



[问题1]：等离子体中的荷电粒子产生的电场的方程，其解与德拜长度的关系，以及库仑对数

等离子体中荷电粒子电场、德拜长度与库仑对数 (プラズマ中荷電粒子電場、デバイ長とクーロン対数)

1. 方程与解 (方程式と解法)

- 泊松方程 (Poisson's eq. / ポアソン方程式):

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- 电荷密度 (Charge density / 電荷密度): $\rho = q_{test}\delta(\mathbf{r}) + \rho_{ind}$.
 - 感生电荷 (Induced charge / 誘起電荷) ρ_{ind} 来自线性化玻尔兹曼分布 (Linearized Boltzmann dist. / 線形化ボルツマン分布):
 $n_{e,i} \approx n_0(1 \pm \frac{e\phi}{k_B T_{e,i}})$, 故 $\rho_{ind} \approx -n_0 e^2 \phi (\frac{1}{k_B T_e} + \frac{1}{k_B T_i})$.
- 屏蔽泊松方程 (Screened Poisson eq. / 遮蔽されたポアソン方程式):

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi = -\frac{q_{test}\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

德拜长度 (Debye length / デバイ長) λ_D :

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{k_B T_e} + \frac{1}{k_B T_i} \right)$$

(电子屏蔽 (Electron screening / 電子遮蔽) 时: $\lambda_D \rightarrow \lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}}$)

- 解 - 汤川势 (Solution - Yukawa pot. / 解 - 湯川ポテンシャル):

$$\phi(r) = \frac{q_{test}}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$$

2. 德拜长度与库仑对数 (デバイ長とクーロン対数)

- λ_D 意义 (Significance / 意義):
 - 电荷屏蔽特征尺度 (Charge screening scale / 電荷遮蔽の特性スケール).
 - $r \ll \lambda_D$: 近似库仑势 (Approx. Coulomb pot. / 近似クーロンポテンシャル).
 - $r \gg \lambda_D$: 电场被屏蔽 (Field shielded / 電場は遮蔽される).
- 库仑对数 (Coulomb logarithm / クーロン対数) $\ln \Lambda$: 修正碰撞积分发散 (Corrects collision integral divergence / 衝突積分の発散を修正).

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right)$$

- λ_D : 最大碰撞参数 (Max. impact parameter / 最大衝突径数).
- b_0 : 最小碰撞参数 (Min. impact parameter / 最小衝突径数), e.g., $b_0 \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T_e}$.

[问题2] 均质等离子体中入射了以 $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ 表示的电磁波。求等离子体的介电常数 $\epsilon(k, \omega)$ 和电磁波的色散关系。讨论电磁波能在等离子体中传播的条件。

等离子体介电常数、色散关系与传播 (プラズマの誘電率、分散関係と伝播)

前提 (Assumptions / 前提条件): 均质 (Homogeneous / 均一), 未磁化 (Unmagnetized / 非磁化) 冷等离子体 (Cold plasma / 冷たいプラズマ), 忽略离子运动 (Ignore ion motion / イオン運動を無視), 电子密度 (Electron density / 電子数密度) n_0 .

1. 介电常数 (誘電率)

1. 电子运动 (Electron motion / 電子運動): $m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E}$ ($d/dt \rightarrow -i\omega$)
 $\implies \mathbf{v}_e = -\frac{ie\mathbf{E}}{\omega m_e}$.
2. 感应电流 (Induced current / 誘起電流): $\mathbf{J}_{ind} = -n_0 e \mathbf{v}_e = \frac{in_0 e^2}{\omega m_e} \mathbf{E}$.
3. 电导率 (Conductivity / 電気伝導率): $\sigma = \frac{in_0 e^2}{\omega m_e}$.
4. 介电常数 (Dielectric const. / 誘電率): $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} = \epsilon_0 - \frac{n_0 e^2}{m_e \omega^2}$.

等离子体频率 (Plasma freq. / プラズマ周波数) $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$.

\implies 相对介电常数 (Relative permittivity / 比誘電率) $\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

(注: 此处 $\epsilon(\omega)$, 非 $\epsilon(k, \omega)$ (not k -dependent / k 非依存)).

2. 色散关系 (分散関係)

麦克斯韦方程 (Maxwell's eqns. / マクスウェル方程式) for 横向波 (transverse wave / 横波) ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$):

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \text{ and } i\mathbf{k} \times \mathbf{B}/\mu_0 = -i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}.$$

$$\implies -k^2\mathbf{E} = -\omega^2\mu_0\epsilon(\omega)\mathbf{E} \implies k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon(\omega).$$

代入 $\epsilon(\omega)$ 及 $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

色散关系 (Dispersion relation / 分散関係):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

3. 传播条件 (Propagation condition / 伝播条件)

波传播 (Wave propagates / 波伝播) $\iff k$ 为实数 (real / 実数) $\implies k^2 \geq 0$:

$$\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \geq 0 \implies \omega^2 \geq \omega_p^2.$$

传播条件 (Propagation condition / 伝播条件): $\omega \geq \omega_p$.

- $\omega > \omega_p$: 传播 (Propagates / 伝播).
- $\omega < \omega_p$: 衰减/反射 (Evanescent/Reflected / 減衰/反射).
- $\omega = \omega_p$: 截止 (Cut-off / 遮断).

[问题3] 13.6eV 的能量的质子撞击静止的氢原子。能够使其电离吗？请说明理由。如果换成相同能量的电子情况如何？此外，质子要电离氢原子，所需的最低能量是多少？（提示：从质心运动和相对运动的观点考虑。）

H原子电离阈能 (H-atom Ionization Threshold / 水素原子の電離閾エネルギー)

- 电离能 (Ionization Energy / 電離エネルギー) $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$.
- 仅质心系能量 (CM Energy / 重心系エネルギー) E_{CM} 可用于电离 (Ionization / 電離).
- $E_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2} K_{lab}$ (m_1 : 入射 (incident / 入射), m_2 : 靶 (target / 標的), K_{lab} : 实验室系动能 (Lab KE / 実験室系運動エネルギー)). 电离需 (Need for ionization / 電離の必要条件): $E_{CM} \geq E_{ion}$.
- 符号 (Symbols / 記号): m_p (质子 / proton / 陽子), m_e (电子 / electron / 電子), $m_H \approx m_p$ (H原子 / H-atom / H原子).

1. 13.6eV 质子 (Proton / 陽子) + H:

$$m_1 = m_p, m_2 \approx m_p, K_{lab} = 13.6 \text{ eV}.$$

$$E_{CM} = \frac{m_p}{m_p+m_p} K_{lab} = \frac{1}{2} K_{lab} = 6.8 \text{ eV}.$$

$$6.8 \text{ eV} < E_{ion} \implies \text{不电离 (No Ionization / 電離不可)}. (E_{CM} \text{ 不足 / insufficient}).$$

2. 13.6eV 电子 (Electron / 電子) + H:

$$m_1 = m_e, m_2 \approx m_p, K_{lab} = 13.6 \text{ eV}.$$

$$E_{CM} = \frac{m_p}{m_e + m_p} K_{lab} \approx K_{lab} = 13.6 \text{ eV (因 } m_e \ll m_p).$$

$$13.6 \text{ eV} \geq E_{ion} \implies \text{可电离 (閾值) (Can Ionize (threshold) / 電離可能 (閾値)).}$$

3. 质子 (Proton / 陽子) 电离H所需最低 K_{lab} (Min. K_{lab} for p to ionize H / 陽子がHを電離する最低 K_{lab}):

$$\text{需 (Need / 必要) } E_{CM} = E_{ion} = 13.6 \text{ eV.}$$

$$\frac{1}{2} K_{lab, min} = E_{ion} \implies K_{lab, min} = 2E_{ion} = 2 \times 13.6 \text{ eV} = 27.2 \text{ eV.}$$

[問題4] 中性气体的扩散系数を推定しなさい。気体分子の半径を $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 、個数を $N = 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ 、速度を 350 m/s とする。また、プラズマ衝突振動数は温度にどのように依存するか。

(估计中性气体的扩散系数。设气体分子半径为 $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，数密度为 $N = 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ，速度为 350 m/s 。此外，等离子体碰撞频率如何依赖于温度？)

气体扩散与等离子体碰撞 (Gas Diffusion & Plasma Collision / 気体拡散とプラズマ衝突)

1. 气体扩散系数 (Gas Diffusion / 気体の拡散係数)

- 公式 (Formula / 公式): $D \approx \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$.
 - $\lambda = (\sqrt{2} N \sigma_{coll})^{-1}$: 平均自由程 (Mean free path / 平均自由行程).
 - $\sigma_{coll} = 4\pi r_m^2$: 碰撞截面 (Collision cross-section / 衝突断面積).
- 参数 (Parameters / パラメータ): $r_m = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$, $N = 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $\bar{v} = 350 \text{ m/s}$.
- 计算 (Calculation / 計算):
 - i. $\sigma_{coll} = 4\pi (0.5 \times 10^{-10})^2 = \pi \times 10^{-20} \text{ m}^2$.
 - ii. $\lambda = (\sqrt{2} \cdot 3 \times 10^{25} \cdot \pi \times 10^{-20})^{-1} \approx 7.5 \times 10^{-7} \text{ m}$.
 - iii. $D \approx \frac{1}{3} (7.5 \times 10^{-7}) (350) \approx 8.75 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.
- 结果 (Result / 結果): $D \approx 8.75 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

2. 等离子体碰撞频率-温度依赖性 (Plasma Collision Freq-Temp Dependence / プラズマ衝突振動数-温度依存性)

- 碰撞频率 (Collision freq. / 衝突振動数) $\nu \approx n\sigma v_{rel}$.
- $v_{th} \propto T^{1/2}$ (热速度 / Thermal velocity / 熱速度).
- $\sigma_{Coulomb} \propto \frac{\ln \Lambda}{T^2}$ (库仑截面 / Coulomb cross-section / クーロン断面積), $\ln \Lambda$ (库仑对数 / Coulomb log / クーロン対数) 弱依赖 T (weak T-dependence / 弱いT依存性).
- 电子-离子碰撞 (e-i collision / 電子イオン衝突) $\nu_{ei} \propto n_i \left(\frac{\ln \Lambda}{T_e^2} \right) T_e^{1/2} \propto n_i \frac{\ln \Lambda}{T_e^{3/2}}$.
- 结论 (Conclusion / 結論): $\nu_{ei} \propto T_e^{-3/2}$.

[问题5] 电子的流体方程式を用いて、ボルツマン関係を導出しなさい。また、電子音波の分散関係を導出しなさい。

(使用电子的流体方程，推导玻尔兹曼关系。另外，推导电子声波的色散关系。)

电子流体：玻尔兹曼关系与电子声波 (e-Fluid: Boltzmann & e-Acoustic Wave / 電子流体：ボルツマンと電子音波)

1. 玻尔兹曼关系 (Boltzmann Relation / ボルツマン関係)

- 电子动量方程 (e-Momentum / 電子運動量) (1D, 无碰撞 / collisionless / 無衝突, 忽略惯性 / ignore inertia / 慣性無視):

$$0 = -en_e E - \frac{\partial p_e}{\partial x}.$$
- 静电场 (Electrostatic / 静電場) $E = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$. 等温 (Isothermal / 等温) $p_e = n_e k_B T_e$.

$$\implies e d\phi = k_B T_e \frac{dn_e}{n_e}.$$
- 积分 (Integral / 積分): $n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right)$.
 (线性化 (Linearized / 線形化): $n_{e1} \approx n_{e0} \frac{e\phi}{k_B T_e}$)

2. 电子声波 (朗缪尔波) 色散 (e-Acoustic (Langmuir) Wave Dispersion / 電子音波 (ラングミュア波) 分散)

- 线性化方程组 (Linearized system / 線形化方程式系):
 (离子不动 / Ions immobile / イオン不動)
 - 连续性 (Continuity / 連続): $-i\omega n_{e1} + ik n_{e0} v_{e1} = 0$. (A)
 - 动量 (Momentum / 運動量): $-i\omega m_e v_{e1} = -eE_1 - ik \frac{\gamma_e k_B T_e}{n_{e0}} n_{e1}$. (B)
 - 泊松 (Poisson / ポアソン): $ikE_1 = -\frac{en_{e1}}{\epsilon_0} \implies E_1 = \frac{ien_{e1}}{k\epsilon_0}$. (C)
- 求解 (Solve / 解法): (A) $\rightarrow v_{e1}$. (A,C) \rightarrow (B).

$$\omega^2 m_e = \frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0} + \gamma_e k_B T_e k^2$$

- 色散关系 (Dispersion / 分散関係):

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + v_{the}^2 k^2$$

- $\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$ (电子等离子体频率 / e-plasma freq. / 電子プラズマ周波数).
- $v_{the}^2 = \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}$ (电子热速度 / e-thermal vel. / 電子熱速度).

[问题6] 解 MHD 方程式以说明阿尔文波 (Alfvén wave) 的色散关系。此处，压力的效果可以忽略。解弦的波动方程并讨论其关系。

阿尔文波与弦波 (Alfvén & String Waves / アルフベン波と弦の波)

A. 阿尔文波 (Alfvén Wave / アルフベン波) (无压 / Pressureless / 無圧力)

1. MHD方程 (MHD Eqns. / MHD方程式):

- 动量 (Momentum / 運動量): $\rho_{m0} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0$.
- 感应 (Induction / 誘導): $\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v}$.

2. 色散 (Dispersion / 分散):

设 $\propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$. 联立得 (Combining gives / 連立して得る):

$$\omega^2 \rho_{m0} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{\mu_0}$$

阿尔文速度 (Alfvén Vel. / アルフベン速度) $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_{m0}}$.

$\Rightarrow \omega = kv_A |\cos \theta|$. (θ : \mathbf{k} 与 \mathbf{B}_0 夹角 / angle between \mathbf{k} , \mathbf{B}_0 / \mathbf{k} と \mathbf{B}_0 の角度).

B. 弦波 (String Wave / 弦の波)

1. 方程 (Eq. / 方程式): $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. $v_s = \sqrt{T/\lambda}$ (T : 张力 / Tension / 張力, λ : 线密度 / Linear density / 線密度).
2. 色散 (Dispersion / 分散): $\omega = kv_s$.

C. 关系 (Relationship / 関係)

- 相似 (Similar / 類似): $\theta = 0 \Rightarrow \omega = kv_A$, 形似 (like / 同形式) $\omega = kv_s$.

- **类比 (Analogy / アナロジー):** 磁力线 (Field lines / 磁力線) \leftrightarrow 弦 (String / 弦); 磁张力 (B_0^2/μ_0) (Mag. tension / 磁気張力) \leftrightarrow 弦张力 (T); $\rho_{m0} \leftrightarrow \lambda$.
- **物理 (Physics / 物理):** 磁力线为介质 (Field lines as medium / 磁力線が媒体)、等离子体供惯性 (Plasma provides inertia / プラズマが慣性を提供).

[问题7] 托卡马克中为了约束等离子体，需要在等离子体中通入电流。这是为什么？

托卡马克等离子体电流必要性 (Tokamak Current Need / トカマク電流の必要性)

目的 (Purpose / 目的): 磁约束 (Magnetic Confinement / 磁気閉じ込め).

1. **产生 B_p (Generate B_p / B_p 生成):**

环向电流 (I_p) (Toroidal Current / トロイダル電流) $\xrightarrow{\text{Ampere}}$ 极向磁场 (B_p) (Poloidal Field / ポロイダル磁場).

2. **形成螺旋磁面 (Form Helical Surfaces / 螺旋磁気面形成):**

$B_p + B_T$ (外加环向场 / External Toroidal Field / 外部トロイダル磁場) \Rightarrow **螺旋磁场/磁面 (Helical Field/Surfaces / 螺旋磁場/磁気面).**

3. **螺旋磁面作用 (Helical Surfaces Function / 螺旋磁気面の役割):**

- **约束 (Confinement / 閉じ込め):** 粒子沿磁面运动 (Particles follow surfaces / 粒子は磁気面に沿って運動).
- **减漂移 (Reduce Drift / ドリフト低減):** “短路” (Short-circuit / 短絡) 由 ∇B /曲率漂移 (curvature drift / 曲率ドリフト) 引起的电荷分离 (charge separation / 電荷分離), 减小 $E \times B$ 损失.
- **平衡 (Equilibrium / 平衡):** 洛伦兹力 ($\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p$) (Lorentz force / ローレンツ力) 平衡压力梯度 (∇p) (Balances pressure gradient / 压力勾配と平衡).

核心 (Core / 核心): $I_p \Rightarrow B_p \Rightarrow$ 螺旋结构 (Helical Structure / 螺旋構造) \Rightarrow 约束与平衡 (Confinement & Equilibrium / 閉じ込めと平衡).

[问题8] フォッカー-プランクの式を導出し、衝突拡散の表式について説明しなさい。

(推导福克-普朗克方程，并说明碰撞扩散的表达式。)

福克-普朗克方程与碰撞扩散 (Fokker-Planck Eq. & Collisional Diffusion / フォッカー・プランク方程式と衝突拡散)

1. 福克-普朗克方程 (Fokker-Planck Eq. / フォッカー・プランク方程式)

描述 $f(\mathbf{v}, t)$ 因小角度碰撞 (small-angle collisions / 小角度衝突) 的演化。

从主方程 (Master Eq.) 泰勒展开 (Taylor expand) 跃迁概率 (transition probability / 遷移確率)。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (A_i f) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (B_{ij} f)$$

- $A_i(\mathbf{v}) = \langle \Delta v_i \rangle_t$: 漂移矢量 (Drift vector / ドリフトベクトル) (动力学摩擦 / Dynamical friction / 動摩擦力).
 - $B_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_t$: 扩散张量 (Diffusion tensor / 拡散テンソル).
- (库仑碰撞 (Coulomb collisions / クーロン衝突) \Rightarrow 朗道积分 (Landau integral / ランダウ積分)).

2. 碰撞扩散 (实空间) (Collisional Diffusion (Real Space) / 衝突拡散 (実空間))

- 通量 (Flux / フラックス): $\mathbf{\Gamma} = -D \nabla n$.
- 平行B场/无B场 (D_{\parallel} / B-field Parallel/None / 磁場平行/なし):
 $D_{\parallel} \approx v_{th}^2 / \nu_c$ (v_{th} : 热速率 / Thermal speed / 熱速度, ν_c : 碰撞频率 / Collision freq. / 衝突周波数).
- 垂直B场 (经典) (D_{\perp} / B-field Perpendicular (Classical) / 磁場垂直 (古典的)):
 $D_{\perp} \approx \rho_L^2 \nu_{coll}$ (ρ_L : 拉莫尔半径 / Larmor radius / ラーマー半径).
 - 例: 电子 (Electron / 電子) $D_{\perp,e} \approx \rho_{Le}^2 \nu_{ei}$.
 - 依赖性 (Dependence / 依存性): $D_{\perp,e} \propto n_e T_e^{-1/2} B^{-2}$.