LIN HANQING 2E825185E 糟谷研

小レポート②

i) 運動量輸送方程式から、圧力平衡の式を導いて下さい

運動量輸送方程式: $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{J}\times\vec{B}$

(ρ: 密度; $\vec{v}$: 速度; P: 圧力; $\vec{J}$: 電流密度; $\vec{B}$: 磁場)

において、平衡 ($\frac{\partial}{\partial t}=0$, $\vec{v}=0$) を考えると、圧力平衡の式:

$$\nabla P = \vec{J}\times\vec{B}$$

が得られます。これは圧力勾配とローレンツ力の釣り合いを示します

ii). 軸対称円筒座標 (R,ϕ,z) で考えます

1. 磁束関数 $\psi(R,Z)$:

ポロイダル磁場 (B_R, B_z) を次式で定義します

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad B_z = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

$2\pi\psi$ はポロイダル磁束を表します

面積分形式: $\psi(R,Z) = \int_0^R B_z(r',Z)\,r'dr'$ (r は半径)

2. ポロイダル電流束関数 $F(\psi)$:

トロイダル磁場 B_ϕ を用いて $F = RB_\phi$ と定義します

$F = \frac{\mu_0}{2\pi}I_P$ (μ_0: 真空透磁率, I_P: 全ポロイダル電流)

$I_P = \iint_{S_P}\vec{J}_p\cdot d\vec{A}_p$ ($\vec{J}_P$: ポロイダル電流密度, S_P: ポロイダル断面積)。

iii) Grad-Shafranov 方程式: $\Delta^*\psi = -\mu_0 R^2\frac{dp}{d\psi} - F\frac{dF}{d\psi}$

ここで演算子 $\Delta^* = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ です

各項意味:

左辺 $\Delta^*\psi$: トロイダル電流密度 J_ϕ ($= -\frac{1}{\mu_0 R}\Delta^*\psi$) に関連。ポロイダル磁場の曲率・勾配の効果

$-\mu_0 R^2\frac{dp}{d\psi}$: 圧力勾配 $dp/d\psi$ が駆動するトロイダル電流の源.

$-F\frac{dF}{d\psi}$: ポロイダル電流 (トロイダル磁場) の勾配 $dF/d\psi$ が駆動するトロイダル電流の源.

この方程式は、磁場構造 ψ が圧力分布 $p(\psi)$ とポロイダル電流分布 $F(\psi)$ によって決定される軸対称平衡を記述します。