Tarea 1.

Lo que sabemos...

De los desarrollos hechos en clase sabemos que el operador de traslación transforma como

$$T_{(\varepsilon)}|\Psi\rangle = |\Psi_\varepsilon\rangle \qquad (1)$$

También obtuvimos que

$$\langle\Psi|T^\dagger_{(\varepsilon)} X T_{(\varepsilon)} - X - \varepsilon\mathbb{1}|\Psi\rangle = 0 \qquad (2)$$

Demostrar que $\langle X\rangle \to \langle X\rangle + \varepsilon$.

Comenzamos escribiendo nuestra transformación sustituyendo $|\Psi_\varepsilon\rangle$

$$\langle\Psi|X|\Psi\rangle \to \langle\Psi_\varepsilon|X|\Psi_\varepsilon\rangle = \langle\Psi|T^\dagger_{(\varepsilon)} X T_{(\varepsilon)}|\Psi\rangle \qquad (3)$$

De la relación (2) podemos decir que

$$T^\dagger_{(\varepsilon)} X T_{(\varepsilon)} = X + \varepsilon\mathbb{1},$$

lo que nos permite reescribir (3) de la siguiente forma

$$\langle\Psi|X|\Psi\rangle \to \langle\Psi_\varepsilon|X|\Psi_\varepsilon\rangle = \langle\Psi|X+\varepsilon\mathbb{1}|\Psi\rangle$$

$$= \langle\Psi|X|\Psi\rangle + \varepsilon\langle\Psi|\mathbb{1}|\Psi\rangle$$

$$= \langle X\rangle + \varepsilon$$

Llegamos a que $\langle X\rangle \xrightarrow{T_{(\varepsilon)}} \langle X\rangle + \varepsilon$, que es lo que se quería demostrar.

Otra forma de demostrarlo es la sig.

$$\langle X\rangle_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*_\varepsilon(x)\; x\; \Psi_\varepsilon(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x-\varepsilon)\; x\; \Psi(x-\varepsilon)$$

Hacemos un cambio de variable $x - \varepsilon = x'$

$$\langle X\rangle_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \Psi^*(x')\,(x'+\varepsilon)\,\Psi(x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \Psi^*(x')\, x'\, \Psi(x') + \varepsilon \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \Psi^*(x')\,\Psi(x')}_{1}$$

Al renombrar x' como x en la primera integral, llegamos a

$$\langle x \rangle_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*_{(x)}\, x\, \Psi_{(x')} + \varepsilon = \langle x \rangle + \varepsilon$$

y por lo tanto Q.E.D.