プラズマ物理I　春学期最終レポート

LIN HANQING
2ES25185E
糟谷研

問題1

トロイダル方向の角運動量保存を考えます。

$$P_\phi = R(mv_{\parallel} + eA_\phi) = \text{const}$$

ここで、P_ϕはトロイダル方向の正準角運動量です。

導出過程:

角運動量保存則より、点1と点2の角運動量は等しくなります。

$$R_1(mv_{\parallel 1} + eA_{\phi 1}) = R_2(mv_{\parallel 2} + eA_{\phi 2})$$

- mは粒子質量
- $v_{\parallel}$:磁力線に平行な速度
- e: 粒子電荷
- R: 主半径
- A_ϕ: トロイダル方向の磁気ベクトルポテンシャル

上式を変形し、運動量の項と磁気ベクトルポテンシャルの項を分離します。

$$-e(R_1A_{\phi 1} - R_2A_{\phi 2}) = m(R_1v_{\parallel 1} - R_2v_{\parallel 2})$$

磁気ベクトルポテンシャルの項に着目し、積分形式に変換します。

磁場と磁気ベクトルポテンシャルの関係式

$B_z = \frac{1}{R}\frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R}$ を用いると、次のように書けます

$$R_1A_{\phi 1} - R_2A_{\phi 2} = \int_{R_2}^{R_1}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)dR = \int_{R_2}^{R_1}RB_z\,dR$$

(B_zはポロイダル磁場)

平均値の定理により、この積分は次のように近似できます

$$\int_{R_2}^{R_1}RB_z\,dR \approx \bar{R}\bar{B_z}\Delta R$$

$\bar{R}$: 点1と点2の間の平均主半径

$\bar{B_z}$: 径方向領域にける平均ポロイダル磁場

ΔR: 径方向の幅、すなわち図に示される $\Delta tr = R_1 - R_2$

問題2

この導出は、磁場と磁気ベクトルポテンシャルの関係から始めます。

軸対称の円筒座標系において、ポロイダル磁場B_zとポロイダル磁束関数ψの関係は次式で与えられます

$$B_z = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

- ψ: ポロイダル磁束関数 $\psi = RA_\phi$と定義されます
- B_z: ポロイダル磁場

上式の両辺にRを掛けます

$$RB_z = \frac{\partial\psi}{\partial R}$$

ヒント に基づき、$\psi = RA_\phi$ を上式に代入します

$$RB_z = \frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R}$$

最後に、この式の両辺を主半径RについてR_2からR_1まで積分することで、証明すべき式が得られます

$$\int_{R_2}^{R_1}RB_z\,dR = \int_{R_2}^{R_1}\frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R}dR$$

証明完了。

問題3

捕捉粒子の場合、その軌道の最外側(点1)と最内側(点2)では運動方向が逆になります。

エネルギー保存則と磁気モーメント保存則より、平行速度$v_{\parallel}$の関係式が次のように導出されます

$$\frac{v_{\parallel}^2}{v_0^2} = 1 - \frac{\mu B_0}{1/2\, m v_0^2}\frac{B}{B_0} = 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}\frac{1-\varepsilon\cos\theta}{1-\varepsilon}$$

- v_0: 粒子の全速度(保存量)
- $v_{\perp 0}$: 磁気軸上($R=R_0$)での垂直速度
- $\varepsilon = r/R$: 逆アスペクト比
- θ: ポロイダル角

問題の条件より、点1と点2は共に $z=0$ の赤道面上にあるため、ポロイダル角は $\theta=0$ となります。これを上式に代入します。

$$\frac{v_\parallel^2}{v_0^2}=1-\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}\frac{1-\varepsilon\cos\theta}{1-\varepsilon}=1-\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}=1-\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}=\text{const}$$

$\Rightarrow$ $\theta=0$ において、平行速度の大きさは半径 R に依存しないことを示しています。

$\Rightarrow$ 点1と点2における平行速度の大きさは等しくなります。

$$|v_{\parallel 1}|=|v_{\parallel 2}|$$

図のバナナ軌道の運動からわかるように、点1と点2における粒子の運動方向は逆です。

$\Rightarrow$ 両者の速度の関係は:

$$v_{\parallel 2}=-v_{\parallel 1}$$

問題4

これまでの問いで得られた関係式から出発し、各項を段階的に置き換えていきます

$$|\Delta R|\simeq\frac{2m|v_\parallel|}{eB_p}$$

B_p: ポロイダル磁場。ここで赤道面上の B_z を B_p で置き換えています
$|v_\parallel|$: 捕捉粒子が赤道面上にいるときの平行速度

1. 平行速度 $|v_\parallel|$ の評価

ヒントに基づき、典型的な捕捉粒子に対して、その速度成分は次式を満たします

$$\frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2}\le 2\varepsilon$$

最大値を用いて評価します。粒子が $\theta=0$（赤道面外側）にいるときの平行速度は:

$$|v_\parallel|\sim\sqrt{2\varepsilon}\,v_\perp$$

$v_\perp$: 磁力線に垂直な速度
$\varepsilon=r/R$: 逆アスペクト比。r は小半径です

2. 安全係数 q を用いたポロイダル磁場 B_p の表現

安全係数 q の定義は:

$$q\equiv\frac{rB_\phi}{RB_p}\Rightarrow B_p=\frac{rB_\phi}{qR}$$

q: 安全係数
B_ϕ: トロイダル磁場

3. ラーモア半径 r_L の導入

ラーモア半径 $r_L=\dfrac{mv_\perp}{eB}$ と定義されます

ヒント $\Rightarrow$ $B_\phi\gg B_p$ $\Rightarrow$ 全磁場 $B=\sqrt{B_\phi^2+B_p^2}\simeq B_\phi$

$$\Rightarrow r_L\simeq\frac{mv_\perp}{eB_\phi}$$

4. 組合わせと簡略化:

以上各項最初の式に代入します

$$\begin{aligned}|\Delta R|&\simeq\frac{2m|v_\parallel|}{eB_p}\\&\simeq\frac{2m(\sqrt{2\varepsilon}\,v_\perp)}{e\left(\frac{rB_\phi}{qR}\right)}\\&=\left(\frac{mv_\perp}{eB_\phi}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2\varepsilon}\,qR}{r}\\&\simeq r_L\cdot\frac{2\sqrt{2(r/R)}\,qR}{r}\\&=2r_L q\sqrt{2}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}\frac{r}{R}}\\&=2r_L q\sqrt{\frac{2R}{r}}\end{aligned}$$

整理すると、最終 $\Rightarrow$ $\Delta_{tr}\simeq 2\left(\frac{2R}{r}\right)^{1/2}q r_L$

証明完了。