



Clase 13:

Método de diferencias finitas



Diferencias finitas

- Motivación en el marco de la materia
- Ecuaciones diferenciales
 - Operador diferencial
- Método de diferencias finitas
 - Ejemplo
- Generalización
- Bibliografía

Motivación en el marco de la materia

- Ecuaciones diferenciales

Operador diferencial

Fuente

$$\mathcal{D}[u(x)] = g(x)$$

ODEs

PDEs

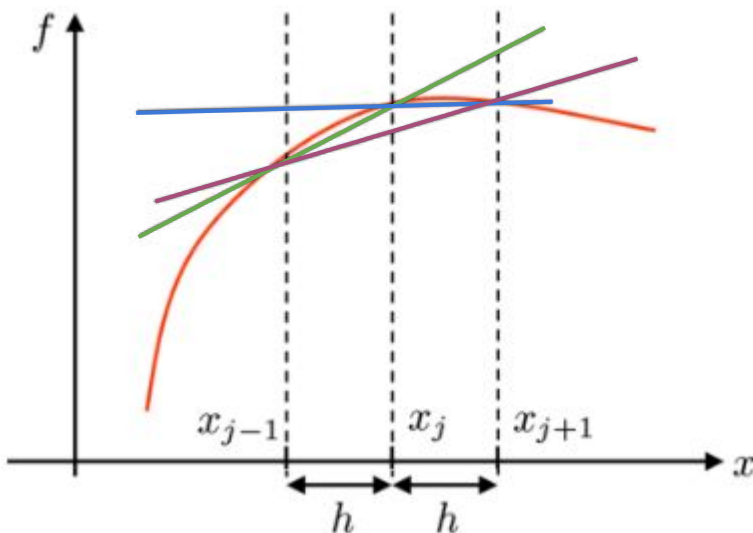
The diagram illustrates the general form of a differential equation, $\mathcal{D}[u(x)] = g(x)$. An orange arrow points from the text 'Operador diferencial' to the operator \mathcal{D} . A green arrow points from the text 'Fuente' to the source term $g(x)$. Two black arrows point from the equation to the labels 'ODEs' and 'PDEs', indicating the types of equations this form represents.

IVP: condiciones en un mismo punto (inicial); uso recurrencia

BVP: condiciones en puntos distintos (borde); resolución global

Método de diferencias finitas

Para estimar la derivada



Forward

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

Backward

$$f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

Central

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}}$$

Método de diferencias finitas

El método consiste en discretizar, estimar la derivada (relaciones), pasar a un problema algebraico (operador diferencial como matriz), y resolver

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & & \dots & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \dots & & \bullet \\ x_0 & & & & x_{i-1} & & x_i & & x_{i+1} & & & & x_{N-1} \end{array}$$

Notación

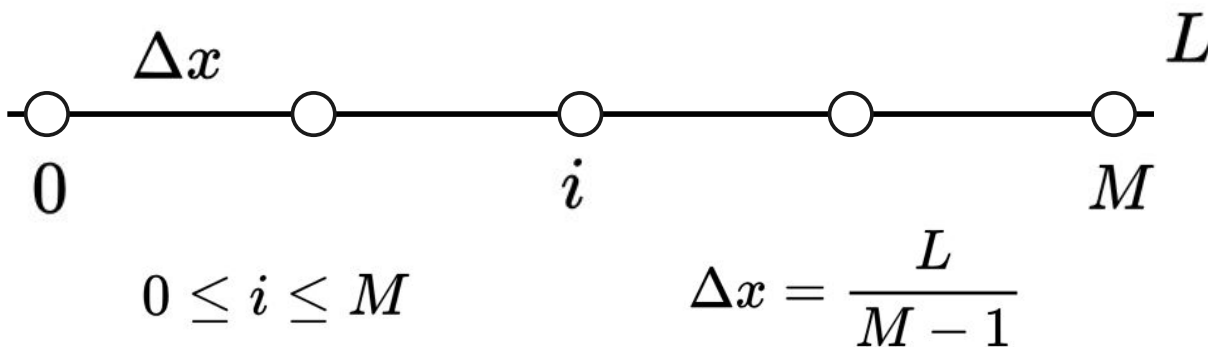
$$\begin{array}{lcl} u(x_i) = u_i & & \\ u(x_i + h) = u_{i+1} & \text{o también} & \frac{du(x)}{dx} = u_x \end{array}$$

Van a ver variabilidad en la notación en la literatura; interpretar por contexto

Ejemplo

Conducción de calor en barra unidimensional con condiciones de contorno

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \boxed{\dot{q}} \quad \tau = 20^\circ C$$



Ejemplo

Ecuación

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0$$

$$k \left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} \right) + \dot{q} = 0$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

Condiciones de contorno

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = 0$$

$$-T_0 + T_1 = 0$$

$$T(L) = 20^\circ C$$

$$T_M = 20$$

Ejemplo

$$i=0: \quad -T_0 + T_1 = 0$$

$$i=1: \quad T_0 - 2T_1 + T_2 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=2: \quad T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=3: \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=4: \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=5: \quad T_5 = 20$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$-T_0 + T_1 = 0 \quad T_5 = 20$$

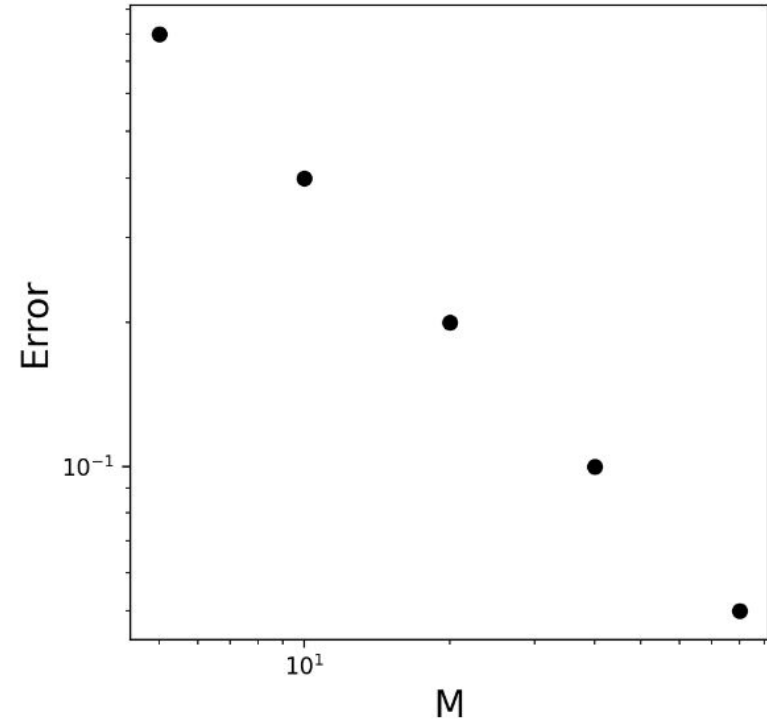
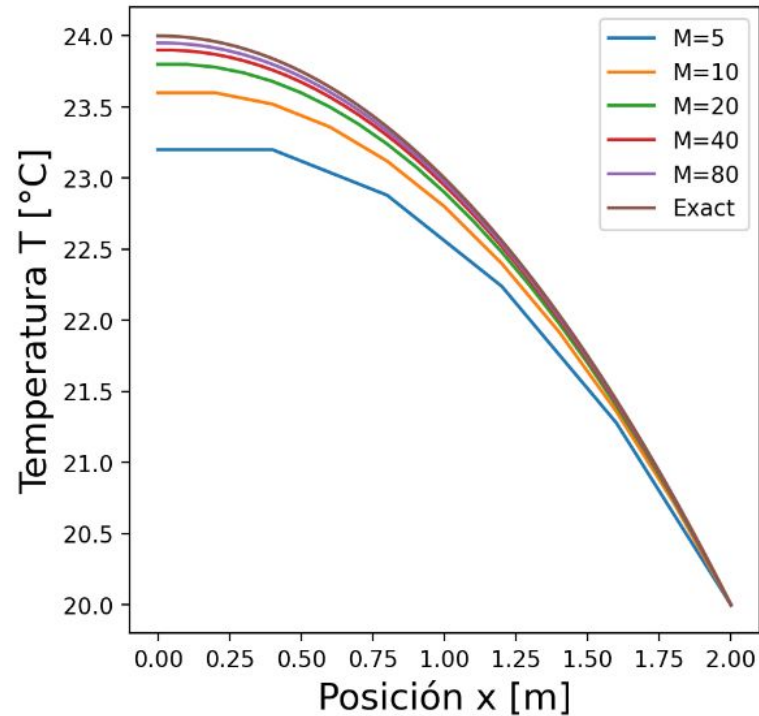
Ejemplo

$$\begin{array}{ll}
 i=0: & -T_0 + T_1 = 0 \\
 i=1: & T_0 - 2T_1 + T_2 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \\
 i=2: & T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \\
 i=3: & T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \\
 i=4: & T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \\
 i=5: & T_5 = 20
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \\
 -T_0 + T_1 = 0 \qquad T_5 = 20
 \end{array}$$

Ejemplo

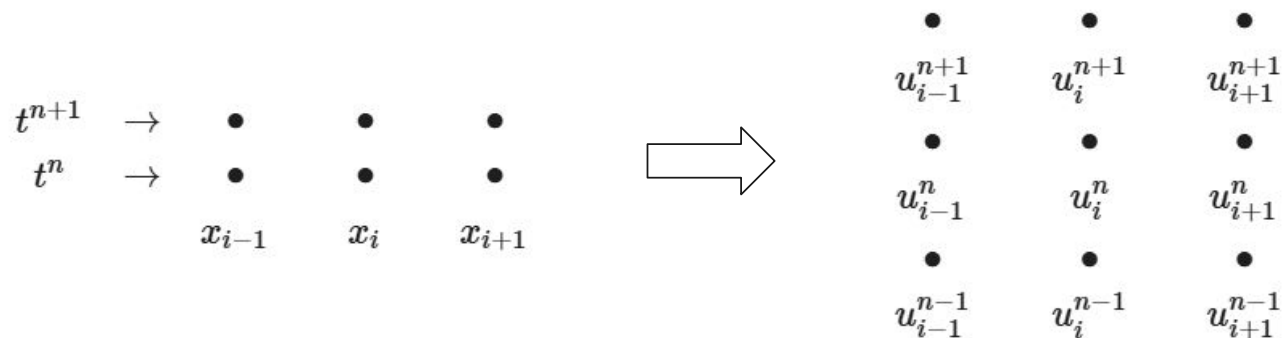
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo



Generalización

Grilla en el espacio y en el tiempo

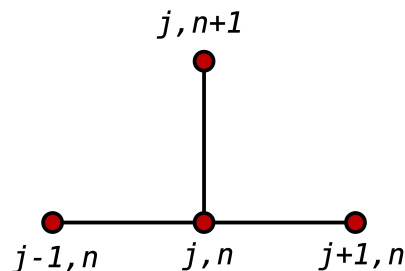


Ahora, dependiendo el problema, vamos a tener una **recurrencia temporal** donde en cada paso se aplicarán **operaciones de álgebra matricial**; estas operaciones, dependiendo del método, requerirán resolver un sistema de ecuaciones lineales (métodos implícitos) o sólo una multiplicación matricial (métodos explícitos).

Métodos explícito e implícito

Puedo tener una misma ecuación diferencial pero abordarlo con distintos métodos de estimaciones de la derivada de diferencias finitas

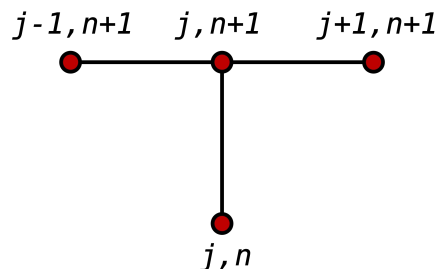
FTCS: forward time centered space



$$Y(t + \Delta t) = F(Y(t))$$

Explícito

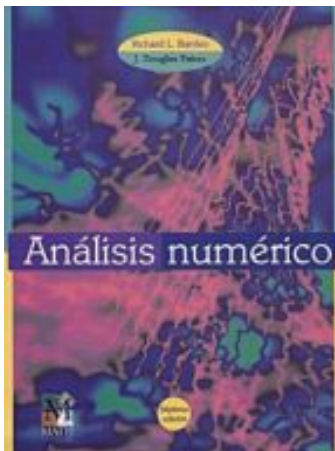
BTCS: backward time (n+1) centered space



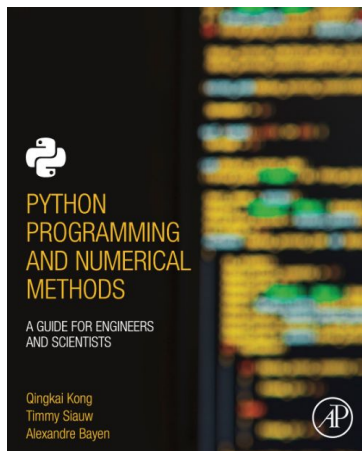
$$G(Y(t), Y(t + \Delta t)) = 0$$

Implícito

Bibliografía recomendada



Burden & Faires 2010



Kong et al 2020

Google

stackoverflow

towards
data science

YouTube