在磁场 $ec{B}=(0,0,B)$ 中带电粒子的运动方程、电导率张量与介电张量推导

1. 写出运动方程

我们从单个带电粒子的洛伦兹力定律出发。设粒子质量为m,电荷为q。其运动方程为:

$$mrac{dec{v}}{dt}=qec{E}+q(ec{v} imesec{B})$$

给定的磁场为 $\vec{B}=(0,0,B_0)$ (为了区分磁场大小和矢量的分量,这里用 B_0 表示磁感应强度大小)。 所以运动方程为:

$$mrac{dec{v}}{dt}=qec{E}+q(ec{v} imes(0,0,B_0))$$

2. 假设稳态解

假设电场 $ec{E}$ 和粒子速度 $ec{v}$ 都以角频率 ω 随时间作正弦(或复指数)变化:

$$ec{E}(t) = ec{E}e^{-i\omega t}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}e^{-i\omega t}$$

这里,等式右边的 \vec{E} 和 \vec{v} 代表复振幅,不显含时间。

利用这个假设,时间导数 d/dt 可以替换为乘以 $-i\omega$:

$$rac{dec{v}}{dt}=-i\omegaec{v}$$

代入运动方程,得到代数方程:

$$-i\omega mec{v}=qec{E}+q(ec{v} imesec{B})$$

3. 分量求解

首先计算叉乘项 $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$ec{v} imes ec{B} = egin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \ v_x & v_y & v_z \ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} = (v_y B_0) \hat{x} - (v_x B_0) \hat{y} + 0 \hat{z} = (B_0 v_y, -B_0 v_x, 0)$$

将矢量方程 $-i\omega mec{v}=qec{E}+q(ec{v} imesec{B})$ 写成三个分量形式:

• z 分量:

$$-i\omega m v_z = q E_z + q (ec{v} imes ec{B})_z$$

$$-i\omega mv_z=qE_z+0$$

直接解出 v_z :

$$v_z=rac{qE_z}{-i\omega m}=rac{iq}{\omega m}E_z$$
 (1)

• x 分量:

$$-i\omega m v_x = q E_x + q (ec{v} imes ec{B})_x$$

$$-i\omega mv_{x}=qE_{x}+qB_{0}v_{y}$$
 (2)

• y 分量:

$$-i\omega m v_y = q E_y + q (ec{v} imes ec{B})_y \ -i\omega m v_y = q E_y - q B_0 v_x$$
 (3)

现在我们需要解关于 v_x 和 v_y 的二元线性方程组 (2) 和 (3)。

为了简化,引入回旋频率 (Cyclotron Frequency) $\omega_c=rac{qB_0}{m}$ 。注意 ω_c 的符号取决于 q 的符号。 方程组 (2) 和 (3) 可以改写为:

$$-i\omega v_x = rac{q}{m}E_x + \omega_c v_y \ -i\omega v_y = rac{q}{m}E_y - \omega_c v_x$$

整理得到:

$$(-i\omega)v_x-\omega_c v_y=rac{q}{m}E_x$$
 (2') $\omega_c v_x+(-i\omega)v_y=rac{q}{m}E_y$ (3')

我们可以用矩阵形式求解:

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -\omega_c \\ \omega_c & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$
 矩阵的行列式 $D = (-i\omega)(-i\omega) - (-\omega_c)(\omega_c) = -\omega^2 + \omega_c^2 = \omega_c^2 - \omega^2.$ 逆矩阵为 $\frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} -i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & -i\omega \end{pmatrix}.$

所以:

$$egin{pmatrix} v_x \ v_y \end{pmatrix} = rac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} egin{pmatrix} -i\omega & \omega_c \ -\omega_c & -i\omega \end{pmatrix} rac{q}{m} egin{pmatrix} E_x \ E_y \end{pmatrix}$$

解出 v_x 和 v_y :

$$v_x=rac{q/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-i\omega E_x+\omega_c E_y)$$
 (4) $v_y=rac{q/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-\omega_c E_x-i\omega E_y)$ (5)

4. 计算电导率张量 $\overleftrightarrow{\sigma}$

电流密度 \vec{j} 由 $\vec{j}=nq\vec{v}$ 给出,其中 n 是带电粒子数密度。

我们将上面得到的 v_x, v_y, v_z 代入。

为了与更一般的情况(多种带电粒子)兼容,我们用下标 s 表示粒子种类,则 $\omega_{cs}=q_sB_0/m_s$ 和 $\omega_{ps}^2=n_sq_s^2/(\epsilon_0m_s)$ 。总电流是各种粒子电流之和 $\vec{j}=\sum_s n_sq_s\vec{v}_s$ 。

这里为了简化,我们先考虑单一粒子种类,最后再推广。

$$rac{nq^2}{m}=\epsilon_0\omega_p^2$$
,其中 $\omega_p=\sqrt{rac{nq^2}{\epsilon_0 m}}$ 是等离子体频率。

$$j_x=nqv_x=nqrac{q/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-i\omega E_x+\omega_c E_y)=rac{nq^2/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-i\omega E_x+\omega_c E_y) \ j_y=nqv_y=nqrac{q/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-\omega_c E_x-i\omega E_y)=rac{nq^2/m}{\omega_c^2-\omega^2}(-\omega_c E_x-i\omega E_y)$$

$$j_z=nqv_z=nqrac{iq}{\omega m}E_z=rac{inq^2}{\omega m}E_z$$

电导率张量 $\overleftrightarrow{\sigma}$ 定义为 $\vec{j}=\overleftrightarrow{\sigma}\vec{E}$,即:

$$j_k = \sum_l \sigma_{kl} E_l$$

对比系数,我们得到:

$$egin{aligned} \sigma_{xx} &= rac{nq^2/m(-i\omega)}{\omega_c^2 - \omega^2} = rac{-i\omega(nq^2/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} = rac{i\omega\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \ \sigma_{xy} &= rac{nq^2/m(\omega_c)}{\omega_c^2 - \omega^2} = rac{\omega_c(nq^2/m)}{\omega_c^2 - \omega^2} = rac{-\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \ \sigma_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

$$egin{aligned} \sigma_{yx} &= rac{nq^2/m(-\omega_c)}{\omega_c^2-\omega^2} = rac{-\omega_c(nq^2/m)}{\omega_c^2-\omega^2} = rac{\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} \ \sigma_{yy} &= rac{nq^2/m(-i\omega)}{\omega_c^2-\omega^2} = rac{-i\omega(nq^2/m)}{\omega_c^2-\omega^2} = rac{i\omega\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} \ \sigma_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{zx}=0$$

$$\sigma_{zy}=0$$

$$\sigma_{zz}=rac{inq^2}{\omega m}=rac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega}$$

所以电导率张量为:

$$\stackrel{\longleftrightarrow}{\sigma} = egin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \epsilon_0 \omega_p^2 egin{pmatrix} rac{i\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} & rac{-\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \ rac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} & rac{i\omega}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \ 0 & 0 & rac{i}{\omega} \end{pmatrix}$$

注意到 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ 且 $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$ 。

5. 计算介电张量 $\stackrel{\longleftrightarrow}{\varepsilon}$

介电张量 $\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega)$ 与电导率张量 $\overleftrightarrow{\sigma}(\omega)$ 的关系为:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega) = \epsilon_0 \overset{\longleftrightarrow}{I} + \frac{i}{\omega} \overset{\longleftrightarrow}{\sigma}(\omega)$$

其中 \overrightarrow{I} 是 3×3 的单位矩阵。

$$egin{aligned} arepsilon_{xx} &= \epsilon_0 + rac{i}{\omega} \sigma_{xx} = \epsilon_0 + rac{i}{\omega} \left(rac{i\omega\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}
ight) = \epsilon_0 + rac{-\omega\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} = \epsilon_0 \left(1 - rac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}
ight) \ arepsilon_{yy} &= \epsilon_0 + rac{i}{\omega} \sigma_{yy} = arepsilon_{xx} \end{aligned}$$

$$arepsilon_{xy} = rac{i}{\omega}\sigma_{xy} = rac{i}{\omega}\left(rac{-\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}
ight) = rac{-i\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}$$
 $arepsilon_{yx} = rac{i}{\omega}\sigma_{yx} = rac{i}{\omega}\left(rac{\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}
ight) = rac{i\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}$

注意到 $\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy}$.

$$arepsilon_{zz} = \epsilon_0 + rac{i}{\omega}\sigma_{zz} = \epsilon_0 + rac{i}{\omega}\left(rac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega}
ight) = \epsilon_0 + rac{-\epsilon_0\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon_0\left(1 - rac{\omega_p^2}{\omega^2}
ight)$$
 其余非对角元 $arepsilon_{xz}, arepsilon_{zx}, arepsilon_{yz}, arepsilon_{zy}, arepsilon_{zy}, arepsilon_{zy}$ 均为0。

所以介电张量为:

$$onumber \dot{\widetilde{arepsilon}}(\omega) = \epsilon_0 egin{pmatrix} 1 - rac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & rac{-i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \ rac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - rac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \ 0 & 0 & 1 - rac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

6. 最终结果与老师黑板展示的对比

老师黑板上展示的介电张量形式为:

$$\stackrel{\longleftrightarrow}{arepsilon}(\omega) = egin{pmatrix} arepsilon_{ot} & iarepsilon_x & iarepsilon_x & 0 \ -iarepsilon_x & arepsilon_{ot} & 0 \ 0 & 0 & arepsilon_{\|} \end{pmatrix}$$

其中,对于包含多种带电粒子 s 的情况 (例如电子和不同种类的离子,我们将上面单粒子推导中的 ω_p^2 替换为 $\sum_s \omega_{ps}^2$,并将 ω_c 相关的项也进行加和处理,其中 $\omega_{ps}^2 = n_s q_s^2/(\epsilon_0 m_s)$ 和 $\Omega_s = q_s B_0/m_s$ (这里用 Ω_s 代替 ω_{cs} 以匹配老师的符号)):

$$egin{aligned} arepsilon_{\perp}(\omega) &= \epsilon_0 \left(1 - \sum_s rac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2}
ight) \ arepsilon_{\parallel}(\omega) &= \epsilon_0 \left(1 - \sum_s rac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}
ight) \ arepsilon_{x}(\omega) &= \epsilon_0 \left(\sum_s rac{\omega_{ps}^2 \Omega_s}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}
ight) \end{aligned}$$

对比我们的推导结果 (以单粒子为例,将 $\omega_p o \omega_{ps}$, $\omega_c o \Omega_s$ 并考虑求和):

1. ε_{\perp} :

我们的
$$arepsilon_{xx}=arepsilon_{yy}=\epsilon_0\left(1-rac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}
ight).$$
推广到多粒子: $arepsilon_{\perp}=\epsilon_0\left(1-\sum_srac{\omega_{ps}^2}{\omega^2-\Omega_s^2}
ight)$. 这与老师的结果完全一致。

2. ε_{\parallel} :

我们的
$$\varepsilon_{zz}=\epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$
. 推广到多粒子: $\varepsilon_\parallel=\epsilon_0\left(1-\sum_s\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right)$. 这与老师的结果完全一致。

3. $i\varepsilon_x$ 和 $-i\varepsilon_x$:

老师的矩阵中, $arepsilon_{xy}=iarepsilon_x$ 和 $arepsilon_{yx}=-iarepsilon_x$.

我们的推导中:

$$arepsilon_{xy} = rac{-i\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)} \ arepsilon_{yx} = rac{i\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}$$

要使我们的结果匹配老师的矩阵元素 $\varepsilon_{xy}=i\varepsilon_x$, 我们需要:

$$iarepsilon_x = rac{-i\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)} \ arepsilon_x = rac{-\omega_c\epsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}$$

推广到多粒子 (用 Ω_s 替换 ω_c , ω_{ps} 替换 ω_p):

$$arepsilon_x = \epsilon_0 \left(\sum_s rac{-\Omega_s \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}
ight)$$

老师黑板上给出的 ε_x 表达式为:

$$arepsilon_x(\omega) = \epsilon_0 \left(\sum_s rac{\omega_{ps}^2 \Omega_s}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}
ight)$$

可以看出,我们推导出的 ε_x (为了匹配老师矩阵右上角 $i\varepsilon_x$ 这一项) 与老师黑板上直接给出的 ε_x 表达式相差一个负号。

这种符号差异通常源于 $\Omega_s=q_sB_0/m_s$ (回旋频率) 定义中 q_s 的符号,或者在定义 ε_x 时如何提取因子 i。

如果 Ω_s 本身包含电荷 q_s 的符号 (标准做法),那么我们的推导是标准的。

例如,在Jackson的《经典电动力学》或Stix的《等离子体波》中, ε_{xy} 通常定义为包含 i 的项,其系数(类似于老师的 ε_x)与我们推导出的 $\frac{-\Omega_s\omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2-\Omega_s^2)}$ 形式一致 (即包含负号)。

结论:

我们的详细推导得到的介电张量各分量为:

$$egin{align*} arepsilon_{xx} &= arepsilon_{yy} = arepsilon_{\perp} = \epsilon_0 \left(1 - \sum_s rac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2}
ight) \ arepsilon_{zz} &= arepsilon_{\parallel} = \epsilon_0 \left(1 - \sum_s rac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}
ight) \ arepsilon_{xy} &= \sum_s rac{-i\Omega_s \epsilon_0 \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)} \ arepsilon_{yx} &= \sum_s rac{i\Omega_s \epsilon_0 \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)} \end{split}$$

$$arepsilon_{yx} = \sum_s rac{arepsilon_s}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}$$
如果老师的矩阵形式 $egin{pmatrix} arepsilon_\perp & iarepsilon_x & 0 \ -iarepsilon_x & arepsilon_\perp & 0 \ 0 & 0 & arepsilon_\parallel \end{pmatrix}$ 是严格定义的,那么 $arepsilon_x$ 应该等于 $rac{1}{i}arepsilon_{xy} = 0$

$$\sum_s rac{-\Omega_s \epsilon_0 \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}$$

这与老师黑板上给出的 ε_x 表达式 $\epsilon_0\left(\sum_s \frac{\omega_{ps}^2\Omega_s}{\omega(\omega^2-\Omega_s^2)}\right)$ 相差一个负号。

请与老师确认 ε_x 的定义或 Ω_s 的符号约定。不过,推导的物理过程和各分量的结构是正确的。

总结

这个推导过程展示了如何从单个粒子的运动方程(洛伦兹力)出发,在考虑外加磁场和时谐电场的情况下,求解粒子速度,进而得到宏观的电流密度,并最终推导出电导率张量和介电张量。这些张量描述了介质在电磁场作用下的响应,是研究波在磁化等离子体(或类似介质)中传播的基础。