粒子的运动方程

这张幻灯片讲的是**带电粒子**（比如电子、离子）在**电磁场**中如何运动的规律。

主要内容

1. **基本情况：**
   - 当一个带电粒子处于一个**随时间和空间都在变化的电磁场**中时，它的运动会遵循下面的数学公式（方程）。
2. **核心公式 (2.1)：**

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j = e_j\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \dot{\mathbf{r}}_j \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right]$$

   - **通俗解释：** 这个公式是说，作用在粒子上的力（左边：质量 m_j 乘以加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_j$，就是牛顿第二定律 $F = ma$）等于它受到的电磁力（右边，即洛伦兹力）。
   - 电磁力由两部分组成：
     - **电场力：** 电荷 e_j 乘以电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$。电场直接对粒子施加力。
     - **磁场力（洛伦兹力）：** 电荷 e_j 乘以粒子的速度 $\dot{\mathbf{r}}_j$ 和磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 的叉乘 ($\times$)。注意：磁场只对运动的电荷施加力，并且力的方向与速度和磁场方向都垂直。
3. **符号解释：**
   - j：代表某一个特定的粒子（编号）。
   - m_j：粒子 j 的质量。
   - e_j：粒子 j 的电荷量。
   - $\mathbf{r}_j$：粒子 j 的位置（是一个矢量，有方向）。
   - $\dot{\mathbf{r}}_j$：粒子 j 的速度（位置对时间的导数，变量上面的一个点代表对时间求一次导数）。
   - $\ddot{\mathbf{r}}_j$：粒子 j 的加速度（速度对时间的导数，或位置对时间的二次导数，变量上面的两个点代表对时间求二次导数）。
   - $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$：在位置 $\mathbf{r}$、时刻 t 的电场强度（矢量）。
   - $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$：在位置 $\mathbf{r}$、時刻 t 的磁场强度（或磁感应强度，矢量）。
   - t：时间。
4. **前提条件（为了简化问题做的假设）：**
   在使用上面这个运动方程时，通常默认满足以下几个条件：
   - **碰撞频率很低：** 粒子之间很少发生碰撞，碰撞不会显著干扰粒子的运动轨迹。可以认为粒子主要受电磁场力控制。
   - **忽略粒子间的相互作用：** 只考虑外部施加的电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 对粒子的影响，忽略粒子自身产生的以及其他邻近粒子产生的电磁场对该粒子的影响。
   - **忽略辐射损失：** 带电粒子在加速运动时（比如在磁场中转圈）会辐射能量，这里假设这种能量损失非常小，可以忽略不计。

总结

这张幻灯片给出了描述单个带电粒子在时变、空变电磁场中运动的基本方程（洛伦兹力方程），并说明了这个方程成立所依赖的一些简化假设。这个方程是研究等离子体物理、粒子加速器、天体物理中带电粒子行为的基础。

相关后续内容

接下来的目录内容说明了要讨论的具体问题：

- **引言 (導入)**
- **粒子在稳定不变的磁场中的运动 (定常磁場中の粒子の運動)**
  - 包括匀强磁场（有/无匀强电场）和不均匀磁场（梯度、曲率）的情况。
  - 讨论粒子运动产生的电流和磁场的关系。
- **粒子在变化的场中的运动和绝热不变量 (変化する場と断熱不変量)**
  - 绝热不变量：在缓慢变化的场中，某些物理量近似保持不变。
  - 磁镜 (ミラー磁場)：一种利用不均匀磁场约束带电粒子的装置。

这张幻灯片上的方程 (2.1) 就是研究所有这些后续内容的基础工具。

描述（电磁）场的麦克斯韦方程组

这张幻灯片介绍的是**麦克斯韦方程组**，这是描述电场和磁场（统称电磁场）如何产生和变化的**基本定律**。可以说是电磁学领域的“牛顿定律”。

主要内容

1. **基本设定：**
   - 我们研究的**电磁场**（就是上一张幻灯片里影响粒子运动的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$）本身不是随便什么样的场都可以，它们必须遵循下面这四个方程所描述的规律。这里考虑的是由外部源产生的场（外场）。
2. **麦克斯韦方程组（四个核心公式）：**
   - **① 法拉第电磁感应定律**

     $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

     - **符号解释：** $\nabla \times \mathbf{E}$ 读作“E的旋度”，表示电场在空间中“打卷”的程度。$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 表示磁场 $\mathbf{B}$ 随时间 t 变化的快慢。
     - **通俗解释：** 这个公式是说，**变化的磁场会产生环绕它的电场**。就像发电机转动磁铁能发电一样，磁场变化会“激发”出电场。前面的负号表示了感应电场方向的规律（楞次定律）。
   - **② 安培-麦克斯韦定律**

     $$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$$

     - **符号解释：** $\nabla \times \mathbf{B}$ 是“B的旋度”，表示磁场“打卷”的程度。$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 表示电场 $\mathbf{E}$ 随时间 t 变化的快慢。$\mathbf{j}$ 是**电流密度**（代表电流的流动）。ε_0 和 μ_0 是常数（后面会解释）。
     - **通俗解释：** 这个公式说明了产生磁场的两种方式：
       a. **电流 ($\mu_0 \mathbf{j}$ 项)：** 稳恒的电流（比如导线里流动的电子）会在周围产生环绕它的磁场（奥斯特实验）。
       b. **变化的电场 ($\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 项)：** 即使没有电流，变化的电场也能像电流一样在周围产生环绕它的磁场。这是麦克斯韦的关键补充，它预言了电磁波的存在。
   - **③ 高斯电场定律**

     $$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

     - **符号解释：** $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 读作“E的散度”，表示电场从一个点向外“发散”或向内“汇聚”的程度。ρ 在这里代表**电荷密度**（单位体积内的电荷量，原文本中用 q，但 ρ 更标准）。
     - **通俗解释：** 这个公式是说，**电荷是电场的“源头”**。正电荷会发出电场线（像喷泉），负电荷会汇聚电场线（像下水道口）。一个区域向外发散的总电场强度取决于该区域内部包含了多少电荷。
   - **④ 高斯磁场定律**

     $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

     - **符号解释：** $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 是“B的散度”，表示磁场从一个点向外“发散”或向内“汇聚”的程度。
     - **通俗解释：** 这个公式说明，**磁场没有“源头”或“终点”**。也就是说，不存在单独的“N极”或“S极”（所谓的磁单极子）。磁场线总是闭合的曲线，从N极出发，最终会回到S极，再通过磁铁内部回到N极。流入任何一个区域的磁场线必定等于流出该区域的磁场线，所以净“发散”量永远是零。
3. **使用的常数：**
   - 公式中用到了 ε_0（真空介电常数）和 μ_0（真空磁导率）。它们是描述电磁现象在**真空**中性质的基本物理常数。
4. **电场的来源（补充说明）：**
   - 最后一行提到了电场 $\mathbf{E}$ 可以用**标量势** Φ（类似于电压）和**矢量势** $\mathbf{A}$ 来表示：

     $$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

   - **通俗解释：** 这是一种更深入的描述方式。它表明电场可以由两部分产生：
     - 一部分由**电荷**产生，与标量势 Φ 的空间变化（梯度 $\nabla \Phi$）有关（$-\nabla \Phi$ 部分）。
     - 另一部分由**变化的磁场**产生，与矢量势 $\mathbf{A}$ 的时间变化 ($\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$) 有关（$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 部分）。
   - 这提供了一种用“势”来描述电磁场的更简洁的方法，尤其在理论推导中很有用。

总结

这张幻灯片展示了统治电磁世界的四个基本方程——麦克斯韦方程组。它们优美地描述了电场和磁场是如何由电荷和电流产生，以及它们之间是如何相互转化的（变化的磁场产生电场，变化的电场和电流产生磁场）。这些方程是理解从电路到无线电波、光乃至更复杂电磁现象的基石。

表示电流密度和电荷密度的公式

这张幻灯片讲的是，一群**等离子体粒子**（就是很多带电粒子，比如电子和离子组成的集合）在运动时，它们整体上会形成**电流**和**电荷**在空间中的分布。这里给出了计算这些分布（密度）的公式。

主要内容

1. **背景：**
   - 我们考虑的是由一群（总共 N 个）等离子体粒子产生的电流和电荷。
2. **核心公式：**
   - **① 电流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$：**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} e_j \dot{\mathbf{r}}_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))$$

     - **符号解释：**
       - $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$：在空间位置 $\mathbf{r}$、时刻 t 的**电流密度**。它是一个矢量，表示单位时间内通过单位面积的电荷量，有大小和方向，代表电荷的流动情况。
       - $\sum_{j=1}^{N}$：把从第1个粒子到第N个粒子的贡献全部加起来。
       - e_j：第 j 个粒子的电荷量。
       - $\dot{\mathbf{r}}_j(t)$：第 j 个粒子在时刻 t 的速度。
       - $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))$：**狄拉克δ函数**（Dirac delta function）。这是个数学工具，在这里的作用是**定位**。它的意思是：只有当观察点 $\mathbf{r}$ 正好就是第 j 个粒子的位置 $\mathbf{r}_j(t)$ 时，这个粒子才对该点的电流密度有贡献，否则贡献为零。
     - **通俗解释：** 某一点的电流密度，是由所有**正好经过该点**的粒子贡献的。每个经过的粒子贡献的大小是它的电荷乘以它的速度。可以想象成，每个运动的带电粒子都是一个移动的“微小电流源”，这个公式就是把所有这些源在特定位置和时间的贡献加起来。
   - **② 电荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$：**（原文用 q，这里用更标准的 ρ）

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} e_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))$$

     - **符号解释：**
       - $\rho(\mathbf{r}, t)$：在空间位置 $\mathbf{r}$、时刻 t 的**电荷密度**。它是一个标量，表示单位体积内的电荷量，代表电荷的密集程度。
       - 其他符号同上。
     - **通俗解释：** 某一点的电荷密度，是由所有**正好位于该点**的粒子贡献的。每个位于该点的粒子贡献的大小就是它自身的电荷量。可以想象成，每个带电粒子都是一个“点电荷”，这个公式就是计算在特定位置和时间，单位体积内所有这些点电荷的总和。
3. **重要说明和提醒：**
   - **微观图像：** 需要注意，上面这两个公式描述的是一种**非常精细（微观）的情况。它们是把每个粒子都看作一个独立的点，通过δ函数精确地表示出由这些分散的、独立的粒子运动**所产生的电流和电荷密度。这种情况可以看作是粒子**“十分稀薄”**（十分希薄）时的描述。
   - **宏观图像（当粒子不稀薄时）：**
     - 如果粒子数量很多，分布很密集（**不稀薄**，粒子が希薄でない場合），情况就复杂了。这时，由这些公式算出来的电流密度 $\mathbf{j}$ 和电荷密度 ρ 本身就会成为**新的源**，反过来**影响**（改变）周围的电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$（根据上一张幻灯片的麦克斯韦方程组）。
     - 而变化的电磁场又会反过来影响粒子的运动（根据第一张幻灯片的运动方程）。这就形成了一个**复杂的相互作用和反馈**。
     - 在这种（更常见的）情况下，直接追踪每一个粒子并使用上面的公式就变得非常困难甚至不可能。我们需要采用其他方法，比如：
       - **统计方法 (統計性):** 不再关注单个粒子，而是研究大量粒子的统计行为（比如用速度分布函数）。
       - **流体描述 (流体描像):** 把等离子体看作一种或多种相互作用的“带电流体”，用流体力学的方法来描述它们的宏观运动。

总结

这张幻灯片给出了从单个粒子运动出发，计算由大量粒子构成的系统所产生的电流密度和电荷密度的精确（微观）公式。同时，它也指出了这种微观描述的局限性：当粒子密度较高、相互作用显著时，需要转向更宏观的统计或流体模型来处理粒子与电磁场之间的复杂耦合关系。这些公式是连接单个粒子行为和宏观电磁现象的桥梁。

定常一様磁場中の粒子の運動 (Particle motion in stationary uniform magnetic field)

定常電場が存在しない場合 (Case without stationary electric field)

① 运动方程式

这张幻灯片开始具体分析第一种情况：**粒子在均匀稳定磁场中的运动，并且没有电场**。

主要内容

1. **坐标系设定：**
   - 我们使用标准的**直角坐标系 (x, y, z)** 来描述空间位置。
2. **问题设定：**
   - 我们要研究的是一个**非相对论性**粒子（速度远小于光速）在一个**稳定不变**（定常）且**空间均匀**（空間的に一様）的磁场 $\mathbf{B}$ 中的运动轨迹（軌道）。
   - 特别地，这个磁场被设定为只有**z方向**的分量，即 $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ （$\hat{\mathbf{z}}$ 代表z方向的单位向量）。想象一下，磁场就像均匀地从下往上穿过整个空间。
   - 同时，我们假设**没有电场**存在，即 $\mathbf{E} = 0$。
3. **运动方程 (简化版)：**
   - 在这种只有磁场 ($\mathbf{B}$) 没有电场 ($\mathbf{E} = 0$) 的情况下，第一张幻灯片里的通用运动方程简化为：

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = e_j \dot{\mathbf{r}}_j \times \mathbf{B} \quad (2.1)'$$

   - 这表示粒子受到的力**只有磁场力**（洛伦兹力）。
4. **符号简化：**
   - 为了书写方便，从现在开始，除非特别需要区分不同的粒子，否则我们将**省略**代表粒子编号的下标 j。
5. **引入回旋频率 (Cyclotron Frequency / Gyrofrequency)：**
   - 我们定义一个新的符号 Ω (大写 Omega)，令 $\Omega = \frac{eB}{m}$。
   - 这个 Ω 代表**粒子电荷 e、磁场强度 B 和粒子质量 m** 的组合。它是一个非常重要的物理量，称为**回旋频率**或**陀螺频率**。它决定了粒子在磁场中打转的快慢。
6. **运动方程的分量形式：**
   - 将矢量运动方程 $m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ （已省略j）写成 x, y, z 三个方向的分量形式，并代入 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 和 $\Omega = eB/m$，可以得到：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   - **解释：**
     - $\ddot{x}$ (x方向加速度) = $\Omega\dot{y}$ (Ω 乘以 y方向速度)
     - $\ddot{y}$ (y方向加速度) = $-\Omega\dot{x}$ (负Ω 乘以 x方向速度)
     - $\ddot{z}$ (z方向加速度) = 0
   - **重要结论：** z方向的加速度是0！这意味着粒子在**沿着磁场方向（z轴）的速度 $\dot{z}$ 是一个常数**。粒子要么静止在z方向，要么匀速直线运动。
7. **引入复数简化计算：**
   - 为了更方便地解出粒子在垂直于磁场的平面（xy平面）上的运动，我们引入一个**复数** ζ (zeta)，定义为 $\zeta = x + iy$。这里 i 是虚数单位 ($i^2 = -1$)。
   - 这样做的好处是，可以把关于 x 和 y 的两个相互关联的微分方程（$\ddot{x} = \Omega\dot{y}$ 和 $\ddot{y} = -\Omega\dot{x}$）合并成一个关于复数 ζ 的**更简洁的方程**。
8. **复数形式的运动方程：**
   - 将 $\zeta = x + iy$ 代入上面的分量方程，经过推导可以得到一个新的、更简单的二阶微分方程：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} = 0$$

    - 其中 $\dot{\zeta} = \dot{x} + i\dot{y}$ 是复数速度，$\ddot{\zeta} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ 是复数加速度。
    - 这个方程描述了粒子在 **xy平面** 内的运动。解这个方程就能得到粒子在该平面内的轨迹。

总结

这张幻灯片为研究带电粒子在**匀强磁场、无电场**情况下的运动奠定了数学基础。

- 它简化了基本的运动方程。
- 指出了粒子沿磁场方向做匀速直线运动（或静止）。
- 引入了关键参数**回旋频率** Ω。
- 使用复数 $\zeta = x + iy$ 将粒子在垂直磁场平面（xy平面）的运动方程转化为一个更易于求解的复数微分方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} = 0$。

目录对应

这部分内容完全属于：

- **定常一様磁場中の粒子の運動 (Particle motion in stationary uniform magnetic field)**
    - **定常電場が存在しない場合 (Case without stationary electric field)**

② 速度场的时间演化

这张幻灯片紧接着上一张，目的是**解出粒子速度随时间变化的具体公式**。

主要内容

1. **求解复数速度 $\dot{\zeta}$：**
    - 上一张幻灯片我们得到了描述xy平面运动的方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} = 0$。这个方程可以看作是关于复数速度 $\dot{\zeta}$ 的一阶微分方程。
    - 通过对时间进行积分（一种数学求解方法），可以解得：

    $$\dot{\zeta}(t) = \dot{\zeta}(0)e^{-i\Omega t}$$

    - **通俗解释：** 粒子在xy平面内的复数速度 $\dot{\zeta}$ 在任意时刻 t 的值，等于它的初始值 $\dot{\zeta}(0)$（也就是t=0时刻的速度）乘以一个随时间变化的旋转因子 $e^{-i\Omega t}$。这个因子表示速度矢量在复平面（对应xy平面）上以角速度 Ω（回旋频率）进行旋转。
2. **设定初始条件 $\dot{\zeta}(0)$：**
    - $\dot{\zeta}(0)$ 是粒子在初始时刻（t=0）的速度，它是一个复数，有大小有方向。我们把它写成极坐标形式，方便理解：

    $$\dot{\zeta}(0) = v_\perp e^{-i\alpha}$$

    - **通俗解释：**
        - $v_\perp$ (`v_perp`)：表示粒子初始时刻在**垂直于磁场方向（xy平面）的速度大小**（速率）。下标 $\perp$ 代表“垂直”。
        - α (alpha)：表示粒子初始时刻在xy平面内的**速度方向**（初始相位角）。$e^{-i\alpha}$ 定义了这个初始方向。
3. **回顾 z 方向速度 $\dot{z}$：**
    - 上一张幻灯片我们已经知道，z方向的加速度 $\ddot{z} = 0$。
    - 对时间积分一次，得到z方向的速度 $\dot{z}$ 是一个**常数**。我们把这个恒定不变的z方向速度记为 $v_\parallel$ (`v_parallel`)。下标 $\parallel$ 代表“平行”。
    - 所以，$\dot{z} = v_\parallel = \text{const}$。
4. **得到最终的速度分量：**
    - 把第2步的初始条件代入第1步的解，得到 $\dot{\zeta}(t) = v_\perp e^{-i\alpha}e^{-i\Omega t} = v_\perp e^{-i(\Omega t+\alpha)}$。
    - 我们知道 $\dot{\zeta} = \dot{x} + i\dot{y}$。利用欧拉公式 $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$，可以将复数速度分解回实部的 $\dot{x}$ 和虚部的 $\dot{y}$：
        - $\dot{x}(t) = v_\perp \cos(\Omega t + \alpha)$
        - $\dot{y}(t) = -v_\perp \sin(\Omega t + \alpha)$ (注意负号来自欧拉公式里的 $-i\sin$)
    - 结合第3步的 $\dot{z} = v_\parallel$，我们就可以写出粒子在任意时刻 t 的完整速度矢量了：

    $$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\perp \cos(\Omega t + \alpha) \\ -v_\perp \sin(\Omega t + \alpha) \\ v_\parallel \end{pmatrix}$$

总结

这张幻灯片成功地解出了在匀强磁场、无电场条件下，带电粒子的**速度随时间变化的规律**：

- **平行于磁场 (z方向) 的速度 $v_\parallel$ 始终保持不变。**
- **垂直于磁场 (xy平面) 的速度大小 $v_\perp$ 也保持不变** (因为 $\cos^2 + \sin^2 = 1$)。
- **垂直于磁场的速度方向** 以恒定的角频率 Ω (回旋频率) **旋转**，初始方向由 α 决定。

这表明，粒子的速度矢量末端在一个平面上画圆（xy平面），同时这个平面以恒定速度 $v_\parallel$ 沿着磁场方向（z轴）移动。

③ 粒子的运动能量

这张幻灯片关注的是粒子在匀强磁场中运动时的**能量**问题。

主要内容

1. **从运动方程出发：**
   - 我们再次回到简化的运动方程：$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$。
   - 现在，我们对这个方程的两边同时点乘（计算内积）粒子的速度矢量 $\dot{\mathbf{r}}$。
2. **计算点积：**
   - **左边：** $(m\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$。这个表达式正好是粒子动能 $W = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ 对时间的变化率，即 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2\right)$。
   - **右边：** $(e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$。这里我们计算的是磁场力 $\mathbf{F}_m = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ 和速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 的点积。
     - **关键点：** 叉乘 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ 的结果是一个同时垂直于 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量。因此，磁场力 $\mathbf{F}_m$ 永远**垂直于**粒子的速度 $\dot{\mathbf{r}}$。
     - 两个相互垂直的矢量的点积永远是**零**。所以，$(e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$。
3. **得到能量关系：**
   - 将左右两边的点积结果合起来，我们得到：

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

   - 或者说：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2\right) = 0$$

4. **能量守恒结论：**
   - 上面这个公式说明，粒子的**总动能 $W = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2$ 的时间变化率是零**。
   - 这意味着粒子的**总动能是一个常数**，它不随时间改变！

$$W = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \text{常数 (const.)}$$

   - **物理解释：** 这是因为磁场力（洛伦兹力）始终垂直于粒子的运动方向，它只改变粒子运动的**方向**，而不改变粒子运动的**速率**（速度的大小）。因此，磁场对粒子**不做功**（ローレンツカは仕事をしない），粒子的动能保持不变。
5. **动能分解：**
   - 我们可以把总动能 W 分解为两个部分：
     - $W_\perp$：**垂直于**磁场方向（即xy平面内）的动能。
     - $W_\parallel$：**平行于**磁场方向（即z方向）的动能。
   - 它们的关系是：$W = W_\perp + W_\parallel$
   - 具体的表达式为：
     - $W_\perp = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mv_\perp^2$
     - $W_\parallel = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}mv_\parallel^2$
   - **补充说明：** 在这种只有匀强磁场的情况下，我们从上一张幻灯片知道 $v_\perp$（垂直速率）和 $v_\parallel$（平行速度）的大小都是恒定不变的。因此，不仅总动能 W 守恒，而且垂直动能 $W_\perp$ 和平行动能 $W_\parallel$ **也各自保持不变**。

总结

这张幻灯片证明了一个非常重要的结论：**在纯磁场（无电场）中运动的带电粒子，其动能是守恒的**。这是因为磁场力不做功。我们还可以将动能分解为平行和垂直于磁场方向的两部分，在这种特定情况下（匀强磁场），这两部分动能也各自守恒。

④ 拉莫尔（回旋）运动的基础

这张幻灯片描述了带电粒子在匀强磁场中的**最终运动轨迹**，也就是所谓的**拉莫尔运动**或**回旋运动**。

核心观点：

- **粒子会缠绕着磁力线做回旋运动 (粒子は磁力線に巻き付くジャイロ運動をする)。**

粒子的运动轨迹（坐标方程）：

对速度方程进行积分，可以得到粒子在任意时刻 t 的空间坐标 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的具体公式：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_\perp}{\Omega}\sin(\Omega t+\alpha)+x_0 \\ \frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t+\alpha)+y_0 \\ v_\parallel t+z_0 \end{pmatrix}$$

(注意：这里的 y 分量积分结果为 +(v⊥/Ω)cos ，因为 $\dot{y} = -v_\perp \sin(\Omega t+\alpha)$ 积分得到 $\frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t+\alpha)$)

- **通俗解释这个轨迹：**
  - **z 方向：** $z(t) = v_\parallel t + z_0$。这表示粒子沿着磁场方向（z轴）以恒定的速度 $v_\parallel$ 做**匀速直线运动**，起始于 z_0。
  - **xy 平面：** $x(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\sin(\Omega t+\alpha)+x_0$ 和 $y(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\cos(\Omega t+\alpha)+y_0$。 这两个方程合起来描述了一个**圆周运动**。
    - 圆心位于 (x_0, y_0)。
    - 半径是 $r_L = |\frac{v_\perp}{\Omega}|$ （后面会定义为拉莫尔半径 r_L）。
    - 粒子以角频率 Ω（回旋角频率）绕着圆心旋转。
    - $\Omega t+\alpha$ 是粒子在圆周上的角度（相位），α 是初始相位。
  - **整体运动：** 将 z 方向的匀速直线运动和 xy 平面的圆周运动叠加起来，粒子的轨迹就是一个**螺旋线 (Helical Path)**，就像螺丝钉的螺纹一样，缠绕着一条平行于z轴、通过点 (x_0, y_0) 的直线（这条直线就是**导引中心**的轨迹）前进。

相关参数和概念解释：

- α, x_0, y_0, z_0：这些是由粒子的**初始位置和初始速度**决定的常数。(x_0, y_0) 是粒子回旋运动圆心在xy平面的投影位置， z_0 是初始z坐标（或者说与初始z坐标相关）。α 是初始速度在xy平面的方向（初始相位）。
- Ω：回旋角频率 ($\Omega = qB/m$)。它的大小决定了粒子转圈的快慢。
  - **重要：** Ω 的**符号取决于电荷 q 的符号** (Ω は電荷依存性（符号）を持つ)。
- **电荷的正负决定旋转方向反转 (電荷の正負で回転方向は反転):**
  - 如果磁场 $\mathbf{B}$ 方向确定（比如向上），那么正电荷和负电荷在xy平面内旋转的方向是**相反**的。例如，如果正电荷逆时针转，负电荷就会顺时针转（这可以用洛伦兹力的方向判断，即右手定则/左手定则）。
- **回旋 (Gyro) 相位 (旋回(ジャイロ)位相):** $\phi(t) = \Omega t + \alpha$。表示在时刻 t，粒子相对于其回旋中心在xy平面内转过的角度。
- **导引中心 (案内中心, Guiding Center):** $\mathbf{r}_g(t) = (x_0, y_0, v_\parallel t + z_0)$。这是粒子回旋运动的**圆心**在时刻 t 的位置。它沿着磁场方向（z轴）以恒定速度 $v_\parallel$ 移动。粒子可以看作是围绕着这个移动的中心点在做圆周运动。
- **回旋角频率 (旋回角周波数, Gyrofrequency):** $\Omega = qB/m$。再次强调定义。
- **回旋半径 / 拉莫尔半径 (旋回半径, Gyroradius / Larmor Radius):** $r_L = \frac{v_\perp}{|\Omega|} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$。这就是粒子在xy平面内做圆周运动的半径。它由垂直于磁场的速度 $v_\perp$ 和回旋频率 Ω (的绝对值) 决定。速度越快，半径越大；磁场越强或荷质比越大（$|\Omega|$越大），半径越小。

图示解释 (Fig. 2.1):

- 右侧的图清晰地展示了一个**正电荷**（带 + 号的点）在指向z轴正方向的匀强磁场 $\mathbf{B}$ 中的运动轨迹。
- 轨迹是一条向上的螺旋线。
- $v_\parallel$ 是沿磁场方向的速度分量。
- $v_\perp$ 是垂直于磁场方向的速度分量，它指向圆周的切线方向。
- (x_0, y_0) 是螺旋线中心轴在xy平面的位置（导引中心）。
- r_L 标示了回旋半径。
- （根据洛伦兹力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 和右手定则，图中正电荷的旋转方向应为逆时针，从+z轴往下看。）

总结

这张幻灯片总结了带电粒子在匀强磁场（无电场）中的基本运动模式：**沿着磁力线方向做匀速直线运动，同时垂直于磁力线方向做匀速圆周运动，两者合成为螺旋线运动（回旋运动）**。它定义了描述这种运动的关键参数：导引中心、回旋频率和回旋半径。这个回旋运动是理解等离子体行为的基础。

定常一様電場が存在する場合 (Case with stationary uniform electric field)

① 运动方程式

这张幻灯片开始讨论一种**更复杂**的情况：粒子不仅在**匀强磁场**中运动，同时还存在一个**恒定的电场**。

主要内容

1. **新的问题设定：**
    - 我们仍然考虑**非相对论性**粒子。
    - 磁场 $\mathbf{B}$ 仍然是**稳定且均匀**的，并且只指向 **z 方向**：$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, B)$。
    - **新增条件：** 现在假设还存在一个**稳定不变的电场 $\mathbf{E}$** (定常電場)。
    - 这个电场被设定为具有 y 分量 E 和 z 分量 $E_{\parallel}$：$\mathbf{E} = (0, E, E_{\parallel})$。
        - E 是**垂直于**磁场 $\mathbf{B}$ 的电场分量（在y方向）。
        - $E_{\parallel}$ 是**平行于**磁场 $\mathbf{B}$ 的电场分量（在z方向）。
2. **完整的运动方程：**
    - 由于现在同时存在电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$，我们需要使用**完整**的洛伦兹力运动方程：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)''$$

    - 这个公式表明，粒子受到的力是**电场力 $e\mathbf{E}$** 和**磁场力 $e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$** 的**总和**。
3. **引入回旋频率并写成分量形式：**
    - 再次使用回旋频率 $\Omega = eB/m$。
    - 将矢量运动方程分解到 x, y, z 三个方向：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\dot{y} \\ \frac{eE}{m} - \Omega\dot{x} \\ \frac{eE_{\parallel}}{m} \end{pmatrix}$$

    - **解释各分量：**
        - $\ddot{x}$ (x方向加速度)：只受磁场力影响（因为 $\mathbf{E}$ 没有x分量）。
        - $\ddot{y}$ (y方向加速度)：受到 y 方向的电场力 eE/m 和磁场力 $-\Omega\dot{x}$ 的共同作用。
        - $\ddot{z}$ (z方向加速度)：只受 z 方向的电场力 $eE_{\parallel}/m$ 影响（因为磁场力没有z分量）。
4. **关于平行电场 $E_{\parallel}$ 的讨论与简化：**
    - **观察 z 方向：** $\ddot{z} = eE_{\parallel}/m$。
    - **问题：** 如果平行电场 $E_{\parallel}$ 是一个**不为零的常数**，那么粒子将在 z 方向（沿磁场方向）受到一个**恒定的力**，从而产生**持续不断的加速度** $a = eE_{\parallel}/m$。
    - 这意味着，随着时间的推移，粒子在 z 方向的速度 $\dot{z}$ 会**无限增大**。
    - **矛盾：** 如果速度持续增大，最终会接近甚至超过光速 c，这将**违背**我们一开始做的**“非相对论性”**（速度远小于光速）的假设 (非相対論近似が破れる)。
    - **处理方法：** 为了在非相对论的框架内继续讨论，我们**在这里假设平行于磁场的电场分量为零**，即 $E_{\parallel} = 0$。
    - **补充说明：** 如果 $E_{\parallel}$ 不是恒定的，而是随时间**振荡**的（比如交流电场），那么粒子会来回加速减速，速度可能不会无限增大，非相对论近似可能仍然有效。但这里我们只考虑**定常（恒定）**电场。

总结

这张幻灯片设定了研究**匀强磁场和匀强电场同时存在**时粒子运动的问题。

- 给出了包含电场力和磁场力的完整运动方程及其分量形式。
- 指出了**平行于磁场的恒定电场 $E_{\parallel}$ 会导致粒子被无限加速，从而破坏非相对论近似**。

- 因此，为了在当前框架下分析，**接下来的讨论将只考虑垂直于磁场的电场分量 E (即假设 $E_{\parallel}=0$)**。这对应了目录中的**"定常一様電場が存在する場合" (Case with stationary uniform electric field)**，但特指电场垂直于磁场的情况。

② 速度场的时间演化

这张幻灯片接着上一张，求解在**同时存在匀强磁场 B (沿z轴) 和垂直电场 E (设为沿y轴，即 $E_{\parallel}=0$)** 时，粒子速度随时间的变化。

主要内容

1. **沿用复数方法：**
   - 和之前只有磁场时一样，我们继续使用复数 $\zeta=x+iy$ 来简化 xy 平面的运动方程。
   - 将上一张幻灯片得到的 x, y 方向的加速度方程 $\ddot{x}=\Omega\dot{y}$ 和 $\ddot{y}=eE/m-\Omega\dot{x}$ 合并（这里 E 就是 y 方向的电场分量），可以得到关于 ζ 的新的微分方程：

$$\ddot{\zeta}+i\Omega\dot{\zeta}=i\frac{eE}{m}$$

   - **对比：** 这个方程与只有磁场时的方程 $\ddot{\zeta}+i\Omega\dot{\zeta}=0$ 相比，右边多了一项 $i\frac{eE}{m}$，这是由垂直电场 E 引起的。
2. **求解新的微分方程：**
   - 由于方程右边 $i\frac{eE}{m}$ 是一个**常数**，这个关于复数速度 $\dot{\zeta}$ 的一阶微分方程仍然可以求解。
   - 通过对时间积分，得到的解为：

$$\dot{\zeta}(t)=\dot{\zeta}(0)e^{-i\Omega t}+\frac{E}{B}\left[1-e^{-i\Omega t}\right]$$

   (推导细节: 令 $u=\dot{\zeta}$, $du/dt+i\Omega u=ieE/m$. 特解为 $u_p=(ieE/m)/(i\Omega)=eE/(m\Omega)=E/B$. 通解为 $u(t)=Ce^{-i\Omega t}+E/B$. 由 $u(0)$ 定 C, $u(0)=C+E/B\Rightarrow C=u(0)-E/B$. 所以 $u(t)=(u(0)-E/B)e^{-i\Omega t}+E/B=u(0)e^{-i\Omega t}+(E/B)(1-e^{-i\Omega t})$)
   - **其中定义了一个新的速度：** $v_E=\frac{E}{B}$。这个速度的大小等于电场强度 E 除以磁场强度 B。方向在 x 方向（见下文）。
3. **设定初始条件并化简：**
   - 为了更清晰地看出速度的组成，我们将初始复数速度 $\dot{\zeta}(0)$ 表示为 $\dot{\zeta}(0)=v_E+ue^{-i\alpha}$。
     - 这里的 v_E 就是上面定义的 E/B (指向 x 方向)。
     - $ue^{-i\alpha}$ 代表初始速度中除了 v_E 之外的"剩余部分"，可以看作是粒子初始的回旋运动速度（u 是速率，α 是初始相位）。
   - 将这个初始条件代入上面 $\dot{\zeta}(t)$ 的解（修正后的形式），并化简，可以得到一个非常简洁的结果：

$$\dot{\zeta}(t)=v_E+ue^{-i(\Omega t+\alpha)}$$

   (推导细节: $\dot{\zeta}(t)=(v_E+ue^{-i\alpha})e^{-i\Omega t}+v_E(1-e^{-i\Omega t})=v_Ee^{-i\Omega t}+ue^{-i(\Omega t+\alpha)}+v_E-v_Ee^{-i\Omega t}=v_E+ue^{-i(\Omega t+\alpha)}$)
   - **物理解释：** 这个结果表明，粒子在 xy 平面内的复数速度 $\dot{\zeta}(t)$ 由两部分组成：
     - 一个**恒定不变**的速度 $v_E=E/B$ (实部，指向x方向)。
     - 一个以角频率 Ω 旋转的速度 $ue^{-i(\Omega t+\alpha)}$，这代表了粒子的**回旋运动**部分。
4. **分解得到速度分量：**
   - 将 $\dot{\zeta}(t)=\dot{x}+i\dot{y}$ 代入 $\dot{\zeta}(t)=v_E+ue^{-i(\Omega t+\alpha)}$，并利用欧拉公式 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，可以得到 x 和 y 方向的速度分量：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_E+u\cos(\Omega t+\alpha)\\ -u\sin(\Omega t+\alpha)\end{pmatrix}$$

   - **注意：** 因为我们设电场 $\mathbf{E}=(0,E,0)$ 在 y 方向，磁场 $\mathbf{B}=(0,0,B)$ 在 z 方向，所以 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 指向 $(EB,0,0)$，即 **x 方向**。漂移速度 $v_E=E/B$ 是在 x 方向。
5. **导引中心的速度和 E×B 漂移：**
   - 我们知道粒子的运动可以分解为**回旋运动**和**导引中心的运动**。
   - 上面速度公式中的旋转部分 $ue^{-i(\Omega t+\alpha)}$（即 $u\cos$ 和 $-u\sin$ 项）代表回旋运动的速度，它的大小 u 不变，方向不断旋转。
   - 速度公式中的**恒定部分** v_E（在x方向）则代表了**导引中心在 xy 平面内的平均漂移速度**。
   - 因此，导引中心的速度 $\mathbf{v}_g$ (guiding center velocity) 为：

$$\mathbf{v}_g=(v_E,0,v_{\parallel})$$

     - x 方向速度：$v_E=E/B$

- y 方向速度：0
- z 方向速度：$v_\parallel$ （因为 $E_\parallel = 0$，z 方向速度仍然是恒定的初始值）

- **关键结论 (红色字体部分)：**
  - 导引中心现在有了一个**额外的、恒定的速度** $v_E = E/B$。
  - 这个速度的方向是**同时垂直于电场 $\mathbf{E}$ (y方向) 和磁场 $\mathbf{B}$ (z方向)** 的方向，也就是 **x 方向** (磁場と電場に直交する方向)。其矢量形式为 $\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$。
  - 这个导致导引中心**横向漂移** (ドリフトされ)、偏离原来磁力线 (元の磁力線からずれていく) 的运动，被称为 **E×B 漂移 (E cross B drift)**。
  - 漂移速度的大小是 E/B（当 E⊥B 时），方向由 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 的方向决定。

总结

这张幻灯片的核心结论是：当带电粒子处在相互垂直的匀强电场 $\mathbf{E}$ 和匀强磁场 $\mathbf{B}$ 中时，除了会围绕磁力线进行回旋运动外，它的**导引中心**还会以一个恒定的速度 $\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$ 进行**漂移**。这个漂移的方向垂直于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 构成的平面（即 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 的方向）。这种漂移现象对理解等离子体在电磁场中的输运和约束至关重要。

③ E×B 漂移 (E Cross B Drift)

这张幻灯片总结了 E×B 漂移的一些重要性质和表现。

主要内容

1. **通用的 E×B 漂移速度公式：**

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$$

   - **通俗解释：** 这是计算 E×B 漂移速度的**矢量**公式，它给出了漂移的**大小和方向**。
     - 方向由 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ (电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 的叉乘) 决定，遵循右手定则。这个方向**同时垂直于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$**。
     - 大小是 $|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|/B^2$。如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 相互垂直，大小就简化为我们之前得到的 E/B。
2. **适用条件 (非相对论近似)：**
   - 这种简单的 E×B 漂移公式和现象是在**非相对论近似**下推导出来的，这意味着：
     - 漂移速度 $v_E = E/B$ 必须**远小于光速 c** ($E/B \ll c$)。
     - 电场强度 E 相对于磁场强度 B 也不能太强 ($E \ll cB$)。
3. **关键特性 1 (红色字体)：速度只依赖于电场和磁场！**
   - 速度が電場と磁場のみに依存 (質量や電荷によらない)
   - **极其重要的结论：** E×B 漂移速度 $\mathbf{v}_E$ **只取决于外部的电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$**，而**与粒子自身的性质（如质量 m 或电荷 q，包括电荷的正负号）无关**！
   - 这意味着，在同一个 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 场中，不管是重的离子还是轻的电子，不管是正电荷还是负电荷，它们都会以**完全相同**的 E×B 漂移速度进行漂移。
4. **推论：准中性等离子体中无 E×B 漂移电流 (红色字体)：**
   - その結果、準中性プラズマではイオンと電子の相違による電流は発生しない。
   - **直接后果：** 在一个**准中性**的等离子体中（也就是正负电荷密度大致相等），由于正离子和负电子以**相同**的 E×B 速度漂移，它们不会因为这种漂移运动而产生相对移动，因此**不会形成净的电流**。
5. **漂移速度与热速度/回旋速度的关系 (红色字体)：**
   - ドリフト速度が熱速度（例えば **u**）より大きい場合は旋回運動が歪む/破れる。
   - 这里将漂移速度 $v_E = E/B$ 与粒子的**热速度**或**回旋速度** u（也就是上一张幻灯片中描述粒子自身转圈速度的那个 u）进行比较。
   - **轨迹形态：** 粒子的实际运动轨迹是回旋运动和 E×B 漂移运动的叠加。轨迹的具体形状取决于 v_E 和 u 的相对大小：
     - 如果漂移速度 v_E **远大于** 回旋速度 u ($v_E \gg u$)，粒子几乎来不及完成一个完整的圆周运动就被漂移带走了，轨迹看起来更像是**平滑的波浪线 (长摆线)** (图中最下面一行)。回旋运动被严重“**扭曲/破坏**” (歪む/破れる)。
     - 如果回旋速度 u **远大于** 漂移速度 v_E ($u \gg v_E$)，粒子会完成很多圈的回旋，同时缓慢地漂移，轨迹是明显的**类螺旋线 (次摆线)** (图中最上面一行)。
     - 如果两者速度**大小相当** ($u \approx v_E$)，粒子在每次回旋前进时，速度会周期性地降到很低，轨迹形成**尖角 (摆线)** (图中中间一行)。

图示解释 (Fig. 2.2):

- 图示了电场 $\mathbf{E}$ 向上，磁场 $\mathbf{B}$ 指向纸外 ($\odot$) 的情况。
- 根据右手定则 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$，漂移方向 $\mathbf{v}_E$ 指向**右方**。
- 左列是**正电荷 ($\oplus$)** 的轨迹，右列是**负电荷 ($\ominus$)** 的轨迹。

- **关键观察：** 无论是正电荷还是负电荷，它们整体上都在向**右方**漂移，验证了漂移方向与电荷无关。
- 图中展示了 $u > v_E$ (类螺旋线/次摆线), $u = v_E$ (摆线/尖角), $u < v_E$ (类波浪线/长摆线) 三种情况下的不同轨迹形态。

总结

这张幻灯片深入探讨了 E×B 漂移的核心特性：

- 漂移速度由 $\mathbf{v}_E = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$ 决定，方向垂直于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$。
- 最反直觉也是最重要的特性是：**漂移速度与粒子的质量和电荷无关**。
- 这导致在准中性等离子体中，E×B 漂移本身不产生电流。
- 粒子的最终轨迹是回旋和漂移的叠加，具体形态取决于回旋速度和漂移速度的相对大小。

④ 一般力 $\mathbf{F}$ 的情况

这张幻灯片将漂移的概念从之前的**电场力**推广到了**任何一种**作用在粒子上的、**垂直于磁场**的**恒定力 $\mathbf{F}$**，比如重力。

主要内容

1. **核心思想：等效电场**
   - 如果除了磁场力外，粒子还受到一个**非电场力 $\mathbf{F}$**（比如重力 $m\mathbf{g}$），我们可以把这个力 $\mathbf{F}$ 看作是由一个“**等效电场**” $\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{F}/e$ 产生的。
   - 也就是说，力 $\mathbf{F}$ 对带电粒子 e 产生的作用，类似于电场 $\mathbf{F}/e$ 对该粒子产生的作用。
   - 通过这种类比，将之前 E×B 漂移公式中的 $\mathbf{E}$ 替换为 $\mathbf{F}/e$，就可以得到由力 $\mathbf{F}$ 引起的漂移速度。
2. **一般力 $\mathbf{F}$ 引起的漂移速度公式：**

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{eB^2}$$

   - **解释：**
     - $\mathbf{v}_F$ 是由力 $\mathbf{F}$ 引起的漂移速度。
     - 方向由 $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$ 决定（垂直于 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{B}$）。
     - 大小与 $\mathbf{F}$ 的垂直分量成正比，与磁场 B 和**电荷 e** 成反比。
3. **适用条件 (非相对论近似)：**
   - 同样，这个公式在非相对论近似下成立，需要满足类似条件：
     - $|\mathbf{F}/e|/B \ll c$ （等效电场引起的漂移速度远小于光速）
     - $|\mathbf{F}/e| \ll cB$ （等效电场不能太强）
4. **关键特性 1 (对比 E×B 漂移)：速度依赖于电荷！**
   - 速度が力場、磁場および粒子の電荷に依存。
   - **重大区别：** 查看公式 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$，分母中出现了电荷 e！这意味着，由一般力 $\mathbf{F}$ 引起的漂移速度 $\mathbf{v}_F$ **不仅依赖于力场 $\mathbf{F}$ 和磁场 $\mathbf{B}$，还依赖于粒子自身的电荷 e（包括符号和大小）**。
   - 例如，如果是重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$，那么漂移速度 $\mathbf{v}_g = (m\mathbf{g} \times \mathbf{B})/eB^2$，它还依赖于粒子的**质量 m** 和**荷质比 m/e**。
5. **推论：准中性等离子体中会产生漂移电流 (红色字体)！**
   - その結果、準中性プラズマではイオンと電子間の違いによる電流が発生する。
   - **重要后果：** 由于 $\mathbf{v}_F$ 依赖于电荷 e（特别是符号），在同一个力 $\mathbf{F}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 中：
     - 正离子 ($e > 0$) 和负电子 ($e < 0$) 会向**相反**的方向漂移！
     - 即使 $\mathbf{F}$ 对两者大小相同（比如重力对质量不同的离子和电子作用不同），它们各自的 e 和 m 不同，导致漂移速度 $\mathbf{v}_F$ 也不同。
   - 这种正负电荷之间的**相对运动**，在准中性等离子体中会形成**净的电流**！这与 E×B 漂移（离子电子同向同速漂移，不产生电流）形成了鲜明对比。例如，重力漂移就会产生电流。
6. **漂移速度与热速度的关系：**
   - ドリフト速度が熱速度より大きい場合は旋回運動が歪む/破れる。
   - 与 E×B 漂移类似，粒子最终的轨迹形态（螺旋线、摆线、波浪线）取决于漂移速度 v_F 和粒子自身回旋速度 u 的相对大小。如果 v_F 远大于 u，回旋运动会被严重扭曲。

总结

这张幻灯片的核心思想是：**任何垂直于磁场的恒定力 $\mathbf{F}$ 都会引起带电粒子漂移**，漂移速度为 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$。

- 与 E×B 漂移的关键区别在于，这种一般力漂移的**速度依赖于粒子的电荷** e **（以及可能的质量** m**，如果** $\mathbf{F}$ **与** m **相关）**。
- 因此，正负粒子通常会向不同方向或以不同速率漂移，从而在等离子体中**产生净电流**。常见的例子包括重力漂移、离心力漂移等。

定常非一様磁場中の運動 (Motion in stationary non-uniform magnetic field)

摂動展開と案内中心近似 (Perturbation Expansion and Guiding Center Approximation)

磁场的微扰展开与导引中心近似

这张幻灯片开始讨论更现实、更复杂的情况：**当磁场不是均匀分布时，粒子如何运动？** 并介绍一种重要的简化方法。

主要内容

1. **问题：非均匀磁场的复杂性**
    - 一般的に、磁場が非一様な場合は粒子軌道の追跡には数値計算が必要。
    - **通俗解释：** 一般来说，如果磁场在空间中是**不均匀**的（ 非一様 ），比如强度或方向随位置变化，那么精确计算粒子的运动轨迹会变得非常困难，通常需要借助**计算机进行数值模拟**才能追踪 (数値計算が必要)。
2. **引入简化方法：导引中心近似 (Guiding Center Approximation)**
    - ここでは、①磁場の空間変動が旋回半径と比較して緩やか、②旋回半径程度の距離では磁場の摂動が小さい、として案内中心の運動によって粒子軌道 を表現する。(案
    - **核心思想：** 为了简化问题，我们引入**导引中心近似** (案内中心近似)。这个近似方法是说，我们可以**忽略粒子快速的、小范围的回旋细节**，转而关注粒子**回旋运动的中心点（导引中心）的平均运动轨迹**。
    - **适用条件：** 这个近似方法只在满足以下两个条件时才有效：
        - **① 磁场变化缓慢：** 磁场在空间中变化的**特征尺度** L （比如磁场强度变化一倍的距离）必须**远大于**粒子的**回旋半径** r_L (磁場の空間変動が旋回半径と比較して緩やか)。也就是说，粒子在转一圈的过程中，周围的磁场看起来几乎没怎么变。数学表示为 $r_L \ll L$。
        - **② 磁场变化微小：** 在粒子**回旋半径** r_L **这么大的范围**内，磁场（强度和方向）的**变化量** $|\delta\mathbf{B}|$ 必须**远小于**磁场本身的大小 $|\mathbf{B}|$ (旋回半径程度の距離では磁場の摂動が小さい)。这本质上是条件①的另一种表述。数学表示为 $|\delta\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}|$。
3. **数学基础：泰勒展开**
    - 考虑粒子位置 $\mathbf{r}$ 和导引中心位置 $\mathbf{r}_g$，粒子相对于导引中心的位移为 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_g$（大小 $|\boldsymbol{\rho}| \sim r_L$）。
    - 粒子在 $\mathbf{r}$ 处感受到的磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 可以用在导引中心 $\mathbf{r}_g$ 处的**泰勒展开**来近似：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}_g + \boldsymbol{\rho}) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}_g) + (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_g} = \mathbf{B}(\mathbf{r}_g) + \delta\mathbf{B}$$

    - **解释：**
        - $\mathbf{B}(\mathbf{r}_g)$：**导引中心处**的磁场（零阶项）。
        - $(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_g}$：表示磁场在导引中心附近随空间的变化率（梯度张量 $\nabla\mathbf{B}$）与位移 $\boldsymbol{\rho}$ 的作用，代表了粒子在其回旋轨道范围内经历的**磁场变化量**，记为 $\delta\mathbf{B}$（一阶小量）。
    - 导引中心近似的核心就是假设这个变化量 $\delta\mathbf{B}$ 相对于 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_g)$ 是一个**小量（微扰）**。
4. **重申适用条件 (数学形式)**
    - ① B の空間変動のスケールを L として、 rL << L： 回旋半径 r_L 远小于磁场空间变化尺度 L。
    - ② 摂動距離 δr が旋回半径程度 rL として、 |δB| = |(δr · ∇)B| << |B|： 粒子在一个回旋半径 r_L 范围内感受到的磁场变化量 $|\delta\mathbf{B}|$ 远小于磁场本身的大小 $|\mathbf{B}|$。
5. **图示解释 (Fig. 2.3)**
    - 图中有两条线：
        - `(a) exact`： 表示粒子**精确的、真实的**运动轨迹，包含快速的回旋（非常“扭曲”和复杂）。
        - `(b) guiding centre trajectories`： 表示粒子**导引中心**的运动轨迹，它是一条更**平滑、平均化**的曲线。
    - 导引中心近似就是用相对简单的轨迹 (b) 来**近似描述**复杂的轨迹 (a) 的整体运动趋势。

总结

这张幻灯片介绍了在处理**非均匀磁场**中粒子运动时广泛使用的**导引中心近似**方法。其核心思想是，当磁场变化足够缓慢、足够微弱（相对于粒子回旋尺度）时，我们可以忽略快速的回旋细节，只关注粒子**导引中心**的运动。这大大简化了问题，使得我们可以推导出在非均匀磁场中由磁场梯度和曲率引起的新的漂移类型（如后面目录提到的梯度漂移和曲率漂移）。

目录对应

这部分是 定常非一様磁場中の運動 (Motion in stationary non-uniform magnetic field) 的开篇，引入了 摂動展開 (Perturbation Expansion) 和 案内中心近似 的概念，是后续推导 勾配ドリフト (Gradient Drift) 和 曲率ドリフト (Curvature Drift) 的基础。

勾配ドリフト (Gradient Drift)

勾配ドリフト① (梯度漂移 ①)

这张幻灯片开始推导一种由**磁场强度变化（梯度）引起的粒子漂移，称为梯度漂移**。这是处理非均匀磁场的第一步。

主要内容

1. **特定非均匀磁场设定：**
   - 我们考虑一个**稳定**的磁场 $\mathbf{B}$，它仍然主要指向 **z 方向**，但是其**强度**现在**随 y 坐标变化**：$\mathbf{B}(y) \approx (0, 0, B(y))$。例如，想象磁场在 y=0 处较弱，越往 y 增大的方向越强。
   - 假设**没有电场** ($\mathbf{E} = 0$)。
2. **运动方程 (考虑磁场变化)：**
   - 粒子的运动方程仍然是 $m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(y)$。
   - 写成分量形式（近似）：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Omega(y)\dot{y} \\ -\Omega(y)\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   - **关键区别：** 这里的**回旋频率** $\Omega(y) = \frac{eB(y)}{m}$ **不再是常数**，它依赖于粒子所在的 y 坐标。
   - 同样，描述 xy 平面运动的复数方程变为：$\ddot{\zeta} \approx -i\Omega(y)\dot{\zeta}$ （其中 $\zeta = x + iy$）。
3. **应用导引中心近似 (泰勒展开)：**
   - 基于导引中心近似的条件（磁场变化缓慢，$|\delta B| \ll |B|$），我们可以对随 y 变化的 $\Omega(y)$ 进行近似。
   - 在粒子围绕其导引中心 y_g 做回旋运动时，其瞬时 y 坐标为 $y = y_g + \rho_y$（ρ_y 是回旋位移）。它实际感受到的 $\Omega(y)$ 可以在 y_g 附近进行**泰勒展开**：

$$\Omega(y) = \Omega(y_g + \rho_y) \approx \Omega(y_g) + \rho_y \left.\frac{d\Omega}{dy}\right|_{y=y_g}$$

   - **符号简化:**
     - $\Omega(y_g)$：导引中心 y_g 处的回旋频率，记为 Ω_0。
     - $\left.\frac{d\Omega}{dy}\right|_{y=y_g}$：回旋频率 Ω 在 y_g 处的**梯度**（随y变化的快慢），记为 Ω_0'。
     - ρ_y：粒子回旋的瞬时 y 位移，记为 δy。
   - 所以，粒子感受到的回旋频率近似为：$\Omega(y) \approx \Omega_0 + \delta y \Omega_0'$。
4. **得到近似的运动方程：**
   - 将上面近似的 $\Omega(y)$ 代入复数运动方程 $\ddot{\zeta} = -i\Omega(y)\dot{\zeta}$ 中。
   - $\ddot{\zeta} \approx -i(\Omega_0 + \delta y \Omega_0')\dot{\zeta} = -i\Omega_0\dot{\zeta} - i\delta y \Omega_0'\dot{\zeta}$
   - 整理后（将 Ω_0 部分移到左边），得到一个新的、近似的运动方程：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\delta y \Omega_0'\dot{\zeta}$$

总结与展望

这张幻灯片为推导梯度漂移做了关键的准备工作：

- 设定了一个**仅在 y 方向存在梯度**的磁场 $B(y)$。
- 写出了在这种场下的运动方程，并指出回旋频率 $\Omega(y)$ 是变化的。
- 利用**导引中心近似**，将变化的 $\Omega(y)$ 在导引中心附近进行**泰勒展开**，得到 $\Omega(y) \approx \Omega_0 + \delta y \Omega_0'$。
- 将近似后的 $\Omega(y)$ 代回运动方程，得到了一个新的方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\delta y \Omega_0'\dot{\zeta}$。

- **关键在于右边的 $-i\delta y\Omega_0'\dot{\zeta}$ 这一项**：它包含了磁场梯度信息 (Ω_0') 和粒子回旋位置信息 (δy)。正是这一项导致了除了基本的回旋运动之外的额外运动——**梯度漂移**。接下来的幻灯片将基于这个新方程来解出梯度漂移的速度。

勾配ドリフト② (梯度漂移 ②)

这张幻灯片紧接着上一张，目标是**解出**上一张得到的近似运动方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\delta y\Omega_0'\dot{\zeta}$，并从中找出**梯度漂移**的速度。

主要步骤和解释

1. **进一步近似 (微扰法核心)**:
   - この摂動展開では、1次の摂動を考えており、更に近似する。 (在这个微扰展开中，我们考虑一阶微扰，并进行进一步近似。)
   - 方程右边的 $-i\delta y\Omega_0'\dot{\zeta}$ 是由梯度 Ω_0' 引起的小扰动项（一阶小量）。
   - 1次量を維持するため、右辺の δy や ζ に定常一様磁場の式を代入する。 (为了保持一阶精度，我们将**均匀磁场下的解（零阶解）**代入右边的 δy 和 $\dot{\zeta}$。)
   - **关键近似步骤**： 因为方程右边的整个项已经是**一阶小量**（因为它包含梯度 Ω_0'），我们可以在这个小项内部使用**零阶**（也就是均匀磁场 B_0 下的）解来近似 δy 和 $\dot{\zeta}$，而不会丢失一阶精度。
     - 在均匀磁场 B_0 (对应 Ω_0) 中，粒子的回旋运动导致（假设导引中心在 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 且 $\alpha = 0$ 以简化表达）:
       - y方向位移：$\delta y = y(t) \approx \frac{v_\perp}{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$
       - 复数速度：$\dot{\zeta}(t) \approx v_\perp e^{-i\Omega_0 t}$
   - 将这两个零阶解代入右边的扰动项 $-i\delta y\Omega_0'\dot{\zeta}$，得到：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\left(\frac{v_\perp}{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\right)\Omega_0'(v_\perp e^{-i\Omega_0 t})$$

   使用 $\cos(\Omega_0 t) = \frac{e^{i\Omega_0 t} + e^{-i\Omega_0 t}}{2}$：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{\Omega_0}\left(\frac{e^{i\Omega_0 t} + e^{-i\Omega_0 t}}{2}\right)e^{-i\Omega_0 t}$$

$$\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta} \approx -i\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}(1 + e^{-2i\Omega_0 t})$$

2. **求解方程 (取平均)**:
   - 我们对上式在一个回旋周期 $T = 2\pi/|\Omega_0|$ 内取平均。左边的项 $\langle\ddot{\zeta} + i\Omega_0\dot{\zeta}\rangle = \langle\frac{d}{dt}(\dot{\zeta}e^{i\Omega_0 t})e^{-i\Omega_0 t}\rangle$ 比较复杂，但我们更关心的是右侧驱动项的平均效果。
   - 对右边项取时间平均：

$$\left\langle -i\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}(1 + e^{-2i\Omega_0 t})\right\rangle = -i\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}\langle 1 + e^{-2i\Omega_0 t}\rangle$$

   由于 $e^{-2i\Omega_0 t}$ 在一个周期内平均为零，平均后的驱动项为：

$$\langle \text{RHS} \rangle = -i\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}$$

   - 这个平均驱动项会引起导引中心的**平均加速度**。我们更关心的是由这个力产生的**平均漂移速度**。
   - 将平均驱动力 $F_{avg,x} + iF_{avg,y} \approx m\langle \text{RHS} \rangle = -im\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}$ 看作一个作用在导引中心上的恒定力。这是一个纯虚数，表示平均力只作用在 **x 方向**：$F_{avg,x} = -m\frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0}$。
   - 这个 x 方向的力 $\mathbf{F}_{avg} = (F_{avg,x}, 0, 0)$ 在主磁场 $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ 作用下，会引起一个漂移（根据一般力漂移公式 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$）:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{F}_{avg} \times \mathbf{B}_0}{eB_0^2} = \frac{1}{eB_0^2}\begin{pmatrix} F_{avg,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{eB_0^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -F_{avg,x}B_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_{avg,x}}{eB_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(-mv_\perp^2\Omega_0'/2\Omega_0)}{eB_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mv_\perp^2\Omega_0'}{2eB_0\Omega_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

代入 $\Omega_0 = eB_0/m$:

$$\mathbf{v}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mv_\perp^2\Omega_0'}{2eB_0(eB_0/m)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m^2v_\perp^2\Omega_0'}{2e^2B_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2(eB_0/m)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **识别漂移分量 (关键结果):**
   - 定常ドリフト成分 **(定常漂移分量)**
   - 我们得到了一个**恒定的漂移速度分量**，它是由磁场梯度引起的。
   - 在这个坐标设置下（梯度在y方向），漂移速度在 **y 方向**，其值为：

$$v_{g,y} = \frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0^2}$$

   - **解释:**
     - 这个漂移是沿着 y 方向的（垂直于磁场B和等效力F_x）。
     - 它的**大小**与垂直速度的平方 $v_\perp^2$ 成正比，与磁场梯度 $\Omega_0' = (e/m)(dB/dy)$ 成正比，与磁场强度平方 Ω_0^2 成反比。
     - **注意符号：** 这里的推导结果与幻灯片可能存在的负号差异取决于力的定义和坐标系约定。核心是漂移方向垂直于B和梯度方向。
4. **漂移速度的大小估计:**
   - 定常ドリフト `(v<0xE2><0x8A><0xA5>²Ω₀')/(2Ω₀²) = (v<0xE2><0x8A><0xA5>/2) rL/L` は微小量である。
   - 将漂移速度的大小用更物理的量表示：
     - $\Omega_0' = \frac{d\Omega}{dy} = \frac{e}{m}\frac{dB}{dy}$
     - $\Omega_0 = \frac{eB_0}{m}$
     - $r_L = \frac{v_\perp}{|\Omega_0|}$ (拉莫尔半径)
     - $L \approx \frac{B_0}{|dB/dy|}$ (磁场梯度变化的特征长度)
   - $|v_{g,y}| = \frac{v_\perp^2|\Omega_0'|}{2\Omega_0^2} = \frac{v_\perp^2|e/m(dB/dy)|}{2(eB_0/m)^2} = \frac{v_\perp^2 m|dB/dy|}{2|e|B_0^2} = \frac{v_\perp}{2}\frac{mv_\perp}{|e|B_0}\frac{|dB/dy|}{B_0} = \frac{v_\perp}{2}r_L\frac{1}{L}$
   - 漂移速度的大小可以写成 $\approx \frac{v_\perp}{2}\frac{r_L}{L}$。
   - 因为导引中心近似的条件是 $r_L \ll L$，所以这个漂移速度确实是一个**小量** (微小量)，这与我们使用微扰法的前提是一致的。

总结

这张幻灯片通过求解近似的运动方程（并取时间平均），成功地分离出了由磁场梯度引起的**定常漂移速度**（梯度漂移）。

- 关键步骤是使用**零阶（均匀场）解**来近似扰动项。
- 求解结果表明，除了原有的回旋运动和一些额外的振荡项外，粒子还有一个**垂直于磁场和磁场梯度方向**的**恒定漂移速度**。
- 这个漂移速度的大小与粒子能量 ($v_\perp^2$)、磁场梯度 ($|\Omega_0'|$) 成正比，与磁场强度平方 (Ω_0^2) 成反比，并且是一个小量。

勾配ドリフト③ (梯度漂移 ③)

这张幻灯片总结了梯度漂移的关键特性，并给出了更通用的公式。

主要内容

1. **平均速度 (导引中心速度):**
   - 時間幅 `T = 2π/Ω₀` で速度の平均を取ると、 (如果我们在一个回旋周期 $T = 2\pi/|\Omega_0|$ 内对粒子的速度进行平均,)
   - 所有的快速振荡项都会平均为零。最终剩下的就是**导引中心的平均速度** $\langle\mathbf{v}_g\rangle$:

$$\langle\mathbf{v}_g\rangle = \left(0, \frac{v_\perp^2\Omega_0'}{2\Omega_0^2}, v_\parallel\right)$$

   - **解释:**
     - $v_\parallel$: 平行于磁场方向的速度保持不变。

    - $\frac{v_\perp^2 \Omega_0'}{2\Omega_0^2}$：这就是上一页推导出的**恒定漂移速度**的大小（梯度漂移速度）。在这个特定设置下（梯度在y方向），它出现在 y 分量上。
    - x 方向的平均漂移速度为 0。
2. **通用梯度漂移公式：**
    - y方向の速度を勾配ドリフト速度と呼ぶ。 (y方向的速度被称为梯度漂移速度。) - 这是对此特定设置的命名。
    - 勾配ドリフトのより一般的な形式は、 (梯度漂移更通用的形式是:)

$$\mathbf{v}_g = \frac{W_\perp}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$$

    或写为:

$$\mathbf{v}_g = \frac{mv_\perp^2}{2eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$$

    - **解释这个通用公式：**
        - $\mathbf{v}_g$：梯度漂移速度（矢量）。
        - $W_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2$：粒子垂直于磁场的动能。
        - $\mathbf{B}$：磁场矢量。
        - ∇B：**磁场强度 $B = |\mathbf{B}|$ 的梯度**（一个指向磁场强度增加最快方向的矢量）。
        - $\mathbf{B} \times \nabla B$：决定了漂移的**方向**。这个方向**同时垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 和磁场梯度 ∇B**。
        - e：粒子的**电荷** (出现在分母！)。
        - B^3：磁场强度大小的立方。
    - 这个公式适用于任意方向的磁场梯度，并且明确显示了漂移速度的大小和方向。
3. **关键特性：依赖于电荷符号！**
    - 速度の向きは、電荷の符号により変化する。 (速度的方向根据电荷的符号而变化。)
    - 从通用公式 $\mathbf{v}_g = .../(eB^3)$ 可以清楚地看到，漂移速度 $\mathbf{v}_g$ 的方向**取决于电荷 e 的符号**。如果 e 变为负号，$\mathbf{v}_g$ 的方向就会反转。
4. **后果：产生电流！ (红色字体)**
    - すなわち準中性プラズマでは、電子とイオンの相違による電流が生じる。 (也就是说，在准中性等离子体中，由于电子和离子的差异会产生电流。)
    - 因为梯度漂移的方向依赖于电荷符号，**正离子和负电子会在同一个磁场梯度中向相反的方向漂移**。
    - 这种正负电荷的相对运动就构成了**净的电流**！这与 E×B 漂移（正负电荷同向同速漂移，不产生电流）和一般力 F 漂移（正负电荷也反向漂移，产生电流）类似。
5. **图示解释 (Fig. 2.4):**
    - 图中磁场 $\mathbf{B}$ 指向纸外 (⊙)。
    - 磁场梯度 ∇B 指向上方（表示磁场越往上越强）。
    - 根据右手定则，$\mathbf{B} \times \nabla B$ 指向**左方**。
    - 根据公式 $\mathbf{v}_g$ 方向与 $(\mathbf{B} \times \nabla B)/e$ 同向：
        - 对于**正电荷** $\oplus$ $(e > 0)$，漂移方向与 $\mathbf{B} \times \nabla B$ 相同，即向**左**漂移。
        - 对于**负电荷** $\ominus$ $(e < 0)$，漂移方向与 $\mathbf{B} \times \nabla B$ 相反，即向**右**漂移。
    - 图示完美地展示了正负粒子因梯度漂移而向相反方向运动。

总结

这张幻灯片总结了梯度漂移的核心内容：

- 它是导引中心的平均速度的一部分，由磁场强度的空间变化（梯度）引起。
- 通用公式为 $\mathbf{v}_g = \frac{W_\perp}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$。
- 漂移方向垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 和磁场梯度 ∇B。
- **关键区别：梯度漂移的速度方向依赖于粒子电荷 e 的符号**。
- 因此，在等离子体中，梯度漂移会导致**离子和电子反向漂移，从而产生电流**。

曲率ドリフト (Curvature Drift)

曲率ドリフト① (曲率漂移 ①)

这张幻灯片开始探讨另一种由**磁力线弯曲（曲率）引起的粒子漂移，称为曲率漂移**。这是处理非均匀磁场的第二种情况。

主要内容

1. **特定非均匀磁场设定：**
    - 定常磁場 `B(z) = (0, By(z), B)` を考える。 (考虑一个稳定的磁场。)
    - 这个磁场的主要分量仍然是沿 **z 方向** 的 B（我们暂时认为它是主要的、近似恒定的）。
    - **关键不同：** 现在还有一个**随 z 坐标变化**的**小的 y 方向分量** $B_y(z)$。
    - 假设**没有电场** ($\mathbf{E} = 0$)。
    - **重要假设：** $B_y(z)$ 以及它随 z 的变化率 dB_y/dz 都**远小于**主磁场分量 B (`By(z)` や `dBy/dz` は `B` と比較して非常に小さいとする)。这表示 $B_y(z)$ 是一个**微扰**。$\mathbf{B} = (0, B_y(z), B)$。
2. **物理图像：弯曲的磁力线**
    - すなわち、「粒子がほぼz方向の磁力線に沿って走ると、徐々にy方向に曲がっていく」ような磁場である。 (也就是说，这是一个这样的磁场："当粒子大致沿着z方向的磁力线运动时，它会逐渐向y方向弯曲。")
    - **通俗解释：** 由于存在一个小的、随z变化的 $B_y(z)$ 分量，原本笔直指向z方向的磁力线现在会发生**轻微的弯曲**。想象一下，当粒子沿着这条主要是z方向但略微弯曲的磁力线前进时，它实际上是在一个**弯曲的路径**上运动。
3. **粒子运动设定：**
    - z方向の初速を `v<0xE2><0x88><0xA5>` とし、旋回運動を 2 種類考える。 (设粒子沿z方向的初速度为 $v_\parallel$。)
    - 我们考虑一个主要沿着z方向（近似磁力线方向）以速度 $v_\parallel$ 运动的粒子。
    - 速度 $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$，其中 $\dot{z} \approx v_\parallel$。
4. **洛伦兹力分解：**
    - z方向の磁場、y方向の磁場が作るローレンツ力はそれぞれ、 (由z方向磁场和y方向磁场产生的洛伦兹力（加速度 F/m）分别是:)
    - 总洛伦兹力 $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = e(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \times (0, B_y, B)$。
    - 加速度 $\mathbf{a} = \frac{e}{m}(\dot{y}B - \dot{z}B_y, -\dot{x}B, \dot{x}B_y)$。
    - 引入 $\Omega = eB/m$ 和 $\Omega_y = eB_y/m$。
    - 加速度矢量可以写为：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\dot{y} - \Omega_y\dot{z} \\ -\Omega\dot{x} \\ \Omega_y\dot{x} \end{pmatrix}$$

    - 这可以分解为两部分：
        - **由 B (z分量) 产生的加速度（回旋）：**

$$\begin{pmatrix} \Omega\dot{y} \\ -\Omega\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

        - **由 $B_y(z)$ (y分量) 产生的加速度（额外力）：**

$$\begin{pmatrix} -\Omega_y\dot{z} \\ 0 \\ \Omega_y\dot{x} \end{pmatrix}$$

            - $-\Omega_y\dot{z}$：当粒子有沿z方向的速度 $\dot{z}$ 时，B_y 会产生一个 **x 方向** 的力。这是引起曲率漂移的关键力。
            - $\Omega_y\dot{x}$：当粒子有 x 方向的速度 $\dot{x}$ 时，B_y 会产生一个 **z 方向** 的力（平行方向的力）。
5. **定义回旋频率：**
    - この時、`Ω = eB/m, Ωy = eBy/m` である。 (此时，定义...)
    - 明确定义了与主磁场 B 相关的回旋频率 Ω 和与垂直分量 B_y 相关的频率 Ω_y。

总结与展望

这张幻灯片为推导曲率漂移设置了场景：

- 定义了一种具有**弯曲磁力线**的特定磁场构型（通过引入小的 $B_y(z)$ 分量）。
- 将洛伦兹力分解为由主磁场 B 引起的"正常"回旋力和由垂直分量 B_y 引起的**额外力项**。
- **关键在于由 B_y 产生的力**：特别是 $F_x = -m\Omega_y\dot{z}$ 这一项，它将一个沿着磁力线运动的粒子 ($\dot{z} \approx v_\parallel$) 推向 **x 方向**。这个力类似于一个**等效的横向力**作用在粒子上。
- 正如我们之前看到的，任何垂直于主磁场 B 的力（无论是电场力 eE 还是其他力 F）都会引起漂移。这里的 F_x 就扮演了这个"其他力"的角色，它将导致粒子发生漂移，即**曲率漂移**。接下来的幻灯片将基于这个力来推导漂移速度。

曲率ドリフト② (曲率漂移 ②)

这张幻灯片继续上一张的推导，目的是建立一个可以用来求解曲率漂移的近似运动方程。

主要内容

1. **完整的运动方程（考虑 B_y）：**
   - y方向の磁場を加味した運動方程式は、 (考虑了y方向磁场的运动方程是：)
   - 将上一张幻灯片分解的两个力（由 B 和 B_y 产生）加起来，得到粒子完整的加速度矢量方程：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\dot{y} - \Omega_y\dot{z} \\ -\Omega\dot{x} \\ \Omega_y\dot{x} \end{pmatrix}$$

   其中 $\Omega = eB/m$ 和 $\Omega_y = eB_y(z)/m$。
2. **xy 平面的复数运动方程：**
   - 将 x, y 方向的运动合并成复数 $\zeta = x + iy$ 的方程。$\ddot{\zeta} = \ddot{x} + i\ddot{y}$。

$$\ddot{\zeta} = (\Omega\dot{y} - \Omega_y\dot{z}) + i(-\Omega\dot{x})$$

   我们知道 $\dot{\zeta} = \dot{x} + i\dot{y}$，所以 $i\Omega\dot{\zeta} = i\Omega\dot{x} - \Omega\dot{y}$。
   因此 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} = (\Omega\dot{y} - \Omega_y\dot{z}) + i(-\Omega\dot{x}) + (i\Omega\dot{x} - \Omega\dot{y}) = -\Omega_y\dot{z}$。
   得到 xy 平面的复数运动方程：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} = -\Omega_y(z)\dot{z}$$

3. **进行近似：**
   - ¨ζ + iΩζ̇ ≈ -Ωy(z)v<0xE2><0x88><0xA5>
   - **关键近似：** 我们假设粒子主要沿着z方向（近似磁力线方向）以一个**大致恒定**的速度 $v_\parallel$ 运动。因此，我们将方程右边的瞬时速度 $\dot{z}$ 近似为 $v_\parallel$。
   - **近似的理由：** この近似は、ż の時間変化の項が小さくかつ Ωy(z) も微小のため、両者の積である2次以上の項を除いた事による。 (这个近似是因为 $\dot{z}$ 的时间变化（即加速度 $\ddot{z} = \Omega_y\dot{x}$）很小，并且 $\Omega_y(z)$ 本身也是微小量（因为 B_y 很小），所以我们忽略了它们的乘积，即二阶以上的微小项。) 换句话说，$\Omega_y(z)(\dot{z} - v_\parallel)$ 被认为是比 $-\Omega_y(z)v_\parallel$ 更小的高阶项而被忽略了。
   - 近似后的方程为：

$$\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} \approx -\Omega_y(z)v_\parallel$$

4. **下一步的提示：**
   - 右辺について、z対して Ωy = eBy/m の変化を無視するかどうかで、y方向やx方向のドリフトが導出される。 (关于右边项，根据是否忽略 $\Omega_y = eB_y/m$ 随 z 的变化，可以推导出 y 方向或 x 方向的漂移。)
   - **解释：** 现在我们得到的近似方程是 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} \approx -\Omega_y(z)v_\parallel$。这个方程的右边 $-\Omega_y(z)v_\parallel$ 是驱动漂移的项。
   - 由于粒子在z方向运动 ($z \approx v_\parallel t$)，$\Omega_y(z)$ 实际上也随时间变化。
   - 接下来的推导会考虑如何处理 $\Omega_y(z)$：
     - 如果简单地将 $\Omega_y(z)$ 近似为导引中心处的常数值 Ω_{y0}，我们会得到一个方向的漂移。
     - 如果考虑 $\Omega_y(z)$ 随 z 的一阶变化（即考虑梯度 $d\Omega_y/dz$），可能会得到更精确的结果或其他方向的漂移分量。
   - 本质上，右边项 $-\Omega_y(z)v_\parallel$ 扮演了一个**等效的、作用在x方向的力** $F_x \approx -m\Omega_y(z)v_\parallel$ 的角色。根据我们之前学习的一般力漂移 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$，这个 x 方向的力 F_x 和 z 方向的主磁场 B 会导致一个 **y 方向** 的漂移。

总结

这张幻灯片将问题转化为一个近似的复数运动方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} \approx -\Omega_y(z)v_\parallel$。方程的右边是由于磁力线弯曲和粒子沿线运动而产生的等效作用力项，它将驱动曲率漂移。接下来的步骤将是求解这个方程，并从中分离出恒定的漂移速度。

曲率ドリフト③ (曲率漂移 ③)

这张幻灯片分析了上一页得到的近似运动方程 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} \approx -\Omega_y(z)v_\parallel$ 的右边项，并从中推导出曲率漂移。

主要内容

1. **第一种情况：忽略 Ω_y 随 `z` 的变化 (最低阶近似)**
   - `○右辺 -Ωy(z)v<0xE2><0x88><0xA5>` について、z対して `Ωy = eBy/m` の変化が小さく、実定数とした場合、小さなy方向のドリフト速度が導出される。 (关于右边项 $-\Omega_y(z)v_\parallel$，如果 Ω_y 随 z 的变化很小，可以近似为导引中心处的常数 Ω_{y0}，那么...)
   - 方程变为 $\ddot{\zeta} + i\Omega\dot{\zeta} \approx -\Omega_{y0}v_\parallel$。右边是一个（近似）恒定的驱动项（作用在x方向的力 $F_x = -m\Omega_{y0}v_\parallel$）。
   - 这类似于 E×B 漂移的情况，但力是 F_x。解这个方程得到的平均漂移速度为（根据一般力漂移公式 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$）：

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{eB^2}\begin{pmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{eB^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -F_x B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_x}{eB} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \dot{y} \rangle = -\frac{-m\Omega_{y0}v_\parallel}{eB} = \frac{mv_\parallel}{eB}\Omega_{y0} = \frac{mv_\parallel}{eB}\frac{eB_{y0}}{m} = v_\parallel \frac{B_{y0}}{B}$$

   - 幻灯片给出的结果是：$\langle \dot{y} \rangle \approx v_\parallel \Omega_y/\Omega = v_\parallel(B_y/B)$。
   - **物理意义：** これは、磁力線に沿った運動を意味する。 (这表示沿着磁力线运动。) 这个小的 y 方向漂移速度 $\langle \dot{y} \rangle$ 正好等于粒子沿 z 方向的速度 $v_\parallel$ 乘以磁力线在 yz 平面内的斜率 (B_y/B)。这意味着，在最低阶近似下，粒子仅仅是**跟随着弯曲的磁力线**在运动，并没有真正“漂移”出磁力线。
2. **第二种情况：考虑 `Ωy` 随 `z` 的变化（曲率效应）**
   - `○一方右辺 -Ωy(z)v<0xE2><0x88><0xA5>` について、`dΩy/dz (曲率)` が無視できないとすると、 (另一方面，关于右边项 $-\Omega_y(z)v_\parallel$，如果 $d\Omega_y/dz$（与曲率相关）不能忽略，那么...)
   - **核心：** 真正的曲率漂移来自于**考虑 $\Omega_y(z)$ 随 `z` 的变化**，并结合粒子回旋运动。右边的驱动力 $F_x = -m\Omega_y(z)v_\parallel$ 实际上作用在粒子瞬时位置上，而非导引中心。通过更精确的导引中心理论推导，或者考虑回旋平均效应，可以得到由于 F_x 和粒子回旋运动耦合产生的漂移。
   - 一个更直观的理解是考虑平行方向的力 $F_z = m\ddot{z} = m\Omega_y\dot{x}$。对 $\dot{x}$ 在回旋周期内取平均，得到平均的平行力 $\langle F_z \rangle \neq 0$。这个平行力（或其梯度）与粒子回旋运动耦合，也会产生垂直于 B 的漂移。
   - `-(dΩy/dz)|_(z₀) v<0xE2><0x88><0xA5> δz` 这一项是关键。因为粒子的回旋运动也会导致 z 方向位移 `δz` 的振荡，这一项乘以 `v<0xE2><0x88><0xA5>` 再经过周期平均后，会产生一个**净的漂移**。
   - の項が無視できなくなり、x方向のドリフト速度が導出される。 (这一项变得不可忽略，可以推导出 x 方向的漂移速度。)
3. **曲率漂移速度公式：**
   - 通过更仔细地求解（通常需要用到导引中心运动方程），最终可以得到由磁力线曲率引起的漂移速度，称为**曲率漂移速度 $\mathbf{v}_c$**。
   - 幻灯片给出了平均的 **x 方向漂移速度**（在这个坐标系下）：

$$v_{c,x} = \langle \dot{x} \rangle \approx -\frac{v_\parallel^2 \Omega_y'}{\Omega^2}$$

   其中 $\Omega_y' = d\Omega_y/dz = (e/m)dB_y/dz$。
   将其用物理量表示：

$$v_{c,x} = -\frac{v_\parallel^2 (e/m)(dB_y/dz)}{(eB/m)^2} = -\frac{mv_\parallel^2 (dB_y/dz)}{eB^2}$$

   - **解释：**
     - 漂移方向是 **x 方向**（在这个特定设置下，垂直于包含磁力线弯曲的平面 yz）。
     - 大小与粒子平行能量 $W_\parallel = (1/2)mv_\parallel^2$ 成正比。
     - 大小与磁力线的曲率（由 dB_y/dz 或 Ω_y' 体现）成正比。
     - 大小与磁场强度平方 B^2 成反比。
     - 速度**依赖于电荷 e 的符号**！
4. **命名：**
   - このx方向のドリフトを曲率ドリフトと呼ぶ。 (这个 x 方向的漂移被称为曲率漂移。)

总结

这张幻灯片区分了两种效应：

1. **最低阶近似：** 粒子只是简单地跟随弯曲的磁力线运动，产生一个小的、与磁力线斜率匹配的横向速度。
2. **考虑更高阶（曲率）效应：** 当考虑粒子回旋运动与磁场垂直分量梯度 (dB_y/dz，代表曲率) 的耦合时，会产生一个**净的、垂直于磁力线弯曲平面的漂移**，这就是**曲率漂移 $\mathbf{v}_c$**。

- 曲率漂移速度 $\mathbf{v}_c$ 与粒子平行能量和磁力线曲率成正比，与磁场平方成反比，并且**其方向依赖于粒子电荷的符号**。
- 因此，与梯度漂移类似，曲率漂移也会导致等离子体中的**离子和电子反向漂移，从而产生电流**。

曲率ドリフト④ (曲率漂移 ④)

这张幻灯片给出了曲率漂移更通用的数学表达式，并将其与梯度漂移联系起来。

主要内容

1. **更通用的曲率漂移公式：**
   - より一般的な曲率ドリフトの表式は、 (更一般的曲率漂移表达式是：)

$$\mathbf{v}_c = \frac{2W_\parallel}{eB^4} \left(\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}\right)$$

   或写为：

$$\mathbf{v}_c = \frac{mv_\parallel^2}{eB^4} \left(\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}\right)$$

   - **解释这个公式：**
     - $\mathbf{v}_c$：曲率漂移速度（矢量）。
     - $W_\parallel = \frac{1}{2}mv_\parallel^2$：粒子平行于磁场的动能。
     - $\mathbf{B}$：磁场矢量。
     - $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$：这个是关键的**曲率项**。它表示磁场矢量 $\mathbf{B}$ 沿着磁场线方向 $\mathbf{B}$ 的变化率（方向导数）。如果磁力线是笔直的，这个项为零；如果磁力线弯曲，这个项不为零，大小为 B^2/R_c（R_c为曲率半径），方向指向曲率中心。
     - $\mathbf{B} \times ((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B})$：决定了漂移的**方向**。这个方向同时垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 和磁场沿自身方向的变化（即垂直于曲率矢量 $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$）。
     - e：粒子电荷（出现在分母，符号决定方向）。
     - B^4：磁场强度大小的四次方。
   - 这个公式更普适，不依赖于上一张幻灯片的特定坐标设置。它再次表明曲率漂移与平行能量 $W_\parallel$ 相关，且依赖于电荷 e。
2. **曲率和梯度的联系：**
   - 曲率ドリフトが存在する場合、磁場強度の勾配も同時に存在する。 (当存在曲率漂移时，磁场强度的梯度也同时存在。)
   - **重要物理联系：** 在很多情况下，尤其是**真空中**或等离子体电流可忽略时，磁力线的弯曲（产生曲率漂移）必然伴随着磁场强度的变化（产生梯度漂移）。想象一捆被弯曲的橡皮筋，外侧的橡皮筋被拉伸（对应磁场变弱），内侧被压缩（对应磁场变强）。
   - 真空中プラズマによる電流が無視できる場合、アンペール則は `∇×B = 0` (在真空中，当等离子体电流可忽略时，安培定律简化为 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$。)
   - **数学解释：** 麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$ 在无电流 ($\mathbf{j} = 0$) 时变为 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$。这个条件在数学上将磁场不同方向的梯度联系起来。可以证明（使用矢量恒等式）：

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

   当 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 时，$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \nabla(B^2/2) = B\nabla B$。
3. **总漂移速度 (梯度 + 曲率) 在 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 时：**
   - これを用いると、磁場勾配・曲率によるドリフトの総和は、 (利用 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 这个条件，) 由磁场梯度和曲率引起的**总漂移**速度 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_c$ 为：
   - $\mathbf{v}_g = \frac{W_\perp}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$
   - $\mathbf{v}_c = \frac{2W_\parallel}{eB^4}(\mathbf{B} \times (B\nabla B)) = \frac{2W_\parallel}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$ (因为 $(B \cdot \nabla)B = B\nabla B$)
   - 将两者相加：

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_c = \left(\frac{W_\perp}{eB^3} + \frac{2W_\parallel}{eB^3}\right)(\mathbf{B} \times \nabla B)$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{W_\perp + 2W_\parallel}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$$

- **解释这个惊人地简洁的公式：**
    - $\mathbf{v}_B$：代表由磁场不均匀性（包括梯度和曲率）引起的**总漂移速度** (在 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 条件下)。
    - $W_\perp$：垂直动能，它驱动**梯度漂移**部分。
    - $2W_\parallel$：**两倍**的平行动能，它驱动**曲率漂移**部分。
    - $(\mathbf{B} \times \nabla B)$：漂移方向仍然由**梯度方向**决定（垂直于 $\mathbf{B}$ 和 ∇B）。
    - eB^3：分母。
- **重要意义：** 在**无电流**的磁场中 ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$)，梯度漂移和曲率漂移可以**合并**成一个统一的公式！总漂移方向相同（都由 $\mathbf{B} \times \nabla B$ 决定），大小由垂直动能和**两倍**平行动能共同贡献。

总结

这张幻灯片给出了曲率漂移的通用矢量公式，并揭示了其与梯度漂移的深刻联系：

- 曲率漂移 $\mathbf{v}_c$ 由平行能量 $W_\parallel$ 和磁力线曲率 $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 驱动。
- 在无电流的磁场中 ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$)，曲率和梯度通常同时存在且相互关联。
- 在这种条件下，梯度漂移和曲率漂移可以合并为一个简洁的公式 $\mathbf{v}_B$，总漂移速度由 $W_\perp + 2W_\parallel$ 驱动，方向由 $\mathbf{B} \times \nabla B$ 决定。
- 无论是单独的梯度漂移、曲率漂移，还是合并后的总漂移，其速度都**依赖于电荷 e 的符号**，因此都会在等离子体中产生电流。

曲率ドリフトの意味 (曲率漂移的意义)

这张幻灯片提供了一个理解曲率漂移**背后物理机制**的直观方法，将其与我们熟悉的**离心力**联系起来。

核心观点：

- 曲率ドリフトの物理的意味は、「遠心力」である。 (曲率漂移的物理意义是“离心力”。)

解释：

1. **粒子沿弯曲磁力线的运动：**
    - 想象一个粒子主要沿着一条**弯曲的磁力线**以速度 $v_\parallel$ 运动（如右图所示）。
    - 当粒子沿着曲线运动时，它就像坐过山车转弯一样，会感受到一个试图把它甩出去的力，这就是**离心力**（在随粒子运动的非惯性系看来）或者说需要一个指向曲率中心的向心力来维持曲线运动（在惯性系看来）。
2. **等效离心力 $\mathbf{F}_{cf}$：**
    - 这个等效的离心力大小为 $F_{cf} = mv_\parallel^2/R_c$，方向是**沿着局部曲率半径向外**。
        - m：粒子质量。
        - $v_\parallel$：粒子沿磁力线的速度（平行速度）。
        - R_c：磁力线的**局部曲率半径** (局所的な中心からの位置ベクトル - 指向曲率中心的矢量，其大小为 R_c)。
    - 矢量表示：$\mathbf{F}_{cf} = \frac{mv_\parallel^2}{R_c}\hat{\mathbf{r}}$，其中 $\hat{\mathbf{r}}$ 是沿半径向外的单位矢量。或者用曲率矢量 $\boldsymbol{\kappa} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{B^2}$ （指向曲率中心，大小为 $1/R_c$）表示为 $\mathbf{F}_{cf} = -mv_\parallel^2\boldsymbol{\kappa}$。
3. **离心力引起的漂移：**
    - 现在，我们将这个**离心力 $\mathbf{F}_{cf}$** 视为一个作用在粒子上的**一般力 $\mathbf{F}$**。
    - 我们知道，任何垂直于主磁场 $\mathbf{B}$ 的力 $\mathbf{F}$ 都会引起漂移，漂移速度为 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$。
    - 将 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{cf}$ 代入，得到由离心力引起的漂移速度，这**正是曲率漂移 $\mathbf{v}_c$**：

$$\mathbf{v}_c = \frac{\mathbf{F}_{cf} \times \mathbf{B}}{eB^2} = \frac{(-mv_\parallel^2\boldsymbol{\kappa}) \times \mathbf{B}}{eB^2} = \frac{mv_\parallel^2}{eB^2}(\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa})$$

代入 $\boldsymbol{\kappa} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{B^2}$:

$$\mathbf{v}_c = \frac{mv_\parallel^2}{eB^2}\left(\mathbf{B} \times \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{B^2}\right) = \frac{mv_\parallel^2}{eB^4}(\mathbf{B} \times (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B})$$

- 这与之前更形式化的推导结果完全一致。

4. **与坐标系推导的联系：**
   - 幻灯片中将基于离心力的物理解释与前几页基于磁场分量 $B_y(z)$ 的数学推导联系起来，证明两者是一致的。
   - 磁力线的斜率 $\approx B_y/B$。
   - 磁力线的曲率 $\kappa = 1/R_c \approx |d^2y/dz^2| \approx |d/dz(B_y/B)|$。
   - 假设主磁场 B 变化缓慢，$\kappa \approx (1/B)|dB_y/dz|$。
   - 离心力漂移大小 $v_c \approx \frac{F_{cf}}{eB} = \frac{mv_\parallel^2/R_c}{eB} = \frac{mv_\parallel^2\kappa}{eB} \approx \frac{mv_\parallel^2}{eB}\frac{1}{B}\left|\frac{dB_y}{dz}\right| = \frac{mv_\parallel^2|dB_y/dz|}{eB^2}$。
   - 这与之前在特定坐标系下推导出的曲率漂移公式 $|v_{c,x}| = \frac{mv_\parallel^2|dB_y/dz|}{eB^2}$ 大小一致。
5. **图示解释 (图 2.6 湾曲磁場 - 弯曲磁场):**
   - 图示了弯曲的磁力线 $\mathbf{B}$。
   - $\mathbf{R}_c$ (等同于 $\mathbf{R}_{cf}$) 是指向曲率中心的矢量，大小为 R_c。
   - $\mathbf{F}_{cf}$ 是指向曲率中心外侧的离心力。
   - $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是沿磁力线方向的单位矢量。
   - $\hat{\mathbf{r}}$ 是沿径向向外的单位矢量（离心力方向）。
   - 曲率漂移 $\mathbf{v}_c$ 的方向垂直于纸面（由 $\mathbf{F}_{cf} \times \mathbf{B}$ 决定）。

总结

这张幻灯片提供了一个关于曲率漂移的非常直观的物理图像：

- **曲率漂移本质上是由粒子沿着弯曲磁力线运动时所感受到的“离心力”引起的漂移。**
- 这个离心力 $\mathbf{F}_{cf}$ 充当了一个垂直于磁场的力，根据一般力漂移公式 $\mathbf{v}_F = (\mathbf{F} \times \mathbf{B})/eB^2$，导致了垂直于离心力和磁场方向的漂移。
- 这种物理解释与之前更复杂的数学推导结果是一致的。

粒子の運動に伴う電流と磁場との関係について (Regarding the relationship between currents associated with particle motion and the magnetic field)

反磁性効果とそれによる電流 (Diamagnetic effect and the resulting current)

反磁性効果と反磁性電流 (Diamagnetic Effect and Diamagnetic Current)

这张幻灯片讨论的是带电粒子在磁场中回旋运动自身所产生的一种重要电磁效应。

主要内容

1. **单个粒子的回旋 = 电流环 = 磁偶极矩:**
   - 磁場中で旋回運動のみしている荷電粒子を考える。時間平均を取ると、旋回運動は円環電流となり、磁気モーメント μ = IS が生じる。
   - **通俗解释：** 想象一个带电粒子在磁场中不停地转圈（回旋运动）。如果我们看这个粒子长时间的平均效果，它的运动轨迹就像一个**微小的圆形电流线圈**（円環電流）。一个带电荷 e 的粒子以回旋频率 $f = |\Omega|/(2\pi)$ 转圈，等效电流为 $I = ef = e|\Omega|/(2\pi) = |e|(|e|B/m)/(2\pi) = e^2B/(2\pi m)$。线圈面积 $S = \pi r_L^2 = \pi(v_\perp/|\Omega|)^2 = \pi m^2 v_\perp^2/(e^2B^2)$。
   - 因此，这个等效线圈具有**磁偶极矩** $\boldsymbol{\mu}$（衡量小磁铁强度和方向的量）。磁偶极矩的大小等于电流 I 乘以线圈面积 S。
2. **粒子回旋产生的磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}$ 公式:**
   - μ = IS = (e²B / 2πm) * (π m² v⊥² / e² B²) = (m v⊥² / 2) / B = W⊥ / B
   - 矢量形式：$\boldsymbol{\mu} = -\frac{W_\perp}{B^2}\mathbf{B}$ （负号表示方向）

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{W_\perp}{B^2}\mathbf{B}$$

   - **解释：** 这个公式计算了单个粒子回旋产生的磁偶极矩。
     - $W_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2$ 是粒子垂直于磁场的动能。

    - $\mathbf{B}$ 是外部磁场。
  - **关键意义：**
    - 磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的方向**总是与外部磁场 $\mathbf{B}$ 的方向相反**（由负号 - 表示）。
    - 其大小 $\mu = |\boldsymbol{\mu}| = W_\perp / B$ 与粒子的垂直动能 $W_\perp$ 成正比，与磁场强度 B 成反比。
3. **反磁性效应：**
  - 元の磁場に対して反転し、反磁性の効果を持つ。電荷の符号に寄らない。
  - **核心结论：** 由于粒子回旋产生的磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}$ **总是抵抗（反向于）** 外部磁场 $\mathbf{B}$，这种效应被称为**反磁性效应 (Diamagnetic Effect)**。它试图**减弱**粒子所在位置的总磁场。
  - **重要特性：** 这种反磁性效应**与粒子电荷的符号无关**！无论是正离子还是负电子，它们的回旋产生的磁矩都抵抗外部磁场。
4. **磁化强度 $\mathbf{M}$ 与反磁性电流 $\mathbf{j}_B$：**
  - また、磁化 `M = n<μB>` は、勾配により反磁性電流を生む。
  - **磁化强度 M (Magnetization):** 如果有很多粒子（密度为 n），单位体积内所有粒子磁偶极矩的**矢量和**就是**磁化强度 $\mathbf{M}$**。如果粒子速度各向同性，$\mathbf{M} = n\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = n\left\langle -\frac{W_\perp}{B^2}\mathbf{B}\right\rangle = -\frac{n\langle W_\perp\rangle}{B^2}\mathbf{B}$。它代表了材料（等离子体）整体被磁化的程度。
  - **反磁性电流 $\mathbf{j}_B$ (Diamagnetic Current):** 如果磁化强度 $\mathbf{M}$ 在空间中**不是均匀分布**的（即存在**梯度**，使得 $\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$），这种不均匀性就会宏观地表现为一种**电流**，称为**反磁性电流 $\mathbf{j}_B$**。

$$\mathbf{j}_B = \nabla \times \mathbf{M}$$

    这个电流与等离子体压强梯度相关，`j_B = (∇p × B) / B²` (这里 p 是总压强)。
  - 反磁性电流 $\mathbf{j}_B$ 也是产生那个由反磁性效应引起的**感应磁场 $\mathbf{B}_{\text{induced}}$** 的源（之一）。
5. **感应磁场 $\mathbf{B}_{\text{induced}}$：**
  - `B_induced` は反磁性効果による磁場であり、B に対して小さいとしている。 (B_{induced} 是由反磁性效应产生的磁场，我们假设它比 B 小。)
  - 反磁性效应使得总磁场 $B_{total} = B_{ext} + B_{ind}$ 比外部磁场 B_{ext} 弱。感应场 $B_{ind} \approx \mu_0 M$。
  - $|B_{\text{ind}}|/B \approx |\mu_0 M|/B \approx \mu_0 n\langle W_\perp\rangle/B^2$。这个比值通常用等离子体 beta 值 $\beta_\perp = p_\perp/(B^2/2\mu_0)$ 表示，即 $|B_{ind}|/B \sim \beta_\perp/2$。
  - 这个公式表明，等离子体的密度越高 (n)、垂直温度越高 ($\langle W_\perp\rangle$)、外部磁场越弱 (B)，反磁性效应就越显著。

总结

这张幻灯片的核心思想是：

- 带电粒子在磁场中的回旋运动本身就像一个小电流环，产生一个**反向于**外部磁场的磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}$。
- 这种效应称为**反磁性**，它试图减弱外部磁场，并且**不依赖于电荷符号**。
- 大量粒子的集体效应由**磁化强度 $\mathbf{M}$** 描述。
- 如果等离子体性质（如密度 n 或垂直能量 $W_\perp$，即压强 $p_\perp$）或外部磁场 $\mathbf{B}$ 在空间上不均匀，导致磁化强度 $\mathbf{M}$ 出现梯度，就会产生**反磁性电流 $\mathbf{j}_B = \nabla \times \mathbf{M}$**。

ドリフトによる電流 (Current due to drift)

ドリフトによる電流 (由漂移产生的电流)

这张幻灯片专门讨论由粒子**漂移运动**（特别是梯度漂移和曲率漂移）在等离子体中产生的**宏观电流**。

主要内容

1. **产生电流的原因：**
  - 準中性プラズマ中の勾配ドリフトを考えると、電子とイオンの電荷符号によるドリフト速度の向きの違いのため、プラズマ中に電流が生じる。
  - **核心思想：** 在一个准中性（正负电荷数大致相等）的等离子体中，考虑**梯度漂移 $\mathbf{v}_g$** 和 **曲率漂移 $\mathbf{v}_c$**。我们已经知道，这两种漂移的速度方向都**依赖于粒子电荷 e 的符号** ($\mathbf{v}_g \propto 1/e, \mathbf{v}_c \propto 1/e$)。
  - 这意味着**电子（负电荷）和离子（正电荷）会向相反的方向进行这些漂移**。
  - 这种正负电荷的**相对运动**就构成了净的电荷流动，从而在等离子体中**产生电流**。
2. **具体例子：梯度漂移电流 $\mathbf{j}_g$**
  - 考虑梯度漂移 $\mathbf{v}_g = \frac{W_\perp}{eB^3}(\mathbf{B} \times \nabla B)$。

- 假设等离子体由电子（电荷 $-e$, 密度 n_e, 平均垂直能量 $\langle W_{\perp,e}\rangle$）和离子（电荷 $+Ze$, 密度 n_i, 平均垂直能量 $\langle W_{\perp,i}\rangle$）组成。为简单起见，设 $Z=1$。
- **电子电流密度 $\mathbf{j}_e$:**
  - $\mathbf{j}_e = n_e(-e)\mathbf{v}_{g,e} = n_e(-e)\left[\frac{\langle W_{\perp,e}\rangle}{(-e)B^3}(\mathbf{B}\times\nabla B)\right] = \frac{n_e\langle W_{\perp,e}\rangle}{B^3}(\mathbf{B}\times\nabla B)$
- **离子电流密度 $\mathbf{j}_i$:**
  - $\mathbf{j}_i = n_i(+e)\mathbf{v}_{g,i} = n_i(+e)\left[\frac{\langle W_{\perp,i}\rangle}{(+e)B^3}(\mathbf{B}\times\nabla B)\right] = \frac{n_i\langle W_{\perp,i}\rangle}{B^3}(\mathbf{B}\times\nabla B)$

3. **总梯度漂移电流 $\mathbf{j}_g$:**
   - ⟨W⊥⟩ = ⟨W⊥,e⟩ + ⟨W⊥,i⟩ とおくと、ドリフトによる電流の総和は、 (如果我们定义等离子体总垂直压强 $p_\perp = n_e\langle W_{\perp,e}\rangle + n_i\langle W_{\perp,i}\rangle$，那么由漂移产生的总电流是:)
   - 总电流密度是电子和离子电流密度的矢量和：$\mathbf{j}_g = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i$。
   - $\mathbf{j}_g = \left(\frac{n_e\langle W_{\perp,e}\rangle}{B^3} + \frac{n_i\langle W_{\perp,i}\rangle}{B^3}\right)(\mathbf{B}\times\nabla B)$
   - 将 $p_\perp = n_e\langle W_{\perp,e}\rangle + n_i\langle W_{\perp,i}\rangle$ 代入 (假设 $n_e \approx n_i = n$，或者更准确地用压强定义):

$$\mathbf{j}_g = \frac{p_\perp}{B^3}(\mathbf{B}\times\nabla B)$$

   - 类似地，可以计算曲率漂移产生的电流 $\mathbf{j}_c = \frac{2p_\parallel}{B^4}(\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B})$。
   - 总的由磁场不均匀性引起的漂移电流为 $\mathbf{j}_{\nabla B} = \mathbf{j}_g + \mathbf{j}_c$。

总结

这张幻灯片明确了**梯度漂移**和**曲率漂移**（以及依赖电荷符号的其他漂移）是等离子体中产生电流的重要机制之一。

- 由于电子和离子带相反电荷，它们的漂移方向相反。
- 这种相对运动形成了净电流 $\mathbf{j}_g$ (梯度漂移电流) 和 $\mathbf{j}_c$ (曲率漂移电流)。
- 总的梯度漂移电流密度 $\mathbf{j}_g$ 的方向由 $\mathbf{B}\times\nabla B$ 决定，大小与等离子体的**总垂直压强** $p_\perp$ 成正比。
- 总的曲率漂移电流密度 $\mathbf{j}_c$ 的方向由 $\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ 决定，大小与等离子体的**总平性压强** $p_\parallel$ 成正比。

全エネルギーの保存 (Total Energy Conservation) / 压强平衡

这张幻灯片旨在说明，在特定的稳态条件下，等离子体中的**漂移电流**和**反磁性电流**与磁场自身的约束相结合，最终体现为一种**能量守恒**（或者更准确地说，是**压强平衡**）的关系。

主要内容

1. **等离子体中的主要垂直电流:**
   - 在垂直于磁场的方向上，等离子体中的电流主要由两部分贡献：
     - **漂移电流 $\mathbf{j}_{\nabla B}$:** 由磁场不均匀性（梯度和曲率）引起，导致离子和电子反向漂移而产生。$\mathbf{j}_{\nabla B} = \mathbf{j}_g + \mathbf{j}_c$。
     - **反磁性电流 $\mathbf{j}_B$:** 由等离子体压强梯度引起（宏观表现为磁化强度的旋度）。$\mathbf{j}_B = \frac{\nabla p_\perp \times \mathbf{B}}{B^2}$ (更准确的表达)。
   - 总的垂直电流（忽略其他可能的电流）为 $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}_{\nabla B} + \mathbf{j}_B$。
2. **考虑稳态力平衡:**
   - 在稳态下，作用在等离子体元上的总力为零。主要的力是压强梯度力 $-\nabla p$ 和洛伦兹力 $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$。
   - 力平衡方程为：

$$\nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

     其中 p 是总压强（通常假设为标量 $p = p_\perp = p_\parallel$ 以简化，或分别考虑）。
   - 这个方程表明，压强梯度必须由洛伦兹力来平衡。
3. **应用安培定律并推导守恒律:**
   - 在**稳态**且**忽略位移电流**的情况下，安培定律为 $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$。
   - 将 $\mathbf{j} = (\nabla p)\times\mathbf{B}/B^2$ （从力平衡解出）代入安培定律，并结合矢量恒等式进行推导（过程较为复杂）。
   - 另一种更直接的方法是考虑力平衡方程的垂直分量 $\nabla_\perp p = \mathbf{j}_\perp\times\mathbf{B}$。
   - 结合 $\mathbf{j}_\perp$ 的表达式和一些矢量运算，可以最终得到一个重要的关系。考虑简单情况，如之前 $\mathbf{B} = (0,0,B(y))$ 和 $p = p(y)$:
     - 力平衡：$dp/dy = j_x B$。

  - 总电流（近似）$(j_\perp)_x \approx (j_B)_x = (\nabla \times M)_x = -dM_z/dy$。
  - $M_z \approx -n\langle W_\perp \rangle/B \approx -p_\perp/B$。
  - $(j_\perp)_x \approx d(p_\perp/B)/dy$。
  - 代入力平衡：$dp/dy = [d(p_\perp/B)/dy]B$。
  - 如果 $p = p_\perp$，则 $dp/dy = Bd(p/B)/dy = B((dp/dy)B - p(dB/dy))/B^2 = (dp/dy) - (p/B)dB/dy$。这似乎不对。
- **正确的推导思路：**
  - 从力平衡 $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 开始。
  - 结合安培定律 $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$。
  - $\nabla p = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$。
  - 使用矢量恒等式 $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla(B^2/2)$。
  - $\nabla p = \frac{1}{\mu_0}[(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla(B^2/2)]$。
  - $\nabla p + \nabla(B^2/2\mu_0) = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$。
  - 移项得到：

$$\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

- **结论：**
  - 右边的 $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 代表磁张力（与磁力线曲率有关）。
  - 如果考虑**垂直于磁力线**的平衡，$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 没有垂直分量（或者说其贡献被平衡）。
  - 因此，在垂直于磁力线的方向上，我们有：

$$\nabla_\perp\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0$$

  - 这意味着，在垂直于磁场的方向上，括号内的量是一个**常数**：

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.} \quad \text{(across field lines)}$$

  (如果压强是张量，则为 $p_\perp + B^2/2\mu_0 = \text{const.}$)

4. **物理解释：压强平衡**
   - p (或 $p_\perp$)：代表等离子体的**热压强**（粒子随机运动产生的向外推力）。
   - $B^2/(2\mu_0)$：代表**磁场的能量密度**，也称为**磁压强**（磁场对等离子体的约束力）。
   - 磁場エネルギー密度と運動エネルギー密度の和は保存される。 (磁场能量密度和（垂直）动能密度（压强）的和是守恒的。) - 更准确地说是它们的和在垂直于磁场的方向上是常数。
   - **物理意义：** 这个守恒定律实际上描述了在垂直于磁场的方向上的**压强平衡**。等离子体试图向外膨胀的**热压强 ($p_\perp$)** 和束缚等离子体的**磁压强 ($B^2/2\mu_0$)** 相互平衡。在磁场较弱的地方（磁压强小），等离子体压强必须较高才能维持平衡；反之亦然。这是磁约束聚变（如托卡马克）中的一个基本平衡关系。

总结

这张幻灯片通过考虑稳态下的**力平衡方程** ($\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$) 和安培定律，最终推导出了一个重要的**压强平衡关系**：$p_\perp + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.}$ (在垂直于磁场的方向上)。这表明磁场的能量密度（磁压强）和等离子体的垂直动能密度（热压强）之和在垂直于磁场的空间中保持恒定，反映了磁场对等离子体的约束作用。

总结：磁场中粒子的运动对磁场的影响

这张幻灯片总结了带电粒子在磁场中的运动（回旋、漂移）如何反过来影响磁场本身。

要点总结：

1. **反磁性效应改变磁场：**
   - 粒子绕着磁力线转圈（回旋运动）本身就像一个小线圈，会产生一个抵抗**原始磁场**的**感应磁场 $\mathbf{B}_{\text{ind}}$**（通过磁化强度 $\mathbf{M}$）。这被称为**反磁性效应**。
   - 这个效应会使实际的总磁场 $|\mathbf{B}_{\text{total}}| = |\mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{ind}}|$ 比外部磁场 $|\mathbf{B}_{\text{ext}}|$ 稍微**减弱**一点（尤其在等离子体压强高的地方）。
2. **等离子体约束产生电流：**

- 当等离子体被约束在磁场中时，通常会因为外部磁场的不均匀（$\nabla B \neq 0$, 曲率 $\neq 0$）或者等离子体自身压强的不均匀（$\nabla p \neq 0$）而产生各种**梯度**。
- 这些梯度会导致**反磁性电流**（$\mathbf{j}_B \propto \nabla p \times \mathbf{B}$）和**漂移运动**（梯度漂移 $\mathbf{v}_g \propto \mathbf{B} \times \nabla B$，曲率漂移 $\mathbf{v}_c \propto \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 等）。
- 由于漂移速度依赖于电荷符号，漂移运动会产生**漂移电流** ($\mathbf{j}_{\nabla B} = \mathbf{j}_g + \mathbf{j}_c$)。
- 这些电流的方向通常**垂直于磁场方向**，也**垂直于相应的梯度方向**（压强梯度或磁场梯度/曲率）（プラズマ密度勾配と磁場の両方に直交する方向に電流が流れる）。

3. **电流影响磁场，但满足压强平衡：**
   - 等离子体自身产生的这些电流（漂移电流、反磁性电流）会**反过来改变**等离子体所在区域的**磁场分布**（根据安培定律 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$）。
   - 尽管磁场分布会改变，但在稳态条件下，系统必须满足**力平衡（压强平衡）**关系：$p_\perp + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.}$ (垂直于 $\mathbf{B}$)。
4. **压强平衡的具体表现：**
   - 根据上面提到的压强平衡：如果将等离子体聚集在某个区域（压强 $p_\perp$ 高），那么为了维持平衡，该区域的**磁场强度 B 就必须减弱**（磁压强 $B^2/2\mu_0$ 降低）。
   - 反之，在等离子体比较稀薄的区域（压强 $p_\perp$ 低），**磁场强度 B 则会相对增强**（磁压强 $B^2/2\mu_0$ 升高）。这形象地说明了等离子体的反磁性如何“排开”磁场。

图示解释 (Fig. 2.5):

- 图中展示了一种具体情况：磁场 $\mathbf{B}$ 指向纸外 ($\odot$)，磁场强度向上增强 (∇B 向上)，等离子体密度/压强向下减小 (∇n 或 ∇p 向下，意味着梯度方向向上)。
- 在这种不均匀的条件下，离子（带正电）和电子（带负电 $\ominus$）会因为梯度漂移（由 ∇B 引起）和反磁性漂移（由 ∇p 引起，等效于反磁性电流）而发生运动。
- 梯度漂移：离子向左，电子向右（根据 $\mathbf{v}_g \propto (\mathbf{B} \times \nabla B)/e$）。
- 反磁性电流/漂移：与压强梯度 ∇p（向上）有关，$\mathbf{j}_B \propto \nabla p \times \mathbf{B}$ 指向左方。
- 总的效应可能导致一个宏观的净电流 `j` 流动（图中示意为向左）。
- （图的英文标题和说明描述了这种情况下的电流密度，指出电流是由于密度梯度引起的。）

核心思想总结：

等离子体并非被动地在磁场中运动，它的存在和运动（特别是回旋和漂移）会通过**反磁性效应**和产生的**电流**来**主动地改变和影响**其周围的磁场分布，但整个系统在稳态下需要满足力（压强）平衡的规律。

変化する場と断熱不変量 (Changing fields and adiabatic invariants)

緩やかに時間変動する磁場 (Slowly time-varying magnetic field)

緩やかに時間変動する磁場① (缓慢时间变化的磁场 ①)

这张幻灯片开始讨论一种新的情况：当外部**磁场随时间缓慢变化**时，粒子的行为会有何不同？这将引出**绝热不变量**的概念。

主要内容

1. **条件：磁场变化缓慢**
   - 磁場の時間変動が緩やかな場合 `|Ḃ|/|B| << |Ω|` を考える。
   - 我们考虑的情况是，磁场随时间变化的**特征频率** ($\sim |\dot{\mathbf{B}}|/|\mathbf{B}|$) **远小于**粒子的**回旋频率** $|\Omega|$。
   - **通俗解释：** 这意味着，在粒子完成一次回旋运动的时间 ($\tau \sim 1/|\Omega|$) 内，磁场自身的变化非常微小。粒子能够基本完成一次完整的“干净”回旋，才感受到磁场的轻微变化。
2. **法拉第定律：变化的磁场产生电场**
   - ファラデー則による電場が荷電粒子を加速する。 (根据法拉第定律产生的电场会加速带电粒子。)
   - 根据法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$，**随时间变化的磁场 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 会在空间中感生出环绕它的电场 $\mathbf{E}$**。
   - 这个**感应电场 $\mathbf{E}$** 会对带电粒子施加电场力 $e\mathbf{E}$，从而**对粒子做功**，改变粒子的能量。这与之前讨论的**静磁场（洛伦兹力不做功）**有本质区别！
3. **能量变化率：**
   - 単位時間あたりの仕事とエネルギーの変化が釣り合うとして、 (假设单位时间内（电场）做的功与（粒子）能量的变化相平衡，)
   - 感应电场 $\mathbf{E}$ 对粒子做功的功率（单位时间做的功）是 $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (e\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}$。由于感应电场主要是环形的，主要影响垂直速度 $\mathbf{v}_\perp$，功率约为 $P_\perp = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp$。
   - 这个功率等于粒子垂直动能 $W_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2$ 的变化率：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{dW_\perp}{dt} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_\perp$$

4. **一个回旋周期内的能量变化:**
   - `v⊥ = dr⊥/dt` として、旋回運動1周期あたりの運動エネルギーの変化は、 (令 $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{r}_\perp/dt$，一个回旋周期内的动能变化是:)
   - 我们计算粒子在一个回旋周期 T 内，感应电场对它做的总功，这等于粒子垂直动能在一个周期内的净变化量 $\delta W_\perp$。
   - 功等于力乘以位移的积分：$\delta W_\perp = \oint e\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}_\perp$ (沿粒子回旋轨迹 $d\mathbf{r}_\perp$ 积分一圈)。
   - 利用**斯托克斯定理**，可以将环路积分 $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}_\perp$ 转化为面积分 $\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}$，其中 S 是粒子回旋轨道围成的面积。

$$\delta W_\perp = e\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}$$

   - 代入法拉第定律 $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$:

$$\delta W_\perp = e\int_S\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} = -e\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

5. **面积矢量 $\mathbf{S}$ 的方向:**
   - 面积矢量 $\mathbf{S}$ 的方向通常定义为与粒子产生的磁矩方向一致，即与 $\mathbf{B}$ 方向相反。$d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{b}}dS$, 其中 $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$ 是磁场方向单位矢量。
   - $\delta W_\perp = -e\int_S\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot(-\hat{\mathbf{b}})\right)dS$。
   - 假设 $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 主要沿 $\mathbf{B}$ 方向变化，$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\approx\frac{dB}{dt}\hat{\mathbf{b}}$。
   - $\delta W_\perp \approx -e\int_S\left(\frac{dB}{dt}\hat{\mathbf{b}}\cdot(-\hat{\mathbf{b}})\right)dS = e\int_S\frac{dB}{dt}dS$。
   - 由于磁场变化缓慢，在一个周期内 $\frac{dB}{dt}\approx\dot{B}$ (常数)，轨道面积 $S=\pi r_L^2$。
   - $\delta W_\perp \approx e(\pi r_L^2)\dot{B}$。
   - **注意:** 这个结果的符号与幻灯片不同，这通常取决于 $\mathbf{S}$ 或电流方向的约定。核心是能量变化与 $\dot{B}$ 和 r_L^2 成正比。

总结与展望

这张幻灯片开启了对**缓变磁场**中粒子行为的讨论：

- 关键条件是磁场变化率远小于回旋频率。
- 变化的磁场会感生出电场（法拉第定律），这个电场会对粒子**做功**，改变粒子的**能量** (主要是 $W_\perp$)。
- 推导出了粒子在一个回旋周期内垂直动能的变化量与磁场变化率通过回旋轨道面积的积分相关。
- 接下来的内容将基于这个能量变化关系，推导出在缓慢变化的场中一个近似守恒的量——**磁偶极矩**，这就是最基本的**绝热不变量**。

緩やかに時間変動する磁場② (缓慢时间变化的磁场 ②)

这张幻灯片紧接上一张，目的是证明在磁场随时间缓慢变化时，粒子的一个重要物理量——**磁偶极矩的大小**——是近似守恒的，即它是一个**绝热不变量**。

主要步骤与解释

1. **计算一个回旋周期内的能量变化（近似结果）:**
   - 旋回運動1周期あたりの運動エネルギーの変化を求めると、 (求出一个回旋周期内的动能变化，得到:)
   - 根据上一张的推导（或幻灯片的结果，符号可能不同），一个周期内的垂直能量变化 $\delta W_\perp$ 正比于 $\dot{B}$ 和 r_L^2。

$$\delta W_\perp \approx \mu|\dot{B}|T = \mu|\dot{B}|\frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{W_\perp}{B}|\dot{B}|\frac{2\pi m}{|e|B}$$

   或者用幻灯片的近似结果:

$$\delta W_\perp \approx \pi r_L^2|e||\dot{B}| = \pi\left(\frac{mv_\perp}{|e|B}\right)^2|e||\dot{B}| = \frac{\pi m^2v_\perp^2}{|e|B^2}|\dot{B}| = \frac{2\pi mW_\perp}{|e|B^2}|\dot{B}|$$

   将 $|\dot{B}|T = |\delta B|$ 代入，其中 $T = 2\pi/|\Omega| = 2\pi m/(|e|B)$:

$$\delta W_\perp \approx \frac{W_\perp}{B}|\delta B|$$

该结果与幻灯片 (mv⊥²/2) (2π/|Ω|) (|Ḃ|/B) 一致，如果将 $T = 2\pi/|\Omega|$ 考虑进去。

- $\delta W_\perp \approx W_\perp \frac{|\delta B|}{B}$。

2. **定义一个周期内磁场的变化 δB：**
   - 旋回運動1周期あたりの磁場の変化を δB = (2π/|Ω|) Ḃ とする (定义一个回旋周期内的磁场变化为 $\delta B = T\dot{B}$)。
3. **能量变化与磁场变化的近似关系：**
   - 将 δB 的定义代入第一步的近似公式：

$$\delta W_\perp \approx W_\perp \frac{\delta B}{B}$$

   (这里假设 δB 和 $\delta W_\perp$ 同号，即B增强时W⊥也增加)。
   - 写成相对变化的形式：

$$\frac{\delta W_\perp}{W_\perp} \approx \frac{\delta B}{B}$$

   - **重要关系：** 这个公式说明，在一个回旋周期内，粒子**垂直动能的相对变化量** 近似等于 **磁场强度的相对变化量**。
4. **考虑磁偶极矩 μ 的变化：**
   - 上記式と、旋回運動の磁気モーメントの変化を考えると、 (考虑上面的公式和回旋运动磁矩的变化，)
   - 我们知道粒子回旋产生的磁偶极矩（只考虑大小）为 $\mu = W_\perp/B$。
   - 计算在一个回旋周期内，μ 的变化量 $\delta\mu$：

$$\delta\mu = \delta\left(\frac{W_\perp}{B}\right)$$

   - 根据微积分的除法法则（或者全微分近似）：$\delta(A/C) \approx (C\delta A - A\delta C)/C^2$

$$\delta\mu \approx \frac{B\delta W_\perp - W_\perp \delta B}{B^2}$$

   - 现在，将第 3 步得到的关键关系 $\delta W_\perp \approx W_\perp(\delta B/B)$ 代入：

$$\delta\mu \approx \frac{B[W_\perp \delta B/B] - W_\perp \delta B}{B^2} = \frac{W_\perp \delta B - W_\perp \delta B}{B^2} = 0$$

5. **结论：磁矩守恒！**
   - $\delta\mu \approx 0$
   - すなわち、緩やかに時間変化する磁場中で磁気モーメントは保存される。 (也就是说，在缓慢时间变化的磁场中，磁偶极矩是守恒的。)
   - **核心结论：** 尽管变化的磁场会通过感应电场改变粒子的垂直动能 $W_\perp$，同时磁场强度 B 自身也在变化，但这两者的变化是“同步”的，使得它们的**比值 $\mu = W_\perp/B$ 近似保持不变**！
   - 这个守恒的量 μ 就是一个**绝热不变量 (Adiabatic Invariant)**。

总结

这张幻灯片证明了在磁场随时间缓慢变化（相对于粒子回旋周期）的条件下，粒子的**磁偶极矩大小 $\mu = W_\perp/B$ 是一个近似守恒量**，即**绝热不变量**。这是等离子体物理中一个非常基本和重要的概念，它意味着即使外部条件在缓慢改变，系统的某些宏观性质（由许多粒子的磁矩贡献）也会保持某种程度的稳定性。

緩やかに空間変動する磁場 (Slowly spatially varying magnetic field)

緩やかに空間変動する磁場① (缓慢空间变化的磁场 ①)

这张幻灯片开始讨论另一种不均匀磁场的情况：磁场在空间中**缓慢变化**，特别是**沿着磁场自身方向**变化。这将引出**磁镜效应**。

主要内容

1. **设定磁场几何：轴对称、沿轴向变化**

- 円筒座標(r, θ, z)において、磁場がr, z方向に変動する場合を考える。 (在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中，考虑磁场在 r 方向（径向）和 z 方向（轴向）变化的情况。)
- 我们考虑的是一个大致沿着 z 轴方向，并且**轴对称**（与角度 θ 无关）的磁场。
- 磁場の成分はBr, Bzである。 (磁场的（非零）分量是 B_r 和 B_z)。 $\mathbf{B} = (B_r(r,z), 0, B_z(r,z))$。
  - B_z：主要的**轴向**（平行）磁场分量，它可能随 r 和 z 变化。
  - B_r：一个（通常较小的）**径向**（垂直）磁场分量，它也可能随 r 和 z 变化。这个 B_r 分量的存在意味着磁力线不再是严格平行的直线，而是会发生**汇聚或发散**。
2. **利用磁场散度为零 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)**
   - 中心からz方向に荷電粒子が移動する。磁場の発散が0であることから、 (带电粒子从中心沿z方向移动。根据磁场散度为零的条件...)
   - 麦克斯韦方程组中的高斯磁定律要求磁场散度处处为零 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)。在圆柱坐标系下，对于轴对称磁场，这个条件写出来就是：
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$
   - 这个方程将径向分量 B_r 和轴向分量沿轴向的变化 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 联系起来了。
   - 对 r 从 0 积分到 r：$\int_0^r \frac{\partial}{\partial r'}(r'B_r(r',z))dr' = -\int_0^r r'\frac{\partial B_z(r',z)}{\partial z}dr'$。
   - 得到 $rB_r(r,z) = -\int_0^r r'\frac{\partial B_z(r',z)}{\partial z}dr'$。
   - $B_r(r,z) = -\frac{1}{r}\int_0^r r'\frac{\partial B_z(r',z)}{\partial z}dr'$。
   - **物理意义：** 如果磁场沿 z 方向增强 ($\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$)，那么为了保持散度为零，必然存在一个指向轴线的径向分量 $B_r < 0$（磁力线向内弯曲、汇聚）。反之亦然。
3. **导引中心近似下的 B_r：**
   - 旋回運動の空間スケールでは磁場勾配が一定で、かつBr<<Bzとして、Brは (在回旋运动的空间尺度内，假设磁场梯度近似恒定，并且 $B_r \ll B_z$ ...)
   - 我们再次应用**导引中心近似**，假设粒子在其回旋轨道（半径 $r \approx r_L$）范围内，轴向磁场的梯度 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 近似不变。
   - $B_r(r_L,z) \approx -\frac{1}{r_L}\int_0^{r_L} r'\frac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}dr' = -\frac{1}{r_L}\frac{\partial B_z}{\partial z}\int_0^{r_L} r'dr' = -\frac{1}{r_L}\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{r_L^2}{2}$。
   - 得到在粒子回旋轨道处 ($r = r_L$) 的径向磁场近似值：
$$B_r(r_L,z) \approx -\frac{r_L}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$
   - 幻灯片最后也用了 $\partial B/\partial z$，这里 B 通常指 B_z。
   - **物理意义：** 粒子在其回旋轨道边缘感受到的**径向磁场** B_r 与**拉莫尔半径** r_L 和**轴向磁场的梯度** $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 成正比。
4. **图示解释 (Fig. 2.6):**
   - 图示了一个磁场沿 z 方向（向右）**增强**的情况。
   - 虚线代表磁力线 (`B-field lines`)。可以看到磁力线向 z 轴**汇聚**，这意味着存在一个指向轴线的 B_r 分量 ($B_r < 0$)。
   - 实线圆圈代表一个带电粒子（比如正电荷）的回旋轨道。
   - 由于磁场沿 z 方向增强，粒子在向右运动时，会进入更强的磁场区域。

总结与展望

这张幻灯片设定了一种重要的非均匀磁场：**沿轴向缓慢变化的轴对称磁场**（比如两端强、中间弱的磁瓶结构）。

- 利用 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 将必然存在的**径向磁场分量** B_r 与**轴向磁场的梯度** $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 联系起来。
- 在导引中心近似下，得到了粒子轨道处的 B_r 的近似表达式 $B_r(r_L) \approx -\frac{r_L}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$。
- **关键在于 B_r 的存在**：当粒子沿着 z 轴运动时，其垂直速度 $\mathbf{v}_\perp$（主要是环绕磁场的 θ 方向速度）会与这个径向磁场 B_r 作用，产生一个**作用在平行方向（z方向）的力 $\mathbf{F}_z = e(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_r)_z$**。
- 这个平行方向的力会改变粒子沿磁力线的运动，可能使其减速、反弹，这就是**磁镜效应**的基础。接下来的内容将分析这个力及其后果。

緩やかに空間変動する磁場② (缓慢空间变化的磁场 ②)

这张幻灯片继续分析上一张设定的情况（磁场沿轴向 z 缓慢变化，存在径向分量 Br)，目的是证明即使磁场在空间上变化，粒子的**磁偶极矩** $\mu = W_\perp/B$ 仍然是**守恒**的（绝热不变量)。

主要步骤与解释

1. **计算平行方向的力 F_z：**
   - 先のBrを用いて、z方向の運動方程式を求めると、 (使用之前的 B_r，求出 z 方向的运动方程:)

- 平行方向的力来自垂直速度 $\mathbf{v}_\perp$ 和径向磁场 B_r 的相互作用：$F_z = m\ddot{z} = e(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_r)_z$。
- 在圆柱坐标中，$\mathbf{v}_\perp \approx (v_r, v_\theta, 0)$，$\mathbf{B}_r = (B_r, 0, 0)$。$F_z = e(v_\theta B_r)$。
- v_θ 是回旋速度，在一个周期内符号会改变。我们需要对这个力在一个回旋周期内取平均值，得到作用在导引中心上的平均平行力 $\langle F_z \rangle$。
- $v_\theta \approx \pm v_\perp$ (取决于电荷和旋转方向)。$B_r \approx -(r_L/2)\partial B_z/\partial z$。
- 平均力 $\langle F_z \rangle = \langle e v_\theta B_r \rangle \approx -\mathrm{sgn}(e) e v_\perp \left(-\frac{r_L}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$ （这里符号处理需要小心，最终结果应不依赖电荷符号）。
- 更可靠的方法是使用等效电流环模型：粒子回旋等效于一个电流环 $I = |e|/(2\pi/\Omega)$。环路面积 $S = \pi r_L^2$。磁矩大小 $\mu = IS = \frac{W_\perp}{B}$。作用在磁矩上的力为 $F_z = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) B_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$。由于 $\boldsymbol{\mu}$ 反平行于 $\mathbf{B}$，$\mu_z = -\mu = -W_\perp/B$。
- 因此，作用在导引中心上的平均平行力（磁镜力）为：

  $$F_z = m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial z}$$

  （这里的 B 指轴向主磁场 B_z）。
- **物理意义：** 这个力 F_z 的方向总是与磁矩 μ 和磁场梯度 $\frac{\partial B}{\partial z}$ 的乘积相反。如果粒子朝磁场增强 ($\frac{\partial B}{\partial z} > 0$) 的方向运动，它会受到一个**反向的力**（减速）；如果朝磁场减弱 ($\frac{\partial B}{\partial z} < 0$) 的方向运动，它会受到一个**同向的力**（加速）。

2. **计算平行能量的变化率：**
   - 両辺に v<0xE2><0x88><0xA5> を掛けて、 (两边乘以 $v_\parallel$)
   - $m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2\right) = \frac{dW_\parallel}{dt}$ (左边正好是平行动能 $W_\parallel$ 的时间变化率)。
   - 所以，平行能量的变化率是：

     $$\frac{dW_\parallel}{dt} = F_z v_\parallel = -\mu v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}$$

3. **结合能量守恒和磁场变化：**
   - dW⊥/dt = d(μB)/dt とエネルギー保存則を用いると、 (使用 $W_\perp = \mu B$ 和能量守恒定律，)
   - **总能量守恒：** 在静磁场中（即使不均匀），洛伦兹力不做功，所以粒子的总动能 $W = W_\perp + W_\parallel$ 是守恒的，即 $\frac{dW}{dt} = 0$。
   - $\frac{dW}{dt} = \frac{dW_\perp}{dt} + \frac{dW_\parallel}{dt} = 0$。
   - **垂直能量变化：** $\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{d(\mu B)}{dt} = \mu\frac{dB}{dt} + B\frac{d\mu}{dt}$ （根据 $W_\perp = \mu B$）。
   - **粒子感受到的磁场变化率：** 当粒子以速度 $v_\parallel$ 沿着 z 方向移动时，它感受到的磁场 B 会随时间变化。这个变化率是 $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) B$。由于我们考虑的是静态但空间变化的磁场，$\frac{\partial B}{\partial t} = 0$，所以 $\frac{dB}{dt} \approx v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}$。
   - 将这些关系代入总能量守恒方程 $\frac{dW_\perp}{dt} + \frac{dW_\parallel}{dt} = 0$：

     $$\left(\mu\frac{dB}{dt} + B\frac{d\mu}{dt}\right) + \left(-\mu v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}\right) = 0$$

   - 用 $\frac{dB}{dt} \approx v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}$ 替换掉 $v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}$：

     $$\left(\mu\frac{dB}{dt} + B\frac{d\mu}{dt}\right) - \mu\frac{dB}{dt} = 0$$

4. **最终结论：磁矩守恒！**
   - $$B\frac{d\mu}{dt} = 0$$
   - 由于磁场 $B \neq 0$，必然有 $\frac{d\mu}{dt} = 0$。
   - これより、磁場が緩やかに変化する場合でも、磁気モーメントは保存する。 (因此，即使磁场缓慢（空间）变化，磁偶极矩也是守恒的。)
   - **重要结论：** 即使磁场在空间上缓慢变化（导致粒子平行能量 $W_\parallel$ 和垂直能量 $W_\perp$ 之间发生转换），它们的比值，即**磁偶极矩 $\mu = W_\perp/B$（大小），仍然保持不变**。这再次证明了磁矩 μ 是一个重要的**绝热不变量**。

总结

这张幻灯片通过分析粒子在缓变空间磁场中**平行方向的受力**和**能量转换**，结合**总能量守恒**，从另一个角度再次证明了**磁偶极矩 $\mu = W_\perp/B$ 的绝热守恒性**。这个守恒律是理解磁镜效应等离子体约束原理的关键。平行方向的力 $F_z = -\mu\frac{\partial B}{\partial z}$（磁镜力）是导致能量在平行和垂直方向之间转换的原因，但这种转换恰好保证了 $W_\perp/B$ 的比值不变。

ミラー磁場 (Magnetic Mirror)

ミラー磁場① (磁镜 ① - Magnetic Mirror ①)

这张幻灯片介绍了**磁镜**的基本概念和原理，这是利用不均匀磁场来**约束带电粒子**的一种重要装置或结构。

主要内容

1. **磁镜的磁场结构：**
   - ミラー磁場配位は、ある空間領域について、領域両端では磁場強度が強く、中心では弱くなり、また磁力線が曲率(Bz, Br)を持つ磁場構造である。
   - **定义：** 磁镜配置指的是这样一种磁场结构：在一个特定的空间区域内，**两端的磁场强度 (B_M) 比较强**，而**中间区域的磁场强度 (B_0) 比较弱**。同时，为了连接强弱不同的区域，**磁力线必然会发生弯曲**（存在径向分量 B_r）。
   - **图示 (Fig. 2.7 Magnetic mirror field):** 右边的图清晰地展示了这种结构。中间磁场稀疏（B_0 弱），两端磁场密集（B_M 强），磁力线呈现中间鼓起、两端收缩的形状。
2. **磁矩守恒与能量转换：**
   - ミラー磁場では、磁気モーメント W⊥/B の保存により、磁場が強くなるにつれて垂直方向の運動エネルギーが増大する。
   - **核心原理：** 当带电粒子在磁镜场中运动时，由于磁场是缓变的，我们之前证明的**磁偶极矩 $\mu = W_\perp / B$ 是守恒的**（绝热不变量）。
   - 这意味着，当粒子从中间弱磁场区 (B_0) 向两端强磁场区 (B_M) 运动时，B 在增大。为了保持 μ 不变，粒子的**垂直动能 $W_\perp$ 也必须随之增大**！$W_\perp(z) = \mu B(z)$。
3. **粒子反射机制 (磁镜效应)：**
   - その結果、ある空間点で磁場方向の運動エネルギーが0となり、反射される。(ローレンツカのz成分が0でない場合)。
   - **能量转换：** 粒子总动能 $W = W_\perp + W_\parallel$ 是守恒的（因为静磁场不做功）。当粒子向强磁场区运动时，$W_\perp$ 增大，为了维持总能量 W 不变，粒子的**平行动能 $W_\parallel = \frac{1}{2} m v_\parallel^2$ 必须减小**！$W_\parallel(z) = W - W_\perp(z) = W - \mu B(z)$。
   - **反射点：** 如果粒子有足够的初始垂直能量（即 μ 足够大），当它进入足够强的磁场区域 $B(z)$ 时，$W_\perp(z)$ 会增大，使得平行动能 $W_\parallel(z)$ 减小。当 $W_\parallel(z)$ 减小到**零**时（即 $W_\perp(z)$ 增大到等于总能量 W 时），粒子在平行方向（沿磁力线方向）的速度 $v_\parallel$ 变为零 (磁場方向の運動エネルギーが0となり)！
   - 这个 $v_\parallel = 0$ 的点就是**反射点**。
   - 此时，之前使其减速的**磁镜力 $F_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}$**（因为此时 $\frac{\partial B}{\partial z} > 0$）仍然存在，它会开始将粒子**反向推回**弱磁场区，粒子就像被一面无形的镜子**反射**回来 (反射される)。这就是**磁镜效应**。
4. **速度分解与俯仰角 θ：**
   - 速度の比を次のように定義し、反射の条件を考察する。 (如下定义速度的比值，并考察反射的条件。)
   - 为了更方便地分析反射条件，我们将粒子的总速度 $\mathbf{v}$ 分解为平行分量 $v_\parallel$ 和垂直分量 $v_\perp$。
   - 引入**俯仰角 θ (pitch angle)**，它是粒子速度矢量 $\mathbf{v}$ 与磁场方向 $\mathbf{B}$ 之间的夹角。
     - $v_\parallel = v \cos\theta$
     - $v_\perp = v \sin\theta$
     - $W_\parallel = W \cos^2\theta$
     - $W_\perp = W \sin^2\theta$
   - 俯仰角 θ 描述了粒子速度主要是平行于磁场还是垂直于磁场。$\theta = 0$ 表示纯平行运动，$\theta = 90^\circ$ 表示纯垂直运动（仅回旋）。

总结

这张幻灯片介绍了磁镜的基本概念和工作原理：

- 磁镜是一种**两端强、中间弱**的磁场结构。
- 核心原理是**磁矩 $\mu = W_\perp / B$ 的绝热守恒**和**总能量 $W = W_\perp + W_\parallel$ 的守恒**。
- 当粒子向强磁场区运动时，垂直能量 $W_\perp$ 增加，平行动能 $W_\parallel$ 减少。
- 如果磁场足够强，或者粒子的俯仰角足够大，平行动能可以减到零，粒子就会被磁镜力**反射**回弱磁场区。
- 这种效应可以用来**约束**带电粒子，使其在磁镜的中间区域来回反射，无法逃逸出去（除非发生碰撞等其他过程）。

ミラー磁場②：ピッチ角 (磁镜 ②：俯仰角 - Magnetic Mirror ②: Pitch Angle)

这张幻灯片紧接着上一张，利用**俯仰角 θ** 和**磁矩守恒**来推导带电粒子在磁镜中**是否会被反射**的具体条件。

主要内容

1. **俯仰角 θ 与磁矩守恒：**
    - `θ はピッチ角と呼ばれる。` (θ 被称为俯仰角。)
    - `磁気モーメント保存より、` (根据磁矩守恒定律，)
    - 磁矩 $\mu = \frac{W_\perp}{B} = \frac{W \sin^2 \theta}{B}$ 是守恒的。
    - 由于总能量 $W = \frac{1}{2} m v^2$ 在静磁场中守恒，所以 $\mu = \frac{W \sin^2 \theta}{B} = \text{const.}$ 意味着：

    $$\frac{\sin^2 \theta}{B} = \text{const.}$$

    - **反射点条件：** 反射发生在俯仰角 $\theta = 90^\circ$ 时，即 $\sin \theta = 1$。我们设粒子恰好发生反射时的磁场强度为 B_R。
    - 对于一个特定的粒子，考虑它在磁镜中心（磁场 B_0，俯仰角 θ_0）和反射点（磁场 B_R，俯仰角 90°）的状态，根据守恒律：

    $$\frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} = \frac{\sin^2 90^\circ}{B_R} = \frac{1}{B_R}$$

    - 由此可以得到在磁场强度为 B 处，粒子的俯仰角 θ 与其在磁镜中心 B_0 处的俯仰角 θ_0 的关系：

    $$\frac{\sin^2 \theta}{B} = \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} \quad \Longrightarrow \quad \sin^2 \theta = \frac{B}{B_0} \sin^2 \theta_0$$

2. **判断反射是否发生：**
    - `磁場Bでピッチ角θを持つ粒子が、ミラー磁場配位の領域内で反射点を持つかどうか考える。` (考虑一个在磁镜中心磁场 B_0 处具有俯仰角 θ_0 的粒子，它是否会在磁镜区域内被反射。)
    - `sin θ=1で反射するときのBをB_R とする。` (设粒子反射时（$\sin \theta = 1$）的磁场强度为 B_R。) 从上面的守恒律可知 $B_R = B_0 / \sin^2 \theta_0$。
    - **关键比较：** 粒子要能被磁镜反射，它所需的**反射磁场强度** B_R 必须**小于或等于**磁镜能提供的**最大磁场强度** B_M (Mirror peak field)。
        - `ミラー装置中で最も強い磁場は B_M 。` (磁镜装置中最强的磁场是 B_M)。
        - `B_M > B_R ならば装置の磁場は十分強く、反射が発生。` (如果 $B_M > B_R$，则装置的磁场足够强，会发生反射。) 因为粒子在到达磁场最强处 B_M 之前，就已经达到了能使其反射的磁场强度 B_R。
        - `B_M ≤ B_R ならばミラーから抜け出す。` (如果 $B_M \le B_R$，则粒子会从磁镜中逃逸出去。) 因为即使到达了磁场最强处 B_M，也还没达到能使其反射的强度 B_R，粒子的平行动能仍然大于零，会继续前进并逃离。

3. **反射条件（用俯仰角表示）：**
    - `ピッチ角の条件に変換すると、` (转换成关于（中心处）俯仰角 θ_0 的条件，)
    - 将 $B_R = B_0 / \sin^2 \theta_0$ 代入上面的反射条件：
        - **反射发生:** $B_M > B_R \implies B_M > B_0 / \sin^2 \theta_0 \implies \sin^2 \theta_0 > B_0 / B_M$
        - **逃逸发生:** $B_M \le B_R \implies B_M \le B_0 / \sin^2 \theta_0 \implies \sin^2 \theta_0 \le B_0 / B_M$
    - **最终结论：**
        - **反射条件：**

        $$\sin^2 \theta_0 > \frac{B_0}{B_M} \quad \text{或} \quad \sin \theta_0 > \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$$

        - **逃逸条件：**

        $$\sin^2 \theta_0 \le \frac{B_0}{B_M} \quad \text{或} \quad \sin \theta_0 \le \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$$

    - 这里的 θ_0 和 B_0 指的是粒子在磁镜中**磁场最弱的中心区域**的俯仰角和磁场强度。B_M 是磁镜**最强处**的磁场强度。
    - $R_M = B_M / B_0$ 称为**磁镜比 (Mirror Ratio)**。

总结

这张幻灯片利用磁矩守恒推导出了粒子在磁镜中被反射的条件，可以用粒子在**磁镜中心处的俯仰角 θ_0** 来表示：

- 守恒关系：$\frac{\sin^2\theta}{B} = \frac{\sin^2\theta_0}{B_0} = \text{const.}$
- **反射条件：** 一个粒子如果在磁镜中心区域（磁场为 B_0）的俯仰角 θ_0 满足 $\sin^2\theta_0 > B_0/B_M = 1/R_M$，那么这个粒子将被磁镜反射，从而被约束住。
- **逃逸条件 (损失锥 Loss Cone)：** 如果粒子的俯仰角 θ_0 满足 $\sin^2\theta_0 \le B_0/B_M = 1/R_M$，那么它的平行速度分量太大，即使到达磁场最强处也无法被反射，最终会从磁镜的末端逃逸出去。满足这个条件的角度范围被称为**损失锥**。磁镜比 R_M 越大，损失锥越小，约束效果越好。

ミラー磁場④：ロスコーン (磁镜 ④：损失锥 - Magnetic Mirror ④: Loss Cone)

这张幻灯片详细介绍了**损失锥**的概念，也就是那些无法被磁镜约束而会逃逸出去的粒子的速度方向范围。

主要内容

1. **损失锥的定义：**
   - ピッチ角が θ₀ 以下のプラズマは、ミラー配位で閉じ込められない。その範囲の半円錐(の立体角)をロスコーンと呼ぶ。
   - **回顾：** 上一张幻灯片我们知道，如果粒子在磁镜中心区域（磁场为 B_0）的俯仰角 θ_0 满足 $\sin^2\theta_0 \le B_0/B_M$，它就会逃逸。
   - **临界角 θ_{0c} (Loss cone angle):** 我们定义一个**临界俯仰角** θ_{0c}，使得

     $$\sin^2\theta_{0c} = \frac{B_0}{B_M} = \frac{1}{R_M}$$

     其中 $R_M = B_M/B_0$ 是磁镜比。
   - **损失锥定义：** 所有在中心区域俯仰角 θ_0 **小于或等于**这个临界角 θ_{0c} 的粒子 ($\theta_0 \le \theta_{0c}$) 都**无法被磁镜约束** (閉じ込められない)。在速度空间中，这些粒子速度矢量所张开的**两个相对的圆锥区域**（以平行磁场方向为轴，半顶角为 θ_{0c}）就被称为**损失锥 (Loss Cone, ロスコーン)**。
2. **计算损失概率 `P` (单个锥)：**
   - ピッチ角の定義域(半球)から、立体角σを2πで規格化して、 (从俯仰角的定义域（前半球 0 到 $\pi/2$）出发，计算损失锥的立体角。)
   - 损失锥（一个方向）所占的**立体角** σ 为：

     $$\sigma = \int_0^{\theta_{0c}}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\phi d\theta = 2\pi\int_0^{\theta_{0c}} \sin\theta d\theta$$

     $$\sigma = 2\pi[-\cos\theta]_0^{\theta_{0c}} = 2\pi(1-\cos\theta_{0c})$$
   - 粒子速度可能指向的**整个前半球的立体角为** 2π 球面度。
   - 损失概率 P （粒子落入一个方向损失锥的概率，假设速度各向同性分布在前半球）就是损失锥立体角占总立体角的比例：

     $$P = \frac{\sigma}{2\pi} = 1 - \cos\theta_{0c}$$
3. **`P` 的意义：**
   - Pはプラズマの損失確率を表す。 (P 表示（单个方向的）等离子体损失概率。)
   - 如果等离子体中粒子的速度方向是各向同性的，那么 P 就代表了一个随机选取的粒子处于损失锥内（一个方向）并最终从磁镜该端逃逸的概率。总的逃逸概率（从两端）是 $2P$（如果分布是全空间的，则是 $\sigma/(4\pi)$）。
4. **用磁镜比 `R_M` 表示损失概率：**
   - ミラー比で表現すると(R>>1ならば)、 (用磁镜比 R_M 表示（如果 $R_M \gg 1$）,)
   - **磁镜比 `R_M`** 定义为 $R_M = B_M/B_0$。
   - 根据临界角的定义 $\sin^2\theta_{0c} = 1/R_M$。
   - 那么 $\cos^2\theta_{0c} = 1 - \sin^2\theta_{0c} = 1 - 1/R_M = (R_M-1)/R_M$。
   - 所以 $\cos\theta_{0c} = \sqrt{\frac{R_M-1}{R_M}}$。
   - 代入损失概率公式：

     $$P = 1 - \cos\theta_{0c} = 1 - \sqrt{\frac{R_M-1}{R_M}}$$
   - **对于强磁镜 ($R_M \gg 1$)**，我们可以使用近似 $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$（其中 $x = 1/R_M$ 很小）：

$$\cos\theta_{0c} = \sqrt{1 - 1/R_M} \approx 1 - \frac{1}{2R_M}$$

   - 此时，损失概率近似为：

$$P \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2R_M}\right) = \frac{1}{2R_M}$$

5. **图示解释 (Fig. 2.8 Loss cone for a magnetic mirror):**
   - 图示是在**速度空间**中画出的损失锥。原点代表静止。
   - 水平轴代表平行速度 $v_\parallel$，垂直轴代表垂直速度 $v_\perp$。
   - 图中的两个蓝色圆锥就是损失锥。所有速度矢量 ($\mathbf{v} = (v_\parallel, v_\perp)$) 落在这个锥形区域内的粒子（即在中心的俯仰角 $\theta_0 \le \theta_{0c}$ 或 $\theta_0 \ge \pi - \theta_{0c}$）将会逃逸。
   - 速度矢量落在锥外的粒子（白色区域）会被反射和约束。

总结

这张幻灯片详细阐述了磁镜的**损失锥**概念：

- 损失锥是由临界俯仰角 θ_{0c} 定义的一个速度空间区域，满足 $\sin^2\theta_{0c} = B_0/B_M = 1/R_M$。
- 在中心区域，俯仰角 θ_0 满足 $\theta_0 \le \theta_{0c}$ 或 $\theta_0 \ge \pi - \theta_{0c}$ 的粒子会从磁镜逃逸。
- 单个方向的损失概率 P（假设速度各向同性分布在前半球）为 $P = 1 - \cos\theta_{0c} = 1 - \sqrt{(R_M - 1)/R_M}$。
- 对于强磁镜（大磁镜比 R_M），损失概率近似为 $P \approx 1/(2R_M)$。磁镜比越大，损失锥越小，约束效果越好。