Fakultet for Teknologi og Realfag

LF Eksamen vår 2024

Emnekode: MA-111

08. mai 2024
09:00 - 12:00

Generell informasjon

Antall sider inkl. forside: 6

Tillatte hjelpemidler: Vedlagt formelark og kalkulator. Se vedlagt formelark på slutten av oppgavesettet.
Merknader:

- Hver oppgave teller like mye ved sensur.
- Skriv ned oversiktlige svar og vis alle nødvendige mellomregninger – skriv ned hva du gjør og hvorfor du gjør det.

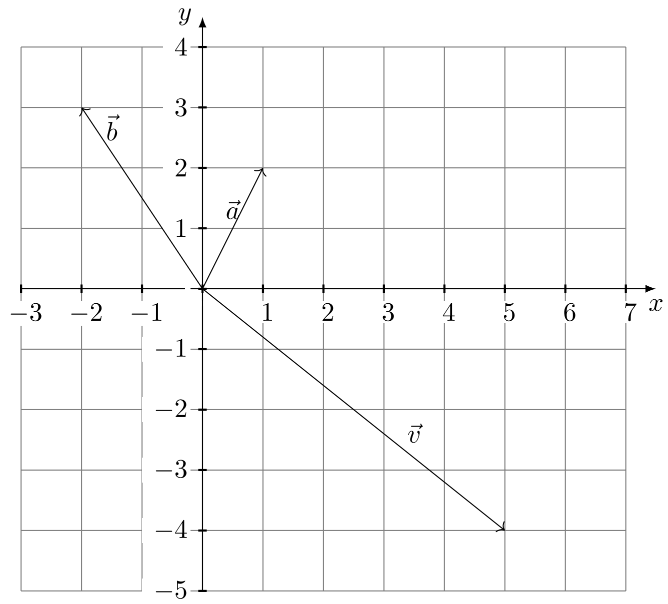
Kontakt under eksamen: Vuk Milanovic, tlf: 900 46 227, e-mail: vuk.milanovic@uia.no

Oppgave 1

Gitt to vektorer $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, regn ut $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Tegn vektorene $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{v}$ som piler i et koordinatsystem.

$\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (-4) \\ 2 - 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}}}$



Oppgave 2

Regn ut vinkelen θ mellom vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fra Oppgave 1.

For å regne ut vinkelen bruker vi formelen for skalarprodukt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$ Vi løser denne likninga for vinkelen θ:

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ Da må vi regne ut hver faktor på høyre side av likhetstegnet:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = -2 + 6 = 4$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ Putter alt dette inn i formelen fra tidligere:

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}$

$\underline{\underline{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}\right) = 60.25^\circ \approx 60^\circ}}$

Oppgave 3

Multipliser matrisa $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ med vektoren $\vec{b}$ fra Oppgave 1.

$\mathbf{V} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix}}}$

Oppgave 4

Regn ut **AB** når du vet at: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 5

Regn ut **DC** for følgende matriser: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 6

Vis at $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ er ei skaleringsmatrise.

For at **S** skal være ei skaleringsmatrise må den oppfylle 3 krav:
1) Matrisa må være symmetrisk
2) Sporet, tr(S), til matrisa må være ≥ 0
3) Determinanten, det(S), til matrisa må være ≥ 0

1) Vi ser at $s_{21} = s_{12}$, dermed er matrisa symmetrisk ✓
2) $\mathrm{tr(S)} = s_{11} + s_{22} = 3 + 3 = 6 \geq 0$ ✓
3) $\mathrm{det(S)} = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) = 9 - 4 \geq 0$ ✓

Matrisa **S** er ei skaleringsmatrise.

Oppgave 7

Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisa **S** fra Oppgave 6.

Egenverdier finnes v.h.a. formelen:

Den generelle formelen for å finne egenverdiene er:
$g = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2})$
Her må alle m-ene erstattes med s da vår matrise heter **S**.
$g = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}) = \frac{1}{2}(3 + 3 \pm \sqrt{(3-3)^2 + 4 \cdot (-2)^2})$
$g = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{4 \cdot 4}) = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{16})$ Dette gir oss to egenverdier:
$\underline{\underline{g_1 = \frac{1}{2}(6 + 4) = 5}}$
$\underline{\underline{g_2 = \frac{1}{2}(6 - 4) = 1}}$

De tilhørende egenvektorene:
$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} s_{12} \\ g_1 - s_{11} \end{bmatrix}$
$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 - 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} s_{12} \\ g_2 - s_{11} \end{bmatrix}$$
$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 - 3 \end{bmatrix}$$
$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 8

Lag matrisa $\mathbf{R}(180°, \mathbf{p})$ som roterer 180° mot klokka om punktet $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. *(Bruk homogene koordinater)*

Her skal vi konstruere en matrise $\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\ \mathbf{R}(180°)\ \mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p})$,
altså vi flytter punktet til origo med $\mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p})$, deretter roterer vi om origo via $\mathbf{R}(180°)$, og så flytter vi punktet tilbake til "start" v.h.a. $\mathbf{T}(\mathbf{p})$.
Vi trenger nå alle disse matrisene:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\mathbf{R}(180°) = \begin{bmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ Må gjøre om til homogene koordinater og får da:

$$\mathbf{R}(180°) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Setter nå inn i formelen:
$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\ \mathbf{R}(180°)\ \mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p})$

$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Ganger sammen de to siste matrisene først:

$$\mathbf{R}(180°)\ \mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot(-3) + 0\cdot(-2) + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot(-3) + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-3) + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(180°)\ \mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\ \mathbf{R}(180°)\ \mathbf{T}(\text{-}\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 1\cdot 3 + 0 + 3\cdot 1 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1\cdot(-1) + 0 & 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9

Bruk matrisa **R** fra Oppgave 8 til å roterere vektorene $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, for å vise at vektorene blir rotert som de skal. Tegn figur.

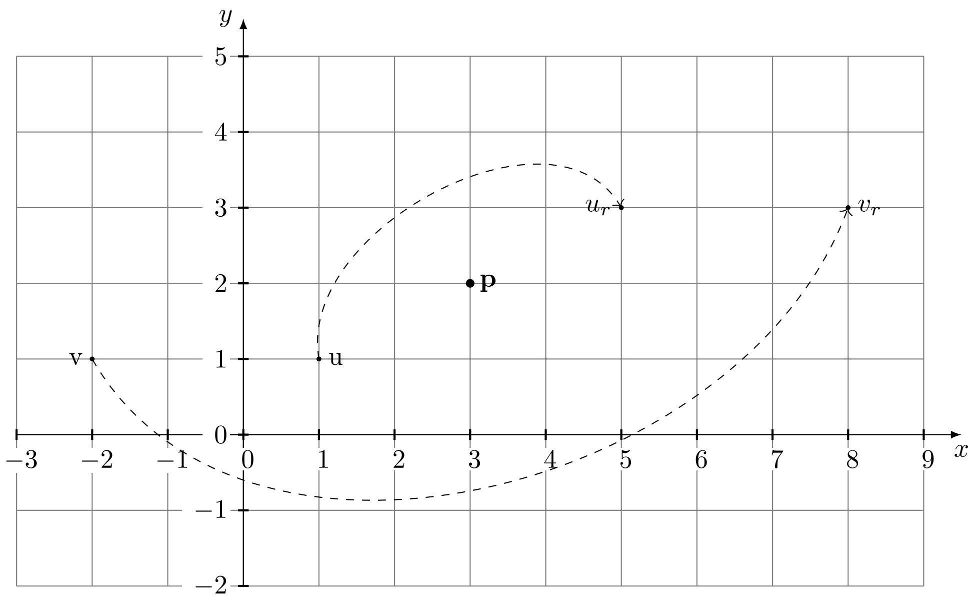
For at vi skal kunne multiplisere disse vektorene med **R** fra Oppgave 8, må vektorene ha homogene koordinater:

$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{R}(180°,\, \mathbf{p}) \cdot \vec{u} = \vec{u_r} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1+0+6\\0-1+4\\0+0+1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix}}}$$

$$\mathbf{R}(180°,\, \mathbf{p}) \cdot \vec{v} = \vec{v_r} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+0+6\\0-1+4\\0+0+1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}8\\3\\1\end{bmatrix}}}$$



Alt ser fint ut!

Oppgave 10

Finn matrisa $\mathbf{R}(\vec{n},\, \theta)$ som roterer vektorer 90° i rommet om z-aksen.
Sjekk svaret ved å regne ut at $\mathbf{R}(\vec{n}, \theta)\vec{u} = \vec{u}$, der $\vec{u} = \vec{n}$.

Først må vi konstruere matrisa $\mathbf{R}(\vec{n},\, \theta)$ ved hjelp av formelen
$\mathbf{R}(\vec{n}, \theta) = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{N}(1\text{- }\cos\theta) + \mathbf{A}\sin\theta$

Til dette trenger vi **I**, **N**, **A** og $\vec{n}$.
For rotasjon om z-aksen så er

$\vec{n} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Vi gjenkjenner at $\cos 90 = 0$ og $\sin 90 = 1$ slik at regnestykket

$\mathbf{R}(\vec{n}, \theta) = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{N}(1\text{- }\cos\theta) + \mathbf{A}\sin\theta$ nå ser slik ut:
$\mathbf{R}(\vec{n}, \theta) = \mathbf{I} \cdot 0 + \mathbf{N}(1\text{-}0) + \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{N} + \mathbf{A}$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0^2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 & 0^2 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får da at

$$\mathbf{R}(\vec{n}, 90°) = \mathbf{N} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\vec{n}, 90°) = \begin{bmatrix} 0+0 & 0-1 & 0+0 \\ 0+1 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}(\vec{n}, 90°) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Tester om $\mathbf{R}(\vec{n}, \theta)\vec{u} = \vec{u}$:

$$\mathbf{R}(\vec{n}, \theta)\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0 + 0\cdot 1 \\ 0 + 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{n} = \vec{u}}}$$

Formler og uttrykk

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

$\text{tr(M)} = m_{11} + m_{22}$

$\det(\text{M}) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$

$g = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2})$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g - m_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotasjon i rommet: $\mathbf{R}(\vec{n}, \theta) = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{N}(1\text{-} \cos\theta) + \mathbf{A}\sin\theta$, der

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$