# Clase 11:
# **Transformada de Fourier**

# Transformada de Fourier

- Motivación en el marco de la materia
- Transformada de Fourier en señales
  - Interpretación
  - Discretización
- Transformada de Fourier Discreta (DFT)
- Transformada Rápida de Fourier (FFT)
- Bibliografía

# Motivación en el marco de la materia

- Transformada de Fourier

Señales

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \longrightarrow \text{Interpretación}$$

$\longrightarrow$ Qué cambia?

Discretización

# Generalización de series de Fourier

Para funciones periódicas de período 2L (en lugar de $2\pi$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi x/L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$c_k = \frac{1}{2L}\langle f(x), \psi_k\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik\pi x/L}\, dx.$$

Cambia el período de las funciones base y la normalización

# Interpretación de la transformada

En el contexto de análisis de señales, veamos cómo interpretar la transformada

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left(f(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx. \quad \Longleftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Los coeficientes son muestras discretas de la transformada de Fourier

La transformada me da la composición espectral (frecuencia) de una señal

# Transformada de Fourier Discreta

Cuando tengo datos, lo que tengo son valores discretos

$$x = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$$

Para transformar, ahora en lugar de una integral tengo una sumatoria

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \qquad X = [X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}]$$

En notación matricial

$$X = W \cdot x \qquad W_{kn} = e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$$

# Transformada de Fourier Discreta

$$X = W \cdot x \qquad W_{kn} = e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$$

Definimos $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ $\qquad W_{kn} = \omega^{kn}$

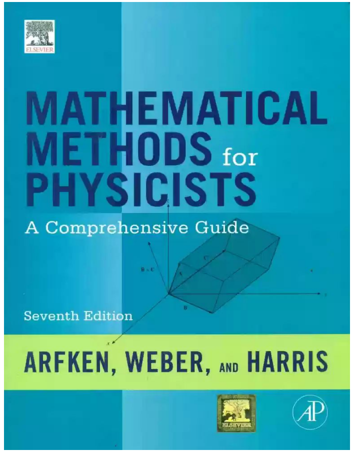
$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

**Cómo puedo calcularla?** Probar con “for” y con matrices y comparar tiempos

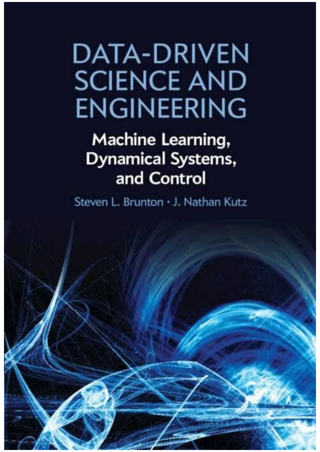
# Transformada Rápida de Fourier

- Es un algoritmo para computar la DFT de manera mucho más eficiente
- Se basa en la estrategia divide and conquer, para resolver partes del problema por separado y después combinarlo
- Para su optimización se usan cantidad de datos potencias de 2

# Bibliografía recomendada




Arfken et al 2012




Brunton & Kutz 2019

Google

stackoverflow

towards
data science

YouTube