~~[illegible]~~ Convex function

№4.1

$f^*(y)$ if $f(x) = -\frac{1}{x}$ $x \in \mathbb{R}_{++}$

Откроем задачник по методу за 2 сем

и пусть x задан по направлению

т.е $g(x) = g(t) = \{t \mid x + t\,x \in S^n_{++}\} =$

(Reduction to a line)

$= tr(X + tY)^{-1}; \{t \mid x + tY \in S^n_{++}\}$

Y - симметрич $\Rightarrow Y \in S^n$

$\Rightarrow$ покажем, что $\nabla^2 g(t) \geq 0$ т.е

ф-я выпукла (для этого и задачник)

$\nabla^2 g(t) = 2\,tr\,X^{-1}YX^{-1}\cancel{Y}X^{-1}$ т.к

$(X(I + tX^{-1}Y))^{-1} = X^{-1}(I - tXY^{-1} + t^2 X\cancel{X}^{-1}$

$\cdot XY^{-1} + o(t^3)) = X^{-1} - t(X^{-1})^2 Y + t^2 X^{-1}(YX^{-1})^2 +$

$+ o(t)^3$

X^{-1} положит опред $\Rightarrow$ $X^{-1}YX^{-1}YX$ - полож опр т.к $(X^{-1} = (X^{-1}Y)^2$

$g(t) = (\det X \det(I + tX^{-1}Y))^{\frac{1}{2}}$

$g(t) = (\det X)^{1/2} (\det(I + tX^{-1}Y))^{1/2}$

$$g(t) = (\det X)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i t)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Эта ~~ф-я — г~~ функция — геом

среднее, и она ~~[illegible]~~ вогнута.

Докажем.

№ 4.2

Пусть $f(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

Сначала найдём $\nabla f(q) = (\log p_k + 1)^T$

$\Rightarrow \nabla^2 f(p) = \operatorname{diag}\{\frac{1}{p_k} | k \in \operatorname{range}(0,n)\}$

Из критерия первого порядка строгой выпуклости $\Rightarrow D(p,q) = f(p) - f(q) - \nabla f(q)^T (p-q) > 0$, которая выполняется если у матрицы $\nabla^2 f(x)$ на диагонали числа > 0

Это так т.к $\frac{1}{p_k} > 0$ т.к $p_k > 0$ т.к $p, q \in \mathbb{R}^n_{++}$

$\Rightarrow f(p) > f(q) - \nabla f(q)^T (p-q)$

которая верна, если $p \neq q$

т.к ~~если~~ если $p = q$ ~~=~~ $f(p) = f(q)$

$\Rightarrow D(p,q) = f(p) - f(p) - \nabla f(q)^T \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ ~~выпук~~ т.к $(p-q) = 0$ – решение единств.

– у-но в обратную сторону.

№ 3 Convex functions

1. $Ex = \sum_i^n a_i p_i$

Св-ва линейно, гессиан $= 0$, ф-ия выпукла и вогнута

2. $P\{x \geq \alpha\}$, т.е задаём границы $\leq$ опред α, аналогично №1 выпукла и вогнута

3. $P\{\alpha \leq x \leq \beta\}$. Аналогично выпукла и вогнута

4. $\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$. В предыдущих заданиях мы решили, что гессиан $> 0 \Rightarrow$ ф-я выпукла.

5. $Vx = E(x - Ex)^2$ и $Ex = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$, то $Vx = \sum_1^n a_i^2 p_i - \left(\sum_1^n a_i p_i\right)^2$. Слово $y_i = a_i^2$ ~~слово~~

$\Rightarrow Vx = y^T p - p^T a a^T p$

$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \left(\langle y, p \rangle - \langle p, a a^T p \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(y - \langle 2 p_j, a a^T \rangle \right)$

$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \mathrm{W}_x = -2aa^T$

кв. форма $x^T(-2aa^T)x = -2\langle x, a\rangle^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ ф-я вогнута

6. $W^T F$?

Convex functions

№4

Геометрическое среднее имеет гессиан = 0 на линейных по всем аргументам ⇒ по 2 критерию выпуклости она вогнута и выпукла

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\left(\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\prod_{j=1; j\neq i}^{n} x_j\right)\right)$$

$$\Rightarrow i \neq j: \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{n^2}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} x_j \, x_i\right)\right)$$

$$i = j: \quad \frac{1-n}{n^2}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\prod_{j=1; j\neq i}^{n} x_j^2\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{f(x)}{n}(x_i)^{-1}$$

Получим матрицу $f''(x) = \frac{f}{n^2} A$ где

а A не на диагонали $a_{\text{not diag}} = \frac{1}{x_i x_j}$

А на диагонали $a_{\text{diag}} = \frac{(1-n)}{x_i^2}$

Рассмотрим кв форму

$$y^T A y = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{x_i^2}$$

Нер-во Коши-Буняковского-Шварца говорит нам о том, что данная форма не всегда ≥ 0 $\Rightarrow$ данная ф-я средне вогнутая

№6. Convex Func

$$f(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$$

Итак. $f''(x) = -\frac{1}{x(1-x)}$, а на $[0;1]$ она <0

если $\exists$ отрезок, где $f(x)$ строго вогнута — она не выпукла.

Conjugate function

№1

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$f^*(y) = \sup\limits_{x \in R_{++}} (y^T x - f(x))$

$g(x,y) = (yx + \frac{1}{x})$ $\quad \sup\limits_{x \in R_{++}} g(x,y)$

$x \to \text{sign}\,\infty$ тогда $g(x,y) \to \text{sign}\,\infty$

при $y < 0$.

$g(x,y) \to \text{sign}\,\infty$ при $y \le 0$ и

$x \to \text{sign}\,0$, но уже $\text{sign}(\infty/0) = +$

пусто f^* опр на $\mathbb{R} \Rightarrow f^* = +\infty$

№3

$g(x,y) = y^T x - \log\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$

найдем область с конечным супремумом

$\nabla g(x,y) = 0$: $\log\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) = y^T x$

т.е обе компоненты ∇ ~~…~~ равны 0.

$y_m = \dfrac{e^{x_m}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}}$, $\Rightarrow y > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$

Если одна из компонент $= 0$ то она даёт

нулевой вклад в произв при $\to \infty$

Найдём область опр f^*

1) $\exists y_k < 0$ если $x_k \to \infty$ а остальные

$x_i = 0$, всё неограничено

$y \succeq 0$ $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$, берём x - вектор

константн $\forall_i x_i = c$

$y^T c - \log c \left(\sum_{i=1}^{n} e^c \right) = c \sum_{i=1}^{n} y_i - c - \log n$

всё плохо при $c \to \infty$

$\Rightarrow$ это область опр f^*

$x_m = \log y_m + \log \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^*(y) = \sum_{m=1}^{n} y_m \log(y_m)$ т.к. сумма

экспонент сокращается

Пусть первые k компонент $= 0$,

$g(x,y) = y^T x - \log \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \right)$, тогда

только компоненты с $k+1$ будут

давать вклад в 1-ое слагаемое

оставшийся „хвост" это

~~[illegible]~~ устремим к ∞

и умнтся на нуле все

компоненты y, а $\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) \to 0$

Ответ: $f^*(y) = \sum_{m=1}^{n} y_m \lg(y_m)$ и

определена $\left(y \geq 0, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\right)$

№4

$f(x) = 2g(x) \Rightarrow f^*(y) = 2g^*(y/2)$

$g^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\, g} y^T x - g(x)$

1) $2g^*(y/2) = \sup_{x_g \in \mathrm{dom}\, g} y^T x_g - 2g(x_g)$

2) $f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\, f} y^T x - f(x) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\, f} y^T x - 2g(x)$

методом ~~[illegible]~~ заметим что

1) $M.Ч \overset{2)}{=} П.Ч$

№5 Conjugate func

$f^*(Y) = \langle Y, X \rangle + \ln\det X$

$g(X, Y) = \langle Y, X \rangle + \ln\det X$

найдем (=) где sup не \infty

1) $0 \succ Y$

$\Rightarrow \nabla_X g(X, Y) = Y + X^{-T} = Y + X^{-T} = Y + X^{-1} = 0$

$\Rightarrow -X = Y^{-1}$

$\Rightarrow f^*(Y) = \log\det(-Y^{-1}) - n$ — это

и есть conj ф-я

2) $0 \not\succ X \Rightarrow \exists a \neq 0 : a^T Y a \geq 0$

$X = I + t a a^T$ и $aa^T = \|a\|_2^2$, $a = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + t\|a\|_2^2 = \det X$. пусть a норм на 1

$\Rightarrow \det X = 1 + t \Rightarrow$ в ЛМ симметрич. матриц.

$g(X, Y) = \mathrm{tr}(Y + t a^T Y a + \ln(1+t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$

наша задача

Ответ: $f^*(X) = -\log\det(X^{-1}) - n$

№6

1) $g^*(y) = \sup\limits_{x \in dom\, g} y^T x - g(x)$

2) $h^*(y) = \sup\limits_{x \in dom\, h} y^T x - h(x)$

3) $f^*(y) = \sup\limits_{x \in dom\, g \cap dom\, h} 2y^T x - \inf (g(x) + h(x))$

что сумма ПЧ 1) и 2) даёт ПЧ 3)

Д-во по определению

conjugate sets

№1

тут пригодился факт, что транспонированная антисимметричная - она сама.

№4

надо найти такие вектора что при умнож (·) из пр-ва результат > 0