XXI математическая олимпиада «Шёлковый путь»
Март, 2022 год

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

№1. В окружность ω вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. На диагонали BD отмечена точка L так, что $\angle BAC = \angle DAL$. На отрезке KL отметили точку M так, что $CM \parallel BD$. Докажите, что прямая BM касается окружности ω.

№2. Даны два различных натуральных числа A и B. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, представимых и в виде $x_1^2+Ay_1^2$ со взаимно простыми x_1 и y_1, и в виде $x_2^2+By_2^2$ со взаимно простыми x_2 и y_2.

№3. В бесконечной последовательности $\{\alpha\}$, $\{\alpha^2\}$, $\{\alpha^3\}$, $\ldots$ встречается только конечное количество разных чисел. Докажите, что α — целое число. (Дробной частью числа x называется такое число $\{x\}$, что $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

№4. В письменности используется 25-буквенный алфавит, а *словами* являются в точности все 17-буквенные последовательности. На полоске, склеенной в кольцо, написана последовательность из 5^{18} букв алфавита. Назовём слово *уникальным*, если из полоски можно вырезать участок, содержащий это слово, но нельзя вырезать два таких непересекающихся участка. Известно, что из полоски можно вырезать 5^{16} непересекающихся копий какого-то слова. Найдите наибольшее возможное количество уникальных слов.

Внимание! *Так как XXI Математическая олимпиада «Шёлковый путь» проводится в разных странах в разное время, мы вас убедительно просим* **не разглашать** *эти задачи и не обсуждать их (особенно по Интернету) до 25 мая 2022 года.*

XXI Silk Road Mathematical Competition
March 2022

Time allowed is 4.5 hours
Each problem is worth 7 points

№1. Convex quadrilateral $ABCD$ is inscribed in circle ω. Rays AB and DC intersect at K. L is chosen on the diagonal BD so that $\angle BAC = \angle DAL$. M is chosen on the segment KL so that $CM \parallel BD$. Prove that the line BM touches ω.

№2. Distinct positive integers A and B are given. Prove that there exist infinitely many positive integers that can be represented both as $x_1^2+Ay_1^2$ for some positive coprime integers x_1 and y_1, and as $x_2^2+By_2^2$ for some positive coprime integers x_2 and y_2.

№3. In an infinite sequence $\{\alpha\}$, $\{\alpha^2\}$, $\{\alpha^3\}$, $\ldots$ there are only finitely many distinct values. Show that α is an integer. ($\{x\}$ denotes the fractional part of x, i.e. $\{x\} = x - [x]$, where $[x]$ is the greatest integer not greater than x.)

№4. In a language, an alphabet with 25 letters is used; *words* are exactly all sequences of (not necessarily different) letters of length 17. Two ends of a paper strip are glued so that the strip forms a ring; the strip bears a sequence of 5^{18} letters. Say that a word is *singular* if one can cut out a piece bearing exactly that word from the strip, but one cannot cut out two such non-overlapping pieces. It is known that one can cut out 5^{16} non-overlapping pieces each containing the same word. Determine the largest possible number of singular words.

Attention! *We ask you not to* ***disclose*** *these problems and not to discuss them publicly (especially through Internet) before May 25, 2022.*