2021～2022 学年第 1 学期期末考试试卷

《概率论》（B 卷　　共 4 页）

（考试时间：2021 年 12 月 09 日）

题号	一	二	三						成绩	核分人签字
			1	2	3	4	5	6		
得分										

一、选择题 （共 12 分，每题 2 分）

1、对于任意两个随机变量 X,Y，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则（ B ）

A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　**B)** $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C) X,Y 一定独立　　**D)** X,Y 不独立

2、A 与 **B** 相互独立， 且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$， 则有（**C** ）

A) A 与 **B** 互不相容　　**B)** $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

C) A 与 **B** 相容　　**D)** $P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)$.

3、设 A_1,A_2,B 为三个随机事件，且 $P((A_1\cup A_2)B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，则一定有（ D ）

A) A_1B 与 A_2B 独立；　　**B)** A_1A_2B 为不可能事件；

C) $P(A_1A_2)=0$；　　**D)** $P(A_1A_2B)=0$.

4、设 X_1 与 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$，那么下列命题不正确的是（ B ）

A) $a>0$, $b>0$, 且a+b=1，则 $af_1(x)+bf_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数；

B) $f_1(x)f_2(x)$ 为二维型随机变量 $\left(X_1,X_2\right)$ 的联合的概率密度函数；

C) $\frac{1}{3}F_1(x)+\frac{2}{3}F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

5、如果存在常数 a, $b(a\neq 0)$，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$， 且 $0<DX<+\infty$，则 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 为（ **C** ）

A) 1 ；　　**B)** -1 ；　　**C)** $\frac{a}{|a|}$；　　**D)** $\left|\rho_{XY}\right|<1$.

6、设 X 为一随机变量，若 $EX=1$, $DX=0.1$, 则一定有（ **B** ）

A) $P\{-1<X<1\}\geq 0.9$　　**B)** $P\{0<|X|<2\}\geq 0.9$

C) $P\{X+1\geq 1\}\leq 0.9$　　**D)** $P\{|X|\geq 1\}\leq 0.1$.

二、填空题（共 18 分，每空 2 分）

1、已知 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.6$，$P(A|B)=1/6$ ，则 $P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=$ __3/4　(0.75)__.

2、将 **20** 只球放入 **10** 个盒子中去，设每只球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 **X** 的数学期望为 ____________.$10\left(1-0.9^{20}\right)$

3、取一根长为 **3** 米的绳子， 拉直后在任意位置剪断， 那么剪得两段的长都不少于 **1** 米的概率为___1/3____.

4、设一系统由五个相互独立的元件串联而成，每个元件的寿命 **X** 服从均值为 1500 的指数分布（单位：小时），在使用的前 600 h 内至少有一个元件需要更换的概率是 $1-e^{-2}$______， 且该系统的平均寿命是__300_____（小时）.

5、设 $X_1,X_2,L\ ,X_n,L$ 是独立同分布的随机变量序列，且其相同的分布函数为：

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leq x<1,\\ 0.8, & 1\leq x<3,\\ 1, & x\geq 3.\end{cases}$$

则 $X_i(i=1,2,L\ )$ 的分布律为________________________，

且 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于___0.6____ .

6、二维正态分布表示为 $N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 设随机变量满足 $(X,Y)\sim N(1,4;5,9;-0.5)$，随机变量 $Z=2X-Y+4$， 则 $E(Z)=$____1____， $D(Z)=$____37____ .

三、解答题（共 70 分）

1、（本题 14 分）盒子里装有 2 个黑球、5 个红球、3 个白球共 10 个球， 从中一次随机地摸出两个球，令

$$X=\begin{cases}0, & \text{两个球中无红球,}\\ 1, & \text{两个球中有红球;}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{两个球中无白球,}\\ 1, & \text{两个球中有白球;}\end{cases}$$

求 **（1）** (X,Y) **的联合概率分布律；** **（2）** $F(0.3,1.5)$**，** $P\{X=Y\}$**；**

（3）随机变量 Y **的边缘分布律；**

（4）在 $\{Y=1\}$ **的条件下随机变量** X **的条件分布律；**

解：（1）$P\{X=0,Y=0\}=P\{\text{取到两球全为黑球}\}=\dfrac{1}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{\text{取到两球无红有白球}\}=\frac{C_3^2+C_3^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{\text{取到两球无白有红球}\}=\frac{C_5^2+C_2^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\text{取到两球1红1白球}\}=\frac{C_5^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

因此，随机变量 X 和 Y 的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	1/45	4/9
1	1/5	1/3

(6 分)

（2） $F(0.3,1.5)=P\{X\le 0.3,Y\le 1.5\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{45}+\dfrac{9}{45}=\dfrac{2}{9}$，

$$P\{X=Y\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}=\frac{16}{45}$$

(9 分)

(3) 随机变量 Y **的边缘分布律**

Y	0	1
P_Y	7/15	8/15

(11 分)

（4）在 $\{Y=1\}$ **的条件下随机变量** X **的条件分布律为**

$$P\{X=0\mid Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{9/45}{24/45}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=1\mid Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{15/45}{24/45}=\frac{5}{8}$$ (14

分)(其中公式 1 分)

2、（本题 10 分）已知电源电压 X **服从正态分布** $N(220,400)$ **（单位：伏）,在电源电压处于以下三种状态：**$\{X\le 200\}$**,**$\{200<X\le 240\}$**,**$\{X>240\}$ **时,某电子元件损坏的概率分别为 0.1, 0.01, 0.2. 试求: (1) 该电子元件损坏的概率; (2) 该电子元件损坏时，电压在(200, 240]内的概率. (已知：** $\Phi(0.8)=0.79$, $\Phi(1)=0.8413$**).**

解：令 $A_1=\{X\le 200V\}$ $A_1=\{X\le 200V\}$，$A_3=\{X>240V\}$

$B=$ 电子元件损坏 ----------------------1 分

（1）电子元件损坏的概率

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)\\&=P\{X<200\}\times 0.1+P\{200<X<240\}\times 0.01+P\{X>240\}\times 0.2\\&=\Phi(-1)\times 0.1+(\Phi(1)-\Phi(-1))\times 0.01+(1-\Phi(1))\times 0.2\\&=(1-\Phi(1))\times 0.1+(2\Phi(1)-1)\times 0.01+(1-\Phi(1))\times 0.2\\&=0.01587+0.006826+0.03174\\&=0.054436\end{aligned}$$

------------------------------------ （全概率公式 1 分，算到最后共 6 分）

（2） $P(A_2\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.006826}{0.054436}\approx 0.1254$

----------------------------贝叶斯公式 1 分，算到最后共 3 分

3、（本题 7 分）设甲乙两台设备的寿命分别服从参数为 3 与 4 的指数分布，且两台设备的好坏与否相互独立，求甲比乙先坏的概率.

解：设甲乙两台设备的寿命分别为 X 、Y，

则其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}\qquad (1\text{分})$$

因为 X 与 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad (3\text{分})$$

甲比乙先坏的概率为

$$P\{X<Y\}=12\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dy=3\int_0^{+\infty}e^{-7x}dx=\frac{3}{7}.$$

（7 分）（其中过程 3 分，结果 1 分）

4、（本题 18 分）设二维随机变量 (X,Y) 在由直线 $y=x+1$，$x+y=-1$ 及 $x=1$ 所围成的区域内服从均匀分布．求

（1）求 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

（2）求 X 、Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）判断 X 与 Y 是否相互独立，为什么？

（4）求 $f_{X|Y}(x|y)$，$P\left\{0<X<\frac{1}{2}\middle|Y=-\frac{1}{2}\right\}$；

（5）判断 X 与 Y 是否相关，为什么？

解：（1）由题知平面区域 G 的面积为 $S_G=\int_{-1}^{1}dx\int_{-x-1}^{x+1}dy=4$，

所以 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -x-1\le y\le x+1,\quad -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ （2 分）

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x-1}^{x+1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{2}(x+1), & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ （4 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y-1}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(2-y), & 0<y<2,\\ \int_{-y-1}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(y+2), & -2<y<0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad (6\text{分})$$

（3）因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立. （8 分）

（4）当 $-2<y\le 0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2+y}, & -y-1<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

当 $0<y<2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & y-1<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ （10 分）

$$f_{X|Y}\left(X\mid Y=-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & -\frac{1}{2}<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad (11\text{分})$$

$$P\left\{0<X<\frac{1}{2}\middle|Y=-\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{1/2}\frac{2}{3}dx=\frac{1}{3}\qquad (13\text{分})$$

（5）因为 $EX=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(x+1)dx=\frac{1}{3}$，

$EY=\int_{-2}^{0}\frac{y(2+y)}{4}dy+\int_0^{2}\frac{y(2-y)}{4}dy=0$，　或 $EY=\int_{-1}^{1}dx\int_{-x-1}^{x+1}\frac{1}{4}ydy=0$，

$EXY=\int_{-1}^{1}dx\int_{-x-1}^{x+1}\frac{1}{4}xydy=0$，

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$． （18 分）

所以 X 与 Y 不相关.

5、（本题 13 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/6, & -3<x<0\\ \mathrm{kx}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases},$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数.

求 （1）k；

（2）Y 的分布函数$F_Y(y)$.

解：（1） $\int_{-3}^{0}\frac{1}{6}dx+k\int_{0}^{2}\mathrm{x}dx=\frac{1}{2}+2k=1,$

所以 $k=\frac{1}{4}.$

（2 分）

(2) Y 的取值范围为[0，9]，（3 分）

故 当 $y<0$时， $F_Y(y)=0$；

当 $y\geq 9$时， $F_Y(y)=1.$ （5 分）

Y 的分布函数为

$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$ （7 分）

当$0\leq y<4$时，

$$F_Y(y)=P\{X^2\leq y\}=P\left\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\right\}$$

$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq 0)+P(0\leq X\leq\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{6}dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt{y}}xdx=\frac{1}{6}\sqrt{y}+\frac{1}{8}\mathrm{y},$$

（10 分）

当$4\leq y<9$时，

$$F_Y(y)=P\{X^2\leq y\}$$

$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq 0)+P(0\leq X\leq 2)$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{6}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{6}\sqrt{y}+\frac{1}{2}.$$

（13 分）

6、（本题 8 分）（用中心极限定理近似计算）
某互联网站有 10000 个相互独立的用户，已知每个用户在平时任一时刻访问该网站的概率为 0.1 求在任一时刻有 940 到 1075 个用户访问该网站的概率.

$\Phi_0(1)=0.8413,\ \Phi_0(2)=0.9772,\ \Phi(1.96)=0.9750,\ \ \Phi(2.5)=0.9938.$

解： 设 X 表示任一时刻访问该网站的用户数,则

$$X:\ B(10000,0.9)$$ （1 分）

并且

$$E(X)=10000\times 0.1=1000.$$

$$D(X)=10000\times 0.1\times 0.9=900$$

（3 分）

由中心极限定理

$$P(940\leq X\leq 1075)=P\left(\frac{940-1000}{\sqrt{900}}\leq\frac{X-2000}{\sqrt{1600}}\leq\frac{1075-1000}{\sqrt{900}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{5}{2}\right)-\Phi(-2)=\Phi\left(\frac{5}{2}\right)+\Phi(2)-1=0.9938+0.9772-1=0.971$$

设随机变量 **X** 服从(-2,3)上的均匀分布，即 $X \sim U(-2,3)$，令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数.

求 （1）**Y** 的分布函数 $F_Y(y)$；

（2）$F(-\frac{1}{2},4)$.

解 (1)*Y* 的取值范围为[0，9]， （1 分）

故 当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=0$；

当 $y\ge 9$ 时， $F_Y(y)=1$. （3 分）

Y 的分布函数为

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$ （5 分）

当 $0\le y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\left\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{5}dx=\frac{2}{5}\sqrt{y},$$ （8 分）

当 $4\le y<9$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right\}=P\left\{-2\le X\le\sqrt{y}\right\}=\int_{-2}^{\sqrt{y}}\frac{1}{5}dx=\frac{\sqrt{y}+2}{5},$$ （10 分）

设随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x+1/3, & 0\le x<1/2 \\ 1, & x\ge 1/2 \end{cases}$$

则随机变量 X 为

A）离散型随机变量　　　　B）连续型随机变量

C）非离散非连续随机变量　　　　D）不能确定

设随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x+1/3, & 0\le x<1/2 \\ 1, & x\ge 1/2 \end{cases}$$

则 $P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}=$____________.