# 物理学笔记：双体问题及相关概念

## 1. 双体问题：位置与质心 (Two-Body Problem: Position and Center of Mass)

这部分内容描述了如何表示两个相互作用物体的位置，并引入了质心和相对位置的概念。

### 图示说明 (Right Side of the Board)

- 一个二维笛卡尔坐标系 (x, y轴，原点O)。
- 两个物体，质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$。
- 它们相对于原点O的位置矢量分别为 $\vec{r_1}$ 和 $\vec{r_2}$。
- 它们各自的速度矢量分别为 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$。

### 公式推导 (Left Side of the Board)

1. **质心位置 (Center of Mass Position) $\vec{R_G}$**:

$$\vec{R_G} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

   - **通俗理解**：质心是系统质量的“加权平均”位置。如果 $m_1$ 和 $m_2$ 用轻杆相连，质心就是用手指顶住杆能使整体平衡的点。质量大的物体对质心位置的“拉扯”效应更强。

2. **相对位置矢量 (Relative Position Vector) $\vec{r}$**:

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

   - **通俗理解**：$\vec{r}$ 是从物体 $m_1$ 指向物体 $m_2$ 的矢量，表示 $m_2$ 相对于 $m_1$ 的位置。

3. **单个物体位置用质心和相对位置表示**:
   引入 **约化质量 (Reduced Mass)** $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。
   那么，黑板上 $m/m_1$ 实际上是 $\mu/m_1 = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)m_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$。
   同理，$m/m_2$ 实际上是 $\mu/m_2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$。
   黑板上的公式（可能符号约定与标准教材有出入）：
   - $\vec{r_1} = \vec{R_G} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}$ (黑板上的形式)
   - $\vec{r_2} = \vec{R_G} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$ (黑板上的形式)

   更标准的形式（基于 $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ 定义）：

$$\vec{r_1} = \vec{R_G} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R_G} - \frac{\mu}{m_1}\vec{r}$$

$$\vec{r_2} = \vec{R_G} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R_G} + \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

*(注：如果黑板上的 `r` 是 `r₁ - r₂`，则黑板公式符号正确。但通常定义 `r = r₂ - r₁`。这里按后者并校正黑板的 $\mu/m_i$ 项前面的符号，使其与标准推导一致。如果坚持黑板上的加减号，那么 $\vec{r}$ 在那两个公式中可能代表从 $m_2$ 指向 $m_1$ 的矢量，即 $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$，那么 $\vec{r_1} = \vec{R_G} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ 和 $\vec{r_2} = \vec{R_G} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$。这里我们假设 $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$，并使用标准形式中的 $\mu$ 转换关系。)*

- **通俗理解**：这两个公式将每个物体的绝对位置 ($\vec{r_1}, \vec{r_2}$) 分解为质心的整体位置 ($\vec{R_G}$) 和它们之间的相对位置 ($\vec{r}$)。
- **好处**：将双体问题分解为质心的运动和两个物体围绕质心的相对运动。

## 总结

通过引入质心和相对位置，简化了双体运动的分析。这在天体力学和微观粒子散射中非常重要。

# 2. 双体问题：总动量与总动能 (Two-Body Problem: Total Momentum and Kinetic Energy)

这部分基于之前的位置表示，进一步分析双体系统的总动量和总动能。

令 $\vec{V_G} = \frac{d\vec{R_G}}{dt}$ 为质心速度，$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ 为相对速度。
则单个物体的速度可以表示为：
$\vec{v_1} = \vec{V_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$
$\vec{v_2} = \vec{V_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$

## 公式推导

1. **总动量 (Total Momentum) $\vec{P}$**:
   原始形式（将 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$ 用 $\vec{V_G}$ 和 $\vec{v}$ 表示代入 $\vec{P} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$）：

$$\vec{P} = m_1\left(\vec{V_G} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\right) + m_2\left(\vec{V_G} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)$$

- **通俗理解**：总动量是两个物体动量的矢量和，这里将各自速度替换为质心速度和相对速度的组合。

2. **总动量 $\vec{P}$ 的简化**:
   展开上式：
   $\vec{P} = m_1\vec{V_G} - \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v} + m_2\vec{V_G} + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$
   $$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{V_G}$$
   也等于总动量的基本定义：
   $$\vec{P} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$
   - **通俗理解**：系统的总动量等于总质量乘以质心速度。内部相对运动不影响总动量。

3. **总动能 (Total Kinetic Energy) $K$**:
   原始形式（将 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$ 用 $\vec{V_G}$ 和 $\vec{v}$ 表示代入 $K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$）：
   $$K = \frac{1}{2}m_1 \left|\vec{V_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2 \left|\vec{V_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right|^2$$
   展开平方项 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ 和 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$：
   $K = \frac{1}{2}m_1 \left(V_G^2 - 2\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V_G}\cdot\vec{v} + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 v^2\right) +$
   $\frac{1}{2}m_2 \left(V_G^2 + 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V_G}\cdot\vec{v} + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v^2\right)$
   整理后，包含 $\vec{V_G}\cdot\vec{v}$ 的交叉项会抵消：
   $-m_1\frac{m_2}{m_1+m_2} + m_2\frac{m_1}{m_1+m_2} = 0$
   剩余项：
   $K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_G^2 + \frac{1}{2}\left(m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\right)v^2$
   $K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v^2$
   $K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}v^2$

4. **总动能 $K$ 的简化 (柯尼希定理 König's Theorem)**:
   定义总质量 $M_G = m_1 + m_2$ 和约化质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。
   $$K = \frac{1}{2}M_G V_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$
   - **通俗理解**：总动能可以分解为两部分：
     - **质心动能 $\frac{1}{2}M_G V_G^2$**: 描述系统整体平移的能量。

    - **相对运动动能 $\frac{1}{2}\mu v^2$**: 描述两个物体相对于质心运动的“内部”能量。
5. **总质量定义**:

$$M_G = m_1 + m_2$$

## 总结

通过引入质心和相对运动，总动量只与质心运动有关，总动能可以分解为质心动能和相对运动动能。这种分解极大地简化了对双体系统（乃至多体系统）的分析。

# 3. 碰撞电离问题 (Collision Ionization Problem)

**问题描述：**
一个拥有 13.6 eV 能量的质子与一个氢原子发生碰撞，能否使其电离？如果换成是同样拥有 13.6 eV 能量的电子，结果又如何？
(基态氢原子的电离能为 13.6 eV)

## 核心概念

1. **电离能 (Ionization Energy)**: 使基态氢原子电离所需最小能量 $E_{ionize} = 13.6 \text{ eV}$。
2. **碰撞中的能量转移**: 入射粒子的部分动能可以转移给目标粒子。
3. **质心系可用能量 (Available Energy in CM Frame)**: 在实验室系中，入射粒子1 (质量 $m_1$，动能 $K_{lab}$) 与静止的目标粒子2 (质量 $m_2$) 碰撞，能够用于引起内部变化（如电离）的最大可用能量 $K_{avail}$ (即质心系中的总动能) 为：

$$K_{avail} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K_{lab}$$

   这部分能量对应于双体问题中相对运动的动能 $\frac{1}{2}\mu v^2$，其中 $v$ 是实验室系中入射粒子速度。
   $K_{lab} = \frac{1}{2}m_1 v^2$。$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。
   $K_{avail} = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{2}m_1 v^2\right) = \frac{m_2}{m_1+m_2}K_{lab}$。

## 解题步骤

**情况一：入射粒子是质子 (Proton)**

- 入射粒子：质子 (p)，质量 $m_1 = m_p$。动能 $K_{lab} = 13.6 \text{ eV}$。
- 目标粒子：氢原子 (H)，质量 $m_2 \approx m_H \approx m_p$ (电子质量 $m_e \ll m_p$)。

可用于电离的最大能量：

$$K_{avail,proton} = \frac{m_p}{m_p + m_p} \times 13.6 \text{ eV} = \frac{1}{2} \times 13.6 \text{ eV} = 6.8 \text{ eV}$$

**结论 (质子情况):**
由于 $K_{avail,proton} = 6.8 \text{ eV} < 13.6 \text{ eV}$ (氢原子电离能)，所以**此质子不能使氢原子电离**。

**情况二：入射粒子是电子 (Electron)**

- 入射粒子：电子 (e)，质量 $m_1 = m_e$。动能 $K_{lab} = 13.6 \text{ eV}$。
- 目标粒子：氢原子 (H)，质量 $m_2 \approx m_H \approx m_p$。

可用于电离的最大能量：

$$K_{avail,electron} = \frac{m_p}{m_e + m_p} \times 13.6 \text{ eV}$$

由于 $m_p \approx 1836 m_e$，所以 $m_e + m_p \approx m_p$。

$$K_{avail,electron} \approx \frac{m_p}{m_p} \times 13.6 \text{ eV} \approx 1 \times 13.6 \text{ eV} = 13.6 \text{ eV}$$

更精确计算：$\frac{m_p}{m_e+m_p} = \frac{1836m_e}{m_e+1836m_e} = \frac{1836}{1837} \approx 0.99945$
$K_{avail,electron} \approx 0.99945 \times 13.6 \text{ eV} \approx 13.592 \text{ eV}$

**结论 (电子情况):**
由于 $K_{avail,electron} \approx 13.6 \text{ eV} \geq 13.6 \text{ eV}$ (氢原子电离能)，所以**此电子理论上可以使氢原子电离** (在阈值能量处)。

## 通俗总结

- **质子撞氢原子 (大球撞大球)**: 约一半能量用于使整个系统（质心）运动，另一半才能用于内部激发，故能量不足。
- **电子撞氢原子 (小球撞大球)**: 氢原子（大球）几乎不动，电子的绝大部分能量都可用于内部激发，故能量足够。

# 4. 拉格朗日力学与库仑力 (Lagrangian Mechanics and

# Coulomb Force)

这部分展示如何用拉格朗日力学分析带电粒子在库仑力场中的运动。

## 基本设定

- **拉格朗日量 (Lagrangian)** $L$:

$$L = K - U$$

  其中 $K$ 是动能，$U$ 是势能。
- **动能** $K$ **(柱坐标系** $r, \theta, z$**)**:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2)$$

  其中 $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt, \dot{z} = dz/dt$。$m$ 在这里通常指约化质量 $\mu$。
- **势能** $U(r)$: 对于有心力场，势能仅依赖于径向距离 $r$。

## 库仑力与势能

- **库仑力 (Coulomb Force)** $\vec{F}(r)$:

$$\vec{F}(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

  其中 $q_1, q_2$ 是电荷量，$\epsilon_0$ 是真空介电常数，$\hat{r}$ 是径向单位矢量。
- **库仑势能 (Coulomb Potential Energy)** $U(r)$:

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

  (若为吸引力，如电子与质子， $q_1 q_2 < 0, U(r) < 0$)

## 欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange Equations)

一般形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

其中 $q_i$ 是广义坐标 $(r, \theta, z)$。

1. **对于 $z$ 坐标 (轴向运动)**:
   $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$
   $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ (因为 $L$ 不显含 $z$)
   所以 $\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \Rightarrow m\dot{z} = p_z = \text{const.}$
   - **解释**：$z$ 方向动量守恒。若初始 $\dot{z} = 0$，则粒子一直在 $xy$ 平面运动。
2. **对于 $\theta$ 坐标 (角向运动)**:
   $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ (因为 $K$ 中有 $\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$)
   $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ (因为 $L$ 不显含 $\theta$，有心势 $U(r)$ 与 $\theta$ 无关)
   所以 $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = M_z = \text{const.}$
   - **解释**：$M_z$ 是粒子绕 $z$ 轴的角动量，在有心力场中守恒 (开普勒第二定律的体现)。
3. **对于 $r$ 坐标 (径向运动)**:
   $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$
   $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta}^2) - \frac{\partial U(r)}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r}$
   所以 $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) = 0$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial U(r)}{\partial r} = 0$$

   或者写为 $m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r} = F_{centrifugal} + F_{central}$。
   - **解释**：径向运动方程。$m\ddot{r}$ 是质量乘以径向加速度。$mr\dot{\theta}^2$ 是离心力项 (形式上的，在非惯性系中是真实的力)。$-\frac{\partial U(r)}{\partial r}$ 是中心力 $F_r(r)$。
     *(注：黑板上的 `mr̈ + ∂U(r)/∂r + mrθ̇² = 0` 可能有符号约定问题。标准形式是 $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$。)*

## 总结

拉格朗日力学提供了推导有心力场中粒子运动方程的系统方法，导出了角动量守恒和径向运动方程，这些是分析轨道问题的基础。

# 5. 碰撞基本概念 (Basic Collision Concepts)

这部分介绍与粒子碰撞相关的基本物理量。

1. **衝突断面積 (Collision Cross-Section) $\sigma$ (单位: $m^2$)**

- **通俗解释**：一个粒子相对于其他粒子而言的“有效碰撞靶面积”。它不是粒子的几何截面积，而是一个等效面积，表征碰撞发生的概率。
- 如果将粒子视为半径为 $a_0$ 的硬球，且两个粒子中心距离小于 $2a_0$ 时发生碰撞，那么有效半径是 $2a_0$，截面 $\sigma = \pi(2a_0)^2$。如果是一个点粒子撞向半径为 $a$ 的靶粒子，则 $\sigma = \pi a^2$。

2. **衝突周波数 (Collision Frequency) $f$ 或 $\nu_{coll}$ (单位: $s^{-1}$)**
   - **通俗解释**：一个粒子平均每秒钟与其他粒子碰撞的次数。
   - 公式：

$$f = n\sigma v_{rel}$$

     其中：
     - $n$: 靶粒子的数密度 (particles/m³)。
     - $\sigma$: 碰撞截面 (m²)。
     - $v_{rel}$: 入射粒子相对于靶粒子的平均相对速度 (m/s)。(黑板上用 $v$)
   - 单位推导：$(m^{-3}) \cdot (m^2) \cdot (m \cdot s^{-1}) = s^{-1}$。
3. **平均自由行程 (Mean Free Path) $l$ (单位: m)**
   - **通俗解释**：一个粒子在连续两次碰撞之间平均能够自由飞行的距离。
   - 公式：

$$l = \frac{v_{rel}}{f} = \frac{v_{rel}}{n\sigma v_{rel}} = \frac{1}{n\sigma}$$

   - **补充**：对于气体中同种粒子间的碰撞，由于靶粒子也在运动，更精确的平均自由程公式为 $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$ (假设麦克斯韦速度分布)。
   - **意义**：$n$ 或 $\sigma$ 越大，环境越“拥挤”或“靶面”越大，$l$ 越短。

## 总结

碰撞截面、碰撞频率和平均自由行程是描述粒子在介质中输运性质（如扩散、导热、导电）的关键参数。

# 6. 卢瑟福散射 (Rutherford Scattering)

这部分描述带电粒子之间（如 $\alpha$ 粒子与原子核）的弹性散射。

1. **卢瑟福散射公式 (Rutherford's Formula) / 微分散射截面 (Differential Scattering Cross-Section) $\sigma(\theta)$ 或 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$:**

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{\alpha}{2m_r u^2 \sin^2(\theta/2)}\right)^2$$

或者更标准的写法是微分散射截面对于立体角 $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ 的导数：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_0 \sin^2(\theta/2)}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_0}{4E_0 \sin^2(\theta/2)}\right)^2$$

其中：

- $\sigma(\theta)$ (或 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$): 表示单位立体角内被散射到散射角 $\theta$ 方向的粒子数与入射粒子束流强度的比值，可以理解为散射到该方向的有效面积。
- $\theta$: 散射角，入射粒子方向改变的角度。
- $m_r$: 约化质量 ($m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$)。
- $u$: 入射粒子与靶粒子之间的初始相对速度。
- $E_0 = \frac{1}{2} m_r u^2$: 质心系中的初始动能。
- $\alpha$ (黑板上的): 这里的 $\alpha$ 实际上是下面的 $\alpha_0$。
- $\alpha_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$: 库仑相互作用强度参数。

2. **库仑势能** $U(r)$:

$$U(r) = \frac{\alpha_0}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3. **库仑相互作用强度参数** $\alpha_0$:

$$\alpha_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

## 总结

卢瑟福散射公式描述了带电粒子因库仑相互作用而被散射的角分布。其 $\sin^{-4}(\theta/2)$ 依赖性是其显著特征，表明小角度散射概率远大于大角度散射，但大角度散射（背散射）的存在证明了原子核的存在。

# 7. 碰撞导致的平均速度变化 (Change in Average Velocity due to Collisions)

这部分推导粒子系由于碰撞导致的平均速度随时间的变化率，即动量弛豫。

1. **立体角元 (Solid Angle Element)** $d\Omega$:

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

(假设方位角对称性)

2. **平均速度变化率 $\frac{d\vec{V}}{dt}$ (General Form)**:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\sum_i \int n_i \sigma_i(\theta) \delta\vec{u}_i(\theta) v_{rel} d\Omega$$

其中:
- $\vec{V}$: 粒子系的平均速度。
- $\sum_i$: 对所有种类的靶粒子 $i$ 求和。
- $n_i$: 第 $i$ 种靶粒子的数密度。
- $\sigma_i(\theta)$: 对于第 $i$ 种靶粒子，散射到 $\theta$ 角的微分散射截面 (这里 $\sigma_i(\theta)$ 可能指 $d\sigma_i/d\Omega$ )。
- $\delta\vec{u}_i(\theta)$: 一次散射角为 $\theta$ 的碰撞导致的速度变化量。对于动量弛豫，通常考虑的是平行于初始速度方向的动量损失，$\delta u_{i,\parallel}(\theta) = v_{rel}(1-\cos\theta)$。
- $v_{rel}$: 碰撞前的相对速度大小 (黑板上用 $V$ 表示，易与平均速度 $\vec{V}$ 混淆)。
- $d\Omega$: 立体角元。

3. **针对库仑碰撞的简化形式**:

对于库仑碰撞，$\sigma_i(\theta)$ 采用卢瑟福散射截面。经过积分（通常包含动量转移截面 $\sigma_m = \int(1-\cos\theta)\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$），可以得到:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\sum_i \left[\frac{n_i \alpha_i^2}{m_{ri}^2 u_i^2} \int_{\theta_D}^{\pi} \cot(\theta/2)(\ldots) d\theta\right] \vec{V}$$

*(注：黑板上的 $\cot(\theta/2)$ 项表明这是对某个特定分量的积分，可能与动量转移有关。括号内的 $(\ldots)$ 表示可能还有其他与角度相关的因子或投影因子。积分下限 $\theta_D$ 是由于德拜屏蔽引入的最小散射角。)*

这个积分部分会引出 **库仑对数 (Coulomb Logarithm)** $\ln\Lambda$。

$$\int_{\theta_D}^{\pi} \cot(\theta/2) d\theta \approx 2\ln\left(\frac{1}{\sin(\theta_D/2)}\right) \approx 2\ln\left(\frac{2}{\theta_D}\right)$$

而 $\theta_D \approx 2\arcsin(b_0/\lambda_D)$ 或 $\theta_D \approx b_0/\lambda_D$ (小角度)，其中 $b_0 = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_r u^2}$ 是90度散射的瞄准距离，$\lambda_D$ 是德拜长度。

最终，$\ln\Lambda = \ln(\lambda_D/b_0)$。

4. **弛豫方程 (Relaxation Equation)**:
   上述复杂表达式最终可以简化为：

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\vec{V}}{\tau} = -\nu_c \vec{V}$$

   其中：
   - $\tau$: **弛豫时间 (Relaxation Time)** 或平均碰撞时间，表示平均速度衰减到 $1/e$ 所需时间。
   - $\nu_c = 1/\tau$: **有效碰撞频率 (Effective Collision Frequency)**。

## 总结

碰撞使粒子系的宏观有序运动（平均速度 $\vec{V}$）转化为微观无序的热运动，导致平均速度随时间指数衰减。库仑碰撞中，由于屏蔽效应，需要引入库仑对数修正。

# 8. 库仑碰撞频率与温度依赖性 (Coulomb Collision Frequency and Temperature Dependence)

这部分关注库仑碰撞频率的具体形式及其对温度的依赖。

1. **卢瑟福散射公式**: (同上)
   $\sigma(\theta) = \left(\frac{\alpha_0}{2m_r u^2 \sin^2(\theta/2)}\right)^2$
   $U(r) = \alpha_0/r, \alpha_0 = q_1 q_2/(4\pi\epsilon_0)$
2. **碰撞频率 $\nu$ (或 $\nu_c$)**:
   基于动量转移截面，库仑碰撞频率 (例如电子-离子碰撞频率 $\nu_{ei}$) 的一般形式为：

$$\nu \approx \sum_i \frac{4\pi n_i Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_r^2 u_i^3}$$

   如果考虑电子与一种离子碰撞，且 $m_e \ll m_i \Rightarrow m_r \approx m_e, u_i \approx v_{Te}$ (电子热速率)：

$$\nu_{ei} \propto \frac{n_i Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{m_e^2 v_{Te}^3}$$

   (黑板上的 $\nu = \sum_i (n_i \alpha_i^2/(m_{ri}^2 u_i^3))$ 是其简化形式，忽略了常数和 $\ln\Lambda$)

3. **粒子特征速度与温度的关系**:
   粒子的平均热运动动能与温度 $T$ 成正比：$\frac{1}{2}mu^2 \approx \frac{3}{2}k_BT$ (对于三维)。
   所以，特征速度 $u \propto \sqrt{T} = T^{1/2}$。
4. **碰撞频率的温度依赖性**:
   将 $u \propto T^{1/2}$ 代入 $\nu \propto u^{-3}$：

$$\nu \propto (T^{1/2})^{-3} = T^{-3/2}$$

   - **物理意义**：对于库仑碰撞，温度越高，粒子运动越快，相互作用时间越短，导致有效碰撞频率反而降低。这与硬球碰撞模型不同。

## 总结

库仑碰撞频率与温度的 $-3/2$ 次方成正比，这是等离子体物理中的一个重要特性。高温等离子体碰撞频率较低。

# 9. 电子-离子碰撞频率 (Electron-Ion Collision Frequency $\nu_{ei}$)

这部分给出了电子-离子碰撞频率的具体理论和实用计算公式。

1. **理论分析公式**:

$$\nu_{ei} = \frac{n_e Z^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2}(2k_BT_e)^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \approx \frac{n_e Z^2 e^4 \ln\Lambda}{3\cdot(2\pi)^{1/2}\epsilon_0^2 m_e^{1/2}(k_BT_e)^{3/2}}$$

   *(注：黑板上的 $3^{3/2}\cdot 2\pi$ 与标准教科书中的因子 $(4\pi\epsilon_0)^2 m_e^{1/2}(2k_BT_e)^{3/2}/(n_eZ^2e^4\ln\Lambda\cdot \mathrm{const})$ 可能因推导路径和常数合并略有不同，但 $n_e, Z, \ln\Lambda, m_e^{-1/2}, T_e^{-3/2}$ 的依赖关系是核心。这里 $T_e$ 是以开尔文为单位的温度， $k_B$ 是玻尔兹曼常数。如果 $T_e$ 是能量单位，则 $k_BT_e \to T_e$。)*
   黑板上的理论公式：

$$\nu_{ei} = \frac{n_e Z e^4 \ln\Lambda}{3^{3/2}\cdot 2\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}$$

   *(这里 $n_e$ 应该是 $n_i$ 离子密度，或者 $n_e$ 电子密度，且 $Z$ 应该是 $Z^2$。假设 $Z$ 指 $Z_{ion}$ 且公式中应为 $Z^2 n_e$。我们按黑板的字面公式写，但指出常见形式)。*

- **常见形式（Spitzer）**：

$$\nu_{ei} = \frac{n_e Z^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_{Te}^3} \times \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \quad \text{where } v_{Te} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$$

$$\nu_{ei} \approx 2.91 \times 10^{-12} \frac{n_e Z^2 \ln\Lambda}{T_e^{3/2}(\text{eV})} \quad [s^{-1}] \quad (n_e \text{ in } m^{-3})$$

2. **实用计算公式 (黑板)**:

$$\nu_{ei} = 6.3 \times 10^9 Z \left(\frac{T_e}{e}\right)^{-3/2} \left(\frac{n_e}{10^{20}}\right) \quad [s^{-1}]$$

   其中：
   - $Z$: 离子电荷数。
   - $T_e/e$: 电子温度，以电子伏特 (eV) 为单位 ($T_e$ 是能量单位，除以 $e$ 转换为数值上的eV)。
   - $n_e/10^{20}$: 电子数密度，以 $10^{20}m^{-3}$ 为单位归一化。
   - **说明**：该实用公式中的系数 $6.3 \times 10^9$ 通常已包含了一个典型的 $\ln\Lambda$ 值 (例如 $\ln\Lambda \approx 21.6$, 因为 $2.91 \times 10^8 \times 21.6 \approx 6.3 \times 10^9$。注意，常用 $2.91 \times 10^{-6} n_e Z \ln\Lambda T_e(eV)^{-3/2}$ (cgs单位) 或 $2.91 \times 10^{-12} n_e Z^2 \ln\Lambda T_e(eV)^{-3/2}$ (SI, $n_e$ in $m^{-3}$)。这里的 $Z$ 和 $Z^2$ 是需要注意的，黑板上的实用公式是 $Z$ 不是 $Z^2$。)

## 总结

电子-离子碰撞频率是等离子体中一个关键参数，影响其输运性质。它与电子密度、离子电荷数、库仑对数成正比，与电子温度的 $3/2$ 次方成反比。

# 10. 经典电导理论 (Drude Model of Electrical Conduction)

这部分描述了德鲁德模型如何解释材料的导电性。

1. **电子在外电场和碰撞阻力下的运动方程 (稳态)**:
   在外加电场 $\vec{E}$ 中，电子受电场力 $e\vec{E}$ 和平均阻力 $-m_e\vec{V}_e/\tau$。稳态时，平均加速度为零：

$$m_e \frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} = e\vec{E} - \frac{m_e \vec{V}_e}{\tau} = 0$$

其中：

- $m_e$: 电子质量。
- $\vec{V}_e$: 电子的平均漂移速度。
- $e$: 元电荷大小 (对电子而言为 $-e$，但这里 $e$ 是大小，力的方向由 $\vec{E}$ 决定，或者 $e = -|e|$ 写入)。这里假设 $e$ 是电荷本身。
- $\tau$: 平均自由时间或弛豫时间。

2. **电子平均漂移速度 $\vec{V}_e$**:
   从上式解得：

$$\vec{V}_e = \frac{e\tau}{m_e}\vec{E}$$

3. **电流密度 $\vec{j}$**:
   电流密度定义为 $\vec{j} = n_e e \vec{V}_e$。代入 $\vec{V}_e$：

$$\vec{j} = n_e e \left( \frac{e\tau}{m_e} \right) \vec{E} = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \vec{E}$$

   其中 $n_e$ 是自由电子的数密度。

4. **电导率 (Electrical Conductivity) $\sigma$**:
   宏观欧姆定律为 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$。比较上式可得：

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$$

   用碰撞频率 $\nu = 1/\tau$ 代替 $\tau$：

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}$$

5. **电阻率 (Electrical Resistivity) $\eta$**:
   电阻率是电导率的倒数 $\eta = 1/\sigma$：

$$\eta = \frac{m_e \nu}{n_e e^2} = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau}$$

   (被框起来的公式)

## 总结

德鲁德模型通过考虑电子在电场驱动下的加速和与晶格的碰撞弛豫，给出了电导率和电阻率的微观表达式。

# 11. 等离子体电阻率 (Spitzer Resistivity)

这部分给出等离子体电阻率（特别是斯皮策电阻率）的表达式。

1. **基于德鲁德模型的电阻率 $\eta$**:

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}$$

   其中 $\nu_{ei}$ 是电子-离子碰撞频率。
2. **详细理论表达式 (斯皮策电阻率核心)**:
   代入 $\nu_{ei}$ 的表达式（如前述 $\nu_{ei} \propto n_i Z^2 e^4 \ln\Lambda/(m_e^{1/2} T_e^{3/2})$，并注意 $n_i = n_e/Z$ 对于单一离子种类完全电离等离子体）：

$$\eta \approx \frac{m_e}{n_e e^2}\left(\frac{n_e Z e^4 \ln\Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_e^{1/2}(k_B T_e)^{3/2}\cdot \mathrm{const}}\right) = \frac{Z e^2 m_e^{1/2}\ln\Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T_e)^{3/2}\cdot \mathrm{const}'}$$

   黑板上的理论形式：

$$\eta = \frac{Z^2 e^4 m_e^{1/2}\ln\Lambda}{16\pi^2 \epsilon_0^2 T_e^{3/2}}$$

   *(这里的 $Z^2$ 和 $16\pi^2$ 以及分母中的 $T_e$ (假设为能量单位) 是其特定形式。更常见的Spitzer电阻率平行于磁场分量：$\eta_{\parallel} \approx \frac{\pi Z e^2 m_e^{1/2}\ln\Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2(2k_B T_e)^{3/2}} \cdot \gamma_E(Z)$，其中 $\gamma_E(Z)$ 是一个 $Z$ 相关的因子，对于 $Z=1$ , $\gamma_E(1) \approx 0.513$。)*
   **核心依赖关系**: $\eta \propto Z \ln\Lambda T_e^{-3/2}$ (注意，如果 $Z$ 在 $\nu_{ei}$ 中是 $Z^2$，而 $n_i = n_e/Z$, 则 $\nu_{ei} \propto Z n_e$, 故 $\eta \propto Z$)
   **黑板给出的 $\ln\Lambda$ 范围**: $20 \sim 30$ (适用于高温、低密度等离子体)。
3. **实用计算公式 (黑板)**:

$$
\eta = 5.23 \times 10^{-5} Z \ln\Lambda \left(\frac{T_e}{e}\right)^{-3/2} \quad [\Omega \cdot m]
$$

其中:

- $Z$: 离子平均电荷数。
- $\ln\Lambda$: 库仑对数。
- $T_e/e$: 电子温度，以电子伏特 (eV) 为单位。
- **对比**：Spitzer的实用公式 (Z=1, $\ln\Lambda = 10$): $\eta \approx 5.2 \times 10^{-5}/T_e(eV)^{3/2}[\Omega \cdot m]$。如果包含 $Z\ln\Lambda$: $\eta \approx \frac{5.2\times10^{-5} Z \ln\Lambda/10}{T_e(eV)^{3/2}}$。黑板公式与此形式一致。

## 总结

斯皮策电阻率描述了完全电离等离子体的电阻率。其显著特点是与电子温度的 $-3/2$ 次方成正比，即温度越高，电阻率越低，这与金属导体行为相反。

# 12. 量子力学与经典力学基础 (Foundations of Quantum and Classical Mechanics)

这部分列出了量子力学和经典拉格朗日/哈密顿力学的核心方程。

1. **含时薛定谔方程 (Time-dependent Schrödinger Equation)**:

$$
i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi
$$

   其中:

   - $i$: 虚数单位。
   - $\hbar = h/(2\pi)$: 约化普朗克常数。
   - $\Psi(\vec{r}, t)$: 波函数，描述量子系统的状态。
   - $\hat{H}$: 哈密顿算符，对应系统的总能量。
   - **意义**: 量子力学的基本动力学方程，描述波函数随时间的演化。

2. **拉格朗日量 (Lagrangian) $L$**:

$$
L = T - U
$$

其中 $T$ 是总动能，$U$ 是总势能。

3. **欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange Equation)**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

其中 $q$ 是广义坐标，$\dot{q}$ 是广义速度。

4. **正则动量 (Canonical Momentum) $P$**:

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

(正準運動量 - Japanese for Canonical Momentum)

5. **哈密顿量 (Hamiltonian) $H$ (部分可见)**:
经典哈密顿量由拉格朗日量通过勒让德变换得到：

$$H(q, P, t) = \sum_k P_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)$$

在保守系统中，$H$ 通常等于系统的总能量 $T + U$。量子力学中的哈密顿算符 $\hat{H}$ 是经典哈密顿量 $H$ 的量子化形式。

## 总结

展示了从经典力学的高级表述（拉格朗日和哈密顿力学）到量子力学核心方程（薛定谔方程）的理论框架和联系。正则动量和哈密顿量是连接经典与量子的桥梁。