线性代数核心概念笔记 (LaTeX Enhanced)

1. 行列式的正式定义 (Formal Definition of Determinant)

- **符号:** 矩阵 A 的行列式记作 $|A|$ 或 $\det A$。
- **对象:** 作用于 $n \times n$ 的方阵 A。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **核心定义公式:**

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

- **公式解释:**
  - $\sum_{\sigma \in S_n}$: 对 S_n (集合 {1, 2, ..., n} 的所有排列) 中所有可能的 **排列 (Permutation)** σ 求和。总共有 $n!$ 种排列。
  - $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$: 一个乘积项。从矩阵 A 中选取 n 个元素，规则是:
    - 从第 1 行选第 $\sigma(1)$ 列的元素。
    - 从第 2 行选第 $\sigma(2)$ 列的元素。
    - ...
    - 从第 n 行选第 $\sigma(n)$ 列的元素。
    - **关键:** 由于 σ 是一个排列，这保证了选出的 n 个元素**来自不同的行，也来自不同的列**。
  - $P(\sigma)$ (或 $\operatorname{sgn}(\sigma)$): 排列 σ 的 **符号 (Sign) 或 奇偶性 (Parity)**。
    - $P(\sigma) = +1$ 如果 σ 是 **偶排列** (Even Permutation, 可由偶数次两两对换得到)。
    - $P(\sigma) = -1$ 如果 σ 是 **奇排列** (Odd Permutation, 可由奇数次两两对换得到)。
- **大白话总结:** 行列式的值，是所有“从矩阵不同行不同列取出n个数的乘积”的带符号（正负号由排列奇偶性决定）的总和。

2. 矩阵分类：下三角矩阵 (Lower Triangular Matrix)

- **定义:** 一个方阵 L，如果其**主对角线（左上到右下）上方**的所有元素都为 0，则称为**下三角矩阵 (下三角行列)**。

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

（主对角线及其下方的元素 l_{ij} ($i \geq j$) 可以是任意值）

- **行列式性质:** 下三角矩阵（以及上三角矩阵）的行列式，等于其**主对角线上所有元素的乘积**。

$$|L| = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn} = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

- **大白话总结:** 对角线上方都是0的叫下三角矩阵，它的行列式超好算，就是把对角线上的数乘起来。

3. 重要矩阵运算及其性质 (Key Matrix Operations & Properties)

逆矩阵 (Inverse Matrix - A^{-1})

- **定义:** 方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 满足 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ (I 是单位矩阵)。
- **性质:**
  - 行列式：$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (逆矩阵的行列式是原矩阵行列式的倒数)。前提是 $|A| \neq 0$。
  - 乘积的逆：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (顺序反转)。

转置矩阵 (Transpose Matrix - A^T 或 ${}^tA$)

- **定义:** 将矩阵 A 的行和列互换，即 $(A^T)_{ij} = a_{ji}$。
- **性质:**
  - 行列式：$|A^T| = |A|$ (转置不改变行列式的值)。
  - 乘积的转置：$(AB)^T = B^TA^T$ (顺序反转)。

复共轭矩阵 (Complex Conjugate Matrix - A^* 或 $\bar{A}$)

- **定义:** 将矩阵 A 中每个元素取复共轭（$a + bi \to a - bi$），即 $(\bar{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$。
- **性质:**
  - 行列式：$|\bar{A}| = \overline{|A|}$ (先取共轭再算行列式 = 先算行列式再取共轭)。
  - 乘积的共轭：$\overline{(AB)} = \bar{A}\bar{B}$ (顺序不变)。

4. 矩阵分类：Hermitian 共轭、正交矩阵、酉矩阵 (Hermitian Conjugate, Orthogonal & Unitary Matrices)

Hermitian 共轭 / 共轭转置 (Hermitian Conjugate / Conjugate Transpose - $A^\dagger$ 或 A^*)

- **定义:** 对矩阵先进行**转置 (Transpose)**，然后进行**复共轭 (Complex Conjugate)**。（两个步骤的顺序可交换）。记作 $A^\dagger$ (最常用) 或 A^* (需根据上下文判断)。

$$A^\dagger = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)} \quad \text{即 } (A^\dagger)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

- **操作:** 行列互换，并且每个元素取共轭。

正交矩阵 (Orthogonal Matrix - 直交行列)

- **定义: 实数**方阵 A 满足 $A^T A = AA^T = I$。
- **等价性质:** $A^{-1} = A^T$ (逆矩阵等于其转置矩阵)。
- **行列式:** $|A| = \pm 1$。
- **乘积:** 若 A, B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

酉矩阵 / 幺正矩阵 (Unitary Matrix - ユニタリ行列) (开始定义)

- 是正交矩阵在**复数领域**的推广。
- 定义涉及 Hermitian 共轭... (见下一节)

5. 矩阵分类：酉矩阵 (续)、Hermitian 矩阵 (Unitary (cont.) & Hermitian Matrices)

酉矩阵 / 幺正矩阵 (Unitary Matrix - ユニタリ行列) (完成定义)

- **定义: 复数**方阵 U 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = I$。
- **等价性质:** $U^{-1} = U^\dagger$ (逆矩阵等于其 Hermitian 共轭)。
- **行列式:** $|\det(U)| = 1$ (行列式的模长/绝对值为 1)。
- **乘积:** 若 U, V 均为酉矩阵，则 UV 也是酉矩阵。

Hermitian 矩阵 / 厄米矩阵 (Hermitian Matrix - エルミート行列)

- **定义:** 方阵 A 满足 $A^\dagger = A$ (其 Hermitian 共轭等于自身)。
  - 这要求 $(A^\dagger)_{ij} = \overline{a_{ji}} = a_{ij}$。

- **性质:**
    - 对角线元素 $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ 必须是**实数**。
- **与对称矩阵的关系:** 如果一个 Hermitian 矩阵的所有元素都是**实数**，那么取共轭无效果， $A^\dagger$ 就退化为 A^T 。此时 $A^\dagger = A$ 变为 $A^T = A$，这正是**实对称矩阵 (Real Symmetric Matrix)** 的定义。
- **乘积性质:** 若 A, B 均为 Hermitian 矩阵 ($A^\dagger = A, B^\dagger = B$)，则 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$。由于一般 $BA \neq AB$，所以 AB **通常不是 Hermitian 矩阵** (除非 A 和 B 可交换)。

6. 矩阵分类：可逆矩阵、正规矩阵 (Invertible & Normal Matrices)

可逆矩阵 / 非奇异矩阵 (Invertible / Non-singular Matrix - 正則行列)

- **定义:** 存在逆矩阵 A^{-1} 的方阵 A。
- **充要条件:** 当且仅当矩阵 A 的**行列式不等于 0**。

$$|A| \neq 0 \iff A^{-1} \text{ exists}$$

- **奇异矩阵 (Singular Matrix):** 行列式为 0 的方阵，不可逆。

正规矩阵 (Normal Matrix - 正規行列)

- **定义:** 方阵 A 满足**与其自身的 Hermitian 共轭 $A^\dagger$ 的乘法可交换**。

$$A^\dagger A = AA^\dagger$$

- **重要性:** 这是一个更广泛的概念，包括了 Hermitian 矩阵、反 Hermitian 矩阵 ($A^\dagger = -A$)、酉矩阵、实对称矩阵、实反对称矩阵 ($A^T = -A$)、正交矩阵等多种重要类型。正规矩阵具有良好的谱性质（可以被酉矩阵对角化）。

7. 矩阵的基本运算规则 (Basic Matrix Operations)

- **加法/减法:** $(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ (对应元素相加减，矩阵需同型)。
- **标量乘法:** $(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$ (将标量 c 乘到每个元素上)。
- **矩阵乘法:** 设 $C = AB$，则

$$c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

- **规则:** 结果矩阵 $C = AB$ 中，第 i 行第 j 列的元素 c_{ij}，等于 A 的**第 i 行**与 B 的**第 j 列**对应元素相乘再求和。
- **前提:** A 的列数必须等于 B 的行数。
- **形象化:** $(AB)_{ij} = (\text{Row } i \text{ of } A) \cdot (\text{Column } j \text{ of } B)$ (向量点积)。

8. 使用矩阵求解线性方程组 (Solving Linear Equations using Matrices)

- **标准形式:** n 个未知数 $x_1, \dots, x_n$， n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- **矩阵形式:** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

  其中 A 是系数矩阵， $\mathbf{x}$ 是未知数向量， $\mathbf{b}$ 是常数向量。
- **求解方法 (当 A 可逆时):**
  i. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  ii. 两边左乘 A^{-1}: $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
  iii. 利用 $A^{-1}A = I$: $I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
  iv. 利用 $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- **条件:** 这种解法要求系数矩阵 A **必须是可逆的** ($|A| \neq 0$)。

9. 实例：计算 3x3 行列式 (Example: Calculating a 3x3 Determinant)

- **矩阵:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- **展开公式 (源于 $3! = 6$ 个排列):**

$$\begin{aligned} |A| = &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

  - **正号项 $(P(\sigma) = +1)$:** 对应偶排列 (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)。
  - **负号项 $(P(\sigma) = -1)$:** 对应奇排列 (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)。
- **记忆技巧 (萨吕法则 Sarrus' Rule):**
  i. 将矩阵前两列复制到右侧。
  ii. 三条主对角线方向 (左上到右下) 的乘积为正。
  iii. 三条副对角线方向 (右上到左下) 的乘积为负。
  iv. 六项乘积之和即为行列式。

10. 基本(初等)变换及其对行列式的影响 (Elementary Operations & Effect on Determinant)

- **三种基本行变换 (Row Operations):** (列变换类似，用 C 代替 R)
  i. **倍乘 (Scaling):** 将某行乘以一个非零常数 c。 $(R_i \to cR_i)$
  ii. **倍加 (Replacement):** 将某行 j 的 k 倍加到另一行 i 上。 $(R_i \to R_i + kR_j)$
  iii. **互换 (Interchange):** 交换两行 i, j 的位置。 $(R_i \leftrightarrow R_j)$
- **这些变换对行列式的影响 (总结):** 设 A' 是变换后的矩阵。
  - **倍乘 $R_i \to cR_i$:** 行列式变为原来的 c 倍。 $|A'| = c|A|$
  - **倍加 $R_i \to R_i + kR_j$:** 行列式 **不变**。 $|A'| = |A|$ (见 #14)
  - **互换 $R_i \leftrightarrow R_j$:** 行列式 **变号**。 $|A'| = -|A|$ (见 #12)
  - **转置 (非基本变换):** 行列式 **不变**。 $|A^T| = |A|$ (见 #11)

11. 证明：转置矩阵的行列式不变 (Proof: $|A^T| = |A|$)

- **思路:**
  i. $|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma)(A^T)_{1,\sigma(1)} \cdots (A^T)_{n,\sigma(n)}$
  ii. 利用 $(A^T)_{ij} = a_{ji}$: $|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$
  iii. **关键重排:** 乘积项 $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ 中的因子可以重新排序，使其**行标**按 $1, \ldots, n$ 排列。设 $k = \sigma(j)$，则 $j = \sigma^{-1}(k)$。因此，原乘积等于 $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$。
  iv. $|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$

v. **利用性质:** 排列 σ 和其逆排列 σ^{-1} 的奇偶性相同，即 $P(\sigma) = P(\sigma^{-1})$。
vi. $|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$
vii. **换元:** 令 $\tau = \sigma^{-1}$。当 σ 遍历 S_n 时，τ 也遍历 S_n。
viii. $|A^T| = \sum_{\tau \in S_n} P(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} = |A|$

- **结论:** $|A^T| = |A|$。

12. 基本变换 ②：交换两行/列，行列式变号 (Operation 2: Swapping Rows/Columns Flips Sign)

- **性质:** 交换矩阵的任意两行（或两列），其行列式的值乘以 -1。
- **证明思路 (以交换行 i, k 为例 $R_i \leftrightarrow R_k$):**
  i. 设 A' 是 A 交换 i, k 行后的矩阵。$a'_{ij} = a_{ij}$ ($j \neq i, k$), $a'_{ij} = a_{kj}$, $a'_{kj} = a_{ij}$。
  ii. $|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{k,\sigma(k)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}$
  iii. $|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(i)} \cdots a_{i,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$
  iv. 定义新排列 σ': $\sigma'(j) = \sigma(j)$ ($j \neq i, k$), $\sigma'(i) = \sigma(k)$, $\sigma'(k) = \sigma(i)$。σ' 是 σ 经过一次对换 (i, k) 得到的。
  v. 原乘积可重排为 $a_{1,\sigma'(1)} \cdots a_{i,\sigma'(i)} \cdots a_{k,\sigma'(k)} \cdots a_{n,\sigma'(n)}$。
  vi. 由于 σ' 由 σ 经一次对换得到, $P(\sigma') = -P(\sigma)$, 即 $P(\sigma) = -P(\sigma')$。
  vii. $|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} (-P(\sigma')) a_{1,\sigma'(1)} \cdots a_{n,\sigma'(n)}$
  viii. 当 σ 遍历 S_n 时，σ' 也遍历 S_n。换元:
  $|A'| = -\sum_{\sigma' \in S_n} P(\sigma') a_{1,\sigma'(1)} \cdots a_{n,\sigma'(n)} = -|A|$。
- **结论:** $|A'| = -|A|$。

13. 行列式性质 ③：两行/列相同，行列式为 0 (Property 3: Identical Rows/Columns -> Determinant is 0)

- **性质:** 如果一个矩阵有两行（或两列）完全相同，那么它的行列式等于 0。
- **证明:**
  i. 假设矩阵 A 的第 i 行和第 k 行相同。
  ii. 交换这两行得到矩阵 A'。
  iii. 根据性质 ② (交换行变号)，有 $|A'| = -|A|$。
  iv. 但由于第 i 行和第 k 行相同，交换它们不改变矩阵，即 $A' = A$。
  v. 因此，$|A'| = |A|$。
  vi. 结合两点得：$|A| = -|A|$。
  vii. 这意味着 $2|A| = 0$，所以 $|A| = 0$。

14. 基本变换 ④：一行/列的倍数加到另一行/列，行列式不变 (Operation 4: Adding Row/Column Multiple -> Determinant Unchanged)

- **性质:** 将矩阵某一行（或列）的 c 倍加到另一行（或列）上 ($R_i \to R_i + cR_k, i \neq k$)，行列式的值不变。
- **证明思路 (以 $R_i \to R_i + cR_k$ 为例):**
  i. 设 A' 是 A 经过此操作后的矩阵。 $a'_{lj} = a_{lj}$ ($l \neq i$), $a'_{ij} = a_{ij} + ca_{kj}$。
  ii. $|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}$
  iii. $|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots (a_{i,\sigma(i)} + ca_{k,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)}$
  iv. 利用行列式对第 i 行的线性性质拆分：
  $$|A'| = \left(\sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\right) + \left(\sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots (ca_{k,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)}\right)$$
  v. 第一部分就是 $|A|$。
  vi. 第二部分可以提出因子 c，变为 $c\left(\sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\right)$。
  vii. 括号里的和式，是矩阵 A'' 的行列式，其中 A'' 是将 A 的第 i 行替换为第 k 行得到的矩阵。
  viii. 因此 A'' 的第 i 行和第 k 行完全相同（都是原矩阵 A 的第 k 行）。
  ix. 根据性质 ③ (两行相同行列式为 0)，可知 $|A''| = 0$。
  x. 所以 $|A'| = |A| + c \cdot 0 = |A|$。
- **结论:** $|A'| = |A|$。