はい、変数の説明を含めつつ、できる限り字数を減らして記述します。

小レポート②

i) 運動量輸送方程式から、圧力平衡の式を導いて下さい。

運動量輸送方程式 $\rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
（ρ:密度, $\mathbf{v}$:速度, p:圧力, $\mathbf{J}$:電流密度, $\mathbf{B}$:磁場）
において、平衡 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{v} = 0$) を考えると、圧力平衡の式:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

が得られます。これは圧力勾配とローレンツ力の釣り合いを示します。

ii) 磁束関数 ψ とポロイダル電流束関数 F について、それぞれ電磁場の変数と座標変数を用いて表現してください。またそれぞれ面積分形式で表現して下さい。

軸対称円筒座標 (R, ϕ, Z) で考えます。

1. **磁束関数** $\psi(R, Z)$:
   ポロイダル磁場 (B_R, B_Z) を次式で定義します。

   $$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

   $2\pi\psi$ はポロイダル磁束を表します。
   面積分形式: $\psi(R, Z) = \int_0^R B_Z(r', Z) r' dr'$。
2. **ポロイダル電流束関数** $F(\psi)$:
   トロイダル磁場 B_ϕ を用いて $F = RB_\phi$ と定義します。
   $F = \frac{\mu_0}{2\pi} I_p$（$\mu_0$:真空透磁率, I_p:全ポロイダル電流）。
   $I_p = \iint_{S_p} \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{A}_p$（$\mathbf{J}_p$:ポロイダル電流密度, S_p:ポロイダル断面積）。

iii) 磁束関数とポロイダル電流束関数に加えて圧力の変数を用い、平衡を表すGrad-Shafranov方程式を記述し、各項の意味を述べて下さい。

Grad-Shafranov方程式:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi}$$

ここで演算子 $\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$ です。

各項の意味:

- 左辺 $\Delta^* \psi$: トロイダル電流密度 $J_\phi (= -\frac{1}{\mu_0 R} \Delta^* \psi)$ に関連。ポロイダル磁場の曲率・勾配の効果。
- 右辺第1項 $-\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi}$: 圧力勾配 $dp/d\psi$ が駆動するトロイダル電流の源。
- 右辺第2項 $-F \frac{dF}{d\psi}$: ポロイダル電流(トロイダル磁場)の勾配 $dF/d\psi$ が駆動するトロイダル電流の源。

この方程式は、磁場構造 ψ が圧力分布 $p(\psi)$ とポロイダル電流分布 $F(\psi)$ によって決定される軸対称平衡を記述します。