2021~2022学年第一学期期末考试试卷

《概率论与数理统计1》 （A卷 共四页）

（考试时间：2021 年 12 月 10 日）

题号	一	二	三						期末成绩	核分人签字
			1	2	3	4	5	6		
得分										

一、填空题. (本题共 18 分，每小题 3 分)

1. 已知$P(\overline{A}\,\overline{B})=0.3$, $P(A)=P(B)=0.4$, 则$P(AB)=$______.

2. 已知离散型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，则$X$的数学期望$E(X)=$______.

3. 设随机变量X,Y,Z相互独立，且 $X\sim U[1,7]$, $Y\sim P(4)$, $Z\sim N(0,1)$，记随机变量$W=X-2Y+3Z$, 则方差$D(W)=$______.

4. 已知正态总体X的均值未知，对来自总体X的容量为 10 的简单随机样本，测得样本方差为 1.902，则X 的方差的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______(分位数见末页附表).

5. 从总体X中抽取容量为7的一个简单随机样本，观测值为$3,3,1,5,1,3,2$, 用$F_7(x)$表示相应的经验分布函数，则$F_7(4)=$______.

6. 从总体$X\sim \mathrm{EXP}(2)$ 中抽取一个容量为3的简单随机样本，对应的次序统计量记为$X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}$, 则$P\{X_{(1)}<1\}=$______.

二、选择题. (本题共 18 分, 每小题 3 分)

1. 已知$P(A\bigcup B)-P(AB)=P(A)+P(B)$, 则以下正确的是(　　)
   A. 若A发生则B一定不发生　　B. A,B相互独立
   C. 若A不发生则B一定发生　　D. A,B有可能同时发生

2. 设(X,Y)服从二维正态分布$N(0,0;1,1;0)$，则以下结论不正确的是(　　)
   A. $X+Y$服从正态分布　　B. $\dfrac{X}{Y}$ 服从t 分布
   C. X^2+Y^2服从χ^2分布　　D. $\dfrac{X^2}{Y^2}$服从F分布

3. 设随机变量$X\sim U[-1,2]$, 对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数C_α满足$P(X>C_\alpha)=\alpha$. 若现知$P(|X+1|<c)=\alpha$, 则 c 的值 为(　　)
   A. C_α　　B. $1+C_\alpha$　　C. $C_{1-\alpha}$　　D. $1+C_{1-\alpha}$

4. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n(n\ge 2)$是来自总体$X$的简单随机样本. 已知$\sigma^2$的一个无偏估计量 是$\hat{\sigma}^2=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$, 则常数$k$ 的取值为(　　)
   A. $\dfrac{1}{n-1}$　　B. $\dfrac{1}{n}$　　C. $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　D. $\dfrac{1}{2n}$

5. 设随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布，且$X_1\sim\chi^2_m$, 则(　　)
   A. $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-mn}{\sqrt{2mn}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$
   B. $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2-mn}{\sqrt{2mn}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$
   C. $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-n^2}{\sqrt{2n}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$
   D. $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2-n^2}{\sqrt{2n}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

6. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2, \qquad S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, \qquad S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则以下服从自由度为$n-1$的t分布的随机变量是(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_1}$ B. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_2}$ C. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_3}$ D. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_4}$

三、解答题. (本题共 64 分)

1. (本题 8 分) 设有甲、乙两个袋子，甲中装有 3 只白球， 3 只红球；乙中装有 4 只白球， 2 只红球，这些球除颜色外无差别. 现随机取一个袋子，并从中取出两只球. 问

(1) 从中取出的两只球都是白球的概率是多少?

(2) 若已知取出的两只球都是白球，则该两只白球来自甲袋的概率是多少?

2. (本题 14 分) 已知离散型随机变量$X \sim B(1, 0.6)$，且Y在$X=0$和$X=1$条件下的条件分布如下表所示.

Y	1	2
$P_{Y\|X=0}$	0.4	0.6
$P_{Y\|X=1}$	0.5	0.5

(1) 求(X, Y)的联合分布律；

(2) 求协方差$\mathrm{Cov}(X, Y)$；

(3) 求方差$\mathrm{D}(X+Y)$.

3. (本题 10 分) 已知连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{A}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数A的值；

(2) 求$Y = 2X$的概率密度函数$f_Y(y)$.

4. (本题 14 分) 已知二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, 0 < y < |x|, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求X和Y的边缘概率密度函数；

(2) 求条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$；

(3) 求概率$P(X > -\frac{1}{2}|Y = \frac{1}{3})$和$P(X > -\frac{1}{2}|Y \geq \frac{1}{3})$.

5. (**本题 10 分**) 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求未知参数λ的矩估计量;

(2) 求未知参数λ的最大似然估计量.

6. (**本题 8 分**) 已知钢筋强度X服从正态分布，且$E(X)=52$，今改变炼钢的配方，用新配方炼了 9 炉钢，从这 9 炉钢生产的钢筋中分别各取一根，测得样本均值$\bar{x}=52.14$，样本方差$S^2=2.70^2$. 问用新法炼钢生产的钢筋强度的均值是否有显著提高($\alpha=0.05$)?

一些上侧分位数:

$z_{0.025}=1.96,\ z_{0.01}=2.33,\ z_{0.05}=1.65$

$\chi_9^2(0.025)=19.02,\ \chi_9^2(0.05)=16.92,\ \chi_9^2(0.95)=3.33,\ \chi_9^2(0.975)=2.70,$

$\chi_{10}^2(0.025)=20.48,\ \chi_{10}^2(0.05)=18.31,\ \chi_{10}^2(0.95)=3.94,\ \chi_{10}^2(0.975)=3.25,$

$t_8(0.05)=1.86,\ t_8(0.025)=2.31,\ t_8(0.01)=2.90,$

$t_9(0.05)=1.83,\ t_9(0.025)=2.26,\ t_9(0.01)=2.82.$