Tratamento Estatístico de dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2019

Tópico 6 - Testes estatísticos parte 1

(o teste de Qui-quadrado)

O método dos mínimos quadrados (revisão)

- O método dos mínimos quadrados consiste em determinar os parâmetros como àqueles que minimizam a seguinte somatória (caso de dados estatisticamente independentes):

$$Q(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - G(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2$$

onde a função modelo, $G(x_i, \vec{a})$, descreve a relação entre o valor esperado do i-ézimo dado experimental com os parâmetros a serem estimados. No caso de uma reta $G(x, \vec{a}) = a_1 + a_2 x$.

Ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ (revisão)

- Se a função modelo puder ser escrita como:

$$G(x, \vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_P g_P(x)$$

- O sistema linear de equações do MMQ pode ser escrito de forma matricial: $\overline{D} = \mathbf{M}\overline{\tilde{A}}$

$$D_l = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i g_l(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad M_{l,c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{g_l(x_i) g_c(x_i)}{\sigma_i^2}$$

cuja solução é: $\overline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_M \end{bmatrix} = (\mathbf{M}^{-1})\overline{D}$ com $\mathrm{V}_{\tilde{A}} = \mathbf{M}^{-1}$

Exemplos de ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ

$$G(x,\vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_P g_P(x)$$

- Posição em função do tempo de um corpo em queda livre partindo do repouso:

$$G = a_1 + a_2 t^2,$$

o que implica $g_1 = 1$ e $g_2 = t^2$

- Tensão de um sinal senoidal de frequência conhecida medida em um osciloscópio (com nível DC):

$$G = a_1 \cos(2\pi f t) + a_2 \sin(2\pi f t) + \mathrm{a}_3,$$

o que implica $g_1 = \cos(2\pi f t)$, $g_2 = \sin(2\pi f t)$ e $g_3 = 1$

O teste de χ^2

- O teste de χ^2 avalia se a dispersão dos pontos ao redor da função ajustada é consistente com as incertezas dos dados. No caso de **dados estatisticamente independentes**, o χ^2 é calculado pela expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - G\left(x_i, \vec{\tilde{a}}\right)}{\sigma_i} \right]^2$$

- O *valor esperado* (isto é, o *valor médio verdadeiro*) do χ^2 é $\langle \chi^2 \rangle = L$, onde $L = N - P$ é o número de graus de liberdade, N o número de dados e P o número de parâmetros ajustados.

- É usual calcular o $\chi^2_{Red} = \frac{\chi^2}{L}$, cujo *valor esperado* é 1.

Teste de hipótese usando o χ^2

- Para **dados gaussianos, incertezas corretas e modelo adequado** a função densidade de probabilidade de $z = \chi^2$ é:

$$f(z) = \frac{1}{2^{\left(\frac{L}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} z^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} e^{\frac{-z}{2}}$$

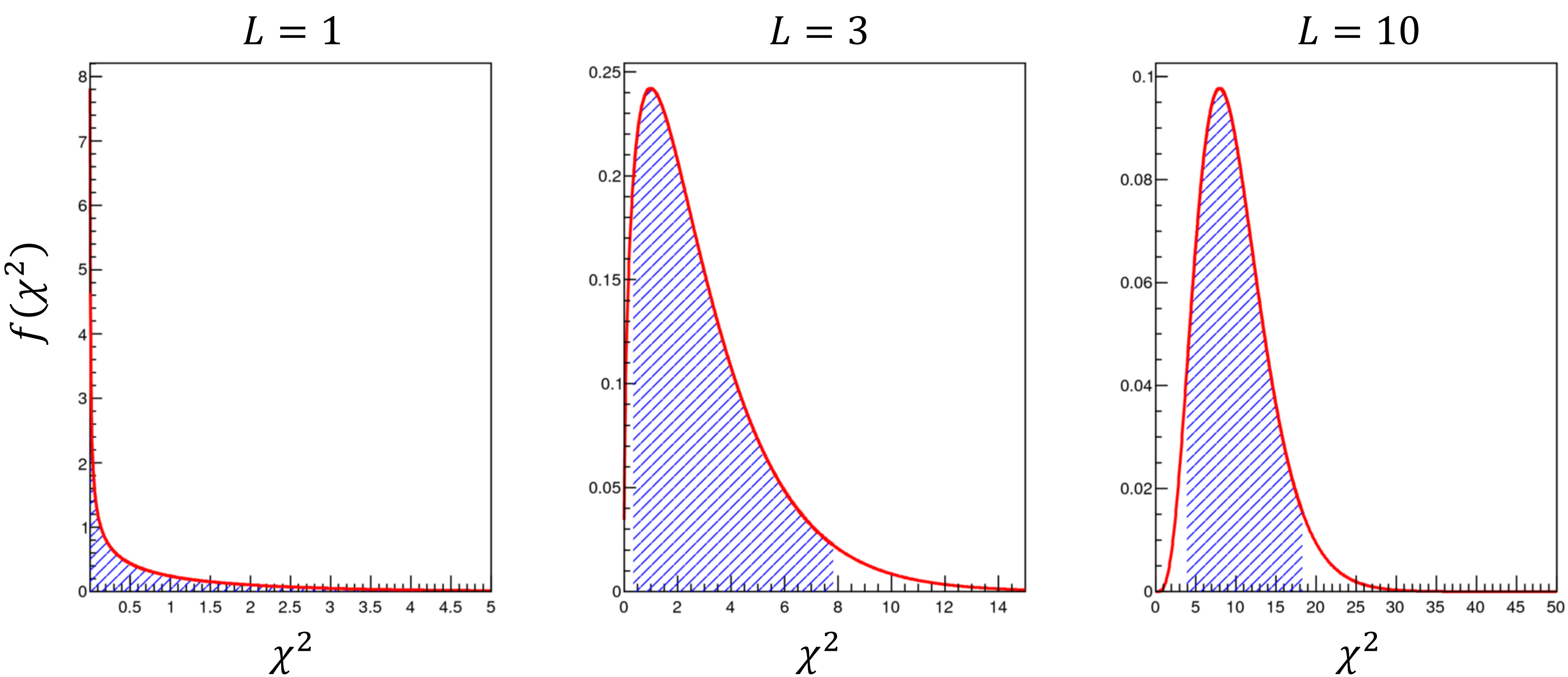
onde $\Gamma(n)$ é a função gama: se n for inteiro, $\Gamma(n) = (n-1)!$, mas se n for semi-inteiro, $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$.

- Com a função densidade de probabilidade do χ^2 é possível avaliar a qualidade do ajuste (**envolve o modelo e as incertezas**).

- Antes é preciso **verificar, no gráfico dos resíduos**, $\mathrm{R_i} = y_i - G(x_i, \vec{\vec{a}}\,)$, **se o modelo é adequado e se não há erros grosseiros**.

Teste de hipótese usando o χ^2 (parte II)

A função densidade de probabilidade de χ^2 tem uma assimetria positiva bastante pronunciada quando o número de graus de liberdade, $L = N - P$, é pequeno:



χ^2 para estimar a incerteza dos dados

- Como o teste de χ^2 avalia se a dispersão dos pontos ao redor da função ajustada é consistente com as incertezas, no caso em que **o modelo é correto e as incertezas são iguais e desconhecidas**, o fato do valor esperado do χ^2 ser igual ao número de graus de Liberdade (isto é, $\langle\chi^2\rangle = L$) pode ser usado para estimar a incerteza dos dados.

- No caso de **dados estatisticamente independentes** com incertezas iguais, a incerteza dos dados pode ser estimada por:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - G(x_i, \vec{\tilde{a}}\,)\right]^2}$$