XXII Математическая Олимпиада «Шёлковый путь»
Март, 2023 год

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

№1. Внутри трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) выбрана точка M, а внутри треугольника BMC точка N так, что $AM \parallel CN$, $BM \parallel DN$. Докажите, что у треугольников ABN и CDM площади равны.

№2. Дано натуральное n. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ каждая клетка покрашена в какой-то из $4n^2$ цветов (при этом некоторые цвета могли не использоваться). *Доминошкой* будем называть любой прямоугольник из двух клеток в нашем квадрате. Будем говорить, что доминошка *разноцветная*, если клетки в ней разных цветов.

Пусть k — количество разноцветных доминошек среди всех доминошек в нашем квадрате. Пусть ℓ — наибольшее целое число такое, что в любом разрезании квадрата на доминошки найдётся хотя бы ℓ разноцветных доминошек. Найдите наибольшее возможное значение выражения $4\ell - k$ по всем возможным раскраскам квадрата.

№3. Пусть p — простое число. Построим ориентированный граф на p вершинах, пронумерованных целыми числами от 0 до $p-1$. В графе проводится ребро из вершины x в вершину y тогда и только тогда, когда y равно остатку от деления на p числа x^2+1. Через $f(p)$ обозначим длину самого длинного ориентированного цикла в этом графе. Докажите, что $f(p)$ может принимать сколь угодно большие значения.

№4. Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{Q}[x, y, z]$ — множество многочленов с рациональными коэффициентами от трех переменных. Докажите, что для любого ненулевого многочлена $P \in \mathcal{M}$ существуют такие ненулевые многочлены $Q, R \in \mathcal{M}$, что

$$R(x^2y, y^2z, z^2x) = P(x, y, z)Q(x, y, z).$$

Внимание! *Так как XXII Математическая Олимпиада «Шёлковый путь» проводится в разных странах в разное время, мы вас убедительно просим* ***не разглашать*** *эти задачи и не обсуждать их (особенно по Интернету) до 25 мая 2023 года.*

XXII Silk Road Mathematical Competition
March 2023

Time allowed is 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

№1. Point M was chosen inside trapezoid $ABCD$ ($AD \parallel BC$), and point N was chosen inside triangle BMC such that $AM \parallel CN$, $BM \parallel DN$. Prove that triangles ABN and CDM have equal areas.

№2. Let n be a positive integer. Each cell of a $2n \times 2n$ checkered square is painted in one of the $4n^2$ colors (some colors may be missing). We will call any two-cell rectangle in our square a *domino*. We will also say that a domino is *colorful* if its cells have different colors.

Let k be the total number of colorful dominoes in our square. Let ℓ be the maximum integer such that every partition of the square into dominoes contains at least ℓ colorful dominoes. Determine the maximum possible value of $4\ell - k$ over all possible colorings of the square.

№3. Let p be a prime number. Let's construct a directed graph on p vertices, labeled with integers ranging from 0 to $p-1$. We draw an edge from vertex x to vertex y if and only if y is equal to the remainder of division by p of number x^2+1. Let $f(p)$ denote the length of the longest directed cycle in this graph. Prove that $f(p)$ can attain arbitrarily large values.

№4. Let $\mathcal{M} = \mathbb{Q}[x, y, z]$ be the set of three-variable polynomials with rational coefficients. Prove that for any non-zero polynomial $P \in \mathcal{M}$ there exist non-zero polynomials $Q, R \in \mathcal{M}$ such that

$$R(x^2y, y^2z, z^2x) = P(x, y, z)Q(x, y, z).$$

Attention! *Since the XXII Silk Road Mathematical Competition takes place in different countries on different dates, we ask you* ***not to disclose*** *these problems and not to discuss them publicly (especially through Internet) before May 25, 2023.*