_1\Delta t}{L}$$

联立各式解得：$a=\dfrac{v_1v_2}{L}$

例1.12: 篮球赛,球不经碰撞直接进入篮圈为空心入篮。运动员在场内某处为使球能空心入篮,需要掌握球的抛射角θ和球的初速率v。实现空心入篮的(θ,v)解并不唯一。引入最佳抛射角θ_0(对应初速率v_0),即在θ_0角附近运动员由于抛射角θ_0掌握不够准确而产生小偏离量$\Delta\theta$时,为使球能空心入篮,需调整v_0偏离量Δv为最小。某运动员站在3分线处立定投篮,3分线与篮圈中心线间的水平距离为6.25m,篮圈离地高度3.05m,运动员投篮时出射点的高度为2.23m。

求最佳抛射角θ_0和对应的初速率v。

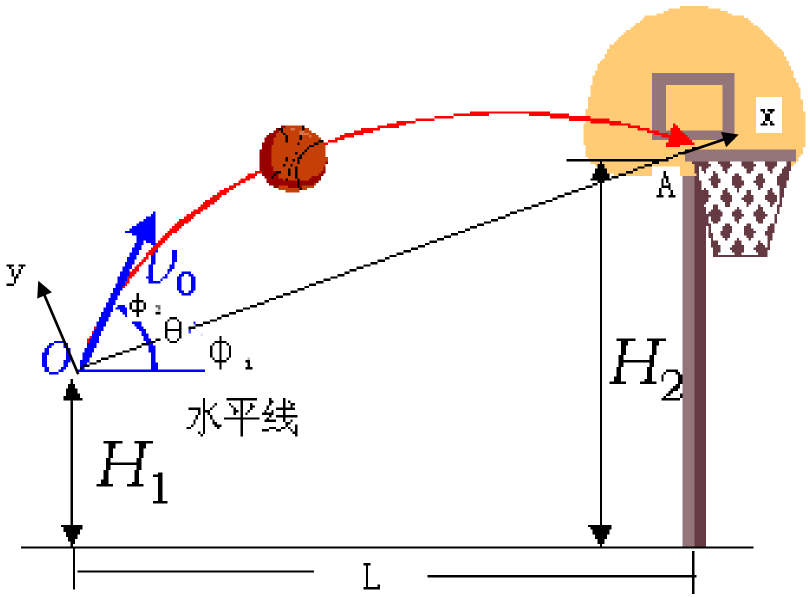


图1-25:例1.12图