参考答案及解析

第四章　数列

4.1　数列的概念

第 1 课时　数列的概念(一)

【典型例题】

【例1】(1)× (2)√ (3)√ (4)×

【例2】(1)$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (2)$a_n=(-1)^{n+1}+1$

【基础夯实】

1.A 2.B 3.D 4.C 5.B

6.10 7.充分不必要 8.递增 9.(1)是,第 10 项 (2)最大项为 $a_2=13$

【能力提升】

10.A 11.B 12.$\lambda>-3$ 13.(1) 递增数列 (2) $k<0$

14.(1) $a_n=4n-2$ (2) 存在.这三项分别为 $a_7=26,a_8=30,a_9=34$.

【素质拓展】

15. 2 $(-\infty,-1]$

第 2 课时　数列的概念(二)

【典型例题】

【例1】(1) $a_3=\frac{1}{2},a_5=2$ (2)2527

【例2】(1) 数列$\{a_n\}$中的最大项为 $a_5=2$,最小项为 $a_4=0$. (2)$(-10,-8)$

【基础夯实】

1.B 2.C 3.A 4.D 5.$-3\times2^{n-1}$ 6.3^n 7.28 8.$\frac{1}{161}$

9.$a_n=2n$,数列的前 3 项分别为 2,4,6.

【能力提升】

10.B 11.1008 12.5

13.(1) $a_n=4n-18$ (2) $\{\lambda|\lambda>\frac{16}{3}\}$

14.(1) $a_n=4n-5$

(2) 当 $b=-1$ 时,$a_n=2\cdot3^{n-1}$;当 $b\neq-1$ 时,$a_n=\begin{cases}3+b,n=1,\\2\cdot3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

【素质拓展】

15.(1) $a_n=\begin{cases}2, n=1,\\ \dfrac{n+1}{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$ (2) $\dfrac{2}{n}-1$

4.2 等差数列

第1课时 等差数列的概念(一)

【典型例题】

【例1】(1) $3n-7$ (2) 938是数列$\{b_n\}$中的项

【例2】(1) 180 (2)24

【基础夯实】

1.C 2.C 3.D 4.B

5.$-15-n$ 6.$\dfrac{31}{72}$ 7.4 8.200 9.(1)16 (2) $a_n=\dfrac{7+3n}{13-3n}$

【能力提升】

10.D 11.C 12.$\dfrac{3}{n+5}$ 13.(1) $\begin{cases}a_1=-2\\ d=3\end{cases}$ (2)0

14.11,8,5,2.

【素质拓展】

15.证明:$\because a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}$,$\therefore a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$.

$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{a_n}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n-1}{a_n-1}=1$,

$\therefore\{b_n\}$是首项为$b_1=\dfrac{1}{2-1}=1$,公差为1的等差数列.

第2课时 等差数列的概念(二)

【典型例题】

【例1】(1)× (2)√ (3)√ (4)√

【例2】(1)34 (2) $a_n=2n-7$或$a_n=-2n+13$

【基础夯实】

1.C 2.D 3.B 4.D

5.21 6.6 7.2 8.40 9.(1)28 (2)$a_n=9n-8$

【能力提升】

10.B 11.A

12.40

13.(1)45 (2) 新数列的第29项是原数列的第8项

14.(1)135是$\{a_n\}$中的第34项.$4m+19$是$\{a_n\}$中的第$(m+5)$项. (2)$2a_p+3a_q$是$\{a_n\}$中的第$(2p+3q-1)$项.

【素质拓展】

15.(1)证明:$\because a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,

又 $a_n=-2S_n\cdot S_{n-1}$,$\therefore S_{n-1}-S_n=2S_n\cdot S_{n-1}$,$S_n\neq 0$.

因此$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$.

故由等差数列的定义知$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=2$为首项,2为公差的等差数列.

(2)$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2},n=1,\\ -\dfrac{1}{2n(n-1)},n\geqslant 2\end{cases}$

第3课时　等差数列的前 n 项和公式(一)

【典型例题】

【例1】(1) $a_n=4n-3$,$S_n=2n^2-n$　(2) $c=-\dfrac{1}{2}$

【例2】-225

【基础夯实】

1.A　2.C　3.B　4.A

5.$\left(-1,-\dfrac{7}{8}\right)$

6.10

7.211

8.5

9.(1) $3-2n$　(2) $k=7$

【能力提升】

10.B　11.B

12.14

13.(1)$a_n=12-2n$　(2) $S_5=S_6=30$

14.最大值为 $S_{12}=S_{13}=12\times 20+\dfrac{12\times 11}{2}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=130$.

【素质拓展】

15.(1) $S_n=-n^2+9n$　(2) 是“特界”数列

第4课时　等差数列的前 n 项和公式(二)

【典型例题】

【例1】$T_n=-2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n(n-9)}{4}$

【例2】(1) $S_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n(n+2)$　(2) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

【基础夯实】

1.C　2.C　3.D　4.B

5.8　6.60　7.1　8.$3n^2-2n$　9.$n=18$,$a_9+a_{10}=36$

【能力提升】

10.C　11.C

12.72　13.$S_{3n}=3b-3a$

14.(1)$a_n=3+(n-1)\times3=3n,n\in\mathbf{N}^*$

(2)$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=9n+\dfrac{9}{2}n(n-1)\times9=\dfrac{9}{2}(n^2+n)$

【素质拓展】

15.(1) $a_n=11-2n$　(2) $T_n=\begin{cases}-n^2+10n & (n\leqslant5),\\ n^2-10n+50 & (n\geqslant6)\end{cases}$

4.3　等比数列

第1课时　等比数列的概念(一)

【典型例题】

【例1】当$q=\dfrac{1}{3}$时,$a_n=2\times3^{3-n},n\in\mathbf{N}^*$;当$q=3$时,$a_n=2\times3^{n-3},n\in\mathbf{N}^*$.

【例2】(1)$a_n=6n-15,S_n=\dfrac{n(-9+6n-15)}{2}=3n^2-12n$

(2)$b_n=3^{2n-3}$

【基础夯实】

1.C　2.A　3.A　4.A

5.-8　6.2　7.4　8.2　9.$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

【能力提升】

10.B　11.A

12.64

13.15或-15

14.(1)$a_2=\dfrac{1}{2},a_3=\dfrac{1}{4}$　(2)$a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$

【素质拓展】

15.(1)设$\{a_n\}$的公比为q,

则$b_1=1+a=2,b_2=2+aq=2+q,b_3=3+aq^2=3+q^2$.

由b_1,b_2,b_3成等比数列得$(2+q)^2=2(3+q^2)$,

即$q^2-4q+2=0$,解得$q_1=2+\sqrt{2},q_2=2-\sqrt{2}$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(2+\sqrt{2})^{n-1}$或$a_n=(2-\sqrt{2})^{n-1}$.

(2)设$\{a_n\}$的公比为q,则由$(2+aq)^2=(1+a)(3+aq^2)$,

得$aq^2-4aq+3a-1=0(*)$.

由$a>0$得$\Delta=4a^2+4a>0$,故方程$(*)$有两个不同的实根.

由$\{a_n\}$唯一,知方程$(*)$必有一根为0,代入$(*)$得$a=\dfrac{1}{3}$.

第2课时　等比数列的概念(二)

【典型例题】

【例1】(1)$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n+1}$,所以$\{a_n\}$是首项为9,公比为3的等比数列.

(2)因为$a_n=3^{n+1}$,所以$\log_3 a_n=n+1$,所以数列$\{\log a_n\}$的前n项和:

$$T_n=2+3+\cdots+n+1=\frac{(2+n+1)n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}.$$

【例2】(1)由题意得1999年诺贝尔奖发奖后基金总额为

$19516\times(1+6.24\%)-\frac{1}{2}\times19516\times6.24\%=20124.8992\approx20125$(万美元),

每项诺贝尔奖发放奖金为$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\times19516\times6.24\%\right)=101.4832\approx101.48$(万美元).

(2)由题意得$a_1=20125$,

$a_2=a_1\cdot(1+6.24\%)-\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot6.24\%=a_1\cdot(1+3.12\%)$,

$a_3=a_2\cdot(1+6.24\%)-\frac{1}{2}\cdot a_2\cdot6.24\%=a_2\cdot(1+3.12\%)=a_1\cdot(1+3.12\%)^2$,

……

所以$a_n=20215\times(1+3.12\%)^{n-1}$,

2019年诺贝尔奖发奖后基本总额为$a_{21}=20125\cdot(1+3.12\%)^{20}$,

2020年每项诺贝尔奖发放奖金为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times a_{21}\times6.24\%\approx193.46$(万美元),

故该推测具有可信度.

【基础夯实】

1.A　2.C　3.B　4.D

5.80,40,20,10

6.50　7.$\frac{3}{2}$　8.7

9.(1)$\because a_{n+1}=2a_n+1$,

$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,又$a_1+1=2$,$\therefore$数列$\{a_n+1\}$是等比数列,

$\therefore a_n+1=(a_1+1)q^{n-1}=2^n$,$\therefore a_n=2^n-1$.

(2)$c_n=\frac{a_n+1}{n(n+1)2^n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

【能力提升】

10.B　11.C　12.4　13.4

14.(1)由题意得$a_n=(1-4\%)a_{n-1}+(1-a_{n-1})\times16\%=0.96a_{n-1}+0.16-0.16a_{n-1}=0.8a_{n-1}+0.16=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}$,所以$a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}$.

(2)由(1)得$a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{4}{25}$,$\therefore a_n-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(a_{n-1}-\frac{4}{5}\right)$,

所以数列$\left\{a_n-\frac{4}{5}\right\}$是等比数列.

(3)由(2)有$a_n-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(a_{n-1}-\frac{4}{5}\right)$,又$a_1=\frac{3}{10}$,所以$a_1-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore a_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,即$a_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}$.

$a_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$,即$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$,两边取常用对数得:

$(n-1)\lg\frac{4}{5}<\lg\frac{2}{5}$,所以$(n-1)>\frac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{4}{5}}=\frac{\lg2-\lg5}{2\lg2-\lg5}=\frac{\lg2-(1-\lg2)}{2\lg2-(1-\lg2)}=\frac{2\lg2-1}{3\lg2-1}=\frac{2\times0.301-1}{3\times0.301-1}=\frac{0.398}{0.097}$

≈4.1,

$\therefore n>5.1$.$\therefore$至少经过6年,绿洲面积可超过60%.

【素质拓展】

15.(1)当$n=1$时,$S_1=a_2-\frac{1}{32}$,$a_2=a_1+\frac{1}{32}$,

当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=a_n-\frac{1}{32}$,与已知式作差得$a_n=a_{n+1}-a_n$,即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,

又$a_2=a_1+\frac{1}{32}$,$\therefore a_2=\frac{1}{16}$,$\therefore\frac{a_2}{a_1}=2$,

故数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{32}$为首项,2为公比的等比数列,

$\therefore a_n=2^{n-6}$.

(2)由(1)知$b_n=n-6$,$\therefore|b_n|=\begin{cases}6-n,n<6,\\n-6,n\geqslant6,\end{cases}$

若$n<6$,$T_n=-b_1-b_2\cdots-b_n=\frac{11n-n^2}{2}$,

若$n\geqslant6$,$T_n=-b_1-b_2\cdots-b_5+b_6+\cdots+b_n=\frac{n^2-11n}{2}+30$,

$\therefore T_n=\begin{cases}\frac{11n-n^2}{2},n<6,\\\frac{n^2-11n}{2}+30,n\geqslant6.\end{cases}$

第3课时　等比数列的前n项和公式(一)

【典型例题】

【例1】(1)设$\{a_n\}$的公比为q,由题设得$a_n=q^{n-1}$.

由已知得$q^4=4q^2$,解得$q=0$(舍去),$q=-2$或$q=2$.

故$a_n=(-2)^{n-1}$或$a_n=2^{n-1}$.

(2)若$a_n=(-2)^{n-1}$,则$S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$.

由$S_m=63$,得$(-2)^m=-188$,此方程没有正整数解.

若$a_n=2^{n-1}$,则$S_n=2^n-1$.由$S_m=63$,得$2^m=64$,解得$m=6$.

综上,$m=6$.

【例2】(1)由题意得$a_1=S_1=1+\lambda a_1$,故$\lambda\neq1$,$a_1=\frac{1}{1-\lambda}$,$a_1\neq0$.

由 $S_n=1+\lambda a_n$，$S_{n+1}=1+\lambda a_{n+1}$ 得 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}-\lambda a_n$，即 $a_{n+1}(\lambda-1)=\lambda a_n$.

由 $a_1\neq0$，$\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$ 得 $a_n\neq0$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

因此$\{a_n\}$是首项为$\dfrac{1}{1-\lambda}$，公比为$\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$的等比数列，于是 $a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$.

(2)由(1)得 $S_n=1-(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^n$，由 $S_5=\dfrac{31}{32}$，得 $1-(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^5=\dfrac{31}{32}$，

即$(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^5=\dfrac{1}{32}$，解得 $\lambda=-1$.

【基础夯实】

1.D　2.B　3.C　4.B

5.2^n-1　6.6　7.$\dfrac{1}{18}$　8.-63

9.(1)由已知，$a_1b_2+b_2=b_1$，$b_1=1$，$b_2=\dfrac{1}{3}$，得 $a_1=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公差为 3 的等差数列，通项公式为 $a_n=3n-1$.

(2)由(1)和 $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，得 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{3}$，因此$\{b_n\}$是首项为 1，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列.记$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{n-1}}.$$

【能力提升】

10.B　11.D

12.11　13.$\dfrac{3}{2}$

14.(1)设$\{a_n\}$的公比为 q.由题设可得

$$\begin{cases}a_1(1+q)=2,\\a_1(1+q+q^2)=-6,\end{cases}$$

解得 $q=-2$，$a_1=-2$，故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(-2)^n$.

(2)由(1)可得 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\dfrac{2}{3}+(-1)^n\dfrac{2^{n+1}}{3}$.

由于 $S_{n+2}+S_{n+1}=-\dfrac{4}{3}+(-1)^n\dfrac{2^{n+3}-2^{n+2}}{3}=2[-\dfrac{2}{3}+(-1)^n\dfrac{2^{n+1}}{3}]=2S_n$，

故 S_{n+1}，S_n，S_{n+2}成等差数列.

【素质拓展】

15.(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_1\neq0$，$q\neq0$. 由题意得

$$\begin{cases}S_2-S_4=S_3-S_2,\\a_2+a_3+a_4=-18,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-a_1q^2-a_1q^3=a_1q^2,\\a_1q(1+q+q^2)=-18,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a_1=3,\\q=-2.\end{cases}$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3(-2)^{n-1}$.

(2)由(1)有 $S_n=\dfrac{3\cdot[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=1-(-2)^n$.

若存在 n，使得 $S_n\geqslant2013$，则 $1-(-2)^n\geqslant2013$，即$(-2)^n\leqslant-2012$.

当 n 为偶数时，$(-2)^n>0$，上式不成立；

当 n 为奇数时,$(-2)^n=-2^n\leqslant-2012$,即 $2^n\geqslant2012$,则 $n\geqslant11$.

综上,存在符合条件的正整数 n,且所有这样的 n 的集合为 $\{n\mid n=2k+1,k\geqslant5,k\in\mathbf{N}^*\}$.

第4课时　等比数列的前 n 项和公式(二)

【典型例题】

【例1】(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>1)$,则 $\begin{cases}a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20,\\a_3=a_1q^2=8,\end{cases}$

整理可得:$2q^2-5q+2=0$,$\because q>1$,$\therefore q=2$,$a_1=2$,

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

(2)因为 $(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}\times2^n\times2^{n+1}=(-1)^{n-1}2^{2n+1}$,

所以 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$

$=2^3-2^5+2^7-2^9+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot2^{2n+1}$

$=\dfrac{2^3[1-(-2^2)^n]}{1-(-2^2)}=\dfrac{8}{5}-(-1)^n\ \dfrac{2^{2n+3}}{5}$.

【例2】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,

由题意知,$a_1(1+q)=6$,$a_1^2q=a_1q^2$,

且 $a_n>0$,解得 $a_1=2$,$q=2$,所以 $a_n=2^n$.

(2)由题意知 $S_{2n+1}=\dfrac{(2n+1)(b_1+b_{2n+1})}{2}=(2n+1)\cdot b_{n+1}$,

又 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$,$b_{n+1}\neq0$,

所以 $b_n=2n+1$,令 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$,则 $c_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$.

因此 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{2n+1}{2^n}$,

则 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$,

两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$,所以 $T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$.

【基础夯实】

1.C　2.A　3.C　4.C

5.0　6. $2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$　7.32　8.$(-2)^{n-1}$

9.(1)$a_n=3^{n-1}$　(2)$T_n=\dfrac{(2n-1)\cdot3^n}{4}+\dfrac{1}{4}$

【能力提升】

10.A　11.B

12.6　13.31

14.(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,a_1 为 a_2,a_3 的等差中项,

$\because 2a_1=a_2+a_3$,$a_1\neq0$,$\therefore q^2+q-2=0$,

$\because q\neq1$,$\therefore q=-2$.

(2)设 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$a_n=(-2)^{n-1}$,

$S_n=1\times1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$,①

$-2S_n=1\times(-2)+2\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots+(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n$,②

①－②得，$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{3}$，$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【素质拓展】

15.(1)设数列$\{x_n\}$的公比为q，由已知$q>0$.

由题意得$\begin{cases}x_1+x_1q=3,\\x_1q^2-x_1q=2,\end{cases}$所以$3q^2-5q-2=0$，

因为$q>0$，所以$q=2$，$x_1=1$，因此数列$\{x_n\}$的通项公式为$x_n=2^{n-1}$.

(2)过$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_{n+1}$向$x$轴作垂线，垂足分别为$Q_1,Q_2,Q_3,\cdots,Q_{n+1}$，

由(1)得$x_{n+1}-x_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.记梯形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为$b_n$.

由题意$b_n=\dfrac{(n+n+1)}{2}\times2^{n-1}=(2n+1)\times2^{n-2}$，

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=3\times2^{-1}+5\times2^0+7\times2^1+\cdots+(2n-1)\times2^{n-3}+(2n+1)\times2^{n-2}$，①

又$2T_n=3\times2^0+5\times2^1+7\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-2}+(2n+1)\times2^{n-1}$，②

①－②得

$-T_n=3\times2^{-1}+(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n+1)\times2^{n-1}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\times2^{n-1}$，所以$T_n=\dfrac{(2n-1)\times2^n+1}{2}$.

4.4* 数学归纳法

第1课时 数学归纳法(一)

【典型例题】

【例1】(1)$\because a_1=\dfrac{1}{6}$，前$n$项和$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}a_n$，

$\therefore$令$n=2$，得$a_1+a_2=3a_2$，$\therefore a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{12}$.

令$n=3$，得$a_1+a_2+a_3=6a_3$，$\therefore a_3=\dfrac{1}{20}$.

令$n=4$，得$a_1+a_2+a_3+a_4=10a_4$，$\therefore a_4=\dfrac{1}{30}$.

(2)猜想$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$，下面用数学归纳法给出证明.

①当$n=1$时，结论成立；

②假设当$n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant1)$时，结论成立，即$a_k=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$，

则当$n=k+1$时，$S_k=\dfrac{k(k+1)}{2}\cdot a_k=\dfrac{k}{2(k+2)}$，$S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\cdot a_{k+1}$，

即$S_k+a_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\cdot a_{k+1}$，

$\therefore\dfrac{k}{2(k+2)}+a_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\cdot a_{k+1}$，

$\therefore \frac{k(k+3)}{2} \cdot a_{k+1}=\frac{k}{2(k+2)}$,

$\therefore a_{k+1}=\frac{1}{(k+2)(k+3)}$,

当 $n=k+1$ 时结论成立.

由①②可知,对一切 $n\in \mathbf{N}^*$,都有 $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$成立.

【例2】证明:①当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=1$,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in \mathbf{N}^*)$时等式成立,即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+(k-1)^3+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$,

则当 $n=k+1$ 时,$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$,该等式成立.

根据①②,原等式成立.

【基础夯实】

1.C 2.C 3.D 4.C

5.$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

6.$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$(或$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$)

7.3

8.$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

9.(1)因为 $a_{n+1}=2a_n+1(n=1,2,3,\cdots)$,且 $a_1=1$,

所以 $a_2=2\times1+1=3$,$a_3=2\times3+1=7$,$a_4=2\times7+1=15$,$a_5=2\times15+1=31$.

(2)猜想 $a_n=2^n-1(n\in \mathbf{N}^*)$,证明略.

【能力提升】

10. D 11.A

12.$\frac{1}{4^k+1}+\frac{1}{4^k+2}+\cdots+\frac{1}{4^{k+1}}$

13.$(k+1)^2+k^2$

14.(1) $\because a_1=\frac{1}{2}$,$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$,

$\therefore a_2=\frac{3a_1}{a_1+3}=\frac{3\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+3}=\frac{3}{7}$,$a_3=\frac{3a_2}{a_2+3}=\frac{3\times\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+3}=\frac{3}{8}$.

因此可猜想:$a_n=\frac{3}{n+5}(n\in \mathbf{N}^*)$.

(2)当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1}{2}$,等式成立,

假设 $n=k$ 时,等式成立,即 $a_k=\frac{3}{k+5}$,

则当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=\frac{3a_k}{a_k+3}=\frac{3\times\frac{3}{k+5}}{\frac{3}{k+5}+3}=\frac{3}{k+6}=\frac{3}{(k+1)+5}$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立,

综上所述,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=\frac{3}{n+5}$.

【素质拓展】

15.(1)对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,$S_n=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}-1$,且 $a_n>0$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2a_1}-1$,整理得 $a_1^2+2a_1-1=0$,且 $a_n>0$,所以 $a_1=\sqrt{2}-1$;

当 $n=2$ 时,$S_2=a_1+a_2=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2a_2}-1$,整理得 $a_2^2+2\sqrt{2}a_2-1=0$,且 $a_n>0$,所以 $a_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

当 $n=3$ 时,$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{2}+\frac{1}{2a_3}-1$,整理得 $a_3^2+2\sqrt{3}a_3-1=0$,且 $a_n>0$,所以 $a_3=2-\sqrt{3}$.

(2)由(1)猜想 $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

下面用数学归纳法加以证明:

①当 $n=1$ 时,由(1)知 $a_1=\sqrt{2}-1$ 成立;

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,$a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ 成立.

当 $n=k+1$ 时,

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=(\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{2a_{k+1}}-1)-(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{2a_k}-1)=\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{2a_{k+1}}-\sqrt{k+1}$,

所以 $a_{k+1}^2+2\sqrt{k+1}a_{k+1}-1=0$,且 $a_{k+1}>0$,

所以 $a_{k+1}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$,即当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

综上可知,猜想对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

第 2 课时　数学归纳法(二)

【典型例题】

【例1】由 $b_n=2n$,得$\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{2n+1}{2n}$,

所以$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}$,

用数学归纳法证明不等式$\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$成立,证明如下:

①当 $n=1$ 时,左边$=\frac{3}{2}$,右边$=\sqrt{2}$,因为$\frac{3}{2}>\sqrt{2}$,所以不等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时不等式成立,即$\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2k}>\sqrt{k+1}$成立,

则当 $n=k+1$ 时,左边$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2k}\times\frac{2k+3}{2k+2}>\sqrt{k+1}\times\frac{2k+3}{2k+2}$,

$=\sqrt{\frac{(2k+3)^2}{4(k+1)}}=\sqrt{\frac{4k^2+12k+9}{4(k+1)}}>\sqrt{\frac{4k^2+12k+8}{4(k+1)}}=\sqrt{\frac{4(k^2+3k+2)}{4(k+1)}}=\sqrt{\frac{4(k+1)(k+2)}{4(k+1)}}=\sqrt{k+2}=$
$\sqrt{(k+1)+1}=$右边.

所以当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由①②可得不等式 $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,即原不等式成立.

【例2】证明:①当 $n=1$ 时,$(3n+1)7^n-1=(3+1)\times7-1=27$ 是 9 的倍数,命题成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,命题成立,即 $(3k+1)7^k-1$ 能被 9 整除.那么当 $n=k+1$ 时,

$[3(k+1)+1]7^{k+1}-1=(21k+28)\cdot7^k-1=(3k+1)\cdot7^k-1+(18k+27)\cdot7^k$.

由假设知 $(3k+1)\cdot7^k-1$ 能被 9 整除,又 $(18k+27)\cdot7^k=9(2k+3)\cdot7^k$ 能被 9 整除,

所以 $(3k+1)\cdot7^k-1+(18k+27)\cdot7^k$ 能被 9 整除.

即 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据①②,知 $(3n+1)7^n-1$ 能被 9 整除 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

【基础夯实】

1.B　2.D　3.C　4.B

5.5　6.2^k　7.36　8.②③

9.证明:①当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=2$,左边 $<$ 右边,故当 $n=1$ 时不等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时不等式成立,即 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$,

那么当 $n=k+1$ 时,左边 $=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

因为 $4k^2+4k<4k^2+4k+1$,所以 $2\sqrt{k^2+k}<2k+1$,

所以 $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{k+1}\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}<\frac{2k+2}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}$.

故当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

综上,由①②可知 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

【能力提升】

10.D　11.D

12.$4(5^k+3^{k-1})$

13.$-\frac{n+1}{n+2}$

14.证明:①当 $n=1$ 时,$x^n+y^n=x+y$ 显然能被 $x+y$ 整除.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*$,且 k 为正奇数)时,命题成立,即 x^k+y^k 能被 $x+y$ 整除.

当 $n=k+2$ 时,$x^{k+2}+y^{k+2}=x^2(x^k+y^k)+y^{k+2}-x^2y^k=x^2(x^k+y^k)-y^k(x+y)(x-y)$.

又根据假设 x^k+y^k 能被 $x+y$ 整除,

∴$x^2(x^k+y^k)$ 能被 $x+y$ 整除. 又 $y^k(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除,

∴$x^2(x^k+y^k)-y^k(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除,

∴当 $n=k+2$ 时命题也成立.

由①②知,当 n 为正奇数时,x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.

【素质拓展】

15.当 $n=1$ 时,$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3+1}>\frac{a}{24}$,

即 $\frac{26}{24}>\frac{a}{24}$,所以 $a<26$,而 a 是正整数,所以取 $a=25$.

下面用数学归纳法证明：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>\frac{25}{24}$.

①当 $n=1$ 时，$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3+1}>\frac{25}{24}$.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式成立，即$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>\frac{25}{24}$.

则当 $n=k+1$ 时，有$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{3(k+1)+1}$

$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$

$>\frac{25}{24}+[\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}]$,

因为$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6(k+1)}{9k^2+18k+8}>\frac{2}{3(k+1)}$,

所以$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}>0$，所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由①②知，对一切正整数 n，都有$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>\frac{25}{24}$，所以正整数 a 的最大值为 25.

章末整合四

【典型例题】

【例1】(1)由条件可得 $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$.

将 $n=1$ 代入得 $a_2=4a_1$，而 $a_1=1$，所以 $a_2=4$.

将 $n=2$ 代入得 $a_3=3a_2$，所以 $a_3=12$.从而 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$.

(2)$\{b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

由条件可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}$，即 $b_{n+1}=2b_n$，又 $b_1=1$，

所以$\{b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

(3)由(2)可得$\frac{a_n}{n}=b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $a_n=n\cdot 2^{n-1}$.

巩固练习：(1)$\because a_1a_5=a_3^2=8a_3$，$a_n>0$，$\therefore a_3=8$，

又 $S_3=a_1+a_2+8=14$，$\therefore a_1+a_2=\frac{8}{q^2}+\frac{8}{q}=6$，解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{2}{3}$(舍去)，

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)$\because b_n+b_{n-1}=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，

$\therefore T_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

【例2】(1)$\because a_6=11$，$\therefore a_1+5d=11$，①

$\because a_2,a_5,a_{14}$成等比数列，$\therefore(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+13d)$，

化简得 $d=2a_1$，②

由①②可得，$a_1=1$，$d=2$.

$\therefore$数列的通项公式是 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)得 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$,

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

巩固练习:

(1)数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

当$n\geqslant 2$时,$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$,

$\therefore(2n-1)a_n=2$,即$a_n=\frac{2}{2n-1}$.

当$n=1$时,$a_1=2$,上式也成立,$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$.

(2)$\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,

$\therefore$数列$\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$的前$n$项和为

$S_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.

【例3】(1)由$a_1=2,a_{n+1}=2a_n$,得$a_n=2^n$.

当$n=1$时,$b_1=b_2-1$,故$b_2=2$.

当$n\geqslant 2$时,$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$,整理得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$,所以$b_n=n$.

(2)由(1)知,$a_nb_n=n\cdot 2^n$,

故$T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$,

$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+2\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$,

所以$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

巩固练习:

(1)当$n=1$时,$a_1=S_1=2a_1-2$,解得$a_1=2$,

当$n>1$时,由$S_n=2a_n-2$可得$S_{n-1}=2a_{n-1}-2,n>1$,

两式相减可得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$,

所以$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)得$b_n=(2n-1)\times 2^n$,

$T_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\times 2^n$,

则$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-3)\times 2^n+(2n-1)\times 2^{n+1}$,

两式相减得$-T_n=2+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^n-(2n-1)\times 2^{n+1}$

$=2+\frac{8(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times 2^{n+1}=2^{n+2}-6-(2n-1)\times 2^{n+1}=-(2n-3)\times 2^{n+1}-6$,

所以$T_n=(2n-3)\times 2^{n+1}+6$.

章末检测

1.A　2.C　3.A　4.A　5.A　6.D　7.B　8.C

9.10　10.0　11.25　12.$-\frac{1}{n}$

13.(1)$\because 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$,$\therefore a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$,

$\therefore\{a_n\}$是等差数列,设$\{a_n\}$的公差为 d,

$\because a_2=3,S_5=25,\therefore\begin{cases}a_1+d=3,\\5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=25,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}\therefore a_n=2n-1.$

(2)$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$,

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}.$

14.(1)由题意可得 $a_2=3a_1-4=9-4=5,a_3=3a_2-8=15-8=7$,

由数列$\{a_n\}$的前三项可猜想数列$\{a_n\}$是以 3 为首项,2 为公差的等差数列,即 $a_n=2n+1$.

证明如下:

当 $n=1$ 时,$a_1=3$ 成立;

假设 $n=k$ 时,$a_k=2k+1$ 成立.

那么 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2k+3=2(k+1)+1$ 也成立.

则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_n=2n+1$ 成立.

(2)由(1)可知,$a_n\cdot 2^n=(2n+1)\cdot 2^n$,

$S_n=3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}+(2n+1)\cdot 2^n$,①

$2S_n=3\times 2^2+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)\cdot 2^{n+1}$,②

由①-②得:$-S_n=6+2\times(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n+1)\cdot 2^{n+1}$

$=6+2\times\frac{2^2\times(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\cdot 2^{n+1}=(1-2n)\cdot 2^{n+1}-2$,

即 $S_n=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

15.(1)$\because a_{n+1}=2a_n-1,\therefore a_{n+1}-1=2(a_n-1),\because a_1=2$,

$\therefore$数列$\{a_n-1\}$是以 $a_1-1=1$ 为首项,2 为公比的等比数列,由题意得 $t=1$,

$\therefore a_n-1=2^{n-1}$,即数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}+1$.

(2)由(1)可得,$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+n=2^n+n-1$,

$\because\lambda(a_n-1)\geqslant S_n,\therefore\lambda\geqslant 2(1+\frac{n-1}{2^n})$,

由不等式组$\begin{cases}\frac{n-1}{2^n}\geqslant\frac{n-2}{2^{n-1}},\\\frac{n-1}{2^n}\geqslant\frac{n}{2^{n+1}},\end{cases}$得 $2\leqslant n\leqslant 3$,

$\therefore$数列$\{\frac{n-1}{2^n}\}$的最大项是第 2 项和第 3 项,值为$\frac{1}{4}$.

$\therefore\lambda\geqslant\frac{5}{2}$,所以实数 λ 的取值范围是$[\frac{5}{2},+\infty)$.

第五章　一元函数的导数及其应用

5.1　导数的概念及其意义

5.1.1　变化率问题

【典型例题】

【例1】(1)因为 $f(x)=3x^2+5$,

所以从 0.1 到 0.2 的平均变化率为$\dfrac{3\times0.2^2+5-3\times0.1^2-5}{0.2-0.1}=0.9$.

(2)$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3(x_0+\Delta x)^2+5-(3x_0^2+5)$

$=3x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2+5-3x_0^2-5=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2$,

所以函数 $f(x)$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均变化率为:

$\dfrac{6x_0\Delta x+3\ (\Delta x)^2}{\Delta x}=6x_0+3\Delta x$.

【例2】(1)$h(0)$表示航天飞机发射前的高度;

$h(1)$表示航天飞机升空后第 1 s时的高度;

$h(2)$表示航天飞机升空后第 2 s时的高度.

(2)航天飞机升空后第 2 秒内的平均速度为

$\bar{v}=\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=\dfrac{5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4-(5\times1^3+30\times1^2+45\times1+4)}{1}=170(\mathrm{m/s})$.

答:航天飞机升空后第 2 秒内的平均速度为 170 米/秒.

【夯实基础】

1. B　2.C　3.B　4.C

5.3　6. $\dfrac{3}{4}$　7.3

8.$[x_3,x_4]$

【能力提升】

9.B　10.B　11.C　12.B　13.C

14.$k_1>k_2$

15.(1)由题意得,割线 AB 的斜率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\dfrac{-(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-(-4+2)}{\Delta x}$

$=\dfrac{-4\Delta x+\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=-3-\Delta x$,

由$-3-\Delta x\leqslant-1$,得 $\Delta x\geqslant-2$,

又因为 $\Delta x>0$,所以 Δx 的取值范围是$(0,+\infty)$.

(2)由(1)知函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象在点 $A(2,f(2))$处切线的斜率为

$k=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(-3-\Delta x)=-3$,

所以函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象在点 $A(2,f(2))$ 处切线的斜率为 -3.

【素质拓展】

16.①③④

5.1.2 导数的概念及其几何意义(第1课时)

【典型例题】

【例1】(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

(2) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

【例2】(1) $\because \Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2$, $\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x$,

当 Δx 无限趋近于 0 时, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$ 无限趋近于 2,所以 $f'(1)=2$.

(2) $\because \Delta y=(2+\Delta x)^2+\dfrac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\dfrac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2-\dfrac{\Delta x}{2(2+\Delta x)}$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\dfrac{1}{4+2\Delta x}$,

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$,故 $f'(2)=\dfrac{15}{4}$.

【基础夯实】

1.A 2.B 3.A 4.B

5.$\dfrac{1}{2}$ 6.1 7.6,6 8.-3

9.$\because \Delta y=\sqrt{(0+\Delta x)^2+1}-\sqrt{0+1}$

$=\dfrac{(\Delta x)^2+1-1}{\sqrt{(\Delta x)^2+1}+1}$

$=\dfrac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+1}+1}$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+1}+1}$,

$\therefore y'|_{x=0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+1}+1}=0$.

故答案为 $y'|_{x=0}=0$.

【能力提升】

10.D 11.D 12.B

13.2 14.-1

15.$h(0.5+\Delta t)-h(0.5)=[-4.9(0.5+\Delta t)^2+4.8(0.5+\Delta t)+11]-(-4.9\times 0.5^2+4.8\times 0.5+11)$

$=-4.9(\Delta t)^2-0.1\Delta t$,

所以 $h'(0.5)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(0.5+\Delta t)-h(0.5)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-0.1-4.9\Delta t)=-0.1(\text{m/s})$.

所以,高台跳水运动员在 $t=0.5$ s 时的瞬时速度为 -0.1 m/s.

【素质拓展】

16.0

5.1.2 导数的概念及其几何意义(第2课时)

【典型例题】

【例1】(1)$y=-2x-1$,$y=4x-4$ (2)$y=x-\frac{1}{4}$

【例2】(1)$\because f(x)=x^3-x$,$\therefore f(2)=6$,

求导可得 $f'(x)=3x^2-1$,

$\therefore$切线的斜率为 $k=f'(2)=11$,

$\therefore$所求切线方程为 $y-6=11(x-2)$,即 $11x-y-16=0$.

(2)设与直线 $y=5x+3$ 平行的切线的切点为(x_0,y_0),

则切线的斜率为 $k=f'(x_0)=3x_0^2-1$,又所求切线与直线 $y=5x+3$ 平行,

$\therefore 3x_0^2-1=5$,解得 $x_0=\pm\sqrt{2}$,

代入 $f(x)=x^3-x$ 可得切点为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$,

$\therefore$所求切线方程为 $y-\sqrt{2}=5(x-\sqrt{2})$或 $y+\sqrt{2}=5(x+\sqrt{2})$,

即 $5x-y-4\sqrt{2}=0$ 或 $5x-y+4\sqrt{2}=0$.

【基础夯实】

1.A 2.D 3.C 4.C 5.A

6 $\frac{\pi}{4}$

7.$(2,-2)$

8.$2x-y-2=0$

9.(1)$f'(x)=3x^2+2mx$,

$f'(1)=3+2m$,直线 l 与直线 $y=5x$ 平行,即切线的斜率为 5,

令 $f'(1)=3+2m=5$,

解得 $m=1$,$\therefore$直线 l 与直线 $y=5x$ 平行时,实数 m 的值为 1.

(2)若直线 l 的倾斜角 α 的取值范围为$[0,\frac{\pi}{4}]$,

即切线的斜率的取值范围为$[0,1]$,

令 $0\leqslant 3+2m\leqslant 1$,解得$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant -1$,

$\therefore$实数 m 的取值范围为$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant -1$.

【能力提升】

11.D 12.D

13.$2x+y-5=0$

14.$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

15.(1)将 $x=1$ 代入曲线 C 的方程得 $y=1$,$\therefore$切点为 $P(1,1)$.

$y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3+3\Delta x+(\Delta x)^2]=3$.

$\therefore k=y'|_{x=1}=3$.

$\therefore$曲线在点 $P(1,1)$处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$,

即 $3x-y-2=0$.

(2)设切点为 $Q(x_0,y_0)$,由(1)可知 $y'|_{x=x_0}=3x_0^2$,由题意可知 $k_{PQ}=y'|_{x=x_0}$,

即$\frac{y_0-1}{x_0-1}=3x_0^2$,又 $y_0=x_0^3$,所以$\frac{x_0^3-1}{x_0-1}=3x_0^2$,即 $2x_0^3-3x_0^2+1=0$,解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$.

①当 $x_0=1$ 时,切点坐标为(1,1),则切线的斜率为 3,所以切线方程为 $3x-y-2=0$.

②当 $x_0=-\frac{1}{2}$时,切点坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)$,则切线的斜率为 $3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$,

所以切线方程为 $y+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}(x+\frac{1}{2})$,即 $3x-4y+1=0$,

综上,所求切线方程为 $3x-y-2=0$ 或 $3x-4y+1=0$.

【素质拓展】

16.(1)由题意得:$y'=3mx^2+2$,

∴在$(1,m+3)$处切线斜率 $k=3m+2$.

∵切线与 $y=3x$ 平行,

∴$3m+2=3$,解得 $m=\frac{1}{3}$.

(2)由(1)知,切线斜率 $k=3m+2$,

∵切线与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直,

∴$(3m+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,

解得 $m=0$.

5.2　导数的运算

5.2.1　基本初等函数的导数

【典型例题】

【例1】(1)$y'=-4x^{-5}$　(2)$y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$　(3)$y'=e^x$

(4)$y'=\frac{1}{x}$　(5)$y'=\frac{1}{x\ln 4}$　(6)$y'=-\sin x$

【例2】(1)0　(2)$-5x^{-6}$　(3)$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$　(4)$\frac{1}{x\ln 10}$　(5)$5^x\ln 5$　(6)$\cos x$

【基础夯实】

1.A　2.B　3.D　4.D　5.A　6.A　7.B

8.$f(x)=e^x-1$(答案不唯一)

9.1 或$-\frac{1}{3}$

【能力提升】

10.B　11.D　12.1

13.$\frac{1}{e}$

14.$e\ln 2$

15.$-\frac{1}{32}$

【素质拓展】

16.B

5.2.2 导数的四则运算法则

【典型例题】

【例1】(1)$f'(x)=3x^2+2x-1$ (2)$f'(x)=-\sin x$ (3)$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

(4)$y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

(5)$y'=18x^2+4x-3$

【例2】(1)$\because f(x)=ax^3+bx^2-3x$,

$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx-3$.

$\because$函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 的图象在 $x=\pm1$ 处的切线斜率均为 0,

$\therefore f'(1)=f'(-1)=0$,

$\therefore \begin{cases}3a+2b-3=0,\\3a-2b-3=0,\end{cases}$

$\therefore a=1,b=0$.

(2)由(1),知函数 $f(x)=x^3-3x$,点 $A(0,16)$不在曲线 $y=f(x)$上,

$\because f(x)=x^3-3x$,

$\therefore f'(x)=3x^2-3$.

设切点为$(x_0,x_0^3-3x_0)$,则 $f'(x_0)=3x_0^2-3$,

$\therefore$切线方程为 $y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.

将点 $A(0,16)$代入,可得 $16-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(-x_0)$,

$\therefore x_0=-2$,

$\therefore$切点为$(-2,-2)$,切线方程为 $9x-y+16=0$.

【基础夯实】

1.B 2.C 3.B 4.D 5.C

6.e 7.$x+y-1=0$ 8.e

9.由已知得点(0,1)与点(3,4)均在曲线 C 上,$\therefore \begin{cases}d=1,\\27a+9b+3c+d=4,\end{cases}$

$\because y'=3ax^2+2bx+c$,

由导数的几何意义得 $f'(0)=c$,$f'(3)=27a+6b+c$,$\therefore \begin{cases}c=1,\\27a+6b+c=-2,\end{cases}$

解得:$d=1,c=1,a=-\frac{1}{3},b=1$.

所以曲线 C 的方程为:$y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1$.

【能力提升】

10.C 11.B

12.-1 或$\frac{2}{3}$ 13.2

14.(1)依题意,函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$,

$\therefore f(1)=1^2-\ln1=1, f'(1)=2-1=1$,

因此,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-1=x-1$,即 $y=x$.

(2)依题意,函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$,

令 $f'(x)>0$ 且 $x>0$,解得 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$,故不等式 $f'(x)>0$ 的解集为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

【素质拓展】

15.$(1,0)$

5.2.3 简单复合函数的导数

【典型例题】

【例1】(1)$y'=\frac{3}{3x-2}$　(2)$f'(x)=-2e^{-2x+1}+e^x$　(3)$y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

【例2】(1)$f'(x)=(x^2+1)+2x(x-1)=3x^2-2x+1$.

(2)由 $f(x)=x^3-x^2+x$,设切点的坐标为(x_0,y_0),

得所求切线方程为 $y-({x_0}^3-{x_0}^2+x_0)=(3{x_0}^2-2x_0+1)(x-x_0)$,

将点$(1,1)$的坐标代入上述方程可得:$1-({x_0}^3-{x_0}^2+x_0)=(3{x_0}^2-2x_0+1)(1-x_0)$,

整理得 ${x_0}^3-2{x_0}^2+x_0=0$,解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$,

将 $x_0=0$ 或 $x_0=1$ 代入切线方程,可求得切线方程为 $y=x$ 和 $y=2x-1$.

【基础夯实】

1.A　2.A　3.B　4.B　5.D

6.$\frac{\pi}{3}$　7.0　8.0

9.(1)$2e^{2x+1}$　(2)$y'=1-\frac{1}{2}\cos x$　(3)$y'=-\frac{\cos x+2x\sin x}{2x\sqrt{x}}$　(4)$\frac{1-x\ln3x}{xe^x}$

【能力提升】

10.C　11.D　12.B

13.$\frac{2}{e}$

14.②③

15.(1)由 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$,

得 $f'(x)=(ae^x\ln x)'+\left(\frac{be^{x-1}}{x}\right)'=ae^x\ln x+\frac{ae^x}{x}+\frac{be^{x-1}x-be^{x-1}}{x^2}$.

(2)由题意得,切点既在曲线 $y=f(x)$上,又在切线 $y=e(x-1)+2$ 上,

将 $x=1$ 代入切线方程,得 $y=2$,切点为$(1,2)$.

所以$\begin{cases}f(1)=ae\ln1+b=2,\\ f'(1)=ae\ln1+ae=e,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

【素质拓展】

16.(1)$\because f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,$\therefore f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$,

则 $g(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\sqrt{3}\omega\cos(\omega x+\varphi)$,

$g(x)_{\max}=\sqrt{1+(\sqrt{3}\omega)^2}=2$,$\because\omega>0$,$\therefore\omega=1$,

则 $g(x)=\sin(x+\varphi)+\sqrt{3}\cos(x+\varphi)$,

又$\because$函数 $y=g(x)$是奇函数,$g(0)=\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi=0$,则 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$.

$\because 0<\varphi<\pi$,$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore g(x)=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin x$.

(2)$\because a=\frac{\tan B}{\tan A}=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$,$\therefore\cos A\sin B=2\sin A\cos B$,

$\because\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$,$\therefore b=\frac{2\sin B}{\sin A}$,

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=3\sin A\cos B$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sin B}{\sin A}\times3\sin A\cos B=6\sin B\cos B=3\sin2B$.

因此,当 $B=\frac{\pi}{4}$时,$\triangle ABC$ 的面积取得最大值为 3.

5.3 导数在研究函数中的应用

第1课时 函数的单调性(一)

【典型例题】

【例1】(1)因 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$,故 $f'(x)=6x^2+2ax+b$.

从而 $f'(x)=6\left(x+\frac{a}{6}\right)^2+b-\frac{a^2}{6}$,

即 $y=f'(x)$关于直线 $x=-\frac{a}{6}$对称,

从而$-\frac{a}{6}=-\frac{1}{2}$,解得 $a=3$.

又由于 $f'(1)=0$,即 $6+2a+b=0$,解得 $b=-12$.

(2)由(1)知 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$,$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$.

令 $f'(x)=0$,即 $6(x-1)(x+2)=0$.解得 $x_1=-2$,$x_2=1$.

当 $x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上为增函数;

当 $x\in(-2,1)$时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$(-2,1)$上为减函数;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数.

所以函数 $f(x)$的减区间为$(-2,1)$,增区间为$(-\infty,-2)$和$(1,+\infty)$.

【例2】(1)$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$,

由 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$ 知

$f'(x)=-\frac{3}{4}-a=-2$,解得 $a=\frac{5}{4}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}(x>0)$,

则 $f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=5$($x=-1$ 舍去).

当 $x\in(0,5)$时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$(0,5)$内为减函数;

当 $x\in(5,+\infty)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(5,+\infty)$内为增函数.

所以函数 $f(x)$的减区间为$(0,5)$,增区间为$(5,+\infty)$.

【基础夯实】

1.D　2.B　3.C　4.C

5.$(-\infty,+\infty)$

6.$(0,\frac{1}{e})$

7.0

8.$(-\infty,-3)$

9.函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 2\}$,

$f'(x)=\frac{-4x^2+16x-7}{(2-x)^2}=\frac{-(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$或$\frac{7}{2}$,又 $x\neq 2$,

则 $f(x)$的减区间为$(-\infty,\frac{1}{2})$和$(\frac{7}{2},+\infty)$,增区间为$(\frac{1}{2},2)$和$(2,\frac{7}{2})$.

【能力提升】

10.D　11.A　12.①③

13.(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+c$,所以 $f'(x)=2ax+b$.

又因为曲线 $y=f(x)$通过点$(0,2a+3)$,

故 $f(0)=2a+3$,而 $f(0)=c$,从而 $c=2a+3$.

又曲线 $y=f(x)$在$(-1,f(-1))$处的切线垂直于 y 轴,故 $f'(-1)=0$,

即$-2a+b=0$,因此 $b=2a$.

(2)由(1)得 $bc=2a(2a+3)=4\left(a+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{4}$,

故当 $a=-\frac{3}{4}$时,bc 取得最小值$-\frac{9}{4}$,此时有 $b=-\frac{3}{2}$,$c=\frac{3}{2}$.

从而 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$,$f'(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$,

$g(x)=-f(x)e^{-x}=(\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2})e^{-x}$,

所以 $g'(x)=-\frac{3}{4}(x^2-4)e^{-x}$.

令 $g'(x)=0$,解得 $x_1=-2$,$x_2=2$.

所以 $g(x)$的减区间为$(-\infty,-2)$和$(2,+\infty)$,增区间为$(-2,2)$.

14.$f'(x)=(e^x-1)+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)(x\in\mathbf{R})$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或-1,

当 $x\in(-1,0)$时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$(-1,0)$上为减函数;

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$上为增函数.

所以函数 $f(x)$的减区间为$(-1,0)$,增区间为$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$.

【素质拓展】

15.B

第2课时　函数的单调性(二)

【典型例题】

【例1】$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}(x>0)$.

①当$a\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数;

②当$a>0$时,由$f'(x)=0$,解得$x=a$.

∵当$x\in(0,a)$时,$f'(x)<0$,当$x\in(a,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

∴函数$f(x)$在$(0,a)$上为减函数,在$(a,+\infty)$上为增函数.

综上,当$a\leqslant 0$时,$f(x)$的增区间为$(0,+\infty)$;

当$a>0$时,$f(x)$的减区间为$(0,a)$,增区间为$(a,+\infty)$.

【例2】$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+1+\frac{a-1}{x}=\frac{(x+a)(x-1)}{x^2}(x>0)$.

令$f'(x)=0$,得$x=-a$或1.

①当$0<-a<1$,即$-1<a<0$时,

$f(x)$在$(0,-a)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$(-a,1)$上单调递减;

②当$-a=1$,即$a=-1$时,$f'(x)\geqslant 0$恒成立,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

③当$-a>1$,即$a<-1$时,

$f(x)$在$(0,1)$和$(-a,+\infty)$上单调递增,在$(1,-a)$上单调递减.

【基础夯实】

1.B　2.D　3.B　4.A

5.$(\mathrm{e},+\infty)$

6.$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

7.$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

8.$\left[1,\frac{3}{2}\right)$

9.函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

①当$a\leqslant 0$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数;

②当$a>0$时,由$f'(x)=0$,解得$x=\frac{1}{a}$;

∵当$x\in(0,\frac{1}{a})$时,$f'(x)<0$,当$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时,$f'(x)>0$,

∴函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上为减函数,在$(\frac{1}{a},+\infty)$上为增函数.

综上,当$a\leqslant 0$时,$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$;

当$a>0$时,$f(x)$的单调递减区间为$(0,\frac{1}{a})$,增区间为$(\frac{1}{a},+\infty)$.

【能力提升】

10.D　11.A

12.$[-1,\frac{1}{2}]$

13.$f'(x)=\frac{-3x^2+(6-a)x+a}{e^x}$,令 $g(x)=-3x^2+(6-a)x+a$,

由 $g(x)=0$,解得 $x_1=\frac{6-a-\sqrt{a^2+36}}{6}$,$x_2=\frac{6-a+\sqrt{a^2+36}}{6}$,

则 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$.

由 $f(x)$在$[3,+\infty)$上为减函数,则 $x_2=\frac{6-a+\sqrt{a^2+36}}{6}\leqslant 3$,解得 $a\geqslant -\frac{9}{2}$.

故 a 的取值范围为$[-\frac{9}{2},+\infty)$.

14.$f'(x)=\frac{x^2-ax+2}{x^2}(x>0)$,$\Delta=a^2-8$.

①当 $\Delta\leqslant 0$,即$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$时,$f'(x)\geqslant 0$,此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单增.

②当 $\Delta>0$,即 $a<-2\sqrt{2}$或 $a>2\sqrt{2}$时,令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$,$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$.

当 $a<-2\sqrt{2}$时,$x_1<x_2<0$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单增;

当 $a>2\sqrt{2}$时,$0<x_1<x_2$,则 $f(x)$在$(0,x_1)$上单增,在(x_1,x_2)上单减,在$(x_2,+\infty)$上单增.

综上可得,当 $a\leqslant 2\sqrt{2}$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单增;

当 $a>2\sqrt{2}$时,$f(x)$在$(0,x_1)$,$(x_2,+\infty)$上单增,在(x_1,x_2)上单减.

【素质拓展】

15.C

第 3 课时　函数的极值与最大(小)值(一)

【课时清单】

1.极小值点,极小值

2.极大值点,极大值

【典型例题】

【例1】(1)$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$,由题意知 $f'(1)=0$,即 $a-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$,解得 $a=-1$.

(2)由(1)知 $f(x)=-\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1(x>0)$,

$f'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}=\frac{3x^2-2x-1}{2x^2}=\frac{(3x+1)(x-1)}{2x^2}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=-\frac{1}{3}$(因 $x_2=-\frac{1}{3}$不在定义域内,舍去).

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在$(0,1)$上为减函数;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在$(1,+\infty)$上为增函数,

故 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=3$.

【例2】$f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$.

令 $f'(x)=0$,则 $x=-1$ 或 $x=1-2a$.

①当 $a>1$ 时,$1-2a<-1$,

则 $f(x)$的增区间为$(-\infty,1-2a)$和$(-1,+\infty)$,减区间为$(1-2a,-1)$,

此时 $f(x)$的极大值点为 $1-2a$,极小值点为-1.

②由 $a=1$ 时,$1-2a=-1$,此时 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,故 $f(x)$的增区间为 $\mathbf{R}$,

此时 $f(x)$ 无极值点.

③当 $a<1$ 时,$1-2a>-1$,

则 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1-2a,+\infty)$,减区间为 $(-1,1-2a)$,

此时 $f(x)$ 的极大值点为 -1,极小值点为 $1-2a$.

【基础夯实】

1.A 2.C 3.C 4.D

5.2 6.$\frac{1}{e}$ 7.3 8.$(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$

9.(1)$f'(x)=2a(x-5)+\frac{6}{x}$,则 $f'(1)=6-8a$,又 $f(1)=16a$,

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-16a=(6-8a)(x-1)$,

又切线与 y 轴相交于点 $(0,6)$,则 $6-16a=8a-6$,故 $a=\frac{1}{2}$.

(2)$f'(x)=x-5+\frac{6}{x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x}(x>0)$.

令 $f(x)=0$,解得 $x=2$ 或 3,

当 $x\in(2,3)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上为减函数;

当 $x\in(0,2)\cup(3,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $(3,+\infty)$ 上为增函数,

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=\frac{9}{2}+6\ln 2$,在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=2+6\ln 3$.

【能力提升】

10.A 11.B

12.$(0,1)$

13.(1)由题意知切点为 $(2,0)$,故有 $f(2)=0$,即 $4b+c+3=0$.①

又 $f'(x)=3x^2+4bx+c$,则 $f'(2)=12+8b+c=5$,得 $8b+c+7=0$.②

联立①②,解得 $b=-1,c=1$.所以 $f(x)=x^3-2x^2+x-2$.

(2)因为 $g(x)=x^3-2x^2+x-2+\frac{1}{3}mx$,令 $g'(x)=3x^2-4x+1+\frac{1}{3}m$.

由于 $g(x)$ 的极值存在,则 $g'(x)=0$ 有变号零点,

即 $\Delta=4(1-m)>0$,得 $m<1$.

当 $m<1$ 时,$g'(x)=0$ 有两个实数根 $x_1=\frac{1}{3}(2-\sqrt{1-m})$,$x_2=\frac{1}{3}(2+\sqrt{1-m})$.

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故 $g(x)$ 的极大值点为 $x_1=\frac{1}{3}(2-\sqrt{1-m})$,极小值点为 $x_2=\frac{1}{3}(2+\sqrt{1-m})$.

14.$f(x)=-x(x-a)^2=-x^3+2ax^2-a^2x$,

$f'(x)=-3x^2+4ax-a^2=-(3x-a)(x-a)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=a$.

①当 $a>0$ 时,$\frac{a}{3}<a$,

则 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{a}{3},a\right)$上单调递增,在$(a,+\infty)$上单调递减,

此时 $f(x)$的极小值点为$\frac{a}{3}$,极大值点为 a.

②当 $a<0$ 时,$\frac{a}{3}>a$,

则 $f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递减,在$\left(a,\frac{a}{3}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$上单调递减.

此时 $f(x)$的极小值点为 a,极大值点为$\frac{a}{3}$.

综上,当 $a>0$ 时,$f(x)$的极小值点为$\frac{a}{3}$,极大值点为 a;

当 $a<0$ 时,$f(x)$的极小值点为 a,极大值点为$\frac{a}{3}$.

【素质拓展】

15.$(1,+\infty)$

第 4 课时　函数的极值与最大(小)值(二)

【典型例题】

【例1】(1)$f'(x)=x^2-2ax+a^2-1$,

由题意知$\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=-1,\end{cases}$即$\begin{cases}a^2-a+b=\frac{8}{3},\\(a-1)^2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=\frac{8}{3}.\end{cases}$

(2)由(1)知,$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}$,$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 2,又 $x\in[-2,3]$.

则 $f(x)$在$[-2,0]$上单调递增,在$[0,2]$上单调递减,在$[2,3]$上单调递增,

又 $f(-2)=-4$,$f(0)=\frac{8}{3}$,$f(2)=\frac{4}{3}$,$f(3)=\frac{8}{3}$.

所以,$f(x)$的最大值为$\frac{8}{3}$,最小值为-4.

【例2】(1)$f'(x)=(x-k+1)e^x$,令 $f'(x)=0\Rightarrow x=k-1$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,k-1)$上递减,在$(k-1,+\infty)$上递增.

(2)当 $k-1\leqslant 0$,即 $k\leqslant 1$ 时,函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上递增,所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-k$;

当 $0<k-1\leqslant 1$,即 $1<k\leqslant 2$ 时,

由(1)知,函数 $f(x)$在区间$[0,k-1]$上递减,在$(k-1,1]$上递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(k-1)=-e^{k-1}$;

当 $k-1>1$,即 $k>2$ 时,函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上递减,

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=(1-k)e$.

综上,当 $k\leqslant 1$ 时,$f(x)$最小值为$-k$;

当 $1<k\leqslant 2$ 时,$f(x)$最小值为$-e^{k-1}$;

当 $k>2$ 时,$f(x)$最小值为$(1-k)e$.

【基础夯实】

1.C　2.B　3.A　4.D

5.$-\frac{3}{8}$　6.3　7.e^2-2　8.1

9.$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}(x>0)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,e]$上单调递增,此时 $f(x)$无最小值.

②当 $0<a<e$ 时,函数 $f(x)$在$(0,a)$上单调递减,在$(a,e]$上单调递增,

所以 $f(x)$最小值为 $f(a)=\ln a$.

③当 $a\geqslant e$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,即 $f(x)$在$(0,e]$上单调递减,

所以 $f(x)$最小值为 $f(e)=\frac{a}{e}$.

【能力提升】

10.D　11.A

12.-3

13.(1)因为 $f(x)=e^x\cos x-x$,所以 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$,$f'(0)=0$.

又因为 $f(0)=1$,所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=1$.

(2)设 $h(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$,则 $h'(x)=e^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

所以对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,都有 $h(x)<h(0)=0$,即 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

因此 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为 $f(0)=1$,最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

14.(1)$f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\frac{a}{3})$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或$\frac{a}{3}$.

当 $a<0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,\frac{a}{3})$和$(0,+\infty)$上单调递增,在$(\frac{a}{3},0)$上单调递减;

当 $a=0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;

当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(\frac{a}{3},+\infty)$上单调递增,在$(0,\frac{a}{3})$上单调递减.

(2)满足条件的 a,b 存在.

①当 $a\leqslant 0$ 时,由(1)知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增,

所以 $f(0)=b=-1$,$f(1)=2-a+b=1$,解得 $b=-1$,$a=0$;

②当 $a\geqslant 3$ 时,由(1)知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递减,

所以 $f(0)=b=1$,$f(1)=2-a+b=-1$,解得$\begin{cases}a=4,\\b=1;\end{cases}$

③当 $0<a<3$ 时,由(1)知 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最小值为 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+b$,

最大值为 $f(0)=b$ 或 $f(1)=2-a+b$.

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$,$b=1$,则 $a=3\sqrt[3]{2}$,这与 $0<a<3$ 矛盾;

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$,$2-a+b=1$,则 $a=3\sqrt{3}$或$-3\sqrt{3}$或 0,这与 $0<a<3$ 矛盾.

综上可知$\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=1.\end{cases}$

【素质拓展】

15.$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

第5课时　函数的极值与最大(小)值(三)

【典型例题】

【例1】(1)因为 $x=5$ 时 $y=11$,所以$\frac{a}{2}+10=11\Rightarrow a=2$.

(2)由(1)知该商品每日的销售量 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$,

所以商场每日销售该商品所获得的利润:

$f(x)=(x-3)[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2]=2+10(x-3)(x-6)^2$,$3<x<6$.

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)(x-6)$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=4$.

函数 $f(x)$在$(3,4)$上递增,在$(4,6)$上递减,

所以当 $x=4$ 时,函数 $f(x)$取得最大值 $f(4)=42$.

【例2】(1)①由条件知 PQ 垂直平分 AB,若$\angle BAO=\theta$(rad),则 $OA=\frac{AQ}{\cos\theta}=\frac{10}{\cos\theta}$,

故 $OB=\frac{10}{\cos\theta}$,

又 $OP=10-10\tan\theta$,

所以 $y=OA+OB+OP=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$,

所求函数关系式为 $y=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$.

②若 $OP=x$(km),则 $OQ=10-x$,所以 $OA=OB=\sqrt{(10-x)^2+10^2}=\sqrt{x^2-20x+200}$,

所求函数关系式为 $y=x+2\sqrt{x^2-20x+200}(0\leqslant x\leqslant 10)$.

(2)选择函数模型①,$y'=\frac{-10\cos\theta\cdot\cos\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$,

令 $y'=0$ 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,因为 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$,

当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{6})$时,$y'<0$,$y$ 是θ 的减函数;

当 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$时,$y'>0$,$y$ 是θ 的增函数,

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时,$y_{\min}=10+10\sqrt{3}$,

从而排污管道总长的最小值为 $10+10\sqrt{3}$ km.

【基础夯实】

1.C　2.A　3.D　4.A

5.4　6.8π　7.$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　8.$(-3,1)$

9.设长方体的宽为x(m),则长为$2x$(m),

高为$h=\dfrac{18-12x}{4}=4.5-3x\quad(0<x<\dfrac{3}{2})$,

故长方体的体积为$V(x)=2x^2(4.5-3x)=9x^2-6x^3\quad(0<x<\dfrac{3}{2})$.

从而$V'(x)=18x-18x^2=18x(1-x)$.

令$V'(x)=0$,解得$x=0$(舍去)或$x=1$.

当$0<x<1$时,$V'(x)>0$;当$1<x<\dfrac{3}{2}$时,$V'(x)<0$,

故在$x=1$处$V(x)$取得最大值.

从而最大体积为$V(1)=3(m^3)$,此时长方体的长为2 m,宽为1 m,高为1.5 m.

【能力提升】

10.A　11.D

12.8π

13.(1)$f'(x)=1+2ax+\dfrac{b}{x}$.

则$\begin{cases}f(1)=0,\\f'(1)=2.\end{cases}$即$\begin{cases}1+a=0,\\1+2a+b=2.\end{cases}$解得$a=-1,b=3$.

(2)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,由(1)知$f(x)=x-x^2+3\ln x$.

设$g(x)=f(x)-(2x-2)=2-x-x^2+3\ln x$,则

$g'(x)=-1-2x+\dfrac{3}{x}=-\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x}$.

所以$g(x)$在$(0,1)$上单增,在$(1,+\infty)$上单减.

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=0$.

故当$x>0$时,$g(x)\leqslant 0$,即$f(x)\leqslant 2x-2$.

14.(1)$S=60^2-4x^2-(60-2x)^2=240x-8x^2=-8(x-15)^2+1800(0<x<30)$,

所以$x=15$ cm时包装盒侧面积S最大.

(2)$V=(\sqrt{2}x)^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}(60-2x)=2\sqrt{2}x^2(30-x)(0<x<30)$,

所以$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$,

当$0<x<20$时,$V'>0$,V递增;当$20<x<30$时,$V'<0$,V递减,

所以,当$x=20$时,V取最大值.

此时,包装盒的高与底面边长的比值为$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}(60-2x)}{\sqrt{2}x}=\dfrac{1}{2}$.

即当$x=20$时,包装盒容积V最大,此时包装盒的高与底面边长的比值为$\dfrac{1}{2}$.

【素质拓展】

15.$(-\infty,-2)$

章末整合五

【典型例题】

题型一：

【例 1】D

巩固练习：

1.$y=2x$　2.$\ln2-1$　3.D　4.C

题型二：

【例 2】2

巩固练习：

1.D　2.D

3.$(-\infty,2\ln2-2]$　4.2

章末检测

1.A　2.D　3.A　4.B　5.C　6.D　7.C　8.D

9.$y=3x$

10.$-\dfrac{3\pi}{2}$

11.6

12.$(0,\dfrac{1}{2})$

13.(1)设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以 $f'(1)=1$，从而 l 的方程为 $y=x-1$.

(2)由题意知，要证明的是$\dfrac{\ln x}{x}<x-1(x>0,x\neq1)$，即证 $x^2-x-\ln x>0$.

证明：令 $h(x)=x^2-x-\ln x$，则 $h'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以 $h(x)>h(1)=0$，即$\dfrac{\ln x}{x}<x-1(x>0,x\neq1)$.

所以除切点$(1,0)$之外，曲线 C 在直线 l 的下方.

14.$f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 $x=1-2a$.

①当 $a>1$ 时，$1-2a<-1$，

所以 $f(x)$的增区间为$(-\infty,1-2a)$和$(-1,+\infty)$，减区间为$(1-2a,-1)$，

此时 $f(x)$的极大值点为 $1-2a$，极小值点为-1.

②当 $a=1$ 时，$1-2a=-1$，此时 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，且仅在 $x=-1$ 处 $f'(x)=0$，

所以 $f(x)$的增区间为$(-\infty,+\infty)$，此时 $f(x)$无极值点.

③当 $a<1$ 时，$1-2a>-1$，

所以 $f(x)$的增区间为$(-\infty,-1)$和$(1-2a,+\infty)$，减区间为$(-1,1-2a)$，

此时 $f(x)$的极大值点为-1,极小值点为 $1-2a$.

15.(1)$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$,

则 $f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或-1,

故 $f(x)$增区间为$(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$,减区间为$(-1,0)$.

(2)$f(x)=x(e^x-1-ax)$.令 $g(x)=e^x-1-ax$,

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 0$,即当 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)\geqslant 0$.

$\because g'(x)=e^x-a$,

①当 $a\leqslant 1$ 时,则 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立,即 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单增,

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意;

②当 $a>1$ 时,令 $g'(x)=0$,得 $x=\ln a>0$,

故 $g(x)$在$(0,\ln a)$上单减,在$(\ln a,+\infty)$上单增,

$\therefore g(x)_{\min}=g(\ln a)<g(0)=0$,不符合题意,

综上可知 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.