UNIVERSITETET I AGDER
FAKULTET FOR TEKNOLOGI OG REALFAG

Bokmål

Løsningsforslag: Ma-111 – 23. mai 2022

NB! La a, b, og c være første, andre og tredje siffer i kandidatnummeret ditt. Bruk disse tallene der det står a, b, og c i oppgave 1, 2, 3, 4, og 5 under.

Eksempel: Om kandidatnummeret ditt er 731, så er $a = 7$, $b = 3$, og $c = 1$.

Oppgave 1

Gitt to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} + 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{c} + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Finn $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

Tegn vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ som piler i et koordinatsystem.

Løsning:

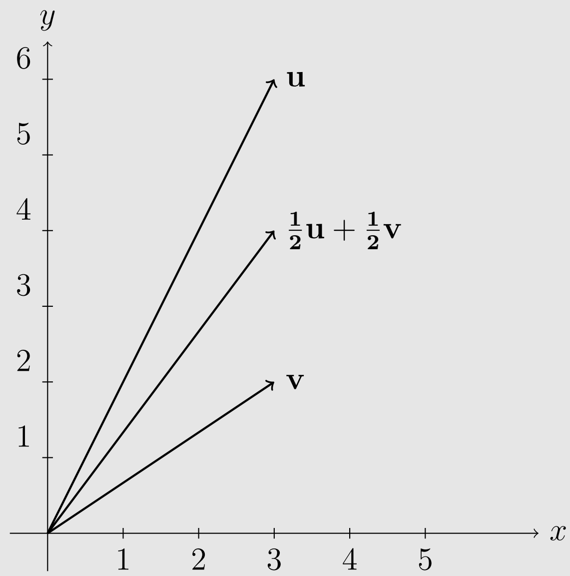
Regner først ut

$$\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a/2 \\ (b+1)/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c+1)/2 \\ 2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+c+1}{2} \\ \frac{b+1+2}{2} \end{bmatrix}$$

Hvis f.eks. kandidatnummeret er 352 så er $a = 3$, $b = 5$, og $c = 2$ slik at

$$\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+3}{2} \\ \frac{6+2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} \\ \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tegner så vektorene. For kandidatnummer 352 vil det Det slik ut.



Oppgave 2

Regn ut vinkelen mellom vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ fra Oppgave 1.

Løsning:

Vil bruke

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Regner ut skalarproduktet av **u** og **v**:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c+1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \cdot (c+1) + (b+1) \cdot 2 = a(c+1) + 2(b+1).$$

Finner lengdene av vektorene:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \quad \text{og} \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{(c+1)^2 + 2^2}.$$

Derfor blir

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{a(c+1) + 2(b+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}\sqrt{(c+1)^2 + 2^2}}$$

Hvis f.eks. kandidatnummeret er 271, så er $a = 2$, $b = 7$ og $c = 1$ slik at

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{2(1+1) + 2(7+1)}{\sqrt{2^2 + (7+1)^2}\sqrt{(1+1)^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{68}\sqrt{8}}$$

så $\theta \approx \cos^{-1}(0.8575) \approx 31°$ (eller omtrent 0.54042 radianer).

Oppgave 3

Multipliser matrisa $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & \text{b + 1} \\ \text{c + 1} & 2 \end{bmatrix}$ med vektoren **v** fra Oppgave 1.

Løsning:

Ganger

$$\mathbf{Fv} = \begin{bmatrix} 2 & b+1 \\ c+1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (c+1) + (b+1) \cdot 2 \\ (c+1) \cdot (c+1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(c+1) + 2(b+1) \\ (c+1)^2 + 4 \end{bmatrix}$$

Hvis kandidatnummeret begynner på $a = 2$, så inneholder **Fv** tallene $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ og $|\mathbf{v}|^2$. Så med kandidatnummer 271 så blir

$$\mathbf{Fv} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Regn om mulig ut **AB** og **BA**, når **A** og **B** er matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{c - 4} & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \text{b - 4} \end{bmatrix}$$

Løsning:

Ganger sammen radene i den første med kolonnene i den andre. Først:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c-4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & b-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c-4)\cdot 1 + 1\cdot 1 & (c-4)\cdot(-2) + 1\cdot(b-4) \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot(b-4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c-4+1 & -2c+b+8-4 \\ -2+1 & 4+b-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-3 & -2c+b+4 \\ -1 & b \end{bmatrix}$$

mens

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & b-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c-4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(c-4) + (-2)\cdot(-2) & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 \\ 1\cdot(c-4) + (b-4)\cdot(-2) & 1\cdot 1 + (b-4)\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c-4+4 & 1-2 \\ c-4-2b+8 & 1+b-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -1 \\ c-2b+4 & b-3 \end{bmatrix}$$

F.eks. hvis kandidatnummeret er 345, så er $b = 4$ og $c = 5$ slik at

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

Regn om mulig ut **CD** og **DC** når **C** og **D** er matrisene

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{a} & 1 \\ 2 & \text{b} \\ \text{c} & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning:

Ganger 3×2 matrise $\mathbf{C}$ med 2×2 matrise $\mathbf{D}$ og får 3×2 matrise:

$$\begin{aligned}
\mathbf{CD} &= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & b \\ c & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \cdot 1 + 1 \cdot 0 & a \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + b \cdot 0 & 2 \cdot 2 + b \cdot 3 \\ c \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & c \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + 0 & 2a + 3 \\ 2 + 0 & 4 + 3b \\ c + 0 & 2c - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a + 3 \\ 2 & 3b + 4 \\ c & 2c - 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

F.eks. hvis kandidatnummeret er 251, så er $a = 2$, $b = 5$ og $c = 1$ slik at

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \cdot 2 + 3 \\ 2 & 3 \cdot 5 + 4 \\ 1 & 2 \cdot 1 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 19 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Det gir ikke mening å gange $\mathbf{DC}$ fordi 2×2 kan ikke ganges med 3×2 matrise (det er ikke like mange kolonner i $\mathbf{D}$ som det er rader i $\mathbf{C}$).

NB! La d være det sifferet lengst til høyre i ditt kandidatnummer som ikke er 0. Fyll det inn for d i matrisa $\mathbf{M}$ i Oppgave 6.
Eksempel: Om kandidatnummeret er 735, så blir $d = 5$. Om kandidatnummeret er 710, så blir $d = 1$.

Oppgave 6

Sjekk om $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5 & \mathrm{d} \\ \mathrm{d} & 5 \end{bmatrix}$ er ei strekk- eller krympematrise (skaleringsmatrise).

Løsning:

Sjekker de tre kriteriene for at $\mathbf{M}$ skal være ei strekk/krympematrise.

Vi har $m_{12} = m_{21} = d$ så $\mathbf{M}$ er symmetrisk. Det er ok.

Vi har $\operatorname{tr}(M) = 5 + 5 = 10 \geq 0$. Det er også ok.

Vi har $\det(M) = 5 \cdot 5 - d \cdot d = 25 - d^2$. Hvis $d = 1,2,3,4,5$, så er $\det(M) \geq 0$ og alle tre kriteriene er oppfylt. Hvis $d = 6,7,8,9$, så er $\det(M) < 0$, og M er ikke strekk/krympematrise.

Oppgave 7

Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisa $\mathbf{M}$ fra Oppgave 6.

Løsning:

Bruker formel for egenverdiene

$$g = \frac{1}{2}\left(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + 5 \pm \sqrt{(5-5)^2 + 4 \cdot d^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(10 \pm \sqrt{4d^2}\right) = \frac{1}{2}(10 \pm 2d) = 5 \pm d.$$

Det gir følgende egenverdier. Hvis $d = 1$: $g = 5 + 1 = 6$ og $h = 5 - 1 = 4$.

Hvis $d = 2$: $g = 5 + 2 = 7$ og $h = 5 - 2 = 3$.

Hvis $d = 3$: $g = 5 + 3 = 8$ og $h = 5 - 3 = 2$.

Hvis $d = 4$: $g = 5 + 4 = 9$ og $h = 5 - 4 = 1$.

Hvis $d = 5$: $g = 5 + 5 = 10$ og $h = 5 - 5 = 0$.

Hvis $d = 6$: $g = 5 + 6 = 11$ og $h = 5 - 6 = -1$.

Hvis $d = 7$: $g = 5 + 7 = 12$ og $h = 5 - 7 = -2$.

Hvis $d = 8$: $g = 5 + 8 = 13$ og $h = 5 - 8 = -3$.

Hvis $d = 9$: $g = 5 + 9 = 14$ og $h = 5 - 9 = -4$.

Tilhørende egenvektorer er

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g - m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ (5+d) - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ h - m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ (5-d) - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -d \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8

Regn ut og tegn opp hva matrisa $\mathbf{M}$ fra Oppgave 6 gjør med standardkvadratet $(1{,}1)$, $(-1{,}1)$, $(-1,-1)$ og $(1,-1)$. Tegn også inn egenvektorene til $\mathbf{M}$ i samme plott.

Løsning:

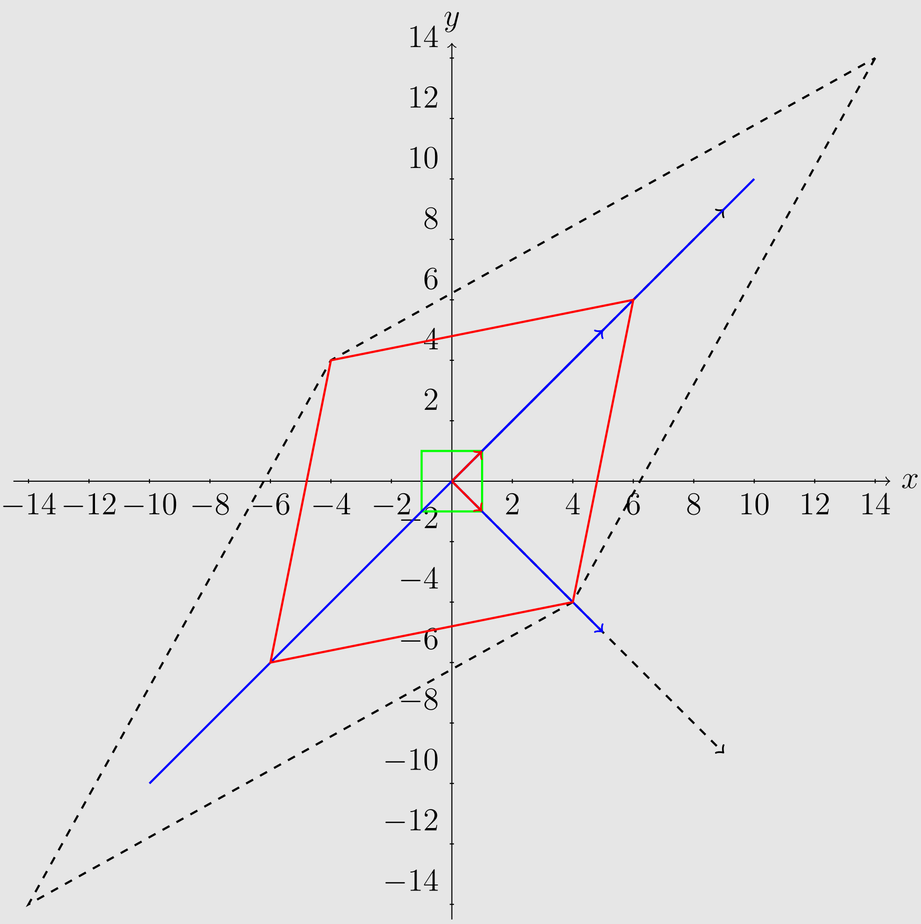
Regner først:

$$M\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ d & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+d \\ d+5 \end{bmatrix},$$
$$M\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ d & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+d \\ -d+5 \end{bmatrix},$$

$$M\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & d\\ d & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5-d\\-d-5\end{bmatrix},$$

$$M\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & d\\ d & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-d\\d-5\end{bmatrix}.$$

Tegner opp for $d = 1$ (rødt), $d = 5$ (blått), og $d = 9$ (stipla linjer). For $d = 5$ så kollapser kvadratet til et linjestykke. For $d = 9$ så går vi rundt origo motsatt vei i det transformerte kvadratet i forhold til standardkvadratet. Egenvektorene vil alle ligge på linje.



NB! Om kandidatnummer ditt slutter på 0,2,4,6, eller 8, så skal du i Oppgave 9 og 10 under bruke

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Om kandidatnummeret ditt slutter på 1,3,5,7, eller 9, så skal du bruke

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9

Lag matrisa $\mathbf{R}(270°, \mathbf{p})$ som roterer punkter i planet 270° mot klokka om punktet $\mathbf{p}$. (Bruk homogene koordinater.)

Løsning:

Vi trenger matrisa som roterer 270° mot klokka om origo:

$$\mathbf{R}(270°) = \begin{bmatrix} \cos(270°) & -\sin(270°) \\ \sin(270°) & \cos(270°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

I homogene koordinater blir den slik:

$$\mathbf{R}(270°) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Løsningsforslag for første variant med: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Trenger translasjonsmatrise for $\mathbf{p}$ og $-\mathbf{p}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For å roterer om $\mathbf{p}$ så flytter vi først $\mathbf{p}$ til origo, roterer om origo, og flytter så tilbake.

Matrisa blir

$$\mathbf{R}(270°,\mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{R}(270°)\mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Løsningsforslag for andre variant med: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$

Trenger translasjonsmatrise for $\mathbf{p}$ og $-\mathbf{p}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

For å roterer om $\mathbf{p}$ så flytter vi først $\mathbf{p}$ til origo, roterer om origo, og flytter så tilbake. Matrisa blir

$$\mathbf{R}(270°,\mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{R}(270°)\mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Oppgave 10

Bruk matrisa $\mathbf{R}(270°,\mathbf{p})$ fra Oppgave 9 til å rotere vektorene $\mathbf{s}$ og $\mathbf{t}$ for å vise at vektorene blir rotert slik de skal.

Tegn figur!

Løsning:

Løsningsforslag for første variant med:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$$

Skriver først $\mathbf{s}$ og $\mathbf{t}$ i homogene koordinater: $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ganger så sammen:

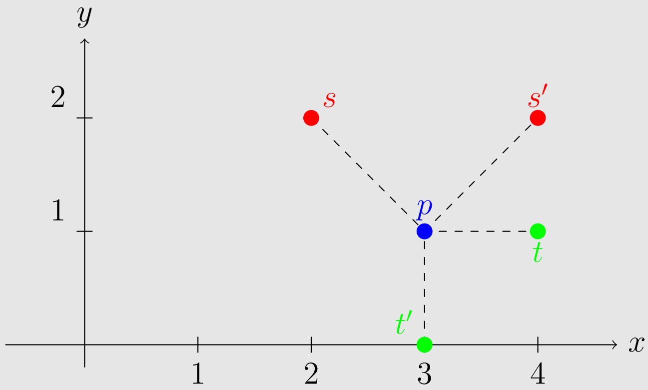
$$\mathbf{R}(270°, \mathbf{p})\ \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2+2 \\ -2+0+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{R}(270°, \mathbf{p})\ \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1+2 \\ -4+0+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette tilsvarer punktene $\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vanlige koordinater.

Tegner opp:



Ser at linjestykkene mellom $\mathbf{p}$ og $\mathbf{s}$ og mellom $\mathbf{p}$ og $\mathbf{t}$ er rotert 270° mot klokka om $\mathbf{p}$ (som er det samme som 90° med klokka).

Løsningsforslag for andre variant med:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Skriver først $\mathbf{s}$ og $\mathbf{t}$ i homogene koordinater: $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ganger så sammen:

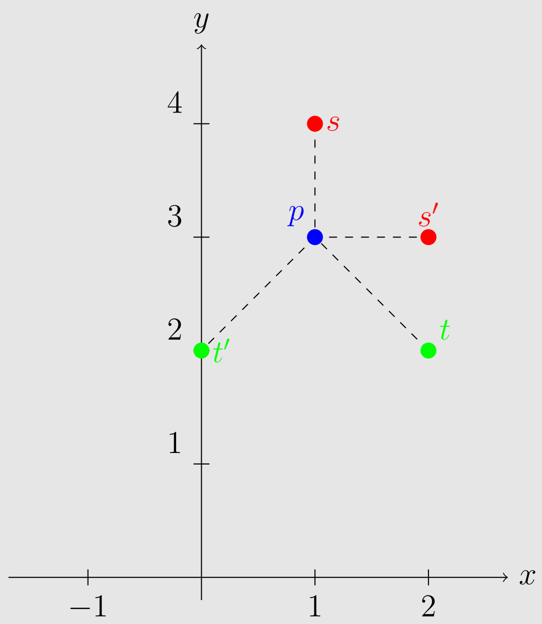
$$\mathbf{R}(270°, \mathbf{p})\ \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4-2 \\ -1+0+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{R}(270°, \mathbf{p})\ \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ -2+0+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette tilsvarer punktene $\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ i vanlige koordinater.

Tegner opp:



Ser at linjestykkene mellom **p** og **s** og mellom **p** og **t** er rotert 270° mot klokka om **p** (som er det samme som 90° med klokka).