高级数学考试备考：五阶段习题集锦

简短前言

目的: 本指南旨在根据您提供的详细大纲，为您提供一套结构化的练习题及解题方案，助力您成功通过高级数学考试。我们将重点关注大纲中提及的各个知识点，特别是注明的“**考题重点**”。

结构: 本指南分为五个逻辑递进的学习课程，每个课程聚焦于大纲中的特定主题。每个主题下都包含若干精选的练习题，并附有详尽的解答步骤和思路分析。

学习建议: 建议您在学习每个知识点后，首先尝试独立完成相关习题，然后再对照答案和解析，以检验学习效果并弥补不足。对于标记为“**考题重点**”的部分，务必投入更多时间和精力。

表格：课程结构总览

此表格为学生提供了一个清晰的学习路径图，将庞杂的复习内容分解为五个可管理的部分。它直观地展示了每个阶段的学习重点，特别是用户强调的“**考题重点**”，有助于学生合理分配复习时间和精力，确保关键知识点得到充分的练习。这种结构化的呈现有助于减轻学生的焦虑感，将复习任务分解为更小的、可实现的目标。

课程编号	**主要内容**	**用户指定重点**
1	线性代数 (Linear Algebra)	全部子专题
2	向量分析 (Vector Calculus)	全部子专题, 特别是**面积分 (考题1重点)**, **向量恒等式与张量表示 (考题2重点)**
3	常微分方程 (Ordinary Differential Equations)	全部子专题, 特别是**李群对称性方法 (考题3,4,5重点)**, 一阶与高阶方程
4	傅里叶分析与偏微分方程初步 (Fourier Analysis & Intro to PDEs)	傅里叶分析全部子专题, PDE基本概念与分离变量法
5	复变函数 (Complex Analysis)	全部子专题, 特别是**泰勒与洛朗级数 (考题6基础)**, **帕德近似 (考题6重点)**

第一讲：线性代数基础 (Course 1: Linear Algebra Foundations)

引言: 线性代数是现代数学的基石之一，它不仅在数学内部扮演着核心角色，还在物理学、工程学、计算机科学、经济学等众多应用领域中发挥着不可或缺的作用。线性代数的核心思想是将复杂问题通过向量和矩阵的语言进行抽象和简化，从而利用代数工具进行系统性的分析和求解。本讲将通过一系列精心挑选的典型例题，帮助学生巩固和深化对线性代数基本概念、核心运算以及重要解题方法的理解和掌握。掌握这些基础知识，不仅是应对当前考试的必要条件，更是为后续学习更高级的数学工具和应用理论打下坚实的基础。线性代数的各个子主题，如矩阵运算、行列式理论、线性方程组的求解、以及特征值与矩阵对角化等，并非孤立存在，而是相互关联、层层递进的有机整体。例如，行列式的性质直接关系到线性方程组解的判定，而特征值和特征向量的概念则是理解矩阵对角化及其在动力系统、数据分析等高级应用中的关键。因此，在复习过程中，不仅要熟练掌握每一个知识点的计算技巧，更要深刻理解它们之间的内在逻辑联系和数学本质。

1.1 行列与向量基础 (Matrices and Vectors Basics)

矩阵的定义与表示 (Definition and Representation of Matrices):

矩阵是一个按长方阵列排列的复数或实数集合。一个 $m \times n$ 矩阵拥有 m 行和 n 列，其中位于第 i 行第 j 列的元素通常表示为 a_{ij} 。理解矩阵的维度和元素的正确表示是进行后续所有矩阵运算和概念学习的出发点。

习题示例:

给定矩阵（行列） $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，请指出矩阵 A 的**行数**（行数）、**列数**（列数），并写出**元素**（要素） a_{21} 。
答案: 矩阵 A 有2行3列。元素 $a_{21} = 4$。

写出矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的所有**行向量**（行ベクトル）和**列向量**（列ベクトル）。
答案: 行向量为 $[1, 0, 7]$ 和 $[-2, 5, 3]$。列向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$。

向量的定义与表示 (Definition and Representation of Vectors):

向量可以看作是只有一行或只有一列的特殊矩阵 。行向量是一个 $1 \times n$ 矩阵，列向量是一个 $m \times 1$ 矩阵。向量不仅

是代数对象，也具有重要的几何意义，可以表示空间中的点、位移或力。

习题示例:

假设一个 2×2 的黑白像素**图像**（画像），其中左上角**像素值**（画素値）为0.8（接近白色），右上角为0.1（接近黑色），左下角为0.5（灰色），右下角为0.9。请用一个**列向量**（列ベクトル）表示这个**图像**（画像）（按行读取**像素**（画素））。

答案: 图像可以表示为列向量 $v = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.9 \end{pmatrix}$ 。这个例子展示了如何将实际问题中的数据结构化为向量形式，这在线性代数的应用中非常常见。

矩阵的基本运算 (Basic Matrix Operations):

矩阵的加法、减法定义为对应元素的加减，前提是参与运算的矩阵具有相同的维度。数乘是指一个标量乘以矩阵的每一个元素。矩阵的转置是将矩阵的行和列互换得到的新矩阵，记作 A^T 或 A' 。这些基本运算是构建更复杂矩阵理论和应用的基础。

习题示例:

给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$，**计算**（計算しなさい） $A + B, 2A, A^T$ (Aの**转置**（転置））。

答案:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+5 \\ 3+(-1) & 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$
$$2A = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

设**列向量**（列ベクトル） $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。定义矩阵 $P = \frac{xx^T}{x^Tx}$ 。**计算**（計算しなさい）矩阵 P。

答案:

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$xx^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$x^Tx = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\times 1 + 2\times 2 = 1 + 4 = 5$$

$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$。这个矩阵 P 是一个投影矩阵，它将任意向量投影到由向量 x 张成的子空间上。

向量的基本运算 (Basic Vector Operations):

向量的加法、减法和数乘运算规则与矩阵类似。点积（内积）是两个向量对应分量乘积之和，结果是一个标量，其几何意义与向量间的夹角和投影有关。对于三维向量，叉积（外积）的结果是一个同时垂直于原两个向量的新向量，其大小与原向量构成的平行四边形面积相关。

习题示例:

给定**向量**（ベクトル） $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。**计算**（計算しなさい）它们的**点积**（点乘積/内積） $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 和**叉积**（外積） $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$。

答案:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (0)(1) + (-2)(1) = 3 + 0 - 2 = 1$。
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (0)(1) - (-2)(1) \\ (-2)(3) - (1)(1) \\ (1)(1) - (0)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$。
点积和叉积是向量分析和物理应用中的基本工具，例如计算功、力矩等。

特殊矩阵 (Special Matrices):

特殊矩阵如零矩阵（所有元素为0）、单位矩阵（主对角线元素为1，其余为0）、对角矩阵（非对角线元素为0）、对称矩阵（$A = A^T$）、反对称矩阵（$A = -A^T$）和三角矩阵（上三角或下三角）等，因其独特的结构和性质，在理论推导和实际计算中扮演重要角色 。例如，单位矩阵在矩阵乘法中类似于数字1，对称矩阵在谱理论和二次型中有特殊地位。

习题示例:

判断矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 是否为**对称矩阵**（対称行列）。
答案: 计算 $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 。因为 $C = C^T$，所以矩阵 C 是对称矩阵。

如果一个 $n \times n$ 实矩阵 A 满足 $A^T = -A$，则称其为**反对称矩阵**（反対称行列/歪対称行列）。**证明**（証明しなさい）：对于任意实**列向量**（実数列ベクトル） $x \in \mathbb{R}^n$ ，都有 $x^T A x = 0$。

证明思路: $x^T A x$ 是一个 1×1 矩阵，即一个标量。因此，它等于其自身的转置：$x^T A x = (x^T A x)^T =$

$x^T A^T (x^T)^T = x^T A^T x$。

因为 A 是反对称矩阵，所以 $A^T = -A$。代入上式得到 $x^T Ax = x^T(-A)x = -x^T Ax$。

因此，$2x^T Ax = 0$，即 $x^T Ax = 0$。这一性质在研究二次型和李代数等领域有重要应用。

1.2 行列式 (Determinants)

行列式是与方阵相关联的一个标量值，它包含了矩阵的重要信息，例如矩阵是否可逆、线性变换引起的面积或体积变化因子等。

行列式的定义与性质 (Definition and Properties of Determinants):

对于一个 2×2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其行列式定义为 $\det(A) = ad - bc$ 。对于 3×3 矩阵，计算稍复杂，但有明确的代数表达式 。行列式具有许多重要性质，如 $\det(A^T) = \det(A)$，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$，某一行（列）乘以常数 k 则行列式值也乘以 k，交换两行（列）则行列式变号，若有两行（列）成比例则行列式为零等。这些性质是计算和化简行列式的关键。

习题示例:

计算行列式（行列式を計算しなさい）$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$。

答案: $(-5)(2) - (3)(4) = -10 - 12 = -22$。

计算行列式（行列式を計算しなさい）$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$。

答案: $3((-1)(-3) - (-2)(-2)) - (-2)((3)(-3) - (-2)(3)) + 1((3)(-2) - (-1)(3)) = 3(3-4) + 2(-9+6) + 1(-6+3) = 3(-1) + 2(-3) - 3 = -3 - 6 - 3 = -12$。

(Note: The original matrix was slightly different in arrangement, I've used the one implied by the calculation steps. The original text had columns as (3,3,3), (-2,-1,-2), (1,-2,-3). If that was intended, the calculation would be different. I'll assume the calculation shown defines the intended matrix.)

Let's re-verify based on the text:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

Expansion along first row:

$$3\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & -3\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$$

$= 3((-1)(-3) - (-2)(-2)) + 2((3)(-3) - (-2)(3)) + 1((3)(-2) - (-1)(3))$

$= 3(3-4) + 2(-9-(-6)) + 1(-6-(-3))$

$= 3(-1) + 2(-9+6) + 1(-6+3)$

$= -3 + 2(-3) + 1(-3) = -3 - 6 - 3 = -12$. This matches.

行列式的计算方法 (Calculation Methods for Determinants):

计算高阶行列式的主要方法是按行或按列展开，这依赖于余子式和代数余子式的概念。另一种有效方法是利用行列式的性质，通过行（列）变换将行列式化为上三角或下三角形式，此时行列式的值即为主对角线元素的乘积。

习题示例:

计算行列式（行列式を計算しなさい） $\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & x & y\end{vmatrix}$。

答案: 按第一列展开，行列式值为 $0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} = 0$。或者，由于第一列全为零，根据行列式性质，其值为0。

计算行列式（行列式を計算しなさい） $D = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$。

(Note: The original matrix had 2,3,4 in the first column, 0s above diagonal. The description implies it's upper triangular. I'll use the provided numbers but arrange them to be upper triangular for consistency with the answer.)

$$D = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

答案: 这是一个上三角矩阵，其行列式等于主对角线元素的乘积：$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$。

(Correcting based on what was written:

$D = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 3 & 0\\ 4 & 6 & 7 & 4\end{vmatrix}$*. This is a lower triangular matrix.*

Its determinant is also the product of diagonal elements: $D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$*. The answer is the same.)*

余子式与代数余子式 (Minors and Cofactors):

方阵中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的低一阶子矩阵的行列式。代数余子式 C_{ij} 定义为 $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 。行列式可以按任意一行或一列展开，例如按第 i 行展开为 $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ 。

习题示例: 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ，求**元素**（要素） a_{11} 的**余子式**（小行列式） M_{11} 和**代数余子式**（余因子） C_{11} 。

答案:

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-3) - (-2)(-2) = 3 - 4 = -1$。

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times (-1) = -1$。

在计算行列式时，我们已经隐式地使用了这个概念：$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ 。

1.3 线性方程组 (Systems of Linear Equations)

线性方程组的求解是线性代数的核心问题之一。高斯消元法提供了一种系统性的求解手段。

高斯消元法 (Gaussian Elimination):

高斯消元法通过一系列初等行变换（交换两行、某行乘以非零常数、某行乘以常数加到另一行）将线性方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵，进而化为行最简形矩阵，从而求得方程组的解 。

习题示例: 用**高斯消元法**（ガウスの消去法）**求解线性方程组**（連立一次方程式を解きなさい）:

$x + y + z = 6$

$x + 2y + 3z = 14$

$x + 4y + 7z = 30$

解答过程:

增广矩阵为 $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{array} \right)$。

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 24 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

这对应方程组:

$x + y + z = 6$

$y + 2z = 8$

$0z = 0$

由于 $\text{rank}(A) = \text{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2 < \text{未知数个数}(3)$，方程组有无穷多解。

令 $z = t$ (自由变量)。

由第二式，$y = 8 - 2z = 8 - 2t$。

代入第一式，$x = 6 - y - z = 6 - (8 - 2t) - t = 6 - 8 + 2t - t = t - 2$。

所以通解为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

解的结构 (Structure of Solutions):

对于线性方程组 $Ax = b$:

- 若 $\text{rank}(A) < \text{rank}([A|b])$，则方程组无解。
- 若 $\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = n$ (未知数个数)，则方程组有唯一解。
- 若 $\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = r < n$，则方程组有无穷多解，且通解包含 $n - r$ 个自由变量。

  齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解构成一个向量空间，称为 A 的零空间或核空间。其通解可以表示为基础解系的线性组合。非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解等于其任意一个特解加上对应的齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解 。

习题示例: 已知**线性方程组**（連立一次方程式） $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$。判断其**解的情况**（解の状況/解の種類），并求其**通解**（一般解）。

解答过程:

增广矩阵为 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$。

$R_2 \to R_2 - 2R_1$:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$。

$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = 1 < \text{未知数个数}(3)$。方程组有无穷多解。

令 $x_2 = s, x_3 = t$ (自由变量)。

由第一式，$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - s + t$。

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

其中 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是一个特解，而 $s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是对应齐次方程组的通解。

1.4 矩阵的对角化 (Matrix Diagonalization)

矩阵的对角化是将一个方阵变换为一个对角矩阵的过程，这在简化矩阵运算（如计算矩阵的幂）和理解线性变换的几何性质方面非常重要。

特征值与特征向量的计算与性质 (Calculation and Properties of Eigenvalues and Eigenvectors):

对于 $n \times n$ 矩阵 A，若存在非零向量 x 和标量 λ 使得 $Ax = \lambda x$，则 λ 称为 A 的一个特征值，x 称为对应于 λ 的特征向量。特征值是特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 的根。特征向量是齐次线性方程组 $(A - \lambda I)x = 0$ 的非零解 。特征值的和等于矩阵的迹 (trace)，特征值的积等于矩阵的行列式 。

习题示例: 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的**特征值**（固有值）和**特征向量**（固有ベクトル）。

(Note: Original matrix text was (3 1 \ 5 -1). I'll use the (3 5 \ 1 -1) in my calculation, which makes the quadratic λ^2 - 2λ - 8 = 0.)

解答过程:

特征方程为 $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - (5)(1) = -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 - 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$。

解得 $(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$，所以特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$。

对于 $\lambda_1 = 4$:

$(A - 4I)x = \begin{pmatrix} 3-4 & 5 \\ 1 & -1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

即 $-x_1+5x_2=0$。令 $x_2=t$，则 $x_1=5t$。特征向量为 $x_1=t\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$。取 $x_1=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$。

对于 $\lambda_2=-2$:

$(A-(-2)I)x=\begin{pmatrix}3-(-2) & 5\\ 1 & -1-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$。

即 $x_1+x_2=0$。令 $x_2=s$，则 $x_1=-s$。特征向量为 $x_2=s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, s\neq 0$。取 $x_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。

矩阵可对角化的条件 (Conditions for Matrix Diagonalizability):

一个 $n\times n$ 矩阵 A 可对角化的充要条件是它拥有 n 个线性无关的特征向量。如果矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则它一定可以对角化。如果存在重特征值，则需要检查对应于每个特征值的线性无关特征向量的个数（几何重数）是否等于该特征值的代数重数（特征方程中根的重数）。

习题示例: 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 是否**可对角化**（对角化可能）。

(Note: Original matrix (1 0 \ 1 1). I'll use the text's (1 1 \ 0 1).)

解答过程:

特征方程为 $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0$。

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$ (代数重数为2)。

对于 $\lambda=1$:

$(A-I)x=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$。

即 $x_2=0$。令 $x_1=t$，则特征向量为 $x=t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, t\neq 0$。

只有一个线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$（几何重数为1），小于代数重数2。因此，矩阵 A 不可对角化。

对角化过程 (Diagonalization Process):

如果 $n\times n$ 矩阵 A 可对角化，则存在一个可逆矩阵 P（其列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量）和一个对角矩阵 D（其对角线元素是对应的特征值），使得 $P^{-1}AP=D$ 。

习题示例: **对角化**（対角化しなさい）矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$。

解答过程:

特征方程为 $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$。

特征值为 $\lambda_1=3, \lambda_2=1$。

对于 $\lambda_1 = 3$:

$(A-3I)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。得 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

对于 $\lambda_2 = 1$:

$(A-I)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。得 $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (或 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)。

构造矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。则 $P^{-1} = \frac{1}{-1-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$。

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

对角矩阵 D 的对角元正是特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$。

1.5 矩阵的应用 (Applications of Matrices)

矩阵不仅是理论工具，在物理、工程、计算机图形学等领域有广泛应用。例如，坐标变换可以用矩阵乘法表示，二次型可以用对称矩阵表示并用于分析几何形状或优化问题。

坐标变换 (Coordinate Transformation):

线性变换可以将一个坐标系中的向量映射到另一个坐标系，或者在同一坐标系内进行旋转、缩放、错切等操作。这些变换可以用矩阵乘法 $T(x) = Ax$ 来表示。例如， 中提到线性变换可以分解为旋转 (U)、拉伸和翻转 (D)、以及另一次旋转 (V)，即 $A = UDV$（奇异值分解的形式）。

习题示例: 设二维平面上的一个点 (x, y) 经过如下**变换**（变换）：首先绕原点逆时针**旋转**（回転） 45° ，然后在新的 x' 方向上**拉伸**（拡大） $\sqrt{2}$ 倍，最后再绕原点逆时针**旋转**（回転） 90° 。求表示这一系列**复合变换**（合成変換）的矩阵 A。

解答提示:

旋转 45° 的矩阵 $U = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$。

在 x' 方向拉伸 $\sqrt{2}$ 倍的矩阵（假设 x' 对应原 x 轴方向， y' 对应原 y 轴方向 after rotation, this means stretching along the new axes produced by U. If point (x_0, y_0) is transformed to $(x', y') = U(x_0, y_0)^T$. Then stretch x' by $\sqrt{2}$. This is $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ applied in the *new* coordinate system. So points p become $V_{rot}DUp$.)

$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

旋转 90° 的矩阵 $V_{rot} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

如果变换顺序是先 U (旋转到变换坐标系)，然后 D (在变换坐标系下拉伸)，然后再 V_{rot} (在当前坐标系下旋转)，则复合变换矩阵 $A = V_{rot}DU$。

$A = V_{rot}DU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。

(The original text had a different U (sin/cos swapped signs), and a different V_{rot} (signs of sin terms). It also computes $A = UDV_{rot}$ which is a different order of operations and results. I have followed the sequence described: Rotate1(U), Scale(D in new coords), Rotate2(V_{rot} in current coords). This means the transformation applied to a vector p is $Ap = V_{rot}(D(Up))$. Thus $A = V_{rot}DU$. The result from the text `( -√2/2  -1 \\ √2/2  -1 )` *implies a different interpretation, possibly $A = UDV_{rot}$ or different matrices. I will stick to my derived matrix based on the description of operations.)*

Original solution used $A = UDV_{rot}$:

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}$.

The wording "旋转45，然后在新的x'方向上拉伸，最后再绕原点逆时针旋转90" implies $A = R_{90}SR_{45}$. So $Ap = R_{90}S(R_{45}p)$.

My U was rotation, D was scaling, V_{rot} was second rotation. So $A = V_{rot}DU$. My initial U was $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ which is standard for counter-clockwise rotation of point coordinates. The text used $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ for U, which is rotation of basis vectors or clockwise rotation of points. And $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ for V_{rot} which is clockwise 90°. Let's use standard counter-clockwise rotation matrices for points for clarity and recalculate the text's $A = UDV_{rot}$ path with their matrices.

Their $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ (Rotation by -45° or 315° for point (x, y))
Their $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Their $V_{rot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Rotation by -90° or 270°)
$A = UDV_{rot} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 \\ -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}$.

This still doesn't match their result. I will use standard counter-clockwise matrices and the $A = R_{90}SR_{45}$ interpretation.

$R_{45} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Stretching in the transformed x' direction means we apply S to coordinates in the R_{45} frame. So $p_{new} = R_{90}SR_{45}p_0$).

$R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A = R_{90}SR_{45} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. I will use this result.

二次型 (Quadratic Forms):

一个 n 个变量的二次型可以表示为 $x^T Ax$，其中 x 是变量列向量，A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵。通过对角化矩阵 A (即找到正交矩阵 P 使得 $P^T AP = D$ 为对角阵)，可以将二次型化为标准型（只含平方项），从而分析其几何性质（如椭圆、双曲线）或正定性。

习题示例: 将**二次型**（二次形式） $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ 写成矩阵形式 $x^T Ax$，并通过**正交变换**（直交变换）化为**标准型**（標準形）。

解答过程:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (与前面已对角化的矩阵相同)。

特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$。对应的单位特征向量为 $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

令 $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$。设 $x = Py$，其中 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 是新坐标。

则 $Q = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T (P^T AP)y = y^T Dy$。

由于 P 的列向量是单位正交的，所以 P 是正交矩阵，$P^T = P^{-1}$ 。

$D = P^T AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

所以二次型的标准型为 $3y_1^2 + y_2^2$ 。这是一个椭圆。

第二讲：向量分析精通 (Course 2: Mastering Vector Calculus)

引言: 向量分析是研究定义在多维空间中的标量场和向量场的微分和积分的数学分支。它在物理学（如电磁学、流体力学、热力学）和工程学的各个分支中都有着至关重要的应用，用于描述和分析各种场现象。本讲将系统地介绍场论的基本概念，深入探讨梯度、散度、旋度等重要的向量微分算子及其物理几何意义，全面学习线积分、面积分（特别是作为**考题1重点**的通量计算）和体积分的计算方法，并重点掌握格林公式、高斯散度定理和斯托克斯定理这三大积分定理及其应用。特别地，对于**考题2所强调的利用张量表示法证明向量恒等式**，本讲也将提供专门的练习和讲解。理解向量分析的工具和定理，能够帮助我们从局部性质（如某一点的场强变化率）推断场的整体行为（如通过一个曲面的总流量），反之亦然。

2.1 场论基础 (Field Theory Basics)

场是物理学和数学中的一个基本概念，它描述了空间中每一点所具有的某种物理性质。

标量场 (Scalar Fields):

标量场是指空间中的每一点都对应一个标量值的函数。例如，温度场 $T(x, y, z)$ 或势能场 $V(x, y, z)$。标量场中所有具有相同标量值的点构成的曲面称为等值面（或等势面、等温面等）。

习题示例: 描述标量场 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的等值面。

答案: 等值面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = C$ (常数)。当 $C > 0$ 时，等值面是以原点为球心、半径为 $\sqrt{C}$ 的球面。当 $C = 0$ 时，等值面是原点。当 $C < 0$ 时，不存在等值面。

向量场 (Vector Fields):

向量场是指空间中的每一点都对应一个向量值的函数。例如，力场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 或速度场 $\mathbf{v}(x, y, z)$。向量场通常用有向线段（箭头）来可视化，箭头的方向表示该点向量的方向，箭头的长度表示向量的大小 。

习题示例: (Exercise 13 类型) 匹配向量场 $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ 与其对应的图形。

分析与解答: 该向量场的 x 分量为 x， y 分量为 $-y$。

- 在第一象限 ($x > 0, y > 0$)，向量指向右下方。

- 在第二象限 ($x < 0, y > 0$)，向量指向左下方。
- 在第三象限 ($x < 0, y < 0$)，向量指向左上方。
- 在第四象限 ($x > 0, y < 0$)，向量指向右上方。
- 沿 x 轴 ($y = 0$)，向量为 $x\mathbf{i}$，指向 x 轴正向（若$x > 0$）或负向（若$x < 0$）。
- 沿 y 轴 ($x = 0$)，向量为 $-y\mathbf{j}$，指向 y 轴负向（若$y > 0$）或正向（若$y < 0$）。

  向量的长度为 $\sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$，离原点越远，向量越长。

  这种向量场通常对应于双曲流线。学生应根据这些特征在提供的图形选项中进行选择。

2.2 向量微分 (Vector Differentiation)

向量微分算子是研究场性质的重要工具。

梯度 (Gradient) 及其几何意义:

标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度是一个向量场，记作 ∇f 或 $\mathrm{grad} f$，定义为 $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$。梯度向量指向标量场 f 在该点增加最快的方向，其大小（模）为该方向上的最大变化率。梯度向量总是垂直于该点所在的等值面。

习题示例: 给定标量场 $f(x, y) = x^2 + y^2$。求其在点 $P(1, 2)$ 处的梯度，并指出其方向和大小。

解答: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$。

在点 $P(1, 2)$ 处，$\nabla f(1, 2) = 2(1)\mathbf{i} + 2(2)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$。

方向为向量 $(2, 4)$ 的方向。大小为 $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$。

这表示在点 $(1, 2)$ 处，函数 f 沿向量 $(2, 4)$ 方向增加最快，最大变化率为 $2\sqrt{5}$。

散度 (Divergence) 及其物理意义:

向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ 的散度是一个标量场，记作 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 或 $\mathrm{div}\mathbf{F}$，定义为 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$。散度衡量了向量场在某一点的“源”或“汇”的强度。若散度为正，表示该点是一个源，有通量向外流出；若散度为负，表示该点是一个汇，有通量向内流入；若散度为零，则称该向量场是无源场或螺线管场（solenoidal field）。

习题示例: 计算向量场 $\mathbf{f} = 3x^2\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j} + xyz^3\mathbf{k}$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的散度，并解释其物理意义。

解答: $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^3) = 6x + 10xy + 3xyz^2$。

在点 $(1,2,3)$ 处，$\nabla\cdot\mathbf{f}=6(1)+10(1)(2)+3(1)(2)(3)^2=6+20+54=80$。

由于散度值为正 ($80>0$)，表明点 $(1,2,3)$ 是该向量场的一个源点，即在该点附近有净的“流出”。

旋度 (Curl) 及其物理意义:

向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ 的旋度是一个向量场，记作 $\nabla\times\mathbf{F}$ 或 $\mathrm{curl}\mathbf{F}$，定义为

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\text{。}$$

旋度描述了向量场在某一点的涡旋或环绕特性。旋度向量的方向是旋转轴的方向（根据右手定则），其大小表示旋转的快慢。若旋度为零向量，则称该向量场是无旋场或保守场（irrotational field）。

习题示例: 计算向量场 $\mathbf{f}(x,y,z)=2xy\mathbf{i}+(x^2+z^2)\mathbf{j}+2zy\mathbf{k}$ 的旋度，并判断其是否为无旋场。

解答:

$$\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2+z^2 & 2zy\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial(2zy)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2+z^2)}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial(2zy)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy)}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial(x^2+z^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy)}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$=(2z-2z)\mathbf{i}-(0-0)\mathbf{j}+(2x-2x)\mathbf{k}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}=\mathbf{0}\text{。}$$

由于旋度为零向量，该向量场是无旋场。

拉普拉斯算子 (Laplacian):

标量场 $f(x,y,z)$ 的拉普拉斯算子定义为梯度的散度，记作 $\nabla^2 f$ 或 Δf，即 $\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ 。满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 f=0$ 的函数称为调和函数。

习题示例: 计算标量场 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的拉普拉斯算子。

解答:

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$。

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$。

$\frac{\partial f}{\partial z}=2z,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2$。

$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2+2+2=6$。

方向导数 (Directional Derivative):

标量场 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 沿单位向量 $\mathbf{u}$ 方向的方向导数定义为 $D_{\mathbf{u}}f(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\mathbf{u}$ 。它表示函数 f 在点 P_0 处沿 $\mathbf{u}$ 方向的变化率。

习题示例: 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿向量 $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 方向的方向导数。

解答:

首先计算梯度 $\nabla f=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$。

在点 $P(1,1,1)$ 处，$\nabla f(1,1,1)=(1)(1)\mathbf{i}+(1)(1)\mathbf{j}+(1)(1)\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$。

向量 $\mathbf{v}$ 的单位向量 $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$。

方向导数 $D_{\mathbf{u}}f(1,1,1)=\nabla f(1,1,1)\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=\frac{1}{3}(1\cdot1+1\cdot2+1\cdot2)=\frac{1}{3}(1+2+2)=\frac{5}{3}$ 。

2.3 积分运算 (Integral Operations) (考题1重点在面积分)

积分运算是向量分析中用于累积场量的重要工具。

线积分 (Line Integrals):

- **第一类线积分 (对弧长的积分):** $\int_C f(x,y,z)ds$ 计算标量函数 f 沿曲线 C 的积分，其中 ds 是弧长微元。若曲线 C 的参数方程为 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),a\le t\le b$，则 $ds=|\mathbf{r}'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$，积分为 $\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$ 。

  习题示例: (问题1) 计算 $\int_C(x-y)ds$，其中 C 是从点 $(1,3)$ 到 $(5,-2)$ 的直线段。

  解答: 参数化直线段 $C:\mathbf{r}(t)=(1-t)(1,3)+t(5,-2)=(1+4t,3-5t),0\le t\le 1$。

  $\mathbf{r}'(t)=(4,-5)$，所以 $|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ 。

  $x(t)-y(t)=(1+4t)-(3-5t)=-2+9t$。

  $\int_C(x-y)ds=\int_0^1(-2+9t)\sqrt{41}dt=\sqrt{41}\left[-2t+\frac{9}{2}t^2\right]_0^1=\sqrt{41}(-2+\frac{9}{2})=\frac{5\sqrt{41}}{2}$ 。

- **第二类线积分 (对坐标的积分):** $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$ 计算向量场 $\mathbf{F}$ 沿曲线 C 的功。若 $\mathbf{r}(t)$ 为曲线参数方程，则 $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t)dt$，积分为 $\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$ 。

  习题示例: 计算 $\int_C ydx+(x+2y)dy$，其中 C 是由 C_1: 从 $(0,1)$ 到 $(1,1)$ 的直线段，和 C_2: 从 $(1,1)$ 到 $(1,0)$ 的直线段组成的路径。

解答:

对于 C_1: $y=1, dy=0, 0\le x\le 1$。$\int_{C_1} ydx+(x+2y)dy = \int_0^1 1dx+(x+2)0 = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$

。

对于 C_2: $x=1, dx=0, y$ 从 1 到 0。$\int_{C_2} ydx+(x+2y)dy = \int_1^0 y\cdot 0+(1+2y)dy = \int_1^0 (1+2y)dy = [y+y^2]_1^0 = (0+0)-(1+1) = -2$。

总积分为 $1+(-2)=-1$。

面积分 (Surface Integrals): (考题1重点)

面积分是在曲面上进行的积分。

- **第一类面积分 (对面积元的积分):** $\iint_S f(x,y,z)dS$ 计算标量函数 f 在曲面 S 上的积分。若曲面 S 由参数方程 $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 给出，$(u,v)\in D$，则面积微元 $dS=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv$，积分为 $\iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv$ 。

  习题示例: (题目描述为"S is triangle with vertices (1,0,0), (0,2,0), (0,0,2)") 计算 $\iint_S xydS$，其中 S 是由点 $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$ 确定的三角形平面。

  解答思路:

  i. 求出三角形所在平面的方程。法向量 $\mathbf{n}=\vec{A}B\times\vec{A}C$ (其中 A,B,C为顶点)。设平面方程为 $ax+by+cz=d$。

     $A=(1,0,0), B=(0,2,0), C=(0,0,2)$. $\vec{A}B=(-1,2,0), \vec{A}C=(-1,0,2)$.

     $\vec{A}B\times\vec{A}C=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=(4-0)\mathbf{i}-(-2-0)\mathbf{j}+(0-(-2))\mathbf{k}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

     Plane equation: $4(x-1)+2(y-0)+2(z-0)=0 \Rightarrow 4x-4+2y+2z=0 \Rightarrow 2x+y+z=2$.

     So $z=g(x,y)=2-2x-y$.

  ii. 将曲面参数化，例如，如果平面方程为 $z=g(x,y)$，则 $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,g(x,y))$。

  iii. 计算 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}dxdy$.

     $\frac{\partial g}{\partial x}=-2, \frac{\partial g}{\partial y}=-1$.

     $dS=\sqrt{1+(-2)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{1+4+1}dxdy=\sqrt{6}dxdy$.

  iv. 确定积分区域 D_{xy} (曲面在xy平面的投影)。

The projection of the triangle onto the xy-plane has vertices $(1,0),(0,2),(0,0)$. This triangle is bounded by $x=0, y=0$ and the line connecting $(1,0)$ and $(0,2)$, which is $y-0=\frac{2-0}{0-1}(x-1) \Rightarrow y = -2(x-1) \Rightarrow y=-2x+2$.

v. 计算二重积分 $\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int_0^1\int_0^{-2x+2} xydydx$.
$= \sqrt{6}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-2x+2} dx = \sqrt{6}\int_0^1 x\frac{(-2x+2)^2}{2}dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^1 x(4x^2-8x+4)dx$
$= 2\sqrt{6}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx = 2\sqrt{6}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$
$= 2\sqrt{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{6}\left(\frac{3-8+6}{12}\right) = 2\sqrt{6}\frac{1}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

- **第二类面积分 (对坐标投影的积分, 通量):** $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ 计算向量场 $\mathbf{F}$ 通过有向曲面 S 的通量，其中 $\mathbf{n}$ 是曲面 S 的单位法向量 。若曲面 S 由 $\mathbf{r}(u,v)$ 参数化，则 $d\mathbf{S} = (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dudv$ (法向量方向需根据题目要求确定)，积分为 $\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dudv$。

  这是**考题1的重点。**

  习题示例: (Example) 求向量场 $\mathbf{F}=\langle y,x,z\rangle$ 在负 z 方向通过曲面 $z=g(x,y)=16-x^2-y^2$ 位于 xy 平面上方的部分的通量。

  解答:

  曲面 $z=16-x^2-y^2$。

  Parametrization $\mathbf{r}(x,y)=\langle x,y,16-x^2-y^2\rangle$.

  $\mathbf{r}_x=\langle 1,0,-2x\rangle$.

  $\mathbf{r}_y=\langle 0,1,-2y\rangle$.

  $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\langle -(-2x),-(-2y),1\rangle=\langle 2x,2y,1\rangle$. This vector points in the positive z direction (upwards).

  Since we need the flux in the negative z direction, we use $d\mathbf{S}=-(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y)dxdy=\langle -2x,-2y,-1\rangle dxdy$.

  (Alternatively, for $z=g(x,y)$, $d\mathbf{S}=\langle -\frac{\partial g}{\partial x},-\frac{\partial g}{\partial y},1\rangle dxdy$ for upward normal. For downward normal, $d\mathbf{S}=\langle\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},-1\rangle dxdy=\langle -2x,-2y,-1\rangle dxdy$.)

  $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\langle y,x,z\rangle\cdot\langle -2x,-2y,-1\rangle dxdy=(-2xy-2xy-z)dxdy=(-4xy-z)dxdy$.

  Substitute $z=16-x^2-y^2$: $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=(-4xy-(16-x^2-y^2))dxdy=(x^2+y^2-4xy-16)dxdy$.

  积分区域 R is $z\geq 0\Rightarrow 16-x^2-y^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2\leq 16$, a disk of radius 4.

  通量 $\Phi=\iint_R(x^2+y^2-4xy-16)dA$.

  Convert to polar coordinates: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, dA=rdrd\theta$.

  $x^2+y^2=r^2$, $4xy=4r^2\cos\theta\sin\theta=2r^2\sin(2\theta)$.

$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (r^2 - 2r^2 \sin(2\theta) - 16) r dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (r^3 - 2r^3 \sin(2\theta) - 16r) dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{2r^4}{4} \sin(2\theta) - 8r^2\right]_0^4 d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{256}{4} - \frac{2 \cdot 256}{4} \sin(2\theta) - 8 \cdot 16\right) d\theta$

$= \int_0^{2\pi} (64 - 128 \sin(2\theta) - 128) d\theta = \int_0^{2\pi} (-64 - 128 \sin(2\theta)) d\theta$

$= [-64\theta + 64 \cos(2\theta)]_0^{2\pi}$

$= (-64 \cdot 2\pi + 64 \cos(4\pi)) - (0 + 64 \cos(0))$

$= -128\pi + 64 - 64 = -128\pi$ 。

体积分 (Volume Integrals):

$\iiint_V f(x,y,z) dV$ 计算标量函数 f 在三维区域 V 上的积分。通常通过将其化为三次迭代积分来计算 。

习题示例: 计算 $\iiint_B xyz dV$，其中 $B = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ 是一个长方体。

解答:

$\iiint_B xyz dV = \int_0^1 x dx \int_0^2 y dy \int_0^3 z dz$ (由于函数和区域可分离)
$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3$
$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$ 。

2.4 积分定理 (Integral Theorems)

积分定理建立了微分算子（如梯度、散度、旋度）的积分与边界上的积分之间的深刻联系。

格林定理 (Green's Theorem):

若 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在平面单连通区域 D 上具有连续的一阶偏导数， C 是 D 的分段光滑的简单闭合边界曲线，取正向（逆时针），则 $\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ 。

习题示例: (Ex. (4)) 利用格林定理计算线积分 $\oint_C x^2 y dx + x^2 dy$，其中 C 是由顶点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ 构成的三角形边界，逆时针方向。

解答: 这里 $P = x^2 y, Q = x^2$ 。

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \frac{\partial P}{\partial y} = x^2$ 。

$\oint_C x^2ydx + x^2dy = \iint_D (2x - x^2)dA$。

区域 D 是由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成的三角形。

$\iint_D (2x - x^2)dA = \int_0^1 \int_0^x (2x - x^2)dydx = \int_0^1 (2x - x^2)[y]_0^x dx = \int_0^1 (2x - x^2)xdx = \int_0^1 (2x^2 - x^3)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$。

高斯定理/散度定理 (Gauss's Theorem / Divergence Theorem):

若 $\mathbf{F}$ 是在包含有界闭区域 V 的某个区域上具有连续一阶偏导数的向量场，S 是 V 的分段光滑的边界曲面，取外法线方向，则 $\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})dV$ 。该定理表明通过一个闭曲面的净通量等于该曲面所围体积内所有源和汇的代数和。 *(Note: Usually $\oiint$ or $\iint_S$ for closed surface)*

习题示例: (Ex. (9)) 计算 $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS$，其中 $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$，S 是由 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ 所围成的立方体的表面。

解答:

$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(4xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 4z - 2y + y = 4z - y$。

$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS = \iiint_V (4z - y)dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y)dxdydz$

$= \int_0^1 dx \int_0^1 \int_0^1 (4z - y)dydz = 1 \cdot \int_0^1 \left[4zy - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dz = \int_0^1 \left(4z - \frac{1}{2}\right) dz$

$= \left[2z^2 - \frac{z}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。

斯托克斯定理 (Stokes' Theorem):

若 S 是一个分片光滑的有向曲面，其边界 C 是一条分片光滑的简单闭合曲线，C 的方向与 S 的法向量方向符合右手规则。若向量场 $\mathbf{F}$ 在包含 S 的某个区域上具有连续的一阶偏导数，则 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ 。该定理表明向量场沿闭合曲线的环流量等于该向量场的旋度穿过以该曲线为边界的任意曲面的通量。

习题示例: (Ex. (23)) 利用斯托克斯定理计算 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$，其中 $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - (x + z)\mathbf{k}$，$C$ 是由顶点 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$ 构成的三角形边界，按此顺序。

解答: 曲面 S 是位于 xy 平面上的三角形区域 $z = 0$。其单位法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{k}$，so $d\mathbf{S} = \mathbf{k}dS = \mathbf{k}dA$.

$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & -(x + z) \end{vmatrix}$

$= (0 - 0)\mathbf{i} - (-1 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k}$。

$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 2x - 2y$。

The region S in the xy-plane is the triangle with vertices $(0,0),(1,0),(1,1)$. This is $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$.

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (2x-2y)dS = \int_0^1 \int_0^x (2x-2y)dydx$
$= \int_0^1 \left[2xy-y^2\right]_0^x dx = \int_0^1 (2x^2-x^2)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$。

2.5 向量恒等式与张量表示 (Vector Identities and Tensor Notation) (考题2重点)

向量分析中存在许多重要的恒等式，它们在理论推导和简化计算中非常有用。张量表示法（或称索引表示法、爱因斯坦求和约定）为证明这些复杂恒等式提供了一种简洁而强大的代数工具。

重要的向量恒等式:

例如，$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$（任何旋度场的散度为零）和 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$（任何梯度场的旋度为零）是两个非常基础且重要的恒等式 。用户考纲中特别指出的恒等式是 $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ (Note: The text had order of terms swapped and a sign difference, common form is $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{A}^2) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ or $\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$. The version provided in the prompt $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ is what I will prove.)

习题示例 (不使用张量): (问题5a) 证明 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$。

证明:

$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$。

$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k}$。

如果 ϕ 具有连续的二阶偏导数，则混合偏导数的顺序无关，例如 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}$ 。因此，上式中每个分量都为零，故 $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$。

使用张量表示法证明向量恒等式 (考题2重点):

张量表示法使用下标索引来表示向量和张量的分量，并遵循爱因斯坦求和约定（对重复出现的指标自动求和）。关键工具是克罗内克符号 δ_{ij} （当 $i=j$ 时为1，否则为0）和列维-奇维塔符号 ϵ_{ijk} （当 (i,j,k) 是 $(1,2,3)$ 的偶排列时为1，奇排列时为-1，其他情况为0）。一个重要的关系是 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ 。

这是**考题2的重点**。

习题示例: 使用张量表示法证明向量恒等式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ (BAC-CAB 法则)。

证明:

Let $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Then $D_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$ 。

所求向量的第 m 个分量为 $[\mathbf{A} \times \mathbf{D}]_m = \epsilon_{mni} A_n D_i = \epsilon_{mni} A_n (\epsilon_{ijk} B_j C_k)$。

$= \epsilon_{imn} \epsilon_{ijk} A_n B_j C_k$ (利用 $\epsilon_{mni} = \epsilon_{imn}$)。

使用 $\epsilon_{imn} \epsilon_{ijk} = \delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}$ (This is a specific form of the $\epsilon - \delta$ identity; more general: $\epsilon_{pqr} \epsilon_{pab} = \delta_{qa} \delta_{rb} - \delta_{qb} \delta_{ra}$. Here, $p = i, q = m, r = n, a = j, b = k$).

Then $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_m = (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) A_n B_j C_k$

$= \delta_{mj} B_j \delta_{nk} A_n C_k - \delta_{mk} C_k \delta_{nj} A_n B_j$

$= B_m (A_n C_n) - C_m (A_n B_n)$ (利用 δ 的缩并性质, 如 $\delta_{mj} B_j = B_m$, $A_n C_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$)。

所以 $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_m = B_m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$。

这等价于向量形式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$。

对于考题2中的恒等式 $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$:

其证明过程类似，但涉及到微分算子 $\nabla_j = \partial / \partial x_j \equiv \partial_j$ 。

左边第 i 分量:

$[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \epsilon_{ijk} A_j (\nabla \times \mathbf{A})_k$

$= \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m)$

$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j \partial_l A_m$ (cyclic permutation of ϵ_{ijk})

$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j \partial_l A_m$ (using $\epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$)

$= A_j \partial_i A_j - A_j \partial_j A_i$ (Eq. 1)

(since $\delta_{il} \partial_l = \partial_i$, $\delta_{jm} A_m = A_j$ for the first term, and $\delta_{im} A_m = A_i$, $\delta_{jl} \partial_l = \partial_j$ for the second term).

右边第一项第 i 分量:

$[-(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i = -(A_j \partial_j) A_i = -A_j \partial_j A_i$ (Eq. 2)

右边第二项第 i 分量:

$\left[\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\right]_i = \frac{1}{2} \partial_i (A_k A_k)$

$= \frac{1}{2}((\partial_i A_k)A_k + A_k(\partial_i A_k))$ (using product rule)

$= A_k \partial_i A_k$ (Eq. 3)

RHS = Eq. 2 + Eq. 3 = $-A_j \partial_j A_i + A_k \partial_i A_k$.

Since k is a dummy index in $A_k \partial_i A_k$, we can replace it with j: $A_j \partial_i A_j$.

So, RHS becomes $A_j \partial_i A_j - A_j \partial_j A_i$.

This matches Eq. 1 (LHS).

因此，$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ 成立。

这个证明过程较为复杂，需要熟练掌握张量符号和微分运算的交换。中的 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 和 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 的证明提供了类似技巧的练习。

2.6 向量势 (Vector Potential)

标量势与向量势的概念 (Concepts of Scalar and Vector Potentials):

- 如果一个向量场 $\mathbf{F}$ 是无旋的（$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$），则称其为保守场，并且可以表示为某个标量函数 ϕ 的梯度（或负梯度），即 $\mathbf{F} = \nabla\phi$（或 $\mathbf{F} = -\nabla\phi$）。ϕ 称为标量势 。
- 如果一个向量场 $\mathbf{B}$ 是无散的（$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$），则它可以表示为某个向量函数 $\mathbf{A}$ 的旋度，即 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$。$\mathbf{A}$ 称为向量势 。向量势不是唯一的，可以通过规范变换改变。

习题示例: 判断向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xyz}\mathbf{i} + xze^{xyz}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$ 是否为保守场。若是，求其标量势函数。

解答思路:

1. 计算 $\nabla \times \mathbf{F}$。若 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$，则为保守场。

   $P = yze^{xyz}, Q = xze^{xyz}, R = xye^{xyz}$

   $\frac{\partial R}{\partial y} = xe^{xyz} + xy(xz)e^{xyz} = (x + x^2yz)e^{xyz}$

   $\frac{\partial Q}{\partial z} = xe^{xyz} + xz(xy)e^{xyz} = (x + x^2yz)e^{xyz}$

   So $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$.

   $\frac{\partial P}{\partial z} = ye^{xyz} + yz(xy)e^{xyz} = (y + xy^2z)e^{xyz}$

   $\frac{\partial R}{\partial x} = ye^{xyz} + xy(yz)e^{xyz} = (y + xy^2z)e^{xyz}$

   So $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = ze^{xyz} + xz(yz)e^{xyz} = (z + xyz^2)e^{xyz}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = ze^{xyz} + yz(xz)e^{xyz} = (z + xyz^2)e^{xyz}$

So $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Since all components of $\nabla \times \mathbf{F}$ are zero, $\mathbf{F}$ is a conservative field.

2. 若保守，则求解 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q, \frac{\partial \phi}{\partial z} = R$。

   $\phi = \int P dx = \int yze^{xyz}dx = \int e^{xyz}d(xyz/(yz \cdot x)) = \int e^{xyz}d(xyz) \cdot \frac{1}{yz} = e^{xyz} + g(y,z)$ (assuming $yz \neq 0$).

   Correct integration: $\int yze^{xyz}dx = yz\frac{e^{xyz}}{yz} + g(y,z) = e^{xyz} + g(y,z)$.

   $\frac{\partial \phi}{\partial y} = xze^{xyz} + \frac{\partial g}{\partial y}$.

   Since $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q = xze^{xyz}$, we have $\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g$ 与 y 无关，即 $g(z)$。

   So $\phi = e^{xyz} + g(z)$。

   $\frac{\partial \phi}{\partial z} = xye^{xyz} + g'(z)$。

   Since $\frac{\partial \phi}{\partial z} = R = xye^{xyz}$, we have $g'(z) = 0 \Rightarrow g(z) = K$ (常数)。

   所以 $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + K$。

2.7 曲线坐标系 (Curvilinear Coordinates)

在处理具有特定对称性的物理问题时，使用曲线坐标系（如极坐标、柱面坐标、球面坐标）通常比笛卡尔坐标系更为方便。

- **极坐标系 (Polar Coordinates)** (r,θ): $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$。
- **柱面坐标系 (Cylindrical Coordinates)** (ρ,ϕ,z) 或 (r,θ,z): $x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = z$ 。
- **球面坐标系 (Spherical Coordinates)** (r,θ,ϕ): $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ (注意 θ 通常是极角/天顶角 measured from positive z-axis, ϕ 是方位角 measured from positive x-axis in xy-plane) 。

  在这些坐标系下，梯度、散度、旋度有特定的表达式，这些表达式可以通过坐标变换和基向量的变换得到。

习题示例: (Quiz 问题 (a)) 给定球坐标下的标量函数 $h(r,\theta,\phi) = 2\alpha r^2\sin\theta$。计算 ∇h。

解答: 球坐标下的梯度公式为 $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$ 。

$\frac{\partial h}{\partial r} = 4\alpha r\sin\theta$

$\frac{\partial h}{\partial \theta} = 2\alpha r^2 \cos\theta$

$\frac{\partial h}{\partial \phi} = 0$

所以 $\nabla h = (4\alpha r \sin\theta)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(2\alpha r^2 \cos\theta)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}(0)\mathbf{e}_\phi$

$= 4\alpha r \sin\theta \mathbf{e}_r + 2\alpha r \cos\theta \mathbf{e}_\theta$ 。

第三讲：常微分方程求解 (Course 3: Solving Ordinary Differential Equations)

引言: 常微分方程 (ODEs) 是描述一个或多个函数与其导数之间关系的方程，它们在模拟自然现象、工程系统和社会动态中扮演着核心角色。理解并掌握ODE的求解方法对于科学和工程领域的学生至关重要。本讲将系统地介绍一阶常微分方程的各种标准解法，探讨高阶线性常微分方程的理论与技巧，并特别深入学习用户指定的考题重点——**李群对称性方法**，这一方法为求解某些复杂的非线性及高阶方程提供了强有力的途径。ODE求解的策略很大程度上取决于方程的具体形式。对于一阶ODE，存在一系列对应特定结构的成熟解法。高阶线性ODE，尤其是常系数情况，其解的结构（齐次解与特解的叠加）清晰，并有通用的代数方法（特征方程）可循。然而，对于变系数线性ODE和更广泛的非线性ODE，通解往往难以觅得，此时幂级数解法和李群对称性等高级方法便显示出其价值。李群对称性方法通过探寻方程在连续变换群下的不变性，从而简化方程结构或直接导出解，这是一种深刻且具有普适性的工具，尤其擅长处理那些传统方法难以奏效的非线性问题。

3.1 一阶常微分方程 (First-Order ODEs) (考题3重点)

一阶常微分方程的形式通常为 $y' = f(x, y)$ 或 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$。

基本概念 (Basic Concepts):

方程的阶是指方程中出现的导数的最高阶数。方程的解是一个函数，将其代入方程后使方程成为恒等式。通解是包含任意常数的解，代表一族解曲线。特解是通过初始条件（如 $y(x_0) = y_0$ ）从通解中确定的不含任意常数的解。

习题示例: 判断方程 $y'' + 2y' + y = \sin x$ 的阶数。验证 $y = Ce^{-x}$ 是否为 $y' + y = 0$ 的解。

答案: 前者是二阶ODE。对于后者，$y' = -Ce^{-x}$ ，则 $y' + y = -Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$，所以 $y = Ce^{-x}$ 是其解

（实际上是通解）。

可分离变量方程 (Separable Equations):

形如 $h(y)dy = g(x)dx$ 的方程。通过两边分别积分求解：$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C$ 。

习题示例: (Page 5) 求解微分方程 $(1+y^2)\frac{dy}{dx} = x\cos x$。

解答: 分离变量得 $(1+y^2)dy = x\cos x dx$。

两边积分：$\int(1+y^2)dy = \int x\cos x dx$。

左边 $= y + \frac{y^3}{3}$ 。

右边使用分部积分法：$\int xd(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$。

所以通解为 $y + \frac{y^3}{3} = x\sin x + \cos x + C$。

齐次方程 (Homogeneous Equations, y/x型):

形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程。作代换 $u = \frac{y}{x}$ ，即 $y = ux$，则 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ 。代入原方程得到 $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$，这是一个可分离变量方程 。

习题示例: (Page 13-14 类型) 求解微分方程 $x^2\frac{dy}{dx} = y^2 + xy$。

解答: 当 $x \neq 0$ 时，$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$ 。令 $u = y/x$。

$u + x\frac{du}{dx} = u^2 + u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$ 。

积分得 $-\frac{1}{u} = \ln|x| + C \Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + C$。

通解为 $y = -\frac{x}{\ln|x|+C}$ 。

一阶线性方程 (First-Order Linear Equations):

标准形式为 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$。其求解方法是积分因子法。积分因子 $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ 。方程两边乘以 $\mu(x)$ 后，左边可以写成 $\frac{d}{dx}(\mu(x)y)$，然后积分求解 。

习题示例: (Exercise 1) 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = x$，初始条件 $y(0) = 2$。

解答: $P(x) = 1, Q(x) = x$。

积分因子 $\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x$ 。

$e^x\frac{dy}{dx} + e^xy = xe^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^xy) = xe^x$ 。

积分得 $e^x y = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$。

通解 $y = x - 1 + Ce^{-x}$ 。

代入初始条件 $y(0) = 2$：$2 = 0 - 1 + Ce^0 \Rightarrow C = 3$。

特解 $y = x - 1 + 3e^{-x}$ 。

伯努利方程 (Bernoulli Equations):

标准形式为 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$)。作代换 $z = y^{1-n}$ ，则 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ 。原方程两边同除以 y^n 并代换后可化为关于 z 的一阶线性方程 。

习题示例: (Exercise 2) 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xy^2$ 。

解答: 此为伯努利方程，$n = 2$。令 $z = y^{1-2} = y^{-1}$ 。则 $\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ 。

原方程两边同乘以 $-y^{-2}$ (假设 $y \neq 0$):

$-y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = -x$。

即 $\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = -x$。这是一个关于 z 的一阶线性方程。

$P(x) = \frac{1}{x}$ ，积分因子 $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = |x|$。不妨取 $\mu(x) = x$ (对于 $x > 0$ 或 $x < 0$)。

$x\frac{dz}{dx} + z = -x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(xz) = -x^2$ 。

积分得 $xz = \int -x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C$。

$z = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ 。

因为 $z = 1/y$，所以 $\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ 。

恰当微分方程/全微分方程 (Exact Differential Equations):

形如 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 的方程，如果满足条件 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ，则称为恰当方程。此时存在一个函数 $F(x,y)$（称为势函数）使得 $dF = Mdx + Ndy = 0$，则通解为 $F(x,y) = C$ 。

求解 $F(x,y)$ 的方法是:

1. $F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ (将 y 视为常数积分)。
2. 对上式求关于 y 的偏导数并令其等于 $N(x,y)$：$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y) = N(x,y)$。
3. 从上式解出 $g'(y)$，然后积分得到 $g(y)$。

习题示例: (Page 21 类型) 求解微分方程 $(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$。

解答: $M(x,y) = y\cos x + 2xe^y, N(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1$。

$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y$ 。

$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$ 。

因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ，所以是恰当方程。

$F(x,y) = \int(y\cos x + 2xe^y)dx = y\sin x + x^2e^y + g(y)$。

$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + g'(y)$。

令 $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)\text{:}\ \sin x + x^2e^y + g'(y) = \sin x + x^2e^y - 1$。

所以 $g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y$ (取积分常数为0)。

通解为 $F(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y = C$。

积分因子 (Integrating Factor for Non-Exact Equations):

如果方程 $Mdx + Ndy = 0$ 不是恰当的，有时可以找到一个函数 $\mu(x,y)$（积分因子），使得 $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ 变为恰当方程。对于一阶线性方程，我们已经系统地使用了积分因子。对于其他类型的非恰当方程，寻找积分因子可能比较困难，通常只讨论特定形式的积分因子。

3.2 李群对称性方法 (Lie Group Symmetry Methods) (考题3、4、5重点)

李群对称性方法是一种通过寻找微分方程在连续变换群（李群）作用下的不变性来求解或简化微分方程的系统方法。这种方法对于非线性方程尤其强大，是现代微分方程理论的重要组成部分。

核心概念:

- **无穷小生成元 (Infinitesimal Generators):** 一个单参数李群的变换可以由其无穷小生成元（一个向量场）$\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ 来完全刻画 。
- **不变条件与不变曲线 (Invariant Conditions and Invariant Curves):** 如果一个微分方程在某个李群变换下保持形式不变，则称该李群是此方程的一个对称群。解曲线在该变换作用下仍为解曲线。不变曲线是指在变换作用下自身保持不变的曲线。
- **确定方程 (Determining Equations for Symmetries):** 对于一个给定的ODE，可以通过其线性化对称条件导出一组关于无穷小生成元中未知函数 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ (及其导数) 的偏微分方程组，称为确定方程。求解这个方程

组可以得到所有可能的李点对称性 。 例如，对于一阶ODE $y' = w(x, y)$，其线性化对称条件为 $D_x\eta - wD_x\xi = \xi w_x + \eta w_y$，其中 $D_x = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \dots$ 是全导数算子，$w_x = \partial w/\partial x, w_y = \partial w/\partial y$ 。对于高阶ODE，需要用到生成元的延拓。

- **利用对称性求解 (Solving using Symmetries):**
    - **正则坐标 (Canonical Coordinates):** 如果找到了一个对称性生成元 $\mathbf{X}$，通常可以找到一组新的坐标 (r, s)（正则坐标），使得在该坐标系下，对称变换表现为简单的平移，例如 $r^* = r, s^* = s + \epsilon$。在一阶ODE的情况下，原方程在正则坐标下可以化为 $\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$ 的形式，这是一个可分离变量的方程，可以直接积分求解 。
    - **寻找不变量与降阶:** 对称性对应于方程的某种不变量。利用这个不变量，可以将方程的阶数降低。例如，对于二阶方程，如果找到一个对称性，通常可以将其降为一阶方程。

习题类型与解答思路 (考题3, 4, 5):

考题3: 利用对称性求解一阶非线性ODE

问题示例: 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x^2}{xy}$ $(x > 0, y > 0)$。 (这是一个齐次方程，可以用 $u = y/x$ 求解。这里我们演示对称性方法。)

解答思路:

1. **寻找对称性生成元:** 该方程在伸缩变换 $x^* = e^\epsilon x, y^* = e^\epsilon y$ 下不变。

   对应的无穷小生成元是 $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ (即 $\xi = x, \eta = y$)。

   (或者，通过求解确定方程来系统地找到它。对于 $w(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$，代入线性化对称条件，分离变量的幂次，可以得到 $\xi = kx, \eta = ky$，k为常数。取 $k = 1$。)

2. **寻找正则坐标 (r, s):** 我们需要解特征方程 $\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = \frac{ds}{1}$ (对于 s) 和 $\xi r_x + \eta r_y = 0$ (对于 r)。

   For r: $xr_x + yr_y = 0$. 一个解是 $r = y/x$ (这是方程的不变量)。

   For s: $\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1} \Rightarrow ds = \frac{dx}{x}$。所以 $s = \ln x$ (或 $\ln y$，选择一个即可)。

   我们选择 $r = y/x, s = \ln x$。

3. **变换到正则坐标:** $y = rx = re^s$ 。

   $\frac{dy}{dx} = w(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = r + \frac{1}{r}$ 。

   我们需要将 $\frac{dy}{dx}$ 用 $\frac{dr}{ds}$ 表示。

$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = -\frac{r}{x}dx + \frac{1}{x}dy.$

$ds = \frac{1}{x}dx.$

$\frac{dr}{ds} = \frac{dr/dx}{ds/dx} = \frac{-\frac{r}{x}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}}{\frac{1}{x}} = -r + \frac{dy}{dx}.$

So $\frac{dy}{dx} = r + \frac{dr}{ds}$.

Substituting into the original form of dy/dx:

$r + \frac{dr}{ds} = r + \frac{1}{r}.$

$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{r}$. 这是一个可分离变量方程。

4. **求解正则形式方程:** $rdr = ds$

   $\int rdr = \int ds \Rightarrow \frac{r^2}{2} = s + C_1 \Rightarrow r^2 = 2s + C$。

5. **转换回原坐标:** $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x| + C \Rightarrow y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$。

考题4: 利用对称性求解高阶(可能线性)ODE

问题示例: 考虑二阶ODE $y'' = -\frac{2}{x}y'$ 。利用其对称性 $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x}$ (伸缩对称性 in x, y is invariant) 进行降阶求解。

解答思路:

1. **寻找不变量:** 对称性 $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x}$ 意味着方程在 $x \to e^\epsilon x$ 变换下形式不变（这里 y 不变）。

   The invariants of the group action are y and $y'x$. (More formally, characteristic system for invariants $u(x,y)$ is $x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, so $u = y$. First prolongation of $\mathbf{X}$ is $\mathbf{X}^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial x} + (0 - y' \cdot 1)\frac{\partial}{\partial y'} = x\frac{\partial}{\partial x} - y'\frac{\partial}{\partial y'}$. Invariants $v(x,y,y')$ of $\mathbf{X}^{(1)}$ satisfy $xv_x - y'v'_y = 0$. Solutions are y and xy'.)

   令 $u = y$ (新的因变量，但这里 y 也是不变量), $v = xy'$ (新的自变量 or rather a function of the new independent variable). Let $p = xy'$. Then $y' = p/x$.

   $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{x}\right) = \frac{xp'-p}{x^2}$. Where $p' = dp/dx$.

2. **降阶:**

   原方程 $y'' = -\frac{2}{x}y'$ 变为 $\frac{xp'-p}{x^2} = -\frac{2}{x}\left(\frac{p}{x}\right) = -\frac{2p}{x^2}$。

   $xp' - p = -2p \Rightarrow xp' = -p.$

   这是一个关于 p 和 x 的一阶可分离变量方程: $\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$ (assuming $p \neq 0$).

3. **求解降阶后的方程:**

   $\ln|p| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln|p| = \ln|x^{-1}| + C_1 \Rightarrow p = \frac{C_2}{x}$ 。

4. **转换回原变量并求解:**

$xy' = \frac{C_2}{x} \Rightarrow y' = \frac{C_2}{x^2}$ 。

$y = \int \frac{C_2}{x^2} dx = -\frac{C_2}{x} + C_3$ 。

通解为 $y = \frac{A}{x} + B$。

考题5: 利用对称性求解高阶非线性ODE

问题示例: (概念性，具体题目需专门设计或从高级教材选取) 考虑一个非线性三阶ODE。已知它具有某个特定的李点对称性生成元 $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ 。说明如何利用这个对称性来尝试求解该方程。

解答思路:

1. **计算生成元的二次和三次延拓 $\mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}$:**

   $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'}$ ，其中 $\eta^{(1)} = D_x(\eta) - y'D_x(\xi)$。 ($D_x = \frac{d}{dx}$)

   $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(1)} + \eta^{(2)}\frac{\partial}{\partial y''}$ ，其中 $\eta^{(2)} = D_x(\eta^{(1)}) - y''D_x(\xi)$。

   $\mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{X}^{(2)} + \eta^{(3)}\frac{\partial}{\partial y'''}$ ，其中 $\eta^{(3)} = D_x(\eta^{(2)}) - y'''D_x(\xi)$。
2. **应用不变条件:** 如果三阶ODE为 $F(x,y,y',y'',y''') = 0$，则对称性要求 $\mathbf{X}^{(3)}F = 0$ 当 $F = 0$ 时成立。
3. **寻找不变量/正则坐标:** 通常，对于 n 阶ODE，一个李点对称性可以用来将其阶数降低1。
   - **使用不变量:** 找到该对称性作用下的两个基本微分不变量 $u(x,y)$ (0-th order invariant) 和 $v(x,y,y')$ (1st order invariant). For $\mathbf{X}$, $u(x,y)$ satisfies $\mathbf{X}u = \xi u_x + \eta u_y = 0$. For $\mathbf{X}^{(1)}$, $v(x,y,y')$ satisfies $\mathbf{X}^{(1)}v = \xi v_x + \eta v_y + \eta^{(1)}v_{y'} = 0$.

     Then, express y'' and y''' in terms of $u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}$. The original 3rd order ODE in x, y becomes a 2nd order ODE in u, v.
   - **使用正则坐标:** 如果能找到一组正则坐标 (r,s) 使得 $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial s}$ (i.e., $\xi_r = 0, \xi_s = 0, \eta_r = 0, \eta_s = 1$ in (r,s) coordinates). Then the ODE expressed in $r, s, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots$ will not explicitly contain s. So if $r = r(s)$ is the unknown function, this is $F(r, r_s, r_{ss}, r_{sss}) = 0$. We can treat r as the new independent variable and $p = r_s = \frac{dr}{ds}$ as the new dependent variable. Then $r_{ss} = \frac{dp}{ds} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{ds} = p\frac{dp}{dr}$, etc. This reduces the order by one.
4. **求解降阶后的方程:** 得到的 ($n-1$) 阶方程可能更容易求解。

   (对于考题，更可能的是给出ODE和对称性，要求执行降阶或变换到正则坐标的步骤。)

3.3 高阶常微分方程 (Higher-Order ODEs) (考题4、5重点)

可降阶的高阶方程 (Reducible Higher-Order Equations):

1. $y^{(n)} = f(x)$: 直接逐次积分 n 次。
2. 不显含 y: 形如 $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$。令 $p = y'$，则方程变为关于 p 的 $n-1$ 阶方程。
3. 不显含 x: 形如 $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$。令 $p = y'$，并将 y 视为新的自变量，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$，$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right)$ 等。

习题示例: (Reduction of Order 部分) 求解 $xy'' - y' = 3x^2$ 。

解答: 令 $p = y'$，则 $p' = y''$ 。方程变为 $xp' - p = 3x^2$ 。

这是一个关于 p 的一阶线性方程: $p' - \frac{1}{x}p = 3x$。

积分因子 $\mu(x) = e^{\int -1/x dx} = e^{-\ln x} = 1/x$ (假设 $x > 0$)。

$\frac{1}{x}p' - \frac{1}{x^2}p = 3 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{x}\right) = 3$。

$\frac{p}{x} = 3x + C_1 \Rightarrow p = 3x^2 + C_1x$。

$y' = 3x^2 + C_1x$。

$y = \int(3x^2 + C_1x)dx = x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$ 。

通解为 $y = x^3 + Ax^2 + B$。

线性高阶微分方程解的结构 (Solution Structure of Linear Higher-Order ODEs):

- 对于 n 阶线性齐次方程 $L(y) = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$，其通解是 n 个线性无关解 $y_1, \ldots, y_n$ 的线性组合 $y_h = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ 。
- 对于 n 阶线性非齐次方程 $L(y) = f(x)$，其通解是对应的齐次方程的通解 y_h 与该非齐次方程的任一特解 y_p 之和，即 $y = y_h + y_p$ 。

常系数线性齐次微分方程 (Constant-Coefficient Linear Homogeneous ODEs):

方程形式为 $a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$。其特征方程为 $a_nr^n + \cdots + a_1r + a_0 = 0$。根据特征根的不同情况（单实根、重实根、单复根、重复根）写出通解 。

习题示例: (例子) 求解 $y'' - 4y' + 13y = 0$。

解答: 特征方程 $r^2 - 4r + 13 = 0$。

$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$。

特征根为一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$，其中 $\alpha = 2, \beta = 3$。

通解为 $y = e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$。

常系数线性非齐次微分方程 (Constant-Coefficient Linear Non-homogeneous ODEs):

- **待定系数法 (Method of Undetermined Coefficients):**

  适用于非齐次项 $f(x)$ 是特定形式（如多项式、指数函数、正余弦函数及其乘积和线性组合）的情况。根据 $f(x)$ 的形式假设特解 y_p 的形式，代入原方程确定待定系数 。

  习题示例: 求解 $y'' + y = e^x + x$。

  解答:

  i. 齐次方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程 $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$。齐次解 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。
  ii. 对于 $f_1(x) = e^x$ ，设 $y_{p1} = Ae^x$ 。$y'_{p1} = Ae^x, y''_{p1} = Ae^x$ 。代入 $y'' + y = e^x$ 得 $Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = 1/2$。所以 $y_{p1} = \frac{1}{2}e^x$ 。
  iii. 对于 $f_2(x) = x$，设 $y_{p2} = Bx + D$。$y'_{p2} = B, y''_{p2} = 0$。代入 $y'' + y = x$ 得 $0 + Bx + D = x \Rightarrow B = 1, D = 0$。所以 $y_{p2} = x$。
  iv. 特解 $y_p = y_{p1} + y_{p2} = \frac{1}{2}e^x + x$。
  v. 通解 $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + x$。

- **常数变易法 (Variation of Parameters):**

  更通用的方法，适用于任何形式的 $f(x)$。若齐次方程的通解为 $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$，则设非齐次方程的特解为 $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$，其中 $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$ 且 $u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = f(x)/a_n(x)$ (这里 $a_n(x)$ 是 $y^{(n)}$ 的系数，对于标准形式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$，则为 $R(x)$)。解出 u'_1, u'_2 后积分得到 u_1, u_2 。

  习题示例: (三阶例子类型, here 2nd order example) 用常数变易法求 $y'' + y = \sec x$ 的一个特解。

  解答: 齐次解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$。Wronskian $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$。

  $u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{\sin x \sec x}{1} = -\tan x$。

  $u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{\cos x \sec x}{1} = 1$。

  $u_1 = \int -\tan x dx = \ln|\cos x|$。

  $u_2 = \int 1 dx = x$。

特解 $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (\ln|\cos x|)\cos x + x\sin x$。

欧拉方程 (Euler Equations):

形如 $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ 的方程。令 $x = e^t$ (或 $t = \ln x$ for $x > 0$)，可以将欧拉方程转化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程 。

习题示例: 求解 $x^2y'' - xy' + y = 0$ ($x > 0$)。

解答: 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$。

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$ 。

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}\right)\right)\frac{1}{x}$

$= \left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}e^t\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$ 。

代入原方程:

$x^2\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) - x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) + y = 0$。

$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$。

特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$。

关于 t 的通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$ 。

代回 $t = \ln x$: $y(x) = (C_1 + C_2\ln x)e^{\ln x} = (C_1 + C_2\ln x)x$。

3.4 幂级数解法 (Power Series Method)

当线性ODE的系数不是常数时，幂级数法是一种重要的求解手段。

常点和正则奇点 (Ordinary Points and Regular Singular Points):

对于二阶线性ODE $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$，如果 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 在点 x_0 解析，则 x_0 是常点。如果在 x_0 不解析，但 $(x - x_0)P(x)$ 和 $(x - x_0)^2Q(x)$ 在 x_0 解析，则 x_0 是正则奇点 。

习题示例: (Example 7.3.3) 判断方程 $2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0$ 在 $x = 0$ 处的奇点类型。

解答: 标准形式 $y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1+x}{2x^2}y = 0$。

$P(x) = -\frac{1}{2x}, Q(x) = \frac{1+x}{2x^2}$ 。在 $x = 0$ 处不解析。

$xP(x) = x\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2}$，在 $x = 0$ 处解析。

$x^2Q(x) = x^2\left(\frac{1+x}{2x^2}\right) = \frac{1+x}{2}$ ，在 $x = 0$ 处解析。

因此，$x = 0$ 是一个正则奇点。

Frobenius 方法 (Frobenius Method):

用于在正则奇点 x_0 附近求解形如 $y = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ ($a_0 \neq 0$) 的级数解。将级数代入方程，得到关于 r 的指标方程。根据指标方程根的情况（不同且差非整数、重根、差为整数），解的形式会有所不同 。

习题示例: (Example 7.3.2) 用Frobenius方法求方程 $4xy'' + 2y' + y = 0$ 在 $x = 0$ 附近的一个非零解。

解答思路: $x = 0$ 是正则奇点。设 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$ 。

$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+r)x^{k+r-1}$ 。

$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}$ 。

代入方程:

$4x\sum a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + 2\sum a_k(k+r)x^{k+r-1} + \sum a_k x^{k+r} = 0$

$\sum 4a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-1} + \sum 2a_k(k+r)x^{k+r-1} + \sum a_k x^{k+r} = 0$

$\sum[4(k+r)(k+r-1) + 2(k+r)]a_k x^{k+r-1} + \sum a_k x^{k+r} = 0$

$\sum 2(k+r)[2(k+r-1)+1]a_k x^{k+r-1} + \sum a_k x^{k+r} = 0$

$\sum 2(k+r)(2k+2r-1)a_k x^{k+r-1} + \sum a_k x^{k+r} = 0$

最低次项 (令 $k = 0$ 在第一项中, coefficient of x^{r-1}): $2r(2r-1)a_0 = 0$ 。

指标方程: $2r(2r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1/2, r_2 = 0$。 (Assuming $a_0 \neq 0$)

对于 $r_1 = 1/2$:

$\sum 2(k+1/2)(2k+1-1)a_k x^{k-1/2} + \sum a_k x^{k+1/2} = 0$

$\sum(2k+1)2ka_k x^{k-1/2} + \sum a_k x^{k+1/2} = 0$

The $k = 0$ term in the first sum is $(1)(0)a_0x^{-1/2} = 0$.

Shift index in first sum: let $j = k - 1$, so $k = j + 1$. The sum starts from $j = 0$ (for $k = 1$). The x power is $x^{j+1/2}$.

Shift index in second sum: let $j = k$. The sum starts from $j = 0$. The x power is $x^{j+1/2}$.

The equation becomes:

$\sum_{j=0}^{\infty}(2(j+1)+1)2(j+1)a_{j+1}x^{j+1/2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1/2} = 0$ (careful here, the first sum original $k = 0$ term already yielded the indicial equation)

Let's write out terms:

For x^{r-1} ($k=0$ in first sum): $2r(2r-1)a_0x^{r-1}$

For x^r ($k=1$ in first sum, $k=0$ in second sum):

$2(1+r)(2(1+r)-1)a_1+a_0=0$

For x^{k+r-1} and x^{k+r}:

$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+r)(2k+2r-1)a_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{k+r}=0$

$2r(2r-1)a_0x^{r-1}+\sum_{k=1}^{\infty} 2(k+r)(2k+2r-1)a_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{k+r}=0$

Let $m=k$ in the second sum, $m=k-1$ in the first sum (so $k=m+1$).

$2r(2r-1)a_0x^{r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}[2(m+1+r)(2(m+1+r)-1)a_{m+1}+a_m]x^{m+r}=0$

For $r_1=1/2$: $2(1/2)(2(1/2)-1)a_0=0$, this is $0=0$.

Recurrence relation: $2(m+1+1/2)(2(m+1+1/2)-1)a_{m+1}+a_m=0$

$2(m+3/2)(2m+2+1-1)a_{m+1}+a_m=0$

$(2m+3)(2m+2)a_{m+1}+a_m=0$

$a_{m+1}=-\frac{a_m}{(2m+3)(2m+2)}$ for $m\geq 0$.

Let $a_0=1$.

$a_1=-\frac{a_0}{3\cdot 2}=-\frac{1}{3!}$

$a_2=-\frac{a_1}{5\cdot 4}=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{5!}$

$a_m=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}a_0$ 。

One solution is $y_1=x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^m=x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(x^{1/2})^{2m+1}=\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ (if $a_0=1$) 。

For $r_2=0$, the recurrence relation is $2(m+1)(2(m+1)-1)a_{m+1}+a_m=0\Rightarrow(2m+2)(2m+1)a_{m+1}+a_m=0$.

$a_{m+1}=-\frac{a_m}{(2m+2)(2m+1)}$. $a_m=\frac{(-1)^m}{(2m)!}a_0$.

$y_2=x^0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(\sqrt{x})^{2m}=\cos(\sqrt{x})$ (if $a_0=1$).

第四讲：傅里叶分析与偏微分方程初步 (Course 4: Fourier Analysis & Intro to PDEs)

引言: 傅里叶分析是一种将复杂函数或信号分解为其基本频率分量的数学工具，它在信号处理、图像分析、量子力学以及偏微分方程的求解等

四、偏微分方程 (へんびぶんほうていしき - Henbibun Hōteishiki) 与傅里叶分析 (フーリエかいせき - Fūrie Kaiseki)

偏微分方程 (PDEs) 和傅里叶分析是数学物理、工程技术及其他科学领域中不可或缺的数学工具。偏微分方程用于描述各种物理现象，如热量传播、波动现象、电磁场分布等，而傅里叶分析则提供了一种强大的手段，将复杂函数或信号分解为简单的基本波形（如正弦和余弦函数）的叠加，这不仅有助于理解函数的结构，更是求解偏微分方程的常用方法。本部分题单旨在帮助学习者巩固偏微分方程的基本概念和常见求解技巧，并深入掌握傅里叶分析的核心理论和应用。题单将首先提供偏微分方程的基础练习，随后是傅里叶分析各子知识点的详细习题及解题步骤，以便学习者系统性地学习和复习。学习偏微分方程时，会发现分离变量法等经典解法往往将问题转化为求解常微分方程，并最终依赖于傅里叶级数来满足初始条件或边界条件。同样，傅里叶变换也是求解定义在无界区域上的偏微分方程的有力工具。因此，理解这两者之间的内在联系，对于深刻掌握相关知识至关重要。

A. 偏微分方程 (Partial Differential Equations - へんびぶんほうていしき)

在正式开始练习之前，掌握偏微分方程的核心概念是至关重要的。这些概念构成了理解和求解偏微分方程的基础。

核心概念速查表

概念 (Concept)	描述 (Description)
偏微分方程的阶 (Order of a PDE)	方程中未知函数最高阶偏导数的阶数。
线性偏微分方程 (Linear PDE)	方程对于未知函数及其所有偏导数都是线性的，即不存在这些量的乘积、幂函数或其他非线性函数。
非线性偏微分方程	不满足线性偏微分方程定义的方程。

概念 (Concept)	描述 (Description)
(Nonlinear PDE)	
齐次偏微分方程 (Homogeneous PDE)	如果方程中所有包含未知函数或其导数的项的次数相同（通常为1次），且不包含任何仅依赖于自变 $L(u)=0$，L为线性算子，则为齐次。
非齐次偏微分方程 (Nonhomogeneous PDE)	如果方程中包含仅依赖于自变量的项（自由项），或者对于线性算子 $L(u)=g(x,t)$ 且 $g(x,t)\neq$
常用记号 (Common Notations)	$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \nabla^2 u=\Delta u$ (拉普拉斯算子 - ラプラスえんざんし) 等。
定解条件 (Well-posed Conditions)	为使偏微分方程的解唯一确定，通常需要附加初始条件和/或边界条件。
初始条件 (Initial Conditions - しょきじょうけん)	规定了在初始时刻（通常 $t=0$）未知函数及其某些时间导数的状态。主要针对与时间相关的演化方
边界条件 (Boundary Conditions - きょうかいじょうけん)	规定了未知函数或其导数在解区域边界上的行为。常见类型有： - 第一类 (Dirichlet): $u
偏微分方程的分类 (Classification - ぶんるい)	主要针对二阶线性偏微分方程 $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$。根据判别式 - $\Delta>0$: 双曲型 (Hyperbolic - そうきょくがた) - $\Delta=0$: 抛物型 (Parabolic - ほうぶつがた) - $\Delta<0$: 椭圆型 (Elliptic - だえんがた)
偏微分方程组 (System of PDEs)	由多个涉及一个或几个未知函数及其偏导数的偏微分方程组成的方程组。根据未知函数个数 n 和方程 $n<m$) 系统。

1. 基本概念 (Basic Concepts - きほんがいねん)

此部分旨在检验对偏微分方程基本定义的理解，如阶数、线性、齐次性等。这些基础概念是后续学习和解题的基石，准确判断方程的类型对于选择合适的求解方法至关重要。

练习题 1.1: 判断下列偏微分方程的阶数 (かいすう)，并说明其是线性 (せんけい) 还是非线性 (ひせんけい)，齐次 (せいじ) 还是非齐次 (ひせいじ):

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin(x)$

b) $u_t - uu_{xx} = 0$

c) $u_{tt} - c^2 u_{xx} + ku = 0$ (k为常数)

d) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 1$

答案与解析 1.1:

a) 二阶，线性，非齐次。

* **阶数 (Order)**：最高阶导数是二阶偏导数（如 u_{xx}）。

* **线性/非线性 (Linear/Nonlinear)**：未知函数 u 及其各阶偏导数 (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) 均以一次幂出现，且不存在它们的乘积项。因此是线性的。

* **齐次/非齐次 (Homogeneous/Nonhomogeneous)**：方程右端项 $\sin(x)$ 是一个仅与自变量 x 有关的函数，不为零，因此是非齐次的。

b) 二阶，非线性，齐次。

* **阶数 (Order)**：最高阶导数是 u_{xx}，为二阶。

* **线性/非线性 (Linear/Nonlinear)**：存在项 uu_{xx}，这是未知函数 u 与其二阶偏导数 u_{xx} 的乘积，因此是非线性的。

* **齐次/非齐次 (Homogeneous/Nonhomogeneous)**：方程中没有不包含 u 或其导数的项（即自由项为零）。因此是齐次的。

c) 二阶，线性，齐次。

* **阶数 (Order)**：最高阶导数是 u_{tt} 或 u_{xx}，为二阶。

* **线性/非线性 (Linear/Nonlinear)**：未知函数 u 及其各阶偏导数均以一次幂出现，且不存在它们的乘积项。因此是线性的。

* **齐次/非齐次 (Homogeneous/Nonhomogeneous)**：方程中所有项都包含 u 或其导数，没有自由项。因此是齐次

的。

d) 一阶，非线性，齐次（如果视为 $F(u_x, u_y) - 1 = 0$ 且 F 中没有 u 的零次项）或非齐次（如果视为 $F(u_x, u_y) = 1$）。通常，这类方程被视为非线性。

* **阶数 (Order)**：最高阶导数是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial u}{\partial y}$，为一阶。

* **线性/非线性 (Linear/Nonlinear)**：存在偏导数的平方项，例如 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$，因此是非线性的。

* **齐次/非齐次 (Homogeneous/Nonhomogeneous)**：如果将方程改写为 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 - 1 = 0$，由于存在常数项 -1（不含 u 或其导数），可以认为是非齐次的。然而，在某些非线性理论的上下文中，如果只关注与 u 相关的项，也可能因不存在 u 的零次项而被视为特定意义下的“齐次”。但从标准线性方程的齐次性定义来看，它更倾向于非齐次。

2. 常见偏微分方程 (Common PDEs - しゅようなへんびぶんほうていしき)

数学物理中反复出现的几类偏微分方程，它们各自描述了广泛的物理现象，并具有独特的数学性质。识别这些标准方程及其变体是求解实际问题的第一步。

练习题 2.1: 写出以下常见偏微分方程的二维标准形式 (にじげんひょうじゅんけい)，并简述它们各自描述的典型物理现象 (ぶつりげんしょう)。

a) 热传导方程 (ねつでんどうほうていしき - Heat Equation)

b) 波动方程 (はどうほうていしき - Wave Equation)

c) 拉普拉斯方程 (ラプラスほうていしき - Laplace's Equation)

d) 泊松方程 (ポアソンほうていしき - Poisson's Equation)

答案与解析 2.1:

a) 二维热传导方程:

标准形式: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 或 $u_t = \alpha \nabla^2 u$ (其中 α 是热扩散系数 (ねつかくさんけいすう)，为正常数)。

典型物理现象: 描述二维区域内温度 $u(x, y, t)$ 随时间和空间的变化，或浓度等物理量的扩散过程 (かくさんかてい)。

b) 二维波动方程:

标准形式: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 或 $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ (其中 c 是波速 (はそく)，为正常数)。

典型物理现象: 描述二维膜的振动（如鼓面振动）、声波在二维介质中的传播等。

c) 二维拉普拉斯方程:

标准形式: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 或 $\nabla^2 u = 0$。

典型物理现象: 描述不随时间变化的稳态物理现象 (ていじょうぶつりげんしょう)，如稳态温度分布、静电场的电势分布（在无电荷区域）、不可压缩流体的无旋流动速度势等。也称为位势方程 (ポテンシャルほうていしき)。

d) 二维泊松方程:

标准形式: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ 或 $\nabla^2 u = f(x, y)$。

典型物理现象: 描述存在源（由 $f(x, y)$ 表示）的稳态物理现象，如存在电荷分布时的静电势、存在热源时的稳态温度分布等。当 $f(x, y) = 0$ 时，泊松方程退化为拉普拉斯方程。

3. 分离变量法 (Method of Separation of Variables - へんすうぶんりほう)

分离变量法是求解特定类型的线性偏微分方程（尤其是具有齐次边界条件的方程）的一种基本且强有力的方法。其核心思想是将偏微分方程分解为一组常微分方程，这些常微分方程通常更容易求解。

练习题 3.1 (概念理解): 分离变量法 (へんすうぶんりほう) 在求解偏微分方程时，对原方程 (もとのほうていしき) 和边界条件 (きょうかいじょうけん) 有哪些基本要求？简述其主要步骤 (しゅようなステップ)。

答案与解析 3.1:

基本要求:

- **线性方程 (Linear Equation - せんけいほうていしき)**: 偏微分方程必须是线性的，这样解的叠加原理才能适用。通过分离变量法得到的许多特解（本征函数）的线性组合才能构成更一般的解。
- **齐次方程 (Homogeneous Equation - せいじほうていしき) (通常要求)**: 虽然对某些非齐次方程可以通过一些变换（如化为齐次方程或利用格林函数等）再应用分离变量法的思想，但经典的分离变量法主要应用于齐次偏微分方程。这是因为分离变量后，等式两边能各自等于同一个常数（分离常数）是基于方程中不含仅与自变量相关的非齐次项。
- **齐次边界条件 (Homogeneous Boundary Conditions - せいじきょうかいじょうけん)**: 相关的空间边界条件必须是齐次的。例如，$u(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0$。这是因为在分离变量 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 后，这些边界条件会转化为对空间函数 $X(x)$ 的齐次边界条件，从而构成一个适定的本征值问题 (こゆうちもんだい)（如 Sturm-Liouville 问题），该问题具有离散的本征值和对应的本征函数系。
- **有界区域与坐标可分离性 (Bounded Domain and Coordinate Separability)**: 通常情况下，该方法适用于在有界空间区域上定义的定解问题。并且，解域的几何形状和边界条件应允许在所选坐标系下变量能够分离。例如，矩

形区域适合笛卡尔坐标，圆形区域适合极坐标。

主要步骤:

1. **假设解的形式 (Assume Solution Form)**: 设偏微分方程的解可以表示为若干个仅依赖于单一自变量的函数的乘积，例如对于二变量函数 $u(x,t)$，设 $u(x,t) = X(x)T(t)$。
2. **代入与分离 (Substitute and Separate)**: 将假设的解形式代入原偏微分方程中。通过代数运算，将方程整理成等号一端只含一个自变量的函数（及其导数），另一端只含另一个自变量的函数（及其导数）的形式。由于两边分别只依赖于不同的自变量却相等，因此它们必定等于同一个常数，这个常数称为分离常数 (separation constant - ぶんりていすう)，通常记为 $-\lambda$ 或 λ。
3. **得到常微分方程组 (Obtain System of ODEs)**: 上一步会得到一组关于 $X(x)$ 和 $T(t)$ 的常微分方程。
4. **处理边界条件 (Apply Boundary Conditions)**: 将原偏微分方程的齐次边界条件应用于假设的解形式 $u(x,t) = X(x)T(t)$，从而得到关于空间函数 $X(x)$ 的边界条件。
5. **求解本征值问题 (Solve Eigenvalue Problem)**: 求解包含空间函数 $X(x)$ 及其边界条件的常微分方程边值问题。这通常是一个 Sturm-Liouville 型本征值问题，会得到一系列离散的本征值 λ_n 和对应的本征函数 $X_n(x)$。
6. **求解时间 (或其他变量) 方程 (Solve Time (or other variable) Equation)**: 将得到的本征值 λ_n 代入时间函数 $T(t)$ (或其他变量对应的函数) 的常微分方程中，求解得到 $T_n(t)$。
7. **叠加特解 (Superimpose Particular Solutions)**: 根据叠加原理 (かさねあわせのげんり)，将所有特解 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ 线性组合起来，形成级数形式的通解: $u(x,t) = \sum_n C_n X_n(x) T_n(t)$。
8. **利用初始条件定系数 (Determine Coefficients using Initial Conditions)**: 最后，利用给定的初始条件（或其他未使用的定解条件）来确定级数解中的待定系数 C_n。这通常涉及到将初始条件函数展开成相应的本征函数级数（如傅里叶级数）。

练习题 3.2 (方法应用): 考虑一维波动方程 (いちじげんはどうほうていしき) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$，定义在 $0 < x < L, t > 0$，其中 a 为常数。该方程描述了一根长度为 L 的弦的振动。定解条件如下:

初始条件 (しょきじょうけん): $u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq L$

边界条件 (きょうかいじょうけん): $u(0,t) = 0, u_x(L,t) = 0, t \geq 0$ (一端固定，另一端自由滑动且切线水平)

假设解的形式为 $u(x,t) = X(x)T(t)$，请用分离变量法导出 $X(x)$ 和 $T(t)$ 所满足的常微分方程 (じょうびぶんほうていしき) 及其相应的边界条件。

答案与解析 3.2:

1. **假设解的形式并代入PDE**: 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$。将其代入波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$，得到:

   $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$

2. **分离变量**: 假设 $X(x)\neq 0$ 且 $T(t)\neq 0$，两边同除以 $a^2X(x)T(t)$:

   $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$

   由于等式左边只依赖于 t，右边只依赖于 x，且它们对于所有 x,t 都相等，所以它们必定等于同一个常数。设此常数为 $-\lambda$ (选择负号是为了方便后续求解本征值问题，得到三角函数解)。

   $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda \quad \text{和} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$

3. **得到常微分方程组**: 由此得到两个常微分方程:

   (1) $X''(x)+\lambda X(x)=0$

   (2) $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$

4. **处理边界条件**: 将 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入边界条件:

   - $u(0,t)=X(0)T(t)=0$。为使 $u(x,t)$ 不是平凡零解，假设 $T(t)\neq 0$，则 $X(0)=0$。
   - $u_x(L,t)=X'(L)T(t)=0$。同样假设 $T(t)\neq 0$，则 $X'(L)=0$。

5. $X(x)$ **和** $T(t)$ **满足的方程及边界条件**:

   - 空间函数 $X(x)$ 满足的常微分方程边值问题 (本征值问题) 是:

     $X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<L$

     边界条件为: $X(0)=0, X'(L)=0$。

   - 时间函数 $T(t)$ 满足的常微分方程是:

     $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \quad t>0$。

     (初始条件 $u(x,0)=\phi(x)$ 和 $u_t(x,0)=\psi(x)$ 将在求得 $X_n(x)$ 和 $T_n(t)$ 后，通过级数叠加和傅里叶展开来确定最终解中的系数。)

PDE 综合练习题与答案 (MIT OpenCourseWare 资源):

对于更深入和综合性的偏微分方程练习，可以参考麻省理工学院开放课程 (MIT OpenCourseWare) 的相关材料。这些资源通常包含精心设计的习题集以及详细的解答，覆盖了从基本概念到高级应用的多方面内容。

- **推荐课程**: MIT 18.303 线性偏微分方程 (Linear Partial Differential Equations: Analysis and Numerics)

- **习题集与解答链接示例**:
    - Problem Set 1 (Fall 2014) 及其解答: 问题通常涉及方程分类、叠加原理、以及简单定解问题的求解思路。
    - Problem Set 4 (Fall 2014) 及其解答: 可能包含特征值问题、格林函数以及有限差分等数值方法的初步探讨。
    - Problem Set 9 (Fall 2010) 及其解答: 可能涉及更复杂的数值方法，如Crank-Nicolson格式及其稳定性分析（Von-Neumann分析）。

    学习者可以通过访问 MIT OpenCourseWare 网站 (`ocw.mit.edu`) 搜索课程号 "18.303" 来获取这些习题集和解答的PDF文件，以及相关的课程讲义和视频。这些高质量的学术资源对于提升偏微分方程的理解和应用能力非常有价值。

B. 傅里叶分析 (Fourier Analysis - フーリエかいせき)

傅里叶分析是研究如何将函数或信号表示为基本正弦和余弦波的叠加的数学分支。它在信号处理、图像分析、量子力学以及偏微分方程求解等众多领域都有着核心应用。

核心概念与公式速查表

概念/公式 (Concept/Formula)	**表达式/描述 (Expression/Description)**
傅里叶级数 (Fourier Series)	
周期为 $2L$ 的函数的傅里叶级数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$
系数 a_0	$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$
系数 a_n $(n \geq 1)$	$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$
系数 b_n $(n \geq 1)$	$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$
傅里叶余弦级数 (区间 $[0, L]$)	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, 其中 $a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (偶延拓)
傅里叶正弦级数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, 其中 $b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (奇延拓)

概念/公式 (Concept/Formula)	表达式/描述 (Expression/Description)
(区间 $[0, L]$)	
狄利克雷收敛定理 (Dirichlet Thm.)	若 $f(x)$ 周期为 $2L$，在 $[-L, L]$ 上分段光滑（或满足狄利克雷条件），则其傅里叶级数收敛。在连续点 x_0 处收敛于 $f(x_0)$；在间断点 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$。
帕塞瓦尔定理 (Parseval's Thm.)	$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L}
傅里叶变换 (Fourier Transform)	
傅里叶变换 $F(\omega)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ (角频率 ω)
傅里叶逆变换 $f(t)$	$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
傅里叶变换性质	
线性性质 (Linearity)	$\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
时移性质 (Time Shifting)	$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
频移性质 (Frequency Shifting)	$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$
尺度变换性质 (Scaling)	$\mathcal{F}{f(at)} = \frac{1}{
微分性质 (Differentiation)	$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$

概念/公式 (Concept/Formula)	表达式/描述 (Expression/Description)
积分性质 (Integration)	$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
卷积定理 (Convolution Theorem)	$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$, 其中 $*$ 表示卷积。
帕塞瓦尔定理 (Parseval's Thm.)	$\int_{-\infty}^{\infty}
离散傅里叶变换 (DFT)	
N点DFT $X(k)$	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$
N点IDFT $x(n)$	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$
DFT性质	线性、循环移位、循环卷积等。

1. 傅里叶级数 (Fourier Series - フーリエきゅうすう)

傅里叶级数将一个周期函数表示为不同频率和幅度的正弦和余弦函数的无穷和。这一工具不仅在理论分析中非常重要，而且在实际应用中，如信号处理和偏微分方程的求解中，也扮演着核心角色。理解傅里叶级数的计算方法、收敛条件以及如何利用它来求解某些数学问题是本节的重点。

练习题 B.1.1: 找出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数 (フーリエ級数)，该函数定义为:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{如果 } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{如果 } 0 < x < \pi \end{cases}$$

且 $f(x)$ 的周期 (しゅうき) 为 2π。傅里叶级数在 $x = 0$ 处收敛 (しゅうそく) 到什么值?

答案与详解 B.1.1:

该函数 $f(x)$ 是一个奇函数 (きかんすう)，因为 $f(-x) = -f(x)$。对于奇函数，其傅里叶级数只包含正弦项，即

$a_0 = 0$ 且 $a_n = 0$ 对于所有 $n \geq 1$。

我们只需要计算 b_n：

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

由于 $f(x) \sin(nx)$ 是偶函数 (ぐうかんすう)（奇函数乘以奇函数是偶函数），所以：

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(nx) dx$
$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [-\cos(n\pi) - (-\cos(0))]$
$= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$

如果 n 是偶数，$n = 2k$，则 $b_{2k} = \frac{2}{2k\pi} (1 - (-1)^{2k}) = \frac{1}{k\pi} (1 - 1) = 0$。

如果 n 是奇数，$n = 2k - 1$ (其中 $k = 1, 2, \ldots$)，则 $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi} (1 - (-1)^{2k-1}) = \frac{2}{(2k-1)\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{(2k-1)\pi}$。

因此，$f(x)$ 的傅里叶级数为：

$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \sin((2k - 1)x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k - 1)x)$

或者，如果令 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 来表示奇数项 $2n + 1$：

$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

在 $x = 0$ 处，$f(x)$ 有一个跳跃间断点 (ちょうやくふれんぞくてん)。根据狄利克雷收敛定理，傅里叶级数在该点收敛于函数左右极限的平均值：

$S(0) = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$。

这与级数在 $x = 0$ 时所有项 $\sin((2n + 1) \cdot 0) = 0$ 相加得0的结果一致。

练习题 B.1.2: 计算函数 $f(x) = x(\pi - x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的傅里叶正弦级数 (フーリエせいげんきゅうすう)。利用其傅里叶表示求无穷级数 (むげんきゅうすう) $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$ 的值。

答案与详解 B.1.2:

我们要求 $f(x) = x(\pi - x) = \pi x - x^2$ 在 $(0, \pi)$ 上的傅里叶正弦级数。这意味着我们将 $f(x)$ 奇延拓到 $(-\pi, 0)$，然后以 2π 为周期延拓。正弦级数的形式为 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$。

系数 b_n 计算如下 ($L = \pi$):

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin(nx) dx$

使用分部积分法 (ぶぶんせきぶんほう)。设 $u = \pi x - x^2$，$dv = \sin(nx) dx$。则 $du = (\pi - 2x) dx$，$v = -\frac{\cos(nx)}{n}$。

$\int (\pi x - x^2)\sin(nx)dx = (\pi x - x^2)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right) - \int \left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)(\pi - 2x)dx$

$= -\frac{(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\int(\pi - 2x)\cos(nx)dx$

对第二项再次分部积分。设 $u' = \pi - 2x$，$dv' = \cos(nx)dx$。则 $du' = -2dx$，$v' = \frac{\sin(nx)}{n}$。

$\int(\pi - 2x)\cos(nx)dx = (\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n}(-2)dx$

$= (\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n} + \frac{2}{n}\int \sin(nx)dx = (\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{2}{n^2}\cos(nx)$

所以，

$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\left((\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{2}{n^2}\cos(nx)\right)\right]_0^\pi$

$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n^2} - \frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_0^\pi$

代入上限 $x = \pi$:

$\left[-\frac{(\pi^2 - \pi^2)\cos(n\pi)}{n} + \frac{(\pi - 2\pi)\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n^3}\right] = \left[0 + 0 - \frac{2(-1)^n}{n^3}\right]$

代入下限 $x = 0$:

$\left[-\frac{(0-0)\cos(0)}{n} + \frac{(\pi - 0)\sin(0)}{n^2} - \frac{2\cos(0)}{n^3}\right] = \left[0 + 0 - \frac{2(1)}{n^3}\right]$

所以，$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2(-1)^n}{n^3} - \left(-\frac{2}{n^3}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^3} - \frac{2(-1)^n}{n^3}\right] = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)$

如果 n 是偶数，$n = 2k$，则 $b_{2k} = \frac{4}{\pi(2k)^3}(1 - 1) = 0$。

如果 n 是奇数，$n = 2k - 1$ (其中 $k = 1, 2, \ldots$)，则 $b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^3}(1 - (-1)) = \frac{8}{\pi(2k-1)^3}$。

因此，$f(x)$ 的傅里叶正弦级数为:

$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin((2k-1)x)$

现在，利用此级数求 $S = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$ 的值。

令 $x = \pi/2$。由于 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内连续，级数收敛于 $f(\pi/2)$。

$f(\pi/2) = \pi(\pi/2) - (\pi/2)^2 = \pi^2/2 - \pi^2/4 = \pi^2/4$。

级数在 $x = \pi/2$ 处为:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$

当 $k = 1, \sin(\pi/2) = 1$。

当 $k = 2, \sin(3\pi/2) = -1$。

当 $k = 3, \sin(5\pi/2) = 1$。

一般地，$\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$。

所以，$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right)$

因此，$S = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{32}$。

其他傅里叶级数练习题及解答可参考 MIT OpenCourseWare 微分方程课程 或香港科技大学的《工程师用微分方程》课程笔记。

2. 傅里叶变换及其性质与应用 (Fourier Transform, Properties, and Applications - フーリエへんかん、そのせいしつとおうよう)

傅里叶变换将时域（或空域）中的函数转换为频域表示，揭示了函数包含的频率成分。它在信号分析、系统理论、量子力学和偏微分方程求解等领域是不可或缺的工具。掌握傅里叶变换的计算及其重要性质（如卷积定理、位移性质等）是理解其应用的关键。

练习题 B.2.1: 证明 (しょうめい)：如果 $e^{j\phi(t)} \leftrightarrow F(\omega)$ 且 $\phi(t)$ 是实数 (じっすう)，则

$\cos\phi(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega)+F^*(-\omega)}{2}$

$\sin\phi(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega)-F^*(-\omega)}{2j}$

(注: $F^*(-\omega)$ 表示 $F(-\omega)$ 的复共轭 (ふくそきょうやく)，即先将 ω 替换为 $-\omega$，再取复共轭。对于实函数 $\phi(t)$，如果 $f(t) = e^{j\phi(t)}$，则 $\overline{f(t)} = e^{-j\phi(t)}$。傅里叶变换的性质指出，若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则 $\overline{f(t)} \leftrightarrow F^*(-\omega)$。)

答案与详解 B.2.1:

给定 $e^{j\phi(t)} \leftrightarrow F(\omega)$。

由于 $\phi(t)$ 是实函数，所以 $e^{-j\phi(t)} = \overline{e^{j\phi(t)}}$。

根据傅里叶变换的共轭对称性（或直接由定义推导），如果 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，则 $\overline{f(t)} \leftrightarrow F^*(-\omega)$。

因此，$e^{-j\phi(t)} \leftrightarrow F^*(-\omega)$。

根据欧拉公式：

$\cos\phi(t) = \frac{e^{j\phi(t)}+e^{-j\phi(t)}}{2}$

$\sin\phi(t) = \frac{e^{j\phi(t)}-e^{-j\phi(t)}}{2j}$

利用傅里叶变换的线性性质：

$\mathcal{F}\{\cos\phi(t)\} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\phi(t)}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\phi(t)}\}) = \frac{F(\omega)+F^*(-\omega)}{2}$

$\mathcal{F}\{\sin\phi(t)\} = \frac{1}{2j}(\mathcal{F}\{e^{j\phi(t)}\} - \mathcal{F}\{e^{-j\phi(t)}\}) = \frac{F(\omega)-F^*(-\omega)}{2j}$

证毕。

练习题 B.2.2: 考虑函数 $f(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$，其中 $\mathrm{rect}(x) = 1$ for $|x| \leq 1/2$ and 0 otherwise。

a) 求 $f(t)$ 的傅里叶变换 (フーリエへんかん) $F(\omega)$。

b) 如果该信号通过一个理想低通滤波器 (りそうていいきつうかフィルター)，其频率响应 (しゅうはすうおうとう) 为 $H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$，求输出信号的频谱 (しゅつりょくしんごうのスペクトル) $G(\omega)$。

c) 简述如何从 $G(\omega)$ 求得时域输出信号 (じかんりょういきしゅつりょくしんごう) $g(t)$。

答案与详解 B.2.2:

a) 函数 $f(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ 表示一个幅度为 A，宽度为 T（从 $-T/2$ 到 $T/2$），中心在 $t=0$ 的矩形脉冲。

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t}dt$

$= A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = A\frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega}$

$= A\frac{-(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} = A\frac{-2j\sin(\omega T/2)}{j\omega}$

$= A\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} = AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$

通常将 $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ 定义，或者 $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$。

如果采用 $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$，则 $F(\omega) = AT \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$。

如果采用 $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$，则 $\frac{\omega T}{2} = \pi y \implies y = \frac{\omega T}{2\pi}$，所以 $F(\omega) = AT \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$。

这里我们使用 $F(\omega) = AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$。

b) 理想低通滤波器的频率响应 $H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$ 表示在 $[-\omega_c, \omega_c]$ 区间内传输系数为1，其余频率完全截止。

输出信号的频谱 $G(\omega)$ 是输入信号频谱 $F(\omega)$ 与滤波器频率响应 $H(\omega)$ 的乘积（根据卷积定理的频域形式）：

$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) = \left(AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

这意味着：

$$G(\omega) = \begin{cases} AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} & \text{如果 } |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{如果 } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

c) 时域输出信号 $g(t)$ 是 $G(\omega)$ 的傅里叶逆变换：

$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left(AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right)e^{j\omega t}d\omega$

这个积分表示原始矩形脉冲信号通过理想低通滤波器后的时域波形。虽然这个积分可能没有简单的初等函数封闭形式，但它在理论上是明确的。在实际中，这对应于将原始信号的频率成分限制在 $[-\omega_c, \omega_c]$ 范围内。

傅里叶变换的性质和应用问题，可进一步参考相关教材和习题集。

3. 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform - DFT - りさんフーリエへんかん)

离散傅里叶变换 (DFT) 是傅里叶变换在数字信号处理中的核心工具，它将离散时间序列转换为离散频率表示。DFT 及其快速算法 (FFT) 使得在计算机上进行频谱分析和滤波成为可能。

练习题 B.3.1: 求序列 (すうれつ) $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ 的4点DFT (4てんりさんフーリエへんかん)。

答案与详解 B.3.1:

N点DFT的定义为 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$，其中 $W_N = e^{-j2\pi/N}$，且 $k = 0, 1, \ldots, N-1$。

对于本题，$N = 4$，$x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(3) = 4$。

旋转因子 $W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2) = 0 - j = -j$。

$W_4^0 = 1$

$W_4^1 = -j$

$W_4^2 = (-j)^2 = -1$

$W_4^3 = (-j)^3 = j$

$W_4^4 = (-j)^4 = 1$

$W_4^6 = W_4^2 = -1$

$W_4^9 = W_4^1 = -j$

计算 $X(k)$:

$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{0n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^0 + x(2)W_4^0 + x(3)W_4^0$

$= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$。

$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{1n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^1 + x(2)W_4^2 + x(3)W_4^3$

$= 1(1) + 2(-j) + 3(-1) + 4(j) = 1 - 2j - 3 + 4j = -2 + 2j$。

$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{2n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^2 + x(2)W_4^4 + x(3)W_4^6$

$= 1(1) + 2(-1) + 3(1) + 4(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$。

$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{3n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^3 + x(2)W_4^6 + x(3)W_4^9$

$= 1(1) + 2(j) + 3(-1) + 4(-j) = 1 + 2j - 3 - 4j = -2 - 2j$。

所以，序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ 的4点DFT为 $X(k) = [10, -2+2j, -2, -2-2j]$。

练习题 B.3.2: 给定序列 $x(n) = [1, 0, -1, 0]$。

a) 不直接计算整个DFT，求 $X(0)$ 和 $X(2)$ (假设 $N = 4$)。

b) 利用帕塞瓦尔定理 (パーセバルのていり)，计算 $\sum_{k=0}^{3} |X(k)|^2$。

答案与详解 B.3.2:

a) 对于 $N = 4$ 点DFT:

$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \sum_{n=0}^{3} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3)$

$= 1 + 0 + (-1) + 0 = 0$。

$X(N/2) = X(2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(N/2)} = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{2n}$

$W_4^2 = (e^{-j2\pi/4})^2 = e^{-j\pi} = -1$。

所以 $W_4^{2n} = (W_4^2)^n = (-1)^n$。

$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n)(-1)^n = x(0)(-1)^0 + x(1)(-1)^1 + x(2)(-1)^2 + x(3)(-1)^3$

$= 1(1) + 0(-1) + (-1)(1) + 0(-1) = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$。

b) 帕塞瓦尔定理 (Parseval's Theorem) for DFT:

$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$

首先计算时域能量:

$\sum_{n=0}^{3} |x(n)|^2 = |x(0)|^2 + |x(1)|^2 + |x(2)|^2 + |x(3)|^2$

$= |1|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |0|^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$。

根据帕塞瓦尔定理:

$\sum_{k=0}^{3} |X(k)|^2 = N \sum_{n=0}^{3} |x(n)|^2 = 4 \times 2 = 8$。

DFT 及其性质的更多练习可参考相关教材和习题集。

五、复变函数 (Complex Variables - ふくそかんすう)

复变函数论是数学的一个重要分支，它将微积分的概念推广到复数域。这一理论不仅以其深刻的数学结构和优美的定理著称，还在流体力学、电磁学、量子力学、信号处理以及纯数学的多个分支（如数论、代数几何）中有广泛而重要的应用。本部分题单旨在系统性地覆盖复变函数的核心内容，从基础的复数运算、函数的解析性，到柯西积分理论、级数展开，再到留数定理及其在积分计算和函数逼近中的应用。特别地，帕德近似作为有理函数逼近的一种重要方法，也将是本部分的考察重点之一。所有习题都将提供详细的解题步骤，以帮助学习者深入理解和掌握相关概念与方法。

核心定理与公式速查表

概念/公式 (Concept/Formula)	**表达式/描述 (Expression/Description)**
复数基础 (Complex Number Basics)	
代数形式 (Algebraic Form - だいすうけいしき)	$z = x + iy, x = \mathrm{Re}(z)$ (实部 - じつぶ), $y = \mathrm{Im}(z)$ (虚部 - きょぶ)
极坐标形式 (Polar Form - きょくざひょうけいしき)	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r =
指数形式 (Exponential Form - しすうけいしき)	$z = re^{i\theta}$ (欧拉公式 - オイラーのこうしき: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)
解析性 (Analyticity - かいせきせい)	
柯西-黎曼方程 (Cartesian)	$u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z)), v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z)); u_x = v_y, u_y = -v_x$
柯西-黎曼方程 (Polar)	$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$
复积分 (Complex Integration - ふくそせきぶん)	

概念/公式 (Concept/ Formula)	**表达式/描述 (Expression/Description)**
柯西积分定理 (Cauchy's Integral Thm.)	若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C为 D 内任一简单闭合路径，则 $\oint_C f(z)dz = 0$。
柯西积分公式 (Cauchy's Integral Formula)	若 $f(z)$ 在简单闭合路径 C 及其内部解析，z_0 为 C 内部一点，则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$。
高阶导数公式 (Higher Derivatives Formula)	$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$
级数展开 (Series Expansions - きゅうすうてんかい)	
泰勒级数 (Taylor Series - テイラーきゅうすう)	$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, 其中 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$。收敛半径为 z_0 到最近奇点的距离。
洛朗级数 (Laurent Series - ローランきゅうすう)	$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, 其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$。在环域 $R_1 <
奇点与留数 (Singularities & Residues - とくいてんと りゅうすう)	
孤立奇点分类	可去奇点 (Removable - かきょとくいてん), 极点 (Pole - きょく), 本性奇点 (Essential Singularity - しんせつとくいてん)。
留数定义 (Residue Definition)	$f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1}。
留数计算 (Simple Pole)	若 z_0 为简单极点, $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$。若 $f(z) = p(z)/q(z), p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$, 则 $\mathrm{Res}(f, z_0) = p(z_0)/q'(z_0)$ 。
留数计算 (Pole of order m)	$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$

概念/公式 (Concept/ Formula)	表达式/描述 (Expression/Description)
留数定理 (Residue Theorem - りゅうすうていり)	若 $f(z)$ 在简单闭合路径 C 内部除有限个孤立奇点 $z_1, \ldots, z_k$ 外解析，且在 C 上解析，则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j)$。
帕德近似 (Padé Approximant - パデきんじ)	
$[L/M]$ 阶帕德近似 $R_{L,M}(x)$	$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{L} a_i x^i}{1+\sum_{j=1}^{M} b_j x^j}$，使得 $f(x) - R_{L,M}(x) = O(x^{L+M+1})$，其中 $f(x) = \sum c_k x^k$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数。

1. 复数与复变函数 (Complex Numbers and Functions - ふくそすうとふくそかんすう)

本节旨在巩固复数的基本运算、不同表示形式（代数、极坐标、指数）及其转换，并介绍复变函数的概念和一些重要的初等复变函数（如指数函数、对数函数、幂函数、三角函数）及其多值性等关键性质。熟练掌握这些基础是后续学习复变函数微积分理论的前提。

练习题 C.1.1: 求解复数方程 (ふくそすうほうていしき) $z^2 + z + 1 = 0$。

答案与详解 C.1.1:

方法一：使用二次方程求根公式 $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

对于方程 $z^2 + z + 1 = 0$，有 $a = 1, b = 1, c = 1$。

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$。

所以，$z = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2(1)} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$。

因此，两个解为 $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$。

方法二：设 $z = x + iy$ 代入方程。

$(x + iy)^2 + (x + iy) + 1 = 0$

$(x^2 - y^2 + 2xyi) + (x + iy) + 1 = 0$

整理实部和虚部：

$(x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y) = 0$

令实部和虚部分别为零：

(1) $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$

(2) $2xy + y = 0 \implies y(2x+1) = 0$

从方程 (2) 可知，$y = 0$ 或者 $2x + 1 = 0 \implies x = -1/2$。

如果 $y = 0$，代入方程 (1)：$x^2 + x + 1 = 0$。此方程的判别式 $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$，所以 x 没有实数解。这意味着 $y = 0$ 的情况不成立（因为我们假设 x, y 是实数）。

因此，必有 $x = -1/2$。将 $x = -1/2$ 代入方程 (1)：

$(-1/2)^2 - y^2 + (-1/2) + 1 = 0$

$1/4 - y^2 - 1/2 + 1 = 0$

$1/4 - 2/4 + 4/4 - y^2 = 0$

$3/4 - y^2 = 0 \implies y^2 = 3/4 \implies y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

所以，解为 $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$。

这两个解是单位模的复数，它们的辐角分别是 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$（或 $-2\pi/3$），即三次单位虚根 ω 和 ω^2。

更多复数基础运算的练习，可参考 MIT OpenCourseWare "Complex Variables with Applications" 课程的 Problem Set 1 及其解答。

练习题 C.1.2: 计算 (けいさん) $(\sqrt{3} - i)^6$。

答案与详解 C.1.2:

首先，将复数 $z = \sqrt{3} - i$ 转换为极坐标形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$。

模 $r = |z| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$。

辐角 $\theta = \arg(z)$。由于 $x = \sqrt{3} > 0$ 且 $y = -1 < 0$，该复数位于第四象限。

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$。

主辐角 $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{6}$ (或 $\frac{11\pi}{6}$)。

所以，$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\pi/6}$。

根据棣莫弗 (De Moivre's) 定理 $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ (或 $(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$)：

$(\sqrt{3} - i)^6 = (2e^{-i\pi/6})^6 = 2^6 e^{i(-\pi/6 \cdot 6)} = 64e^{-i\pi}$

将结果转换回代数形式：

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i(0) = -1$。

所以 $(\sqrt{3} - i)^6 = 64(-1) = -64$。

2. 复变函数的微分与解析性 (Differentiation and Analyticity of Complex Functions - ふくそかんすうのびぶんとかいせきせい)

复变函数的微分与实变函数有显著不同。可微性在复变函数中是一个非常强的条件，它与解析性紧密相关。柯西-黎曼方程是判断一个复变函数是否可微（并因此可能解析）的关键工具。

练习题 C.2.1: 判断函数 (かんすう) $f(z) = x^2 + iy^2$ 在何处可微 (びぶんかのう)，在何处解析 (かいせきてき)。

答案与详解 C.2.1:

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，其中 $z = x + iy$。

则实部 $u(x, y) = x^2$，虚部 $v(x, y) = y^2$。

计算 u 和 v 关于 x 和 y 的一阶偏导数:

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$

$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程为:

(1) $u_x = v_y$

(2) $u_y = -v_x$

将计算得到的偏导数代入柯西-黎曼方程:

(1) $2x = 2y \implies x = y$

(2) $0 = -0 \implies 0 = 0$ (此条件恒成立)

函数 $f(z)$ 的四个偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y 都是关于 x, y 的连续函数（它们是多项式）。

因此，$f(z)$ 可微的充分必要条件是柯西-黎曼方程成立。由上述推导，柯西-黎曼方程成立当且仅当 $x = y$。

所以，函数 $f(z) = x^2 + iy^2$ 仅在直线 $y = x$ 上的点处可微。

一个函数在某点 z_0 解析，是指该函数在 z_0 的某个邻域内的每一点都可微。由于函数 $f(z)$ 仅仅在直线 $y = x$ 上可微，而直线上任何一点的邻域都包含了不满足 $y = x$ 的点（即函数在这些点不可微），所以函数 $f(z)$ 在复平面内的

任何一点都不解析。

相关练习可参考 MIT OCW 18.04 Complex Variables with Applications 的 Problem Set 3 及其解答。

练习题 C.2.2: 验证函数 $f(z) = 1/z (z \neq 0)$ 满足柯西-黎曼方程 (コーシー・リーマンほうていしき)，并求其导数 (どうかんすう) $f'(z)$。

答案与详解 C.2.2:

设 $z = x + iy$，则 $f(z) = \frac{1}{x+iy}$。为了分离实部和虚部，分子分母同乘以分母的共轭 $x - iy$:

$f(z) = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$。

所以，实部 $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$，虚部 $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$。

计算偏导数:

$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)(1)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$。

$v_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{(x^2+y^2)(1)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$。

可见 $u_x = v_y$。

$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = x\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)^{-1} = x(-1)(x^2 + y^2)^{-2}(2y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$。

$v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{-1} = -y(-1)(x^2 + y^2)^{-2}(2x) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$。

可见 $u_y = -v_x$ (即 $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$)。

由于柯西-黎曼方程 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$ 在所有 $z \neq 0$ (即 x, y 不全为零) 的点成立，且这些偏导数在 $z \neq 0$ 处都是连续的，所以函数 $f(z) = 1/z$ 在 $z \neq 0$ 处是解析的。

其导数可以表示为 $f'(z) = u_x + iv_x$ (也可以用 $f'(z) = v_y - iu_y$ 等形式):

$f'(z) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2ixy}{(x^2+y^2)^2}$

为了将其化简为更熟悉的形式，注意到分子 $y^2 - x^2 + 2ixy = -(x^2 - 2ixy - y^2) = -(x^2 - 2ixy + (iy)^2) = -(x - iy)^2 = -(\bar{z})^2$。

分母 $(x^2 + y^2)^2 = (|z|^2)^2 = (z\bar{z})^2 = z^2(\bar{z})^2$。

所以，$f'(z) = \frac{-(\bar{z})^2}{z^2(\bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}$。

这与我们对实变函数 $g(x) = 1/x$ 求导得 $g'(x) = -1/x^2$ 的结果形式一致。

3. 复积分 (Complex Integration - ふくそせきぶん)

复积分是复变函数理论的核心内容之一，柯西积分定理和柯西积分公式是其中最为重要的基石。它们揭示了解析函数的深刻性质，并为计算某些类型的积分提供了强大的工具。

练习题 C.3.1 (柯西积分定理应用 - コーシーのせきぶんていりのおうよう): 设 C 为单位圆 $|z| = 1$，逆时针方向。计算积分 (せきぶんをけいさん) $\oint_C \frac{e^z \cos(z)}{z^2+4} dz$。

答案与详解 C.3.1:

被积函数为 $g(z) = \frac{e^z \cos(z)}{z^2+4}$。

我们需要确定 $g(z)$ 在积分路径 C (单位圆 $|z| = 1$) 及其内部的解析性。

函数的奇点由分母 $z^2 + 4 = 0$ 给出。

$z^2 = -4 \implies z = \pm\sqrt{-4} \implies z = \pm 2i$。

奇点为 $z_1 = 2i$ 和 $z_2 = -2i$。

判断奇点是否在单位圆内部:

$|z_1| = |2i| = 2$。因为 $2 > 1$，所以 $z_1 = 2i$ 在单位圆外部。

$|z_2| = |-2i| = 2$。因为 $2 > 1$，所以 $z_2 = -2i$ 也在单位圆外部。

由于被积函数 $g(z)$ 的所有奇点都在积分路径 C 的外部，因此 $g(z)$ 在路径 C 及其内部是解析的。

根据柯西积分定理，如果一个函数在单连通区域 D 内解析，且 C 是 D 内的一条简单闭合路径，则该函数沿 C 的积分为零。

因此，$\oint_C \frac{e^z \cos(z)}{z^2+4} dz = 0$。

相关柯西定理与公式的练习可参考 MIT OCW 18.04 Complex Variables with Applications 的 Problem Set 5 及其解答。

练习题 C.3.2 (柯西积分公式应用 - コーシーのせきぶんこうしきのおうよう): 设 C 为圆周 $|z-1| = 1/2$，逆时针方向。计算积分 $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2} dz$。

答案与详解 C.3.2:

被积函数为 $g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}$。

积分路径 C 是以 $z_0 = 1$ 为圆心，半径 $R = 1/2$ 的圆。

函数的奇点由分母 $(z-1)^2(z+1)^2=0$ 给出，即 $z_1=1$ (二阶极点) 和 $z_2=-1$ (二阶极点)。

判断奇点是否在路径 C 内部：

- 对于 $z_1=1$：它就是圆心，显然在圆 C 内部。
- 对于 $z_2=-1$：它到圆心 $z_0=1$ 的距离为 $|-1-1|=|-2|=2$。由于 $2>R=1/2$，所以 $z_2=-1$ 在圆 C 外部。

  因此，在积分路径 C 内部只有一个奇点 $z_1=1$。

  我们可以将被积函数改写为 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz$，其中 $f(z)=\frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2}$。

  由于奇点 $z_2=-1$ 在 C 外部，函数 $f(z)$ 在路径 C 及其内部是解析的。

  根据柯西高阶导数积分公式：$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$。

  在本题中，$z_0=1$，且分母是 $(z-1)^2$，所以 $n+1=2 \implies n=1$。

  因此，$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(1)=2\pi i f'(1)$。

  现在计算 $f'(z)$：

  $f(z)=\sin(\pi z)(z+1)^{-2}$

  $f'(z)=\frac{d}{dz}[\sin(\pi z)](z+1)^{-2}+\sin(\pi z)\frac{d}{dz}[(z+1)^{-2}]$

  $=\pi\cos(\pi z)(z+1)^{-2}+\sin(\pi z)[-2(z+1)^{-3}(1)]$

  $=\frac{\pi\cos(\pi z)}{(z+1)^2}-\frac{2\sin(\pi z)}{(z+1)^3}$

  计算 $f'(1)$：

  $f'(1)=\frac{\pi\cos(\pi)}{(1+1)^2}-\frac{2\sin(\pi)}{(1+1)^3}=\frac{\pi(-1)}{(2)^2}-\frac{2(0)}{(2)^3}$

  $=-\frac{\pi}{4}-0=-\frac{\pi}{4}$。

  所以，积分值为 $2\pi i f'(1)=2\pi i\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{i\pi^2}{2}$。

4. 级数 (Series: Taylor and Laurent Series - きゅうすう：テイラーきゅうすうとローランきゅうすう)

泰勒级数和洛朗级数是复变函数理论中表示函数的重要工具。泰勒级数用于在解析点邻域内展开函数，而洛朗级数则能处理函数在孤立奇点邻域的行为，是研究奇点性质和计算留数的基础。

练习题 C.4.1: 求函数 $f(z)=\exp(1/z)$ 在 $z_0=0$ 的洛朗级数展开式 (ローランきゅうすうてんかい)，并指出收敛区域 (しゅうそくいき)。

答案与详解 C.4.1:

我们知道指数函数 e^w 的泰勒级数展开式为：

$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$

此级数对所有复数 $w \in \mathbb{C}$ 都收敛。

令 $w = 1/z$。将此代入 e^w 的泰勒级数，即可得到 $f(z) = \exp(1/z)$ 关于 $z_0 = 0$ 的洛朗级数：

$\exp(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}$

$= \frac{1}{0! z^0} + \frac{1}{1! z^1} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots$

$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots$

这是一个洛朗级数，因为它包含了 z 的负幂次项。

收敛区域:

原 e^w 级数对所有 w 收敛。由于 $w = 1/z$，该级数对所有 $1/z$ 有定义（即 $z \neq 0$）且 $1/z$ 为有限值的复数 z 收敛。

因此，$\exp(1/z)$ 的洛朗级数在 $0 < |z| < \infty$ 的区域内收敛。这意味着它在除去原点的整个复平面上收敛。

更多洛朗级数展开的练习，包括在不同环域内的展开，可参考相关资料 及 MIT OCW 18.04 Complex Variables with Applications 的 Problem Set 7 及其解答。

练习题 C.4.2 (不同区域的洛朗级数): 求函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ 在下列环域 (えんかんりょういき) 内的洛朗级数展开式:

a) $1 < |z| < 3$

b) $|z| > 3$

答案与详解 C.4.2:

首先，对 $f(z)$ 进行部分分式分解：

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}$

通过通分或代入特定值，可得 $A = -1/2, B = 1/2$。

所以，$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z-3)}$。

a) **环域** $1 < |z| < 3$:

对于第一项 $-\frac{1}{2(z-1)}$:

因为 $|z| > 1$，所以 $|1/z| < 1$。我们可以提出 z：

$-\frac{1}{2(z-1)} = -\frac{1}{2z(1-1/z)} = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ (利用几何级数 $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ for $|w| < 1$)

$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}$ (令 $k = n+1$)。此级数在 $|1/z| < 1 \implies |z| > 1$ 时收敛。

对于第二项 $\frac{1}{2(z-3)}$：

因为 $|z| < 3$，所以 $|z/3| < 1$。我们可以提出 -3：

$\frac{1}{2(z-3)} = \frac{1}{2(-3)(1-z/3)} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

$= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$。此级数在 $|z/3| < 1 \implies |z| < 3$ 时收敛。

综合起来，在环域 $1 < |z| < 3$ 内，$f(z)$ 的洛朗级数为：

$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$

$= \cdots - \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} - \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} - \dots$

b) **环域 $|z| > 3$**:

对于第一项 $-\frac{1}{2(z-1)}$：

因为 $|z| > 3$，所以必然有 $|z| > 1$，因此 $|1/z| < 1$。展开方式同 (a) 部分：

$-\frac{1}{2(z-1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}$。此级数在 $|z| > 1$ 时收敛。

对于第二项 $\frac{1}{2(z-3)}$：

因为 $|z| > 3$，所以 $|3/z| < 1$。我们可以提出 z：

$\frac{1}{2(z-3)} = \frac{1}{2z(1-3/z)} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{z^k}$ (令 $k = n+1$)。此级数在 $|3/z| < 1 \implies |z| > 3$ 时收敛。

综合起来，在环域 $|z| > 3$ 内，$f(z)$ 的洛朗级数为：

$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{z^k}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}-1}{z^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^0-1}{z} + \frac{3^1-1}{z^2} + \frac{3^2-1}{z^3} + \dots\right)$

$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{26}{z^4} + \dots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} + \dots$

5. 奇点与留数 (Singularities and Residues - とくいてんと りゅうすう)

孤立奇点是复变函数不解析的点，但其邻域内函数处处解析。根据函数在奇点附近的洛朗展开行为，孤立奇点可分为

可去奇点、极点和本性奇点。留数是函数在孤立奇点处洛朗展开中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数，它在留数定理中扮演核心角色，使得复围线积分的计算大大简化。

练习题 C.5.1:

a) 分类函数 $f(z)=\cot(z)$ 在 $z=0$ 处的奇点类型 (とくいてんのしゅるい)。

b) 计算函数 $g(z)=\frac{1}{z^2+1}$ 在 $z=-i$ 处的留数 (りゅうすう)。

答案与详解 C.5.1:

a) 函数 $f(z)=\cot(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$。

考虑 $z=0$ 点。

分子 $\cos(0)=1\neq 0$。

分母 $\sin(0)=0$。

由于分子在 $z=0$ 不为零，分母在 $z=0$ 为零，所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一个极点。

为了确定极点的阶数，我们考察 $\sin(z)$ 在 $z=0$ 处的零点阶数。

$\sin(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots=z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)$

$\sin(z)$ 在 $z=0$ 处有一个一阶零点。

因此，$f(z)=\cot(z)$ 在 $z=0$ 处有一个一阶极点（简单极点 - たんじゅんきょく）。

或者，可以直接计算留数来判断（如果极限存在且非零，则为简单极点）：

$\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0} z\frac{\cos(z)}{\sin(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)}\cdot\lim_{z\to 0}\cos(z)$

使用洛必达法则或已知极限 $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}=1$，所以 $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)}=1$。

$\lim_{z\to 0}\cos(z)=\cos(0)=1$。

所以，$\lim_{z\to 0} z\cot(z)=1\times 1=1$。

由于该极限存在且不为零，所以 $z=0$ 是 $f(z)=\cot(z)$ 的一个简单极点。其留数为 $\mathrm{Res}(\cot(z),0)=1$。

b) 函数 $g(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$。

奇点为 $z=i$ 和 $z=-i$。我们要计算在 $z_0=-i$ 处的留数。

$z_0=-i$ 是一个简单极点，因为当 $z\to -i$ 时，因子 $(z+i)\to 0$，而另一个因子 $(z-i)\to -2i\neq 0$。

对于简单极点 z_0，留数计算公式为 $\mathrm{Res}(g,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)$。

$\mathrm{Res}(g,-i)=\lim_{z\to -i}(z-(-i))\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}$

$= \lim_{z \to -i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i}$

将分母实数化：$\frac{1}{-2i} = \frac{1 \cdot i}{-2i \cdot i} = \frac{i}{-2i^2} = \frac{i}{-2(-1)} = \frac{i}{2}$。

所以，$\text{Res}(g, -i) = \frac{i}{2}$。

更多奇点与留数的练习可参考 以及 MIT OCW 18.04 Complex Variables with Applications 的 Problem Set 9 及其解答。

练习题 C.5.2: 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$，其中 C 是圆周 (えんしゅう) $|z| = 2$，逆时针方向 (はんとけいまわり)。

答案与详解 C.5.2:

被积函数 $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$。

积分路径 C 是以原点为圆心，半径为2的圆，逆时针方向。

首先找出 $f(z)$ 的孤立奇点:

分母为零的点是 $z - 1 = 0 \implies z_1 = 1$ 和 $(z+3)^2 = 0 \implies z_2 = -3$。

判断哪些奇点在路径 C 内部:

- 对于 $z_1 = 1$：$|z_1| = |1| = 1$。因为 $1 < 2$ (圆的半径)，所以 $z_1 = 1$ 在 C 内部。
- 对于 $z_2 = -3$：$|z_2| = |-3| = 3$。因为 $3 > 2$，所以 $z_2 = -3$ 在 C 外部。

  根据留数定理，积分值等于 $2\pi i$ 乘以 C 内部所有奇点的留数之和。在本题中，C 内部只有一个奇点 $z_1 = 1$。

  我们需要计算 $\text{Res}(f, 1)$。

  由于 $z_1 = 1$ 是分母 $(z-1)$ 的一阶零点，且分子 e^z 及分母的另一部分 $(z+3)^2$ 在 $z = 1$ 处不为零且解析，

  所以 $z_1 = 1$ 是 $f(z)$ 的简单极点。

  $\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$

  $= \lim_{z \to 1} \frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e^1}{(1+3)^2} = \frac{e}{4^2} = \frac{e}{16}$。

  根据留数定理:

  $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 1) = 2\pi i \cdot \frac{e}{16} = \frac{i\pi e}{8}$。

6. 有理函数逼近 (帕德近似 - 考题6重点) (Rational Function Approximation - Padé Approximant - パデきんじ - Exam 6 Focus)

帕德近似是一种用有理函数（即两个多项式的商）来逼近给定函数的方法。它通常比相同阶数的泰勒级数在更大的定

义域内提供更好的逼近效果，尤其适用于逼近那些具有极点或在无穷远处有特定行为的函数。帕德近似在物理和工程中有广泛应用，例如在电路理论、控制系统和量子场论中。其核心思想是匹配函数在某一点（通常是原点）的泰勒级数展开的前若干项。

练习题 C.6.1: 已知函数 $f(x)$ 的泰勒展开式 (テイラーてんかい) 为 $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + O(x^4)$。求其 $[1/1]$ 阶帕德近似 (パデきんじ) $R_{1,1}(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{a_0+a_1x}{1+b_1x}$。

答案与详解 C.6.1:

帕德近似 $R_{L,M}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{L} a_i x^i}{1+\sum_{j=1}^{M} b_j x^j}$ (这里分母的常数项 b_0 归一化为1)。

其要求是 $f(x) - R_{L,M}(x) = O(x^{L+M+1})$。

这意味着 $f(x)Q_M(x) - P_L(x) = O(x^{L+M+1})$。

对于 $[1/1]$ 阶帕德近似，$L = 1, M = 1$。所以 $P_1(x) = a_0 + a_1x$，$Q_1(x) = 1 + b_1x$。

我们要求 $(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots)(1 + b_1x) - (a_0 + a_1x) = O(x^{1+1+1}) = O(x^3)$。

展开左边:

$(c_0 + c_1x + c_2x^2)(1 + b_1x) - (a_0 + a_1x) + O(x^3)$

$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_0b_1x + c_1b_1x^2 - a_0 - a_1x + O(x^3)$

$= (c_0 - a_0) + (c_1 + c_0b_1 - a_1)x + (c_2 + c_1b_1)x^2 + O(x^3)$

为了使上式为 $O(x^3)$，我们需要 x^0, x^1, x^2 的系数均为零:

1. $x^0 : c_0 - a_0 = 0 \implies a_0 = c_0$
2. $x^1 : c_1 + c_0b_1 - a_1 = 0 \implies a_1 = c_1 + c_0b_1$
3. $x^2 : c_2 + c_1b_1 = 0$

   这是一个关于 a_0, a_1, b_1 的线性方程组。

   从方程 (3) 解出 b_1 (假设 $c_1 \neq 0$):

   $b_1 = -\frac{c_2}{c_1}$

   将 b_1 代入方程 (2) 解出 a_1:

   $a_1 = c_1 + c_0\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) = \frac{c_1^2 - c_0c_2}{c_1}$

   a_0 由方程 (1) 直接得到：$a_0 = c_0$。

   因此，$[1/1]$ 阶帕德近似为:

$R_{1,1}(x) = \frac{c_0 + \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_1} x}{1 - \frac{c_2}{c_1} x} = \frac{c_0 c_1 + (c_1^2 - c_0 c_2) x}{c_1 - c_2 x}$ (假设 $c_1 \neq 0$)。

如果 $c_1 = 0$:

若 $c_2 \neq 0$，则方程 (3) 变为 $c_2 = 0$，这与假设矛盾。这意味着如果 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$，标准的 $[1/1]$ 帕德近似可能不存在或需要特殊处理（例如，可能退化为低阶近似，或者分母的 b_1 必须为零，此时无法匹配到 $O(x^3)$）。

通常情况下，如果 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$，则 b_1 无法由 $c_2 + c_1 b_1 = 0$ 唯一确定（除非 $c_2 = 0$）。若 $c_1 = 0$，则方程(3)为 $c_2 = 0$。若此条件不满足，则不能保证 $O(x^3)$ 的精度。

更一般地，求解帕德系数的系统方程可以从

$(\sum_{k=0}^{L+M} c_k x^k)(1 + \sum_{j=1}^{M} b_j x^j) = \sum_{i=0}^{L} a_i x^i + O(x^{L+M+1})$ 导出。

对于 $[1/1]$ 近似，$L + M + 1 = 3$。

$c_0 = a_0$

$c_1 + c_0 b_1 = a_1$

$c_2 + c_1 b_1 = 0$ (这是 x^2 项的系数，因为 $P_1(x)$ 中 x^2 系数为0)

练习题 C.6.2: 求函数 $f(x) = e^x$ 的泰勒级数在 $x = 0$ 附近的前三项为 $1 + x + \frac{x^2}{2}$。求 e^x 的 $[1/1]$ 阶帕德近似。

答案与详解 C.6.2:

函数 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 附近的泰勒展开为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

所以，$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$。

我们要求 $[1/1]$ 阶帕德近似 $R_{1,1}(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$。

根据练习题 C.6.1 推导的公式:

$a_0 = c_0 = 1$

$b_1 = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{1/2}{1} = -\frac{1}{2}$

$a_1 = c_1 + c_0 b_1 = 1 + (1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

所以，e^x 的 $[1/1]$ 阶帕德近似为:

$R_{1,1}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{2+x}{2-x}$。

我们可以验证一下这个近似的泰勒展开:

$\frac{2+x}{2-x} = \frac{2+x}{2(1-x/2)} = \frac{1+x/2}{1-x/2} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1}$

利用 $(1-w)^{-1}=1+w+w^2+O(w^3)$，令 $w=x/2$:

$\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+O(x^3)\right)$

$=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+O(x^3)\right)$

$=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+O(x^3)$

$=1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$。

这与 e^x 的泰勒展开的前三项 $1+x+\frac{x^2}{2}$ 一致，符合 $[1/1]$ 阶帕德近似的要求（匹配到 $L+M=1+1=2$ 阶，即 x^0,x^1,x^2 共三项系数）。

帕德近似在许多情况下，尤其是在处理具有奇点或渐近行为的函数时，能提供比截断泰勒级数更优的近似效果。例如，它可以用来从发散的级数中提取有用的信息，或者在泰勒级数收敛半径之外进行近似。