UNIVERSITETET I AGDER
FAKULTET FOR TEKNOLOGI OG REALFAG

Bokmål

Løsningsforslag: Ma-111 – 26. mai 2023

Oppgave 1

Gitt to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

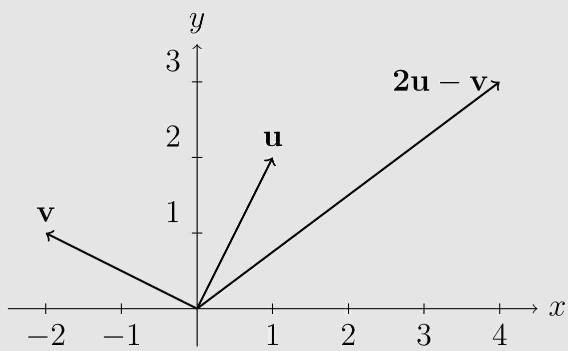
Tegn vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ som piler i et koordinatsystem.

Løsning:

Regner først ut

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tegner så vektorene



Oppgave 2

Multipliser matrisa $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ med vektoren $\mathbf{v}$ fra Oppgave 1.

Løsning:

Ganger

$$\mathbf{F}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4)(-2) + 3 \cdot 1 \\ (-2)(-2) + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3 \\ 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

Regn om mulig ut $\mathbf{AB}$ og $\mathbf{BA}$, når $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Løsning:

Ganger sammen radene i den første med kolonnene i den andre. Først:

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1)+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot(-4) \\ 3\cdot(-1)+2\cdot 3 & 3\cdot 2+2\cdot(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+3 & 4-4 \\ -3+6 & 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

mens

$$\begin{aligned}\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2+2\cdot 3 & (-1)\cdot 1+2\cdot 2 \\ 3\cdot 2+(-4)\cdot 3 & 3\cdot 1+(-4)\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+6 & -1+4 \\ 6-12 & 3-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Oppgave 4

Finn $\mathbf{CD}$, der $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$ er matrisene

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning:

Ganger 3×2 matrise med 2×3 matrise og får 3×3 matrise:

$$\begin{aligned}\mathbf{CD} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\cdot 0+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ 3\cdot 0+(-1)\cdot(-2) & 3\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ 2\cdot 0+2\cdot(-2) & 2\cdot 2+2\cdot 0 & 2\cdot 1+2\cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+2 & 0-0 & 0-3 \\ 0+2 & 6-0 & 3-3 \\ 0-4 & 4+0 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Oppgave 5

Sjekk om $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ er ei strekk- eller krympematrise (skaleringsmatrise).

Løsning:

Sjekker de tre kriteriene for at $\mathbf{M}$ skal være ei strekk/krympematrise.

Vi har $m_{12} = m_{21} = 1$ så $\mathbf{M}$ er symmetrisk. Det er ok.

Vi har $\mathrm{tr}(M) = 3 + 3 = 6 \geq 0$. Det er også ok.

Vi har $\det(M) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 9 - 1 = 8 \geq 0$. Det er også ok.

Altså alle tre kriteriene er oppfylt og M er strekk/krympematrise.

Oppgave 6

Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisa $\mathbf{M}$ fra Oppgave 5.

Løsning:

Bruker formel for egenverdiene

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(M) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(M)^2 - 4\det(M)}\right) = \frac{1}{2}\left(6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(6 \pm \sqrt{4}\right) = \frac{1}{2}\left(6 \pm 2\right) = 3 \pm 1 \end{aligned}$$

Det gir følgende egenverdier: $g = 3 + 1 = 4$ og $h = 3 - 1 = 2$.

Tilhørende egenvektorer er

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g - m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ h - m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7

Regn ut og tegn opp hva matrisa $\mathbf{M}$ fra Oppgave 5 gjør med standardkvadratet (1,1), $(-1{,}1)$, $(-1,-1)$ og $(1,-1)$.

Tegn også inn egenvektorene til $\mathbf{M}$ i samme plott.

Løsning:

Regner først:

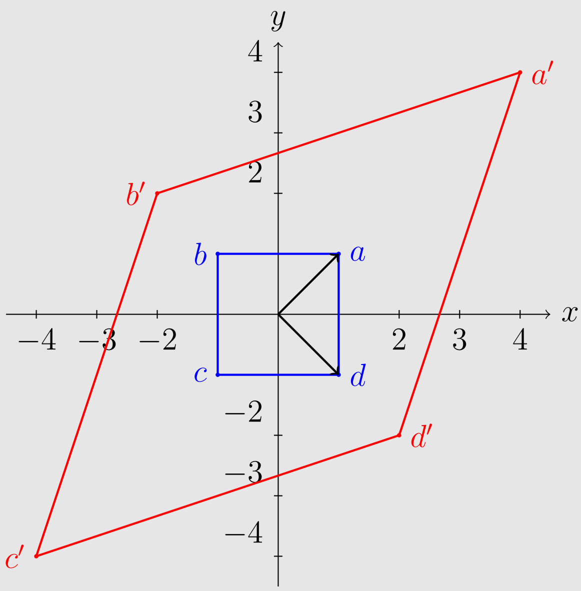
$$M\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$M\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3+1\\-1+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix},$$

$$M\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3-1\\-1-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix},$$

$$M\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-1\\1-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}.$$

Tegner opp.



Oppgave 8

Lag matrisa $\mathbf{R}(180°, \mathbf{p})$ som roterer 180° mot klokka om punktet $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

(Bruk homogene koordinater.)

Løsning:

Vi trenger matrisa som roterer 180° mot klokka om origo:

$$\mathbf{R}(180°) = \begin{bmatrix}\cos(180°) & -\sin(180°)\\ \sin(180°) & \cos(180°)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

I homogene koordinater blir den slik:

$$\mathbf{R}(180°) = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Trenger translasjonsmatrise for $\mathbf{p}$ og $-\mathbf{p}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For å roterer om $\mathbf{p}$ så flytter vi først $\mathbf{p}$ til origo, roterer om origo, og flytter så tilbake. Matrisa blir

$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{R}(180°)\mathbf{T}(-\mathbf{p}) = \mathbf{T}(\mathbf{p}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9

Bruk matrisa $\mathbf{R}(180°, \mathbf{p})$ fra Oppgave 8 til å rotere vektorene $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ for å vise at vektorene blir rotert slik de skal.

Tegn figur!

Løsning:

Skriver først $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i homogene koordinater: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ganger så sammen:

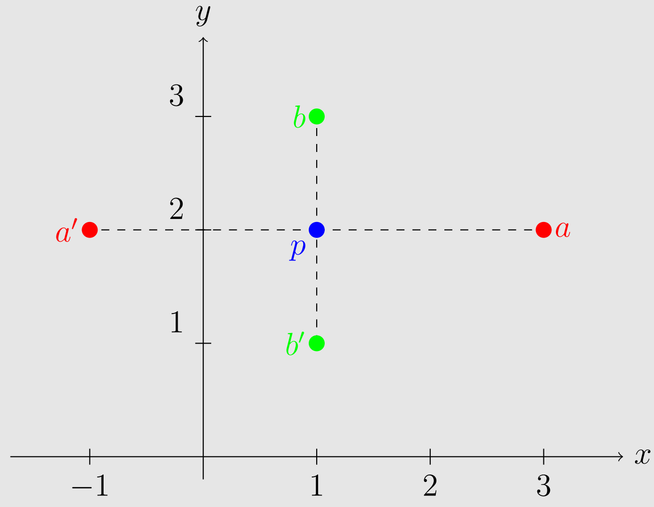
$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p})\ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0+2 \\ 0-2+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{R}(180°, \mathbf{p})\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+2 \\ 0-3+4 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette tilsvarer punktene $\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i vanlige koordinater.

Tegner opp på neste side.


y
3
2
1
b
a'
p
a
b'
−1
1
2
3
x