XIX математическая олимпиада «Шёлковый путь»
Март, 2020 год

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Использование калькуляторов запрещено

№1. Дана строго возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... Известно, что $a_n \leqslant n + 2020$ и число $n^3 a_n - 1$ делится на a_{n+1} при всех натуральных n. Докажите, что $a_n = n$ при всех натуральных n.

№2. Треугольник ABC вписан в окружность ω. На сторонах AB, BC, CA отмечены точки K, L, M, соответственно, причем $CM \cdot CL = AM \cdot BL$. Луч LK пересекает прямую AC в точке P. Общая хорда окружности ω и описанной окружности треугольника KMP пересекает отрезок AM в точке S. Докажите, что $SK \parallel BC$.

№3. Многочлен $Q(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \ldots + k_1 x + k_0$ с действительными коэффициентами назовём *мощным*, если выполнено равенство $|k_0| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_{n-1}| + |k_n|$, и *невозрастающим*, если $k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-1} \geqslant k_n$.

Пусть для многочлена $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с ненулевыми действительными коэффициентами, где $a_d > 0$, многочлен $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ является *мощным* для некоторых неотрицательных целых s и t ($s + t > 0$). Докажите, что хотя бы один из многочленов $P(x)$ и $(-1)^d P(-x)$ является *невозрастающим*.

№4. Докажите, что для любого натурального числа m существует такое натуральное n, что любые n различных точек на плоскости можно разбить на m непустых множеств, *выпуклые оболочки* которых будут иметь общую точку.

Выпуклой оболочкой конечного множества X точек на плоскости называется множество точек, лежащих внутри или на границе хотя бы одного выпуклого многоугольника с вершинами в X, включая вырожденные, т. е. отрезок и точка считаются выпуклыми многоугольниками. Никакие три вершины выпуклого многоугольника не лежат на одной прямой. Многоугольник содержит свою границу.

Внимание! *Так как XIX Математическая олимпиада «Шёлковый путь» проводится в Казахстане раньше, чем в других странах, мы вас убедительно просим* **не разглашать** *эти задачи и не обсуждать их (особенно по Интернету) до 25 мая 2020 года.*

XIX «Жібек Жолы» математикалық олимпиадасы
Наурыз, 2020 жыл

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Калькуляторларды қолдануға тыйым салынады

№1. Шексіз және қатаң өспелі a_1, a_2, a_3, ... натурал сандар тізбегі берілген. Барлық натурал n саны үшін $a_n \leqslant n + 2020$ екені және $n^3 a_n - 1$ саны a_{n+1} санына бөлінетіні белгілі. Кез келген натурал n үшін $a_n = n$ екенін дәлелдеңіз.

№2. ABC үшбұрышы ω шеңберіне іштей сызылған. AB, BC, CA қабырғаларында сәйкесінше K, L, M нүктелері белгіленген және $CM \cdot CL = AM \cdot BL$ теңдігі орындалады. LK сәулесі AC түзуін P нүктесінде қияды. ω шеңбері мен KMP үшбұрышына сырттай сызылған шеңберлердің ортақ хордасы AM кесіндісін S нүктесінде қияды. $SK \parallel BC$ екенін дәлелдеңіз.

№3. Коэффициенттері нақты сандар болатын $Q(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \ldots + k_1 x + k_0$ көпмүшесі үшін $|k_0| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_{n-1}| + |k_n|$ теңдігі орындалса, ондай көпмүшені *қуатты* деп атаймыз, ал егер егер $k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-1} \geqslant k_n$ теңсіздіктері орындалса, осы көпмүшені *өспелі емес* деп атаймыз.

Коэффициенттері нөлге тең емес нақты сандар болатын $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ көпмүше үшін ($a_d > 0$), қандай-да бір бүтін теріс емес s және t ($s + t > 0$) сандары үшін $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ көпмүшесі *қуатты* болсын. $P(x)$ және $(-1)^d P(-x)$ көпмүшелерінің кемінде біреуі *өспелі емес* екенін дәлелдеңіз.

№4. Кез келген натурал m саны үшін келесі шартты қанағаттандыратын натурал n саны табылатынын дәлелдеңіз: жазықтықтағы кез келген n әртүрлі нүктені *дөңес қабықшаларының* ортақ нүктесі болатындай бос емес m бөлікке бөлуге болады.

Жазықтықтағы шекті X нүктелер жиынының *дөңес қабықшасы* деп кемінде бір X-тің төбелерінен құрылған дөңес көпбұрышының ішінде немесе қабырғаларында орналасқан нүктелер жиынын айтамыз (нүкте немесе кесінді дөңес көпбұрыш деп саналады. Дөңес көпбұрыштың кез келген үш төбесі бір түзудің бойында жатпайды және дөңес көпбұрыш өзінің шекарасын қамтиды).

Назар аударыңыз! *XIX «Жібек Жолы» математикалық олимпиадасы Қазақстанда, осы олимпиада өтетін басқа мемлекеттерге қарағанда ерте өткізілгендіктен, бұл олимпиаданың есептерін 2020 жылдың 25-ші мамырына дейін ешкімге жарияламауыңызды, ешкіммен (әсіресе Интернет арқылы) талқылмауыңызды сұраймыз.*