
Clase 13:

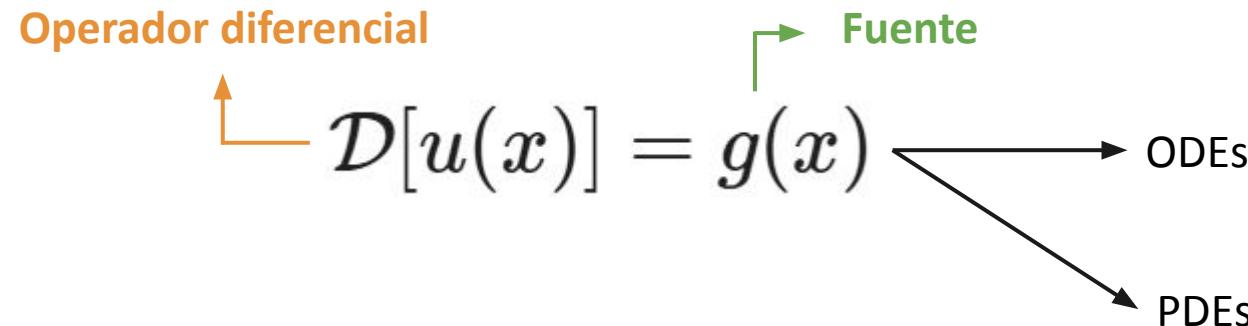
Método de diferencias finitas

Diferencias finitas

- Motivación en el marco de la materia
- Ecuaciones diferenciales
 - Operador diferencial
- Método de diferencias finitas
 - Ejemplo
- Generalización
- Bibliografía

Motivación en el marco de la materia

- Ecuaciones diferenciales

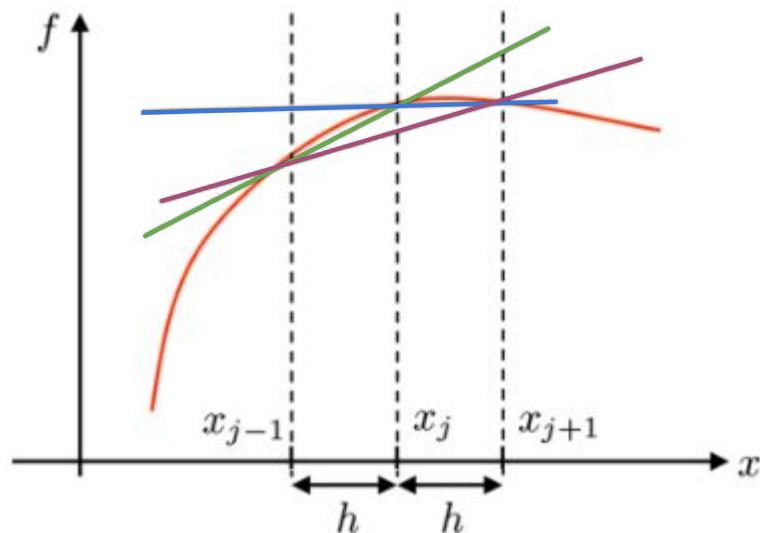


IVP: condiciones en un mismo punto (inicial); uso recursencia

BVP: condiciones en puntos distintos (borde); resolución global

Método de diferencias finitas

Para estimar la derivada



Forward

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

Backward

$$f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

Central

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}}$$

Método de diferencias finitas

El método consiste en discretizar, estimar la derivada (relaciones), pasar a un problema algebraico (operador diferencial como matriz), y resolver

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ x_0 & & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & & x_{N-1} \end{array}$$

Notación

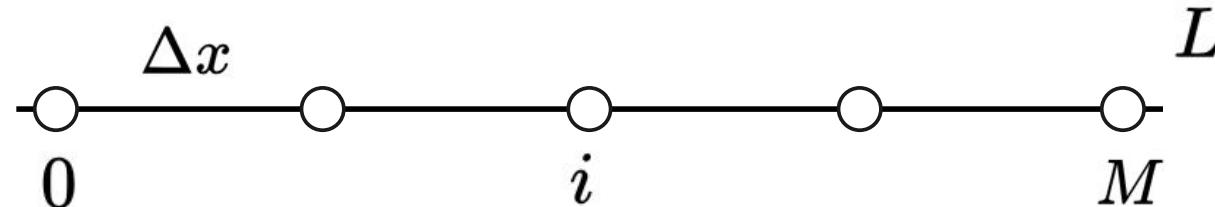
$$\begin{aligned} u(x_i) &= u_i \\ u(x_i + h) &= u_{i+1} \end{aligned} \quad \text{o también} \quad \frac{du(x)}{dx} = u_x$$

Van a ver variabilidad en la notación en la literatura; interpretar por contexto

Ejemplo

Conducción de calor en barra unidimensional con condiciones de contorno

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \boxed{\dot{q}} \quad \tau = 20^{\circ}C$$



$$0 \leq i \leq M$$

$$\Delta x = \frac{L}{M - 1}$$

Ejemplo

Ecuación

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0$$

$$k \left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} \right) + \dot{q} = 0$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

Condiciones de contorno

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = 0$$

$$-T_0 + T_1 = 0$$

$$T(L) = 20^\circ C$$

$$T_M = 20$$

Ejemplo

$$i=0: \quad -T_0 + T_1 = 0$$

$$i=1: \quad T_0 - 2T_1 + T_2 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=2: \quad T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=3: \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=4: \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=5: \quad T_5 = 20$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$-T_0 + T_1 = 0 \quad T_5 = 20$$

Ejemplo

$$i=0: \quad -T_0 + T_1 = 0$$

$$i=1: \quad T_0 - 2T_1 + T_2 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k} \quad -T_0 + T_1 = 0 \quad T_5 = 20$$

$$i=2: \quad T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=3: \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

$$i=4: \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

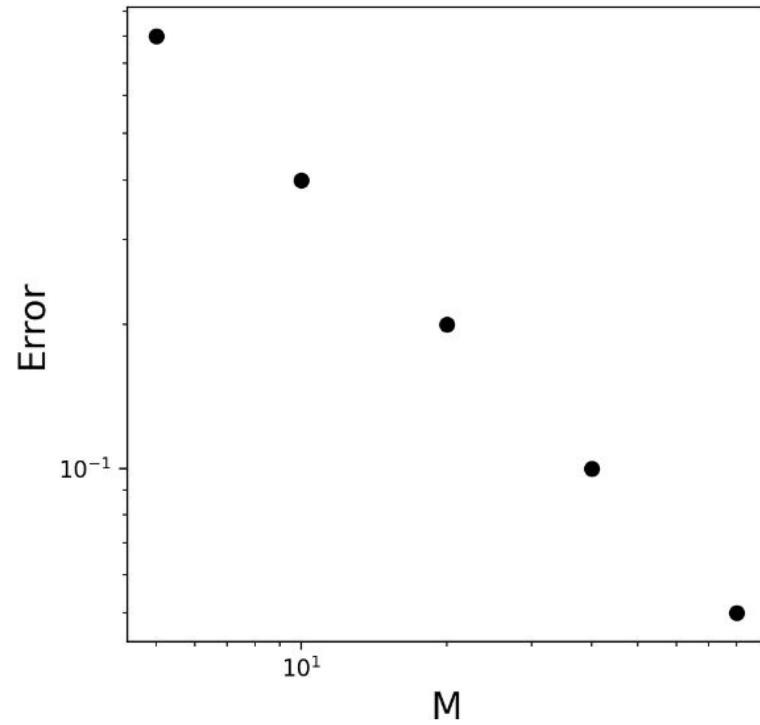
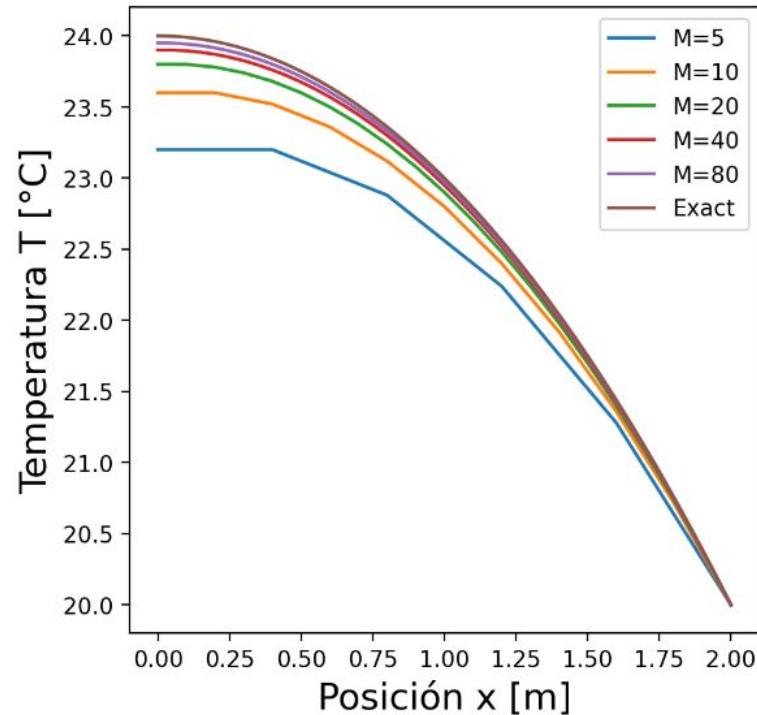
$$i=5: \quad T_5 = 20$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}$$

Ejemplo

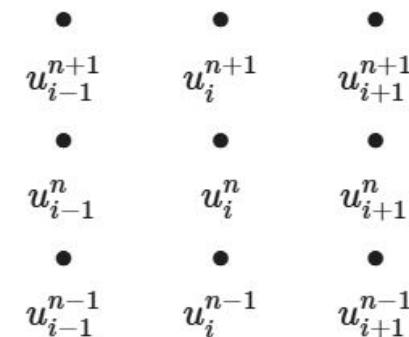
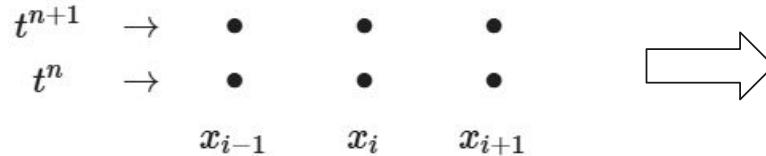
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ -\dot{q}\Delta x^2/k \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo



Generalización

Grilla en el espacio y en el tiempo

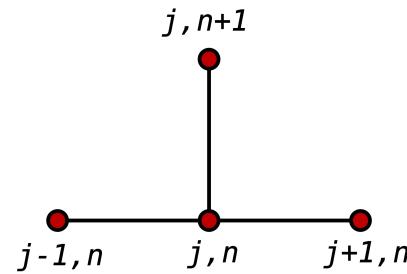


Ahora, dependiendo el problema, vamos a tener una **recurrencia temporal** donde en cada paso se aplicarán **operaciones de álgebra matricial**; estas operaciones, dependiendo del método, requerirán resolver un sistema de ecuaciones lineales (métodos implícitos) o sólo una multiplicación matricial (métodos explícitos).

Métodos explícito e implícito

Puedo tener una misma ecuación diferencial pero abordarlo con distintos métodos de estimaciones de la derivada de diferencias finitas

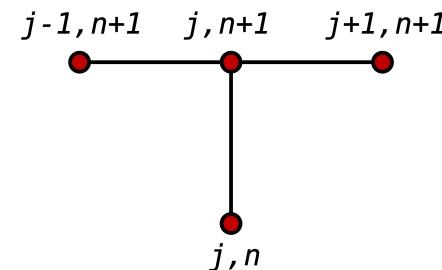
FTCS: forward time centered space



$$Y(t + \Delta t) = F(Y(t))$$

Explícito

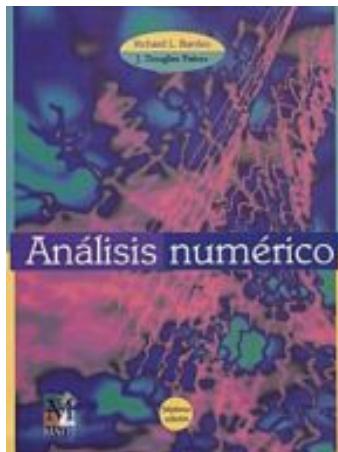
BTCS: backward time (n+1) centered space



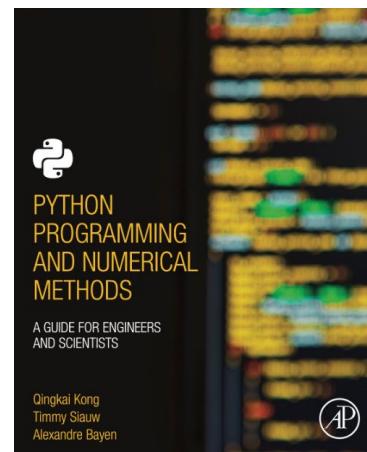
$$G\left(Y(t), Y(t + \Delta t)\right) = 0$$

Implícito

Bibliografía recomendada



Burden & Faires 2010



Kong et al 2020

