# 物理问题与黑板内容解析

## [问题3] 粒子撞击氢原子电离问题

**核心物理原理:**

1. **电离能 (Ionization Energy):** 氢原子在**相对坐标系**中的电离能 $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$。
2. **能量守恒与动量守恒:** 碰撞过程中系统总能量和总动量守恒。
3. **重心运动与相对运动:**
    - 总动能 $K_{total} = K_{COM} + K_{rel}$
    - $K_{COM} = \frac{1}{2} M_G V_g^2$ (重心动能)，$K_{rel} = \frac{1}{2} m_r V_r^2$ (相对动能)
    - $M_G$: 系统总质量, $V_g$: 重心速度, $m_r$: 折合质量, $V_r$: 相对速度。
    - **只有相对运动的能量 $K_{rel}$ 才能用于改变系统内部状态 (如电离)。**

**解答:**

**1. 为什么13.6eV的粒子撞击氢原子，氢原子不一定电离?**

- 入射粒子质量 $m_1$，动能 $K_{lab} = 13.6 \text{ eV}$，撞击静止氢原子 (质量 $M_H$)。
- 碰撞后系统总动量不为零，故重心动能 $K_{COM} > 0$。
- $K_{lab} = K_{COM} + K_{rel}$。
- 因此，$K_{rel} = K_{lab} - K_{COM} < K_{lab} = 13.6 \text{ eV}$。
- 由于 $K_{rel} < E_{ion}$，能量不足以电离。

**2. 电离所需的最低实验室系能量 $K_{lab\_min}$:**

- 相对动能与实验室系动能关系： $K_{rel} = \frac{M_H}{m_1 + M_H} K_{lab}$。
- 电离条件： $K_{rel} \geq E_{ion}$。
- 最低实验室系入射动能： $K_{lab\_min} = \frac{m_1 + M_H}{M_H} E_{ion}$。

**3. 入射粒子是电子 (electron):**

- $m_1 = m_e$, $M_H \approx m_p$ (质子质量), $m_p \approx 1836 m_e$.
- $K_{lab\_min}(\text{electron}) = \frac{m_e + m_p}{m_p} E_{ion} = (1 + \frac{m_e}{m_p}) E_{ion}$
- $K_{lab\_min}(\text{electron}) \approx (1 + \frac{1}{1836}) \times 13.6 \text{ eV} \approx \frac{1837}{1836} \times 13.6 \text{ eV} \approx 13.6074 \text{ eV}$.
- 若电子能量恰为 $13.6 \text{ eV}$，不能电离。

**4. 入射粒子是质子 (proton):**

- $m_1 = m_p, M_H \approx m_p$.
- $K_{lab\_min}(\text{proton}) = \frac{m_p+m_p}{m_p} E_{ion} = 2E_{ion}$
- $K_{lab\_min}(\text{proton}) = 2 \times 13.6 \text{ eV} = 27.2 \text{ eV}.$

**关于太阳内部的情况 (补充):**

- 高温等离子体中，粒子均有初始动能，非静止靶模型。
- 决定电离的是相对动能 $K_{rel} = \frac{1}{2} m_r v_{rel}^2$。
- 只要 $K_{rel} \geq 13.6 \text{ eV}$ 就可能电离。
- 温度越高，高能粒子对越多，电离度越高。电离的能量门槛始终是相对坐标系下的 $13.6 \text{ eV}$。

**黑板右侧 $E_p \approx 25 \text{ keV}$ 解释:**

- 情景：质子 ($m_p$) 入射静止电子 ($m_e$)。
- $K_{rel} = \frac{m_e}{m_p+m_e} K_{lab,p} \approx \frac{m_e}{m_p} K_{lab,p}$.
- 若 $K_{rel} = 13.6 \text{ eV}$ (作为目标相对能量，并非氢原子电离能在此情景的直接应用)，则 $K_{lab,p} \approx \frac{m_p}{m_e} \times 13.6 \text{ eV} \approx 1836 \times 13.6 \text{ eV} \approx 25 \text{ keV}$。
- 此计算与“质子入射氢原子使其电离”的阈能 ($27.2 \text{ eV}$) 是不同情景。

---

# 黑板内容解析

## 黑板 1：磁镜 (Magnetic Mirror)

- **内容:** 磁镜的磁场位形与带电粒子运动。
- **关键术语:**
  - 捕捉粒子 (Trapped Particles): 在磁镜两端反射、被约束的粒子。
  - 漂移轨道 (Drift Orbit): 粒子引导中心的缓慢横向运动。
- **原理:** 基于**磁矩守恒** ($\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$)。粒子向强磁场区运动时，$v_\perp$ 增加，$v_\parallel$ 减小至零后反向。
- **关联问题:** [问题6] 托卡马克约束。粒子捕获和漂移是所有磁约束装置的关键现象。

## 黑板 2：磁镜 + 电流产生磁场

- **新增内容:**
  - 明确标签: **ミラー磁場 (Mirror Magnetic Field)**。
  - 新图示: 载流直导线及其周围的磁场 (同心圆磁力线)。
- **理解:** 引入电流产生磁场的概念。
- **关联问题6 (托卡马克):**
  - 托卡马克中等离子体电流产生**极向磁场**。
  - 极向磁场与外部线圈产生的**环向磁场**叠加形成螺旋磁力线，对粒子约束至关重要（形成闭合磁面、平衡漂移）。

## 黑板 3：磁矩守恒推导 (dW⊥/dt 方法)

- **内容:** 推导磁矩 ($\mu$) 作为绝热不变量。
- **基本定义:**
  - 拉莫尔半径: $\rho_B = \frac{mv_\perp}{qB}$
  - 回旋频率: $\omega_c = \frac{qB}{m}$
- **推导核心:**
  i. 粒子回旋一圈因感应电动势获得的能量变化:
     $\Delta W_\perp = qV = -q\frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx -q\pi\rho_B^2\frac{\partial B}{\partial t}$
     (注: 黑板后续推导中可能忽略此负号，以得到标准磁矩表达式)
  ii. 垂直动能变化率: $\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{\omega_c}{2\pi}\Delta W_\perp$
     (黑板使用 $\Delta W_\perp \approx q\pi\rho_B^2\frac{\partial B}{\partial t}$)
     $\frac{dW_\perp}{dt} = q\pi\rho_B^2\frac{\omega_c}{2\pi}\frac{\partial B}{\partial t}$
  iii. 代入 $\rho_B, \omega_c$: $\frac{dW_\perp}{dt} = q\pi(\frac{mv_\perp}{qB})^2(\frac{qB}{2\pi m})\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{B}(\frac{mv_\perp^2}{2})\frac{\partial B}{\partial t}$
  iv. 即: $\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{W_\perp}{B}\frac{\partial B}{\partial t}$
- **结论:** $\frac{1}{W_\perp}\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} \implies \ln(\frac{W_\perp}{B}) = \text{const} \implies \frac{W_\perp}{B} = \text{const}$
- **磁矩:** $\mu = \frac{W_\perp}{B} = \frac{mv_\perp^2}{2B} = 常数$
- **意义:** 绝热不变量，磁镜效应基础，对托卡马克粒子轨道（如香蕉轨道）和约束重要。

## 黑板 4：磁矩守恒 (dμ/dt = 0 方法)

- **内容:** 从磁矩定义出发证明其守恒性。
- **定义:** $\mu = \frac{W_\perp}{B}$ (磁気モーメント)
- **求导:** $\frac{d}{dt}(\frac{W_\perp}{B}) = \frac{1}{B}\frac{dW_\perp}{dt} - \frac{W_\perp}{B^2}\frac{dB}{dt} = \frac{1}{B}(\frac{dW_\perp}{dt} - \frac{W_\perp}{B}\frac{dB}{dt})$

- **守恒条件:** 若 $\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{W_\perp}{B}\frac{dB}{dt}$ (由上一黑板推导，在绝热条件下成立)，则 $\frac{d\mu}{dt} = 0$。
- **意义:** 同黑板3，强调磁矩在缓变磁场中的守恒性，关联磁镜效应和托卡马克约束。

## 黑板 5：磁矩推导 (等效电流环方法)

- **内容:** 将回旋粒子等效为载流线圈推导磁矩。
- **原理:** 磁矩 $\mu = I \cdot S$ (电流 $\times$ 面积)
  - 轨道面积 $S = \pi\rho_B^2$
  - 等效电流 $I = q \cdot \frac{\omega_c}{2\pi}$ (电荷 $\times$ 单位时间回旋圈数)
- **推导:**
  $\mu = (\pi\rho_B^2) \cdot (q\frac{\omega_c}{2\pi})$
  代入 $\rho_B = \frac{mv_\perp}{qB}$ 和 $\omega_c = \frac{qB}{m}$:
  $\mu = \pi(\frac{mv_\perp}{qB})^2 \cdot \frac{q}{2\pi}(\frac{qB}{m})$
  $\mu = \pi\frac{m^2v_\perp^2}{q^2B^2} \cdot \frac{q^2B}{2\pi m} = \frac{mv_\perp^2}{2B}$
- **结论:** $\mu = \frac{W_\perp}{B}$
- **意义:** 提供了磁矩的另一种物理图像。

## 黑板 6：磁镜反射条件

- **内容:** 粒子在磁镜中运动的能量守恒与反射。
- **粒子总动能 (守恒):** $K = \frac{1}{2}mv_{\|0}^2 + \mu B_0$
  ($v_{\|0}$: 初始平行速度, $B_0$: 初始磁场)
- **反射点 ($v_\| = 0$):** 粒子全部动能为垂直动能 $K = \mu B_r$ ($B_r$: 反射点磁场)
- **能量转换:** $\frac{1}{2}mv_{\|0}^2 + \mu B_0 = \mu B_r$
  $\implies \frac{1}{2}mv_{\|0}^2 = \mu(B_r - B_0)$
  (注: 黑板原文若为 $\mu(B_0 - B_r)$ 则有误，因为 $B_r > B_0$ 才能反射，动能为正)
- **意义:** 描述磁镜效应的能量转换，捕获条件基础。

## 黑板 7：引导中心运动方程引论

- **标题:** ドリフト軌道 (漂移轨道)
- **基本运动方程 (洛伦兹力 + 重力):**
  $m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + q(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{V} \times \vec{B}(\vec{r}))$
- **速度分解:** $\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{u}$
  ($\vec{V}_g$: 引导中心速度/漂移速度, $\vec{u}$: 回旋速度/拉莫尔运动速度)

- **回旋运动方程 (ラーマー運動):** $m\frac{d\vec{u}}{dt} = q(\vec{u} \times \vec{B})$
- **引导中心运动方程 (平均后):**
  $q(\vec{V}_g \times \vec{B}) = -m\vec{g} - q\vec{E} - q\langle\vec{u} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla\vec{B})\rangle + m\frac{d\vec{V}_g}{dt}$
  (右侧为作用在引导中心上的平均力及惯性项：重力、电场力、非均匀磁场力、极化漂移相关惯性力)

## 黑板 8：通用引导中心漂移速度

- **内容:** 从引导中心运动方程导出垂直于磁场的漂移速度 $\vec{V}_{g\perp}$。
- **通用表达式:** $\vec{V}_{g\perp} = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$
  其中 $\vec{F}$ 是作用在引导中心上的总有效力。
- **展开形式 (来自黑板7方程):**
  $\vec{V}_{g\perp} = \frac{(q\vec{E} + m\vec{g} - m\frac{d\vec{V}_g}{dt} + q\langle\vec{u} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla\vec{B})\rangle) \times \vec{B}}{qB^2}$
  (注意各项符号的调整，以匹配 $\vec{F} \times \vec{B}$ 形式)
- **意义:** 统一表达所有漂移的根源。

## 黑板 9：具体漂移速度项

- **内容:** 展开通用漂移速度，展示主要漂移项。
- **非均匀磁场力简化:** $\vec{F}_B = q\langle\vec{u} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla\vec{B})\rangle \approx -\mu\nabla B$
  (此力导致梯度B漂移，负号表示抗磁性效应，推向弱磁场区)
- **垂直漂移速度展开 (忽略重力漂移):**
  $$\vec{V}_\perp = \underbrace{\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}}_{\text{E×B drift}} - \underbrace{\frac{\mu\nabla B \times \vec{B}}{qB^2}}_{\text{Grad-B drift}} - \underbrace{\frac{(m\frac{d\vec{V}_g}{dt}) \times \vec{B}}{qB^2}}_{\text{Polarization drift}}$$
- **示意图:** E场、B场及E×B方向。

## 黑板 10：平行运动与曲率相关加速度

- **内容:** 粒子平行速度变化及引导中心因磁力线弯曲产生的加速度。
- **平行速度变化率:**
  $\frac{dV_\parallel}{dt} = \frac{d(\vec{V} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{V} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$
  ($\vec{b} = \vec{B}/B$: 磁场方向单位矢量)
  $\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{\partial\vec{b}}{\partial t} + (\vec{V}_g \cdot \nabla)\vec{b} \approx V_\parallel \frac{\partial\vec{b}}{\partial l}$ (沿磁力线运动)
- **引导中心加速度 (密切平面内，当磁力线弯曲时):**

$(\frac{d\vec{V}_g}{dt})_{\text{osculating}} = (\frac{dV_\parallel}{dt})\vec{b} - \frac{V_\parallel^2}{R_c}\vec{n}$
($R_c$: 磁力线曲率半径, $\vec{n}$: 指向曲率中心的单位法向量)
第一项: 切向加速度。
第二项: 向心加速度 (由于磁力线弯曲)。

- **意义:** 理解曲率漂移的基础 (等效离心力 $mV_\parallel^2/R_c$ 引起漂移)。

## 黑板 11：曲率漂移速度

- **内容:** 曲率漂移速度公式。
- **公式:** $\vec{V}_{G,Curv} = \frac{mV_\parallel^2}{qR_cB}(\vec{n} \times \vec{b})$
  - $mV_\parallel^2/R_c$: 等效离心力大小。
  - $\vec{n}$: 指向曲率中心的单位法向量。
  - $\vec{b}$: 磁场方向单位矢量。
  - 漂移方向由 $\vec{n} \times \vec{b}$ (副法线方向) 决定。
- **物理意义:** 粒子沿弯曲磁力线运动，等效离心力 $F_{cf} \approx (mV_\parallel^2/R_c)\vec{n}$ 导致 $F \times B$ 漂移。

## 黑板 12：玻尔兹曼方程 (或弗拉索夫方程)

- **内容:** 描述粒子分布函数 $f(\vec{r}, \vec{u}, t)$ 在相空间中演化的动力学方程。
- **分布函数:** $f(\vec{r}, \vec{u}, t)$
- **全时间导数:** $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$
- **玻尔兹曼方程 (含碰撞项):**
  $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_u f = (\frac{\partial f}{\partial t})_c$
  代入洛伦兹力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$:
  $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla_r f + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \nabla_u f = (\frac{\partial f}{\partial t})_c$
  - $(\frac{\partial f}{\partial t})_c$: 碰撞项。
- **弗拉索夫方程:** 若忽略碰撞 ($(\frac{\partial f}{\partial t})_c = 0$) 。
- **关联问题:** [问题7] 福克-普朗克方程是碰撞项的一种形式。

## 黑板 13：从玻尔兹曼方程推导连续性方程

- **内容:** 通过对玻尔兹曼方程取速度矩得到宏观流体方程。
- **玻尔兹曼方程:** $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_u f = (\frac{\partial f}{\partial t})_c$
- **操作:** 对速度 $\vec{u}$ 积分 (零阶矩)。
  - $\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3u = \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3u = \frac{\partial n}{\partial t}$

    ($n = \int f d^3u$: 粒子数密度)
  - $\int (\vec{u} \cdot \nabla_r f) d^3u = \nabla_r \cdot \int \vec{u} f d^3u = \nabla_r \cdot (n\vec{u}_0)$
    ($\vec{u}_0 = \frac{1}{n} \int \vec{u} f d^3u$: 平均速度)
  - $\int (\frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_u f) d^3u = 0$ (对于洛伦兹力，经分部积分且 $f$ 在无穷远处为0)
  - $\int (\frac{\partial f}{\partial t})_c d^3u = S(\vec{r}, t)$ (粒子源/汇项)
- **连续性方程 (連続の式):** $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}_0) = S(\vec{r}, t)$
- **下一步:** 乘以 $m\vec{u}$ 再对 $\vec{u}$ 积分，可得动量方程 (一阶矩)。

## 黑板 14：单流体MHD运动方程

- **内容:** 在二流体方程下方补充单流体MHD运动方程。
- **标题:** MHD 方程式 (MHD方程)
- **理想MHD运动方程 (动量方程):**
  $\rho(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}) = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B}$
  - $\rho$: 等离子体总质量密度 ($\approx m_i n_i$)
  - $\vec{V}$: 等离子体中心质量速度 ($\approx \vec{v}_i$)
  - $P$: 总压强 ($P_i + P_e$)
  - $\vec{j}$: 总电流密度
  - $\vec{j} \times \vec{B}$: 洛伦兹力密度
- **简化来源:** 由二流体方程经准中性、忽略电子惯性等近似得到。
- **关联问题:** [问题5] MHD方程是推导阿尔芬波色散关系的基础。