参考答案

第六章　计数原理

6.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第 1 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(一)

【课时清单】

1.$m+n$　$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$

2.$m\cdot n$　$m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot\cdots\cdot m_n$

【典型例题】

【例 1】36 个　【例 2】(1)729 种　(2)216 种　(3)120 种

【基础夯实】

1.C　2.C　3.A　4.B　5.12　6.125　7.13

8.8　**【解析】**每次向前跳 1 格,共跳 5 次,有唯一的跳法;
仅有一次跳 2 格,其余每次向前跳 1 格,共跳 4 次,有 4 种跳法;
有两次跳 2 格,其余每次向前跳 1 格,共跳 3 次,有 3 种跳法.
则共有 $1+4+3=8$ 种跳法.故答案为 8.

9.(1)16 种　(2)120 种　(3)39 种

【能力提升】

10.B　11.AC　12.18　13.(1)180 个　(2)72 个　14.9 种

【素质拓展】

15.48　**【解析】**$5400=2^3\times3^3\times5^2$,5400 的正约数一定是由 2 的幂与 3 的幂和 5 的幂相乘的结果,所以正约数个数为$(3+1)\times(3+1)\times(2+1)=48$.

第 2 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(二)

【课时清单】

2.不重不漏　步骤完整

【典型例题】

【例 1】(1)216 个　(2)20 条　【例 2】44 种

【基础夯实】

1.C　2.A　3.A　4.A　5.120

6.5　**【解析】**分 3 类:第一类,直接由 A 到 O,有 1 种走法;

第二类,中间过一个点,有 $A\to B\to O$ 和 $A\to C\to O$ 2 种不同的走法;

第三类,中间过两个点,有 $A\to B\to C\to O$ 和 $A\to C\to B\to O$ 2 种不同的走法.

由分类加法计数原理可得共有 $1+2+2=5$ 种不同的走法.故答案为 5.

7.6

8.7 【解析】甲只能安排在 B 医院,乙、丙、丁 3 名医生共有 $2\times2\times2=8$ 种安排方法,其中乙、丙、丁 3 名医生都安排在 B 医院不合题意,所以符合题意的分配方案共有 $8-1=7$ 种.

9.(1)96 个 (2)64 个 (3)120 个

【能力提升】

10.C 【解析】根据题意,若员工甲直到第 4 次才获奖,则其第 4 次才集全“和谐”“爱国”“敬业”三种红包,则甲第 4 次获得的红包有 3 种情况;

前三次获得的红包为其余的 2 种,有 $2^3-2=6$ 种情况;

则他获得奖次的不同情形为 $3\times6=18$ 种.故选 C.

11.A 【解析】有 9 名运动员,其中 5 人会打篮球,6 人会踢足球,则有 $5+6-9=2$ 人既会踢足球又会打篮球,有 3 人只会打篮球,有 4 人只会踢足球,

所以选派的方案有四类:

选派两种球都会的运动员有 2 种方案;

选派两种球都会的运动员中一名踢足球,只会打篮球的运动员打篮球,有 $2\times3=6$(种)方案;

选派两种球都会的运动员中一名打篮球,只会踢足球的运动员踢足球,有 $2\times4=8$(种)方案;

选派只会打篮球和踢足球的运动员分别打篮球和踢足球,有 $3\times4=12$(种)方案.

综上可知,共有 $2+6+8+12=28$(种)方案.故选 A.

12.767 【解析】除 100 元人民币以外每张均有取和不取 2 种情况,2 张 100 元人民币的取法有不取、取一张和取两张 3 种情况,再减去这些人民币全不取的 1 种情况,所以共有 $2^8\times3-1=767$ 种.

13.39 种 【解析】每次升 1 面旗可组成 3 种不同的信号;每次升 2 面旗可组成 $3\times3=9$ 种不同的信号;每次升 3 面旗可组成 $3\times3\times3=27$ 种不同的信号,根据分类加法计数原理得,共可组成 $3+9+27=39$ 种不同的信号.

14.(1)18 种 (2)12 种 【解析】(1)小刘、小王两人共付费 5 元,所以小刘、小王一人付费 2 元一人付费 3 元,付费 2 元的乘坐站数有 1,2,3 三种选择,付费 3 元的乘坐站数有 4,5,6 三种选择,所以小刘、小王下地铁的方案共有 $2\times3\times3=18$ 种;

(2)小刘、小王两人共付费 6 元,所以小刘、小王一人付费 2 元一人付费 4 元或两人都付费 3 元,付费 4 元的乘坐站数有 7,8,9 三种选择,因此小刘、小王下地铁的方案共有 $2\times3\times3+3\times3=27$ 种;其中小刘比小王先下地铁的方案共有 $3\times3+3=12$ 种.

【素质拓展】

15.98 【解析】当公差为 1 时,数列可以是:1,2,3, 2,3,4, 3,4,5, …,13,14,15,共 13 种情况;

当公差为 2 时,数列可以是:1,3,5, 2,4,6, 3,5,7, …,11,13,15,共 11 种情况;

当公差为 3 时,数列可以是:1,4,7, 2,5,8, 3,6,9, …,9,12,15,共 9 种情况;

当公差为 4 时,数列可以是:1,5,9, 2,6,10, 3,7,11, …,7,11,15,共 7 种情况;

当公差为 5 时,数列可以是:1,6,11, 2,7,12, 3,8,13, 4,9,14, 5,10,15,共 5 种情况;

当公差为 6 时,数列可以是:1,7,13, 2,8,14, 3,9,15,共 3 种情况;

当公差为 7 时,数列可以是:1,8,15,共 1 种情况.

总的情况是 $13+11+9+7+5+3+1=49$.

又因为三个数成公差数列有两种情况,递增或递减,所以这样的等差数列共有 98 个.

第3课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(三)

【典型例题】

【例1】320种

【例2】18条　**【解析】**分两步,第一步,从 $E\to F$,有6条可以选择的最短路径;第二步,从 $F\to G$,有3条可以选择的最短路径.由分步乘法计数原理可知有 $6\times3=18$ 条可以选择的最短路径.

【基础夯实】

1.D　2.D　3.A　4.C　5.36　6.168　7.63

8.1280　**【解析】**题目要完成的一件事是安排值班表,因而需一天一天地排.

用分步计数原理,分步进行:第一天有5种不同排法,第二天不能与第一天已排的人相同,所以有4种不同排法,依次类推,第三、四、五天都有4种不同排法,所以共有 $5\times4\times4\times4\times4=1280$ 种不同的排法.

9.1560种　**【解析】**分4步进行分析:①对于区域 A,有6种颜色可选;

②对于区域 B,与 A 区域相邻,有5种颜色可选;

③对于区域 C,与 A、B 区域相邻,有4种颜色可选;

④对于区域 D,E,若 D 与 B 颜色相同,E 区域有4种颜色可选,

若 D 与 B 颜色不相同,D 区域有3种颜色可选,E 区域有3种颜色可选,

则区域 D,E 有 $4+3\times3=13$ 种颜色可选,

则不同的涂色方案有 $6\times5\times4\times13=1560$ 种.

【能力提升】

10.C　**【解析】**按顺序涂色,第一个圆有3种选择,第二个圆有2种选择,若前三个圆用了三种颜色,则第三个圆有1种选择,后三个圆也用了三种颜色,共有 $3\times2\times1\times C_2^1\times C_2^1=24$(种),若前三个圆用了两种颜色,则后三个圆也用了两种颜色,所以共有 $3\times2=6$(种).综上可得不同的涂色方案的种数是 $24+6=30$.

11.C　**【解析】**根据题意,现有6根算筹,可以表示的数字组合为1、5,1、9,2、4,2、8,6、4,6、8,3、3,3、7,7、7;

数字组合1、5,1、9,2、4,2、8,6、4,6、8,3、7中,每组可以表示2个两位数,则可以表示 $2\times7=14$ 个两位数;

数字组合3、3,7、7,每组可以表示1个两位数,则可以表示 $2\times1=2$ 个两位数;

则一共可以表示 $14+2=16$ 个两位数.故选C.

12.40　13.(1)34种　(2)1404种　(3)381种　14.420种

【素质拓展】

15.AC　**【解析】**由题判断出部分树枝由高到低的顺序为 $GABCEF$,还剩下 D,H,I,且树枝 I 比 C 高,树枝 D 在树枝 B,E 之间,树枝 H 比 D 低,故A选项正确;

先看树枝 I,有4种可能,若 I 在 B,C 之间,

则 D 有3种可能:①D 在 B,I 之间,H 有5种可能;

②D 在 I,C 之间,H 有4种可能;

③D 在 C,E 之间,H 有3种可能,

此时树枝的高低顺序有 $5+4+3=12$(种);

若 I 不在 B,C 之间,则 I 有3种可能,D 有2中可能,

若 D 在 B,C 之间,则 H 有3种可能,

若 D 在 C,E 之间,则 H 有3种可能,

此时树枝的高低顺序有 $3\times(4+3)=21$(种)可能.

故这九根树枝从高到低不同的顺序共有 $12+21=33$ 种,C选项正确.故选AC.

6.2 排列与组合

第1课时 排列与排列数(一)

【课时清单】

2.A_n^m

【典型例题】

【例1】(1)$x=8$ (2)$x=3$ 【例2】略

【基础夯实】

1.B 2.C 3.B 4.C 5.348 6.$x=5$ 7.1680 8.576 9.300种

【能力提升】

10.D 11.ABC 12.42 13.(1)64 (2)1 (3)1 14.48个 18个

【素质拓展】

15.10 【解析】设停车位有n个,这3辆共享汽车都不相邻的种数:相当于先将$(n-3)$个停车位排放好,再将这3辆共享汽车插入到所成的$(n-2)$个间隔中,故有A_{n-2}^3种;

恰有2辆相邻的种数:先把其中2辆捆绑在一起看作一个复合元素,再和另一个插入到将$(n-3)$个停车位排放好所成的$(n-2)$个间隔中,故有$A_3^2A_{n-2}^2$种;

因为这3辆共享汽车都不相邻的概率与这3辆共享汽车恰有2辆相邻的概率相等,

所以$A_{n-2}^3=A_3^2A_{n-2}^2$,解得$n=10$.

第2课时 排列与排列数(二)

【课时清单】

1.$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ $n!$ 2.1

【典型例题】

【例1】(1)156个 (2)132个 【例2】(1)480种 (2)48种 (3)504种

【基础夯实】

1.D 2.D 3.AC 4.B 5.288 6.86400 7.504

8.120 【解析】①当甲排在首位,丙丁捆绑,自由排列,共有$A_4^4\times A_2^2=48$种.

②当甲排在第二位,首位不能是丙和丁,共有$3\times A_3^3\times A_2^2=36$种.

③当甲排在第三位,前两位分别是丙丁和不是丙丁两种情况,共有$A_2^2\times A_3^3+A_3^2\times A_2^2\times A_2^2=36$种,因此共有$48+36+36=120$种.

9.(1)48种 (2)36种 (3)108种

【解析】(1)把两个相声节目捆绑在一起作为一个节目与其他节目排列共有排法$A_4^4A_2^2=48$;

(2)选两个唱歌节目排在首尾,剩下的3个节目在中间排列,排法为$A_3^2A_3^3=36$;

(3)5个节目全排列减去后两个都是相声的排法,共有$A_5^5-A_3^3A_2^2=120-12=108$.

【能力提升】

10.D 11.D

12.$\dfrac{1}{20}$ 【解析】试验发生包含的事件是6个人进行全排列,共有A_6^6种结果,满足后排每人都比前排任意一位同学高,则要这6个人中3个个子高的站在后排,3个个子矮的站在前排,共有$A_3^3\cdot A_3^3$种结果,根据古典

概型概率公式得到 $P=\frac{A_3^3 \cdot A_3^3}{A_6^6}=\frac{1}{20}$,故答案为$\frac{1}{20}$.

13.120　14.(1)2520　(2)5040　(3)3600　(4)576　(5)1440　(6)720　(7)2520　(8)3720

【素质拓展】

15.(1)95 项　(2)35412　(3)3999960

【解析】(1)先考虑大于 45312 的数,分为以下两类:

第一类 5 开头的五位数有 $A_4^4=24$;第二类 4 开头的五位数有 45321 一个,

∴不大于 45312 的数有 $A_5^5-A_4^4-1=120-24-1=95$(个),

即 45312 是该数列中的第 95 项.

(2)1 开头的五位数有 $A_4^4=24$;

2 开头的五位数有 $A_4^4=24$;

3 开头的五位数有 $A_4^4=24$;

共有 $24\times3=72$(个).

所以第 71 项是 3 开头的五位数中第二大的数,即 35412.

(3)因为 1,2,3,4,5 各在万位上时都有 $A_4^4=24$ 个五位数,

所以万位数上的数字之和为$(1+2+3+4+5)\cdot A_4^4\cdot 10^5$.

同理,它们在千位,百位,十位,个位上也都有 $A_4^4=24$ 个五位数,

所以这个数列的各项和为$(1+2+3+4+5)\cdot A_4^4\cdot(10^4+10^3+10^2+10^1+10^0)$

$=15\times24\times11111=3999960$.

第 3 课时　组合与组合数(一)

【课时清单】

2.C_n^m

【典型例题】

【例 1】(2)(4)(6)是排列;(1)(3)(5)是组合.　【例 2】(1)$x=4$ 或 5　(2)$x=4$

【基础夯实】

1.D　2.D　3.B　4.AC　5.56　6.14

7.144　**【解析】**分两步进行:

①将 2 名女生全排列,有 A_2^2 种情况,排好后有 3 个空位;

②从 4 名男生中选 2 名,看成一个整体,考虑其顺序,有 $C_4^2A_2^2$ 种情况,再将这个整体与剩余的 2 名男生全排列,安排在女生的 3 个空位中,有 A_3^3 种情况,则一共有 $A_2^2C_4^2A_2^2A_3^3=2\times6\times2\times6=144$ 种情况.

故答案为 144.

8.70

9.(1)$x=3$　(2)1330

【解析】(1)由已知得 $7\times\frac{6!}{(6-x)!}=20\times\frac{7!}{(8-x)!}$,化简得 $x^2-15x+36=0$,

解得 $x=3$ 或 $x=12$,又因为$\begin{cases}x\leqslant6,\\x-1\leqslant7,\end{cases}$所以 $x=3$.

(2)将 $x=3$ 代入,得 $C_{20}^{17}+C_{20}^{2}=C_{20}^{3}+C_{20}^{2}=C_{21}^{3}=1330$.

【能力提升】

10.B　**【解析】**根据题意,分两步考虑:第一步,先从 4 个人里选 1 人,其位置不变,其他 3 人都不站在自己原来的位置上,站法有 $C_4^1=4$(种);第二步,对于都不站在自己原来的位置上的 3 个人,有 2 种站法.故不同的站法共有 $4\times2=8$(种),故选 B.

11.D 【解析】元素相邻利用“捆绑法”,先从3人中选择2人坐同一电梯有$C_3^2=3$种选法,再将2个“元素”安排坐四部电梯有$A_4^2=12$种安排方法,则不同的乘坐方式有$3\times12=36$种.故选D.

12.(1)45 (2)90 13.(1)350种 (2)165种 (3)825种 (4)165种 (5)966种

14.(1)13种 (2)22种

【解析】(1)从中任取3个球,红球的个数不比白球少的取法:红球3个;红球2个和白球1个.当取红球3个时,取法有1种;

当取红球2个和白球1个时,.取法有$C_3^2C_4^1=12$种.

根据分类计数原理,红球的个数不少于白球的个数的取法有$1+12=13$种.

(2)使总分不少于6分情况有两种:红球2个和白球2个,红球3个和白球1个.

第一种,红球2个和白球2个,取法有$C_3^2C_4^2=18$种;

第二种,红球3个和白球1个,取法有$C_3^3C_4^1=4$种,

根据分类计数原理,使总分不少于6分的取法有$18+4=22$种.

【素质拓展】

15.2174种

第4课时 组合与组合数(二)

【课时清单】

1.$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots\times1}$ $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ 2.1

【典型例题】

【例1】(1)5150 (2)210 (3)466

【解析】(1)$C_{100}^{98}+C_{200}^{199}=C_{100}^{2}+C_{200}^{1}=\dfrac{100\times99}{2\times1}+200=5150$.

(2)$C_7^3+C_7^4+C_8^5+C_9^6=C_8^4+C_8^5+C_9^6=C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=C_{10}^4=210$.

(3)依题意得$\begin{cases}0\leqslant38-n\leqslant3n,\\0\leqslant3n\leqslant21+n,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{19}{2}\leqslant n\leqslant38,\\0\leqslant n\leqslant\dfrac{21}{2},\end{cases}$

解得$\dfrac{19}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{21}{2}$.又$n\in\mathbf{N}^*$,所以$n=10$.故$C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}=C_{30}^{28}+C_{31}^{30}=C_{30}^{2}+C_{31}^{1}=466$.

【例2】(1)60种 (2)15种 (3)15种

【基础夯实】

1.C 2.C 3.D 4.D 5.6 6.90 7.80 8.150

9.(1)256种 (2)144种 (3)144种 (4)84种

【解析】(1)一个球一个球地放到盒子里去,每只球都有4种独立的放法,由分步乘法计数原理,知放法共有$4^4=256$种.

(2)为保证“恰有一个盒子不放球”,先从四个盒子中任意拿出去1个,即将4个球分成2,1,1的三组,有C_4^2种分法;然后再从三个盒子中选一个放两个球,其余两个球,两个盒子,全排列即可.由分步乘法计数原理知,共有放法$C_4^1C_4^2C_3^1A_2^2=144$种.

(3)“恰有一个盒子内放2个球”,即另外三个盒子中恰有一个空盒.因此,“恰有一个盒子放2球”与“恰有一个盒子不放球”是一回事.故也有144种放法.

(4)先从四个盒子中任取两个有C_4^2种,问题转化为:“4个球,两个盒子,每盒必放球,有几种放法?”从放球数目看,可分为(3,1),(2,2)两类.第一类:可从4个球中先选3个,然后放入指定的一个盒子中即可,有$C_4^3C_2^1$种放法;第二类:有C_4^2种放法.因此共有$C_4^3C_2^1+C_4^2=14$种.由分步乘法计数原理得“恰有两个盒子不

放球”的放法有 $C_4^2 \cdot 14=84$ 种.

【能力提升】

10.AD 11.ACD 12.240 13.70

14.(1)165 种 (2)455 种

【解析】(1)将 12 个小球排成一排,中间有 11 个间隔,在这 11 个间隔中选出 3 个,放上“隔板”,若把“|”看作隔板,则放法如图所示:○○|○○○○○|○○○○○|○○,隔板将一排球分成四块,从左到右可以看成四个盒子放入的球数.这样每一种隔板的插法,就对应了球的一种放法,即每一种从 11 个间隔中选出 3 个间隔的组合对应一种放法,所以不同的放法有 $C_{11}^3=165$(种).

(2)因为每盒可空,所以隔板之间允许无球,那么插入法就无法应用,现建立如下数学模型.将三块隔板与 12 个球排成一排,如图所示,○○○||○○○○○|○○○○中的隔板将这一排球分成四块.从左到右可以看成四个盒子放入的球数,即图中 1,2,3,4 四个盒子相应放入 3 个,0 个,5 个,4 个小球.这样每一种隔板与球的排列法,就对应了球的一种放法.排列的位置有 15 个,先从这 15 个位置中选出 3 个位置放隔板有 C_{15}^3 种排法,再在余下的位置放球,只有一种放法,所以隔板与球的排列法有 C_{15}^3 种,即球的放法有 $C_{15}^3=455$(种).

【素质拓展】

15.原式$=2C_{101}^3-2=333298$

第 5 课时 排列与组合综合应用

【典型例题】

【例 1】(1)720 种 (2)216 种 (3)192 种 (4)96 种

【解析】(1)分成两排就座,前排 3 人,后排 3 人,有 $A_6^3 \cdot A_3^3=720$ 种方法.

(2)若甲不能坐在第一排有 C_3^1 种坐法,乙不能坐在第二排有 C_3^1 种坐法,剩余 4 人全排列,根据乘法原理,共有 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot A_4^4=216$ 种不同坐法.

(3)当甲乙同时在第一排时,其余 4 人任选一人和甲乙组成整体进行排列,剩余 3 人全排列,有 $C_4^1A_2^2A_2^2A_3^3=96$ 种不同坐法,

当甲乙同时在第二排时,其余 4 人任选一人和甲乙组成整体进行排列,剩余 3 人全排列,有 $C_4^1A_2^2A_2^2A_3^3=96$ 种不同坐法;

由加法原理,共有 $96+96=192$ 种不同坐法.

(4)当甲乙同时在第一排时,其余 4 人任选一人坐甲乙中间,剩下 3 人全排列,有 $C_4^1A_2^2A_3^3=48$ 种不同坐法;当甲乙同时在第二排时,其余 4 人任选一人坐甲乙中间,剩下 3 人全排列,有 $C_4^1A_2^2A_3^3=48$ 种不同坐法.由加法原理,共有 $48+48=96$ 种不同坐法.

【例 2】(1)2640 种 (2)240 种 (3)2640 种

【基础夯实】

1.A

2.C **【解析】**自由选择去四个工厂有 4^3 种方案,甲工厂不去,自由选择去乙、丙、丁三个工厂有 3^3 种方案,故不同的分配方案有 $4^3-3^3=37$ 种.

3.B **【解析】**设有 A,B 两个笔筒,笔放入 A 笔筒有四种情况,分别为 2 支,3 支,4 支,5 支,一旦 A 笔筒的放法确定,B 笔筒的放法也随之确定,且对同一笔筒的笔没有顺序要求,故总的放法为 $C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5=112$ 种.故选 B.

4.A **【解析】**除甲、乙、丙三人的座位外,还有 7 个座位,它们之间共可形成六个空,

三人从 6 个空中选三位置坐上去有 C_6^3 种坐法,

而甲、乙、丙三个人进行排列,有 A_3^3 种坐法,

所以每人左右两边都有空位的坐法种数为 $C_6^3 \cdot A_3^3=120$.故选 A.

5.56　6.20

7.$\frac{4}{9}$　**【解析】**四辆车前往三个城市安排方式有 3^4 种,

每个城市都至少安排一辆车共 $C_4^2\cdot A_3^3$ 种,

因此每个城市都至少安排一辆救援车的概率为 $\frac{C_4^2\cdot A_3^3}{3^4}=\frac{4}{9}$.故答案为 $\frac{4}{9}$.

8.51　9.(1)5400种　(2)840种　(3)3360种　(4)360种

【能力提升】

10.A　**【解析】**如图所示,6个名额排成一列,6个名额之间有5个空,任找3个空插入隔板就是一种名额分配方法,故共有 $C_5^3=10$(种)分配方法.

○ | ○ ○ | ○ | ○ ○

11.D　12.56

13.(1)8种　(2)6种　(3)9种

【解析】(1)可分成两步完成:第一步,先选出停在原来车位的那辆车,有 C_4^1 种情况,

第二步,停放剩下的3辆车,有2种停法,根据分步乘法计数原理,共有 $4\times2=8$ 种停法.

(2)可分成两步完成:第一步,先选出停在原来车位的那2辆车,有 C_4^2 种情况,

第二步,停放剩下的2辆车,有1种停法,根据分步乘法计数原理,共有 $C_4^2\times1=6$ 种停法.

(3)将4辆车分别编号为 A,B,C,D,将4个停车位分别编号为一、二、三、四,

不妨设 A 车先选停车位,此时有3种停法,若 A 车选了二号停车位,那么 B 车再选,有3种停法,剩下的 C 车和 D 车都只有1种停法,

根据分步乘法计数原理,共有 $3\times3\times1=9$ 种停法.

14.(1)300个　(2)660个　(3)1334个

【解析】(1)根据题意,分3步进行分析:

①个位从1,3,5中选择一个,有 C_3^1 种选法;

②千位上不可选0,从剩下的5个数中选一个,有 C_5^1 种选法;

③在剩下的5个数字中选出2个,安排在百位、十位上,有 A_5^2 种选法.

则有 $C_3^1\times C_5^1\times A_5^2=300$ 个无重复数字的四位奇数.

(2)分2种情况讨论:

①个位上的数字是0,在其余的6个数字中任选4个,安排在前4个数位,有 A_6^4 种情况,则此时的五位数有 A_6^4 个;

②个位上的数字是5,万位上不可选0,从剩下的5个数字中选一个,有 C_5^1 种选法,在余下的5个数字中选出3个,安排在中间3个数位,有 $C_5^1\times A_5^3$ 种情况,则此时符合条件的五位数有 $C_5^1\times A_5^3$ 个.

故满足条件的五位数共有 $A_6^4+C_5^1\times A_5^3=660$ 个.

(3)符合要求的比31560大的五位数可分为四类:

第一类:形如4****,5****,6****,有 $C_3^1\times A_6^4$ 个;

第二类:形如32***,34***,35***,36***,有 $C_4^1\times A_5^3$ 个;

第三类:形如316**,有 A_4^2 个;

第四类:形如3156*,有2个.

由分类加法计数原理知,所求五位数有 $C_3^1\times A_6^4+C_4^1\times A_5^3+A_4^2+2=1334$ 个.

【素质拓展】

15.684

6.3　二项式定理

第 1 课时　二项式定理

【课时清单】

1.$C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$　(2)$n+1$　(3)C_n^k

2.$k+1$　$C_n^ka^{n-k}b^k$

【典型例题】

【例 1】解:(1)设第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_{12}^k(-2)^kx^{6-\frac{3}{2}k}$,

令 $6-\dfrac{3}{2}k=3$,解得 $k=2$.

故展开式中含 x^3 项的系数为 $C_{12}^2(-2)^2=264$.

(2)∵第 $3k$ 项的二项式系数为 C_{12}^{3k-1},第 $k+2$ 项的二项式系数为 C_{12}^{k+1},

∵$C_{12}^{3k-1}=C_{12}^{k+1}$,故 $3k-1=k+1$ 或 $3k-1+k+1=12$,

解得 $k=1$ 或 $k=3$.

【例 2】解:二项展开式的通项 $T_{k+1}=C_n^k\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^{n-k}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}C_n^kx^{2n-\frac{5}{2}k}$.

(1)因为第 9 项为常数项,即当 $k=8$ 时,$2n-\dfrac{5}{2}k=0$,解得 $n=10$.

(2)令 $2n-\dfrac{5}{2}k=5$,得 $k=\dfrac{2}{5}(2n-5)=6$,

所以 x^5 的系数为 $(-1)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^4C_{10}^6=\dfrac{105}{8}$.

(3)要使 $2n-\dfrac{5}{2}k$,即 $\dfrac{40-5k}{2}$ 为整数,只需 k 为偶数,由于 $k=0,1,2,3,\cdots,9,10$,

故符合要求的有 6 项,分别为展开式的第 1,3,5,7,9,11 项.

【基础夯实】

1.B　**【解析】**$1+3x+3x^2+x^3=C_3^0\cdot1^3+C_3^1\cdot x\cdot1^2+C_3^2\cdot x^2\cdot1+C_3^3\cdot x^3=(x+1)^3$.

2.D　**【解析】**$\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^kx^{2(5-k)}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^kx^{-k}=C_5^k\left(-\dfrac{1}{2}\right)^kx^{10-3k}$,令 $10-3k=1$,解得 $k=3$,所以二项式展开式中,x 的系数为 $C_5^3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=-\dfrac{5}{4}$.

3.B　**【解析】**要求 $x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中的常数项,只需求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x}$ 的系数.

因为 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x}$ 的系数为 $(-1)^3C_5^3=-10$,所以 $x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 -10.

4.BD　**【解析】**因为 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_n^rx^{n-r}(-1)^rx^{-r}=C_n^r(-1)^rx^{n-2r}$,若 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中存在常数项,则只需 $n-2r=0$,即 $n=2r$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,$r\in\mathbf{N}$,所以 n 只需为正偶数即可,故排除 AC 选项,BD 选项可以取得.故选 BD.

5.$32x^5-80x^2+\dfrac{80}{x}-\dfrac{40}{x^4}+\dfrac{10}{x^7}-\dfrac{1}{x^{10}}$

【解析】$\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5=C_5^0(2x)^5-C_5^1(2x)^4\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^1+C_5^2(2x)^3\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2-C_5^3(2x)^2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3+C_5^4(2x)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^4-$

$C_5^5\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^5$

$=32x^5-80x^2+\frac{80}{x}-\frac{40}{x^4}+\frac{10}{x^7}-\frac{1}{x^{10}}.$

6.10 【解析】结合二项式定理的通项公式有 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\left(-\frac{1}{2}\right)^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}$,

令 $5-\frac{3}{2}r=2$,可得 $r=2$,则含 x^2 的项的二项式系数为 10.

7.1 【解析】$\left(x-\frac{a}{x}\right)^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r=C_9^r x^{9-2r}(-a)^r$,

令 $9-2r=3$,$\therefore r=3$;$\left(x-\frac{a}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $C_9^3(-a)^3=-84$,$\therefore a=1$.

8.3 【解析】$\because(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5=x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5+2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$,

$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式通项为 $R_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-r}\cdot(-1)^r=C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^{2r-10}$,

所以$(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式通项为 $T_{k+1,r+1}=x^2C_5^k\cdot(-1)^k\cdot x^{2k-10}+2C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^{2r-10}=$ $C_5^k\cdot(-1)^k\cdot x^{2k-8}+2C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^{2r-10}$,

由$\begin{cases}2k-8=0,\\2r-10=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}k=4,\\r=5,\end{cases}$

因此$(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式的常数项为 $C_5^4\cdot(-1)^4+2C_5^5\cdot(-1)^5=3$.

9.解:(1)$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_n^r x^{\frac{n-r}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{-\frac{r}{3}}=C_n^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{n-2r}{3}}$.

$\because$第 6 项为常数项,$\therefore r=5$ 时,有$\frac{n-2r}{3}=0$,解得 $n=10$.令$\frac{10-2r}{3}=2$,得 $r=2$.$\therefore\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式中 x^2 的系数为 $C_{10}^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$.

(2)根据题意,得$\begin{cases}\frac{10-2r}{3}\in\mathbf{Z},\\0\leqslant r\leqslant 10,\\r\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

令$\frac{10-2r}{3}=k(k\in\mathbf{Z})$,则 $10-2r=3k$,即 $r=5-\frac{3}{2}k$.

$\because r\in\mathbf{Z}$,$\therefore k$ 应为偶数,又 $0\leqslant r\leqslant 10$,$\therefore k$ 可取 $2,0,-2$,即 r 可取 $2,5,8$.

$\therefore\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$展开式的第 3 项、第 6 项、第 9 项均为含 x 的整数次幂的项,共 3 个.

【能力提升】

10.B 【解析】$(x-2)^9=[(x+1)-3]^9$,则其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_9^r(x+1)^r(-3)^{9-r}$,

当 $r=8$ 时,$T_9=C_9^8(x+1)^8(-3)^1=-27(x+1)^8$,所以 $a_8=-27$.

11.A 【解析】由$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)^5=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$,可得二项式$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$的展开式通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r x^{10-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=$ $(-1)^r C_{10}^r x^{10-2r}$,

令 $10-2r=0$,解得 $r=5$,所以展开式的常数项为$(-1)^5C_{10}^5=-252$.

12.-1

13.解:(1)因为 $C_n^1=C_n^0+\frac{1}{4}C_n^2$,所以 $n=1+\frac{n(n-1)}{8}$,即 $n^2-9n+8=0$,所以 $n=8$ 或 $n=1$(舍去).则二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot x^{\frac{8-r}{2}}\cdot\frac{1}{2^r}\cdot x^{-\frac{1}{4}r}=\frac{1}{2^r}\cdot C_8^r\cdot x^{4-\frac{3}{4}r}$.

令 $4-\frac{3}{4}r=1$,得 $r=4$,所以含有 x 项的系数为 $\frac{1}{2^4}\times C_8^4=\frac{35}{8}$.

(2)$4-\frac{3}{4}r\in\mathbf{N}$,

则当 $r=0$、4 时对应的项为含 x 的整数次幂的项,分别为 $T_1=x^4$,$T_5=\frac{35}{8}x$.

14.解:(1)$T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2=\frac{1}{4}C_n^2x^{\frac{n-3}{2}}$,

$\because \frac{1}{4}C_n^2=7\therefore C_n^2=28\therefore\frac{n(n-1)}{2}=28\therefore n=8$ 或 -7(负值舍去).

所以前三项分别为 $T_1=C_8^0(\sqrt{x})^8\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^0=x^4$,$T_2=C_8^1(\sqrt{x})^7\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^1=4x^{\frac{13}{4}}$,

$T_3=C_8^2(\sqrt{x})^6\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2=7x^{\frac{5}{2}}$.

所以前三项系数分别为 1,4,7,即前三项系数成等差数列.

(2)$T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r=\frac{1}{2^r}C_8^rx^{4-\frac{3r}{4}}$,$r=0,1,2,\cdots,7,8$.

$\therefore$当 $r=0,4,8$ 时,展开式中 x 的指数为整数,

所以展开式中所有有理项为

$T_1=C_8^0(\sqrt{x})^8\left(\frac{1}{2\sqrt[x]{x}}\right)^0=x^4$,$T_4=\frac{1}{8}C_8^3x=7x$,$T_8=\frac{1}{256}C_8^8x^{-2}=\frac{1}{256x^2}$.

【素质拓展】

15.60 **【解析】**$T_3=C_5^2(x^2+2x)^3y^2$,而在 $(x^2+2x)^3$ 中 $T'_{k+1}=C_3^k(x^2)^{3-k}(2x)^k=C_3^k\cdot 2^k\cdot x^{6-k}$,$6-k=5$,$k=1$,$T'_2=3\times 2x^5$,则 $T_3=10\times 3\times 2x^5y^2=60x^5y^2$,所以 x^5y^2 的系数为 60.

第 2 课时　二项式系数的性质

【课时清单】

1.$C_n^m=C_n^{n-m}$;

2.$\frac{n+1}{2}$　$\frac{n+1}{2}$　$C_n^{\frac{n}{2}}$　$C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 与 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$

3.2^n

【典型例题】

【例 1】解:$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^{10}$ 展开式的通项 $T_{r+1}=C_{10}^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10-r}(-ax^2)^r=C_{10}^r(-a)^rx^{\frac{5}{2}r-5}$.令 $\frac{5}{2}r-5=0$,解得 $r=2$,所以展开式中的常数项为 $C_{10}^r(-a)^2=45a^2=45$,又 $a<0$,所以 $a=-1$,所以 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^{10}$ 即 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}$,其展开式共有 11 项,且正中间一项的二项式系数最大,又 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}$ 展开式中的二项式系数与对应项的系数相同,所以 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}$ 展开式中第 6 项的系数最大.

【例2】解:选择①:$C_n^0+C_n^1+C_n^2=46$,即$\frac{n(n-1)}{2}+n+1=46$,

即$n^2+n-90=0$,即$(n+10)(n-9)=0$,解得$n=9$或$n=-10$(舍去)

选择②:$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=256$,即$2^{n-1}=256$,解得$n=9$.

选择③:$T_{r+1}=C_n^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}x^{-(n-r)}x^{\frac{r}{2}}=C_n^r2^{r-n}x^{\frac{3r-2n}{2}}$,则有$\frac{3r-2n}{2}=0$,所以$n=\frac{3}{2}r$.

因为展开式中第7项为常数项,即$r=6$,所以$n=9$.

(1)展开式中二项式系数最大的项为第5和第6项,

$T_5=C_9^4\left(\frac{1}{2}\right)^5x^{-5}x^2=\frac{63}{16}x^{-3}$,

$T_6=C_9^5\left(\frac{1}{2}\right)^4x^{-4}x^{\frac{5}{2}}=\frac{63}{8}x^{-\frac{3}{2}}$.

(2)展开式通项为:$T_{r+1}=C_9^r\left(\frac{1}{2}\right)^{9-r}x^{-(9-r)}x^{\frac{r}{2}}=C_9^r\cdot 2^{r-9}x^{\frac{3r-18}{2}}$,

令$\frac{3r-18}{2}=0$,$\therefore r=6$.

$\therefore$展开式中常数项为第7项,$T_7=C_9^6\times 2^{-3}=\frac{21}{2}$.

【基础夯实】

1.A **【解析】**由已知得$C_n^1=C_n^5$,可知$n=1+5=6$,故选A.

2.C

3.C **【解析】**由题意,二项式$\left(3x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$的展开式中二项式系数的和为128,可得$2^n=128$,解得$n=7$,所以二项式为$\left(3x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7$,则展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^r(3x)^{7-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^r=(-1)^r\cdot 3^{7-r}C_7^rx^{\frac{21-5r}{3}}$,

当$r=6$时,可得$T_7=(-1)^6\cdot 3\cdot C_7^6x^{-3}=21x^{-3}$,所以展开式中$\frac{1}{x^3}$的系数是21.故选C.

4.ABC **【解析】**对于A,由组合数的运算直接可得$C_n^m=C_n^{n-m}$,故A正确;对于B,由杨辉三角直接可得$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$,故B正确;对于C,二项式展开式中,令$a=b=1$,不论$n$为奇数还是偶数,都可得$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$,故C正确;对于D,由选项C可知$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$,故D错误.故选ABC.

5.84 **【解析】**依题意,$2^{n-1}=64$,解得$n=7$,$\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^rx^{7-r}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_7^rx^{7-2r}(r\in\mathbf{N}^*,r\leqslant 7)$,由$7-2r=3$得$r=2$,所以所求展开式中$x^3$项的系数是$(-2)^2C_7^2=4\times\frac{7\times 6}{2\times 1}=84$.

6.10 **【解析】**因为$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^n$的展开式中第三项和第四项的二项式系数同时取最大,

所以$C_n^2=C_n^3$,解得$n=5$,$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r=C_5^r2^rx^{\frac{5-5r}{2}}$,令$\frac{5-5r}{2}=0$,解得$r=1$,

所以展开式的常数项为$T_2=2C_5^1=10$.

7.65

8.7 40或80 **【解析】**因为二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{m}{x^2}\right)^n(m,n\in\mathbf{R})$展开式的二项式系数之和为32,所以$2^n=32$,$n=5$,$\left(\sqrt{x}+\frac{m}{x^2}\right)^n(m,n\in\mathbf{R})$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot(\sqrt{x})^{5-r}\cdot\left(\frac{m}{x^2}\right)^r=m^rC_5^rx^{\frac{5-5r}{2}}$,

令$\frac{5-5r}{2}=0$,得 $r=1$,故常数项为 $T_2=mC_5^1=10$,$m=2$.

则 $m+n=2+5=7$.二项式系数最大的项的系数为 $T_3=2^2C_5^2=40$ 或 $T_4=2^3C_5^3=80$.

9.解:通项公式为 $T_{k+1}=C_n^k(\sqrt{x})^{n-k}(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^k=(-1)^kC_n^kx^{\frac{3n-5k}{6}}$,$k=0,1,2,\cdots,n$,

若填条件①,

(1)依题意得$\frac{(-1)^4C_n^4}{(-1)^2C_n^2}=\frac{14}{3}$,即 $3C_n^4=14C_n^2$,

所以 $3\times\frac{n!}{4!\times(n-4)!}=14\times\frac{n!}{2!\times(n-2)!}$,整理得$(n-10)(n+5)=0$,

所以 $n=10$ 或 $n=-5$(舍).

因为 $n=10$,所以$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式共有 11 项,

所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,

所以 $T_6=T_{5+1}=(-1)^5C_{10}^5x^{\frac{30-25}{6}}=-252x^{\frac{5}{6}}$.

(2)通项公式为 $T_{k+1}=(-1)^kC_{10}^kx^{\frac{30-5k}{6}}$,令$\frac{30-5k}{6}=5$,得 $k=0$,所以展开式中含 x^5 的项为 x^5.

若填条件②,

(1)依题意得 $C_n^1+C_n^{n-2}=55$,所以 $n+C_n^2=55$,

所以 $n+\frac{n(n-1)}{2}=55$,即 $n^2+n-110=0$,所以 $n=10$ 或 $n=-11$(舍).

因为 $n=10$,所以$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式共有 11 项,

所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,所以 $T_6=T_{5+1}=(-1)^5C_{10}^5x^{\frac{30-25}{6}}=-252x^{\frac{5}{6}}$.

(2)通项公式为 $T_{k+1}=(-1)^kC_{10}^kx^{\frac{30-5k}{6}}$,令$\frac{30-5k}{6}=5$,得 $k=0$,所以展开式中含 x^5 的项为 x^5.

若填条件③,

(1)依题意得 $C_{n+1}^2-C_n^{n-2}=10$,则 $C_{n+1}^2-C_n^2=10$,所以$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=10$,所以 $n=10$,因为 $n=10$,

所以$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式共有 11 项,

所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,所以 $T_6=T_{5+1}=(-1)^5C_{10}^5x^{\frac{30-25}{6}}=-252x^{\frac{5}{6}}$.

(2)通项公式为 $T_{k+1}=(-1)^kC_{10}^kx^{\frac{30-5k}{6}}$,令$\frac{30-5k}{6}=5$,得 $k=0$,

所以展开式中含 x^5 的项为 x^5.

【能力提升】

10.A **【解析】**由题意可得 $a=C_8^4=70$,又展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r2^rx^r$,

设第 $r+1$ 项的系数最大,则$\begin{cases}C_8^r\cdot 2^r\geqslant C_8^{r+1}\cdot 2^{r+1},\\ C_8^r\cdot 2^r\geqslant C_8^{r-1}\cdot 2^{r-1},\end{cases}$即$\begin{cases}r\geqslant 5,\\ r\leqslant 6,\end{cases}$

求得 $r=5$ 或 6,此时,$b=7\times 2^8$.$\therefore\frac{b}{a}=\frac{128}{5}$.故选 A.

11.BD

12.6 **【解析】**由二项式系数的性质知,

二项式$(x+y)^{2m}$的展开式中二项式系数的最大值有一项,即 $C_{2m}^m=a$,

二项式$(x+y)^{2m+1}$的展开式中二项式系数的最大值有两项,即 $C_{2m+1}^m=C_{2m+1}^{m+1}=b$,

因此 $13C_{2m}^{m}=7C_{2m+1}^{m}$,所以 $13\cdot\frac{(2m)!}{m!\ m!}=7\cdot\frac{(2m+1)!}{m!\ (m+1)!}$,所以 $m=6$.

13.解:$(5\sqrt{x}-\frac{1}{x})^{n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,

令二项式中的 $x=1$ 得到展开式中的各项系数的和为 $p=4^n$,

又各项二项式系数的和 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=q$,所以 $q=2^n$,

根据题意得 $2q=p-48$ 即 $4^n-48=2\times2^n$,

解得 $2^n=8$ 或 $2^n=-6$(负值舍),故 $n=3$.

14.解:(1)由题意得 $C_n^1=C_n^4$,解得 $n=5$.

所以二项式系数的和为 $2^{10}=1024$.

(2)由于 $2n=10$ 为偶数,所以 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中第 6 项的二项式系数最大,

即 $T_6=T_{5+1}=C_{10}^5\cdot(2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^5=-8064$.

(3)设第 $r+1$ 项的系数的绝对值最大,

则 $T_{r+1}=C_{10}^r\cdot(2x)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot C_{10}^r\cdot2^{10-r}\cdot x^{10-2r}$

$\therefore\begin{cases}C_{10}^r\cdot2^{10-r}\geqslant C_{10}^{r-1}\cdot2^{10-r+1},\\C_{10}^r\cdot2^{10-r}\geqslant C_{10}^{r+1}\cdot2^{10-r-1},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}C_{10}^r\geqslant2C_{10}^{r-1},\\2C_{10}^r\geqslant C_{10}^{r+1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}11-r\geqslant2r,\\2(r+1)\geqslant10-r,\end{cases}$

$\therefore\frac{8}{3}\leqslant r\leqslant\frac{11}{3}$, $\therefore r=3$.

故系数的绝对值最大的是第 4 项,即 $T_{3+1}=(-1)^3\cdot C_{10}^3\cdot2^{10-3}\cdot x^4=-15360x^4$.

【素质拓展】

15.2^{2021} **【解析】**令 $\sin x=t$, $t\in[\frac{1}{2},1]$,则有 $y=(1+t)^{2021}+(1-t)^{2021}$,按 t 的升幂排列,

$(1+t)^{2021}=1+C_{2021}^1t+C_{2021}^2t^2+\cdots+C_{2021}^{2020}t^{2020}+C_{2021}^{2021}t^{2021}$,

$(1-t)^{2021}=1-C_{2021}^1t+C_{2021}^2t^2-\cdots+C_{2021}^{2020}t^{2020}-C_{2021}^{2021}t^{2021}$,

两者相加时,t 的奇数次幂抵消,偶数次幂系数相同,

所以 $y=2(1+C_{2021}^2t^2+\cdots+C_{2021}^{2020}t^{2020})$,则 t 偶数次幂的最大值为 1,

所以 $f(x)$ 最大值为 $2(1+C_{2021}^2+C_{2021}^4+\cdots+C_{2021}^{2018}+C_{2021}^{2020})$

$=2\times\frac{2^{2021}}{2}=2^{2021}$.

第 3 课时　二项式定理的综合应用

【课时清单】

1.$x=1$　$x=y=1$

2.$\frac{f(1)+f(-1)}{2}$　$\frac{f(1)-f(-1)}{2}$

【典型例题】

【例 1】解:

(1)令 $x=0$ 可得 $a_0=1$.

(2)令 $x=1$ 可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$,故 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-2$.

(3)取 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5=243$,①

又 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$,②

②-①得 $2(a_1+a_3+a_5)=-244$,

则 $a_1+a_3+a_5=-122$.

【例 2】解：

(1) $f(0)=1=a_0$，$f(1)=0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2020}$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}=f(1)-f(0)=-1$.

(2) $f'(x)=-2020(1-x)^{2019}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+2020a_{2020}x^{2019}$，

所以 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2020a_{2020}=f'(1)=0$.

(3)因为 $a_k=C_{2020}^k(-1)^k(0\leqslant k\leqslant 2020)$，

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2020}}=-\frac{1}{C_{2020}^1}+\frac{1}{C_{2020}^2}-\frac{1}{C_{2020}^3}+\cdots+\frac{1}{C_{2020}^{2020}}$.

因为$\frac{1}{C_{2020}^k}=\frac{k!\ (2020-k)!}{2020!}=\frac{2021}{2022}\cdot\frac{k!\ (2020-k)!\ (2021-k+k+1)}{2021!}$

$=\frac{2021}{2022}\cdot\frac{(2021-k)!\ k!\ +[2021-(k+1)]!\ (k+1)!}{2021!}=\frac{2021}{2022}\cdot\left(\frac{1}{C_{2021}^k}+\frac{1}{C_{2021}^{k+1}}\right)$，

所以原式$=\frac{2021}{2022}\left[-\left(\frac{1}{C_{2021}^1}+\frac{1}{C_{2021}^2}\right)+\left(\frac{1}{C_{2021}^2}+\frac{1}{C_{2021}^3}\right)-\left(\frac{1}{C_{2021}^3}+\frac{1}{C_{2021}^4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{C_{2021}^{2020}}+\frac{1}{C_{2021}^{2021}}\right)\right]$

$=\frac{2021}{2022}\left[\frac{1}{C_{2021}^{2021}}-\frac{1}{C_{2021}^1}\right]=\frac{1010}{1011}$.

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2020}}$的值为$\frac{1010}{1011}$.

【基础夯实】

1.A **【解析】**$\left(1+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k=C_5^kx^{-k}\cdot 2^k$，则$(x^2-2)\left(1+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^{-1}的系数为 $2^3\times C_5^3-2^2\times C_5^1\times 2=60$.故选 A.

2.D **【解析】**令 $x=1$，代入表达式化简得 $2+2^2+\cdots+2^n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)=2^{n+1}-2$.故选 D.

3.D **【解析】**令 $x=1$，得 $0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$；

令 $x=-1$，得 $2^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}$；

两式相减得，$-2^{10}=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$，

所以 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{-2^{10}}{2}=-2^9=-512$.故选 D.

4.C **【解析】**通项为 $C_8^rx^{8-r}(-ax^{-1})^r=(-a)^rC_8^rx^{8-2r}$，$8-2r=0$，$r=4$，即$(-a)^4C_8^4=1120$，解得 $a=\pm 2$，当 $a=2$ 时，令 $x=1$，求得和为 1；当 $a=-2$ 时，令 $x=1$，求得和为 3^8.

5.1 **【解析】**令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(\sqrt{2}-1)^{10}$；

令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}=(\sqrt{2}+1)^{10}$.

故$(a_0+a_2+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10})(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10})$

$=(\sqrt{2}-1)^{10}(\sqrt{2}+1)^{10}=1$.

6.1 **【解析】**要求$(4-3x+2y)^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开式中不含 y 的项，

只需令 $y=0$，所以$(4-3x+2y)^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开式中不含 y 的项的系数和即为$(4-3x)^n$展开式的系数和.

令 $x=1$，得$(4-3x)^n$展开式的各项系数和为$(4-3)^n=1$.

7.7 **【解析】**令 $x=-1$，$\therefore 2^8=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}+a_{12}$.令 $x=-3$，

$\therefore 0=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{11}+a_{12}$，$\therefore 2^8=2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})$，

$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^7$，$\therefore\log_2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=\log_2 2^7=7$.

8.$-\frac{63}{65}$ **【解析】**令 $2x-1=1$，即 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=1$，令 $2x-1=-1$，即 $x=0$，得 $a_0-a_1+a_2+\cdots+a_6=64$，两式相减，得 $2(a_1+a_3+a_5)=-63$，两式相加，得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=65$.

故$\dfrac{a_1+a_3+a_5}{a_0+a_2+a_4+a_6}=-\dfrac{63}{65}$.

9.解:设$(2x-3y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+a_2x^7y^2+\cdots+a_9y^9$.

(1)二项式系数之和为$C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^9=2^9$.

(2)各项系数之和为$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$,

令$x=1,y=1$,$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=(2-3)^9=-1$.

(3)由(2)知$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=-1$,

令$x=1,y=-1$,可得$a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=5^9$,

将两式相加可得$a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=\dfrac{5^9-1}{2}$,即为所有奇数项系数之和.

(4)方法一　$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$,

令$x=1,y=-1$,则$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=5^9$.

方法二$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|$即为$(2x+3y)^9$的展开式中各项系数之和,令$x=1,y=1$,得$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=5^9$.

【能力提升】

10.B　**【解析】**由已知条件$4^n-2^n=240$,解得$n=4$,

$T_{r+1}=C_4^r(5x)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r5^{4-r}C_4^rx^{4-\frac{3}{2}r}$,令$4-\dfrac{3r}{2}=1$,得$r=2$,

所以展开式中x的系数为$(-1)^2\times5^2C_4^2=150$.

11.B　**【解析】**设$(2x-1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,且奇次项的系数和为$A$,偶次项的系数和为$B$.则$A=a_1+a_3+a_5+\cdots$,$B=a_0+a_2+a_4+a_6+\cdots$.

由已知可知$B-A=3^8$.令$x=-1$,

得$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_n(-1)^n=(-3)^n$,

即$(a_0+a_2+a_4+a_6+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots)=(-3)^n$,

即$B-A=(-3)^n$.$\therefore(-3)^n=3^8=(-3)^8$,$\therefore n=8$.

由二项式系数性质可得:

$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^0=2^8-1$.

12.-1　**【解析】**因为$(1-2x)^{2022}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2022}x^{2022}(x\in\mathbf{R})$,

令$x=0$可得$a_0=1$;令$x=\dfrac{1}{2}$,可得$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2022}}{2^{2022}}=\left(1-2\times\dfrac{1}{2}\right)^{2022}=0$.

故$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2022}}{2^{2022}}=0-a_0=-1$.

13.(1)解:存在.杨辉三角形的第n行由二项式系数C_n^k,$k=0,1,2,\cdots,n$组成.

若第n行中有三个相邻的数之比为$3:4:5$,

则$\dfrac{C_n^{k-1}}{C_n^k}=\dfrac{k}{n-k+1}=\dfrac{3}{4}$,$\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\dfrac{k+1}{n-k}=\dfrac{4}{5}$,

即$3n-7k=-3$,$4n-9k=5$,解得$k=27$,$n=62$.

即第62行有三个相邻的数C_{62}^{26},C_{62}^{27},C_{62}^{28}的比为$3:4:5$.

(2)证明:若有$n,r(n\geqslant r+3)$,使得C_n^r,C_n^{r+1},C_n^{r+2},C_n^{r+3}成等差数列,

则$2C_n^{r+1}=C_n^r+C_n^{r+2}$,$2C_n^{r+2}=C_n^{r+1}+C_n^{r+3}$,

即$\dfrac{2\cdot n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}+\dfrac{n!}{(r+2)!\,(n-r-2)!}$,

$\dfrac{2\cdot n!}{(r+2)!\,(n-r-2)!}=\dfrac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}+\dfrac{n!}{(r+3)!\,(n-r-3)!}$,

所以$\dfrac{2}{(r+1)(n-r-1)}=\dfrac{1}{(n-r-1)(n-r)}+\dfrac{1}{(r+1)(r+2)}$,

$$\frac{2}{(r+2)(n-r-2)}=\frac{1}{(n-r-2)(n-r-1)}+\frac{1}{(r+2)(r+3)},$$

整理得 $n^2-(4r+5)n+4r(r+2)+2=0$，

$n^2-(4r+9)n+4(r+1)(r+3)+2=0$.

两式相减得 $n=2r+3$，

所以 $C_{2r+3}^{r}, C_{2r+3}^{r+1}, C_{2r+3}^{r+2}, C_{2r+3}^{r+3}$ 成等差数列，

由二项式系数的性质可知 $C_{2r+3}^{r}=C_{2r+3}^{r+3}<C_{2r+3}^{r+1}=C_{2r+3}^{r+2}$，

这与等差数列的性质矛盾，从而要证明的结论成立.

14.(1) $T_6=-8064$

(2) $T_5=13440x^4$

【素质拓展】

15.解：(1)由题意可得 $A(n,1)=1, A(n,n)=1$，且 $A(n,m)=A(n-1,m-1)+A(n-1,m)$.

$\therefore A(2,1)=A(3,1)=1, A(4,2)=A(3,1)+A(3,2)=A(3,1)+A(2,1)+A(2,2)=3$.

(2)由 $A(n,m)=A(n-1,m-1)+A(n-1,m)$ 可推得 $A(n,m)=C_{n-1}^{m-1}$，

不等式 $A(9,m)\leqslant 28$ 即为 $C_8^{m-1}\leqslant 28$，

$\because C_8^0=C_8^8=1, C_8^1=C_8^7=8, C_8^2=C_8^6=28, C_8^3=C_8^5=56, C_8^4=70$.

解不等式 $C_8^{m-1}\leqslant 28$，可得 m−1 的可能取值有 0、1、2、6、7、8.

所以，不等式 $A(9,m)\leqslant 28$ 的解集为 $\{1,2,3,7,8,9\}$.

章末整合六

【典型例题】

【例 1】解：

(1)从 7 人中任选 5 人来排队共有 $A_7^5=2520$ 种不同的排法.

(2)先从 A,B 两人中任选 1 人有 C_2^1 种不同的方法，再从剩余的 5 人中任选 4 人有 C_5^4 种不同的方法，再将选出的 5 人进行全排列，

共有 $C_2^1\cdot C_5^4\cdot A_5^5=1200$ 种不同的排法.

(3)因 A,B 都在内，所以只需从余下 5 人中选 3 人有 C_5^3 种不同结果，

A,B 不相邻，使用插空法共有 $C_5^3\cdot A_3^3\cdot A_4^2=720$ 种不同排法.

(4)第一类：所选 5 人无 A,B，有 $A_5^5=120$ 种不同排法；

第二类：所选 5 人有 A 无 B，则 A 只能站中间三个位置的其中一个位置，有 $C_5^4\cdot C_3^1\cdot A_4^4=360$ 种不同排法；

第三类：所选 5 人无 A 有 B，则 B 有 4 个位置可供选择，有 $C_5^4\cdot C_4^1\cdot A_4^4=480$ 种不同排法；

第四类：所选 5 人有 A,B，若 A 排中间时，有 $C_5^3\cdot A_4^4=240$ 种不同排法；若 A 不排中间时，有 $C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_3^1\cdot A_3^3=360$ 种不同排法，共有 600 种不同排法.

综上，共有种 1560 不同排法.

巩固练习

解：(1)如果数学必须比语文先上，则不同的排法有 $\frac{A_6^6}{A_2^2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2}=360$ 种.

(2)如果体育排在最后一节，有 $A_5^5=120$ 种排法；

体育不排在最后一节有 $C_4^1C_4^1A_4^4=384$ 种排法.

所以共有 $120+384=504$ 种排法.

(3)若将这3节课插入原课表中且原来的6节课相对顺序不变,则有$\frac{A_9^9}{A_6^6}=9\times8\times7=504$种排法.

【例2】解:

(1)每人都可以从这四个项目中选报一项,各有4种不同的选法,

由分步乘法计数原理知,共有$4^5=1024$(种)不同的报名方法.

(2)每项限报一人,且每人至多报一项,因此可由项目选人.

第一个项目有5种不同的选法,第二个项目有4种不同的选法,第三个项目有3种不同的选法,第四个项目有2种不同的选法.由分步乘法计数原理得,共有$A_5^4=120$(种)不同的报名方法.

(3)每人限报一项,人人参加,且每个项目均有人参加,因此需将5人分成4组,有$C_5^2=10$(种)情况.

每组参加一个项目,由分步乘法计数原理得共有$C_5^2A_4^4=240$(种)不同的报名方法.

巩固练习

解:(1)从10双鞋子中选取4双,有C_{10}^4种不同选法,

每双鞋子中各取一只,分别有2种取法,

根据分步乘法计数原理,选取种数为$N=C_{10}^4\times2^4=3360$(种).

(2)从10双鞋子中选2双有C_{10}^2种取法,即有45种不同取法.

(3)先选取一双有C_{10}^1种选法,再从9双鞋中选取2双有C_9^2种选法,

每双鞋只取一只各有2种取法,

根据分步乘法计数原理,不同取法为$N=C_{10}^1C_9^2\times2^2=1440$(种).

【例3】解:

(1)因为$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$,$n\geqslant4$,

所以$a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,$a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$,

$a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

因为$a_3^2=2a_2a_4$,

所以$\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]^2=2\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

解得$n=5$.

(2)由(1)知$n=5$,

所以$(1+\sqrt{3})^n=(1+\sqrt{3})^5$

$=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5$

$=a+\sqrt{3}b$.

解法一:

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$,所以$a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=76$,$b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,

从而$a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

解法二:

$(1-\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5$

$=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5$.

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$,所以$(1-\sqrt{3})^5=a-\sqrt{3}b$.

因此$a^2-3b^2=(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)=(1+\sqrt{3})^5\times(1-\sqrt{3})^5=(-2)^5=-32$.

巩固练习

解:(1)因为$f(x)=(2x-3)^n$展开式的二项式系数和为512,

所以$2^n=512$,解得$n=9$.

因为$(2x-3)^9=[2(x-1)-1]^9$,所以$a_2=C_9^72^2(-1)^7=-144$.

(2)在$(2x-3)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_9(x-1)^9$中，

令$x=1$，则$a_0=(2\times1-3)^9=-1$，

令$x=2$，可得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=(2\times2-3)^9=1$，

所以$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9-a_0=1-(-1)=2$.

(3)$f(20)-20=(36+1)^9-20$

$=C_9^0\,36^9+C_9^1\,36^8+C_9^2\,36^7+\cdots+C_9^8 36+C_9^9-20$，

$=C_9^0\,36^9+C_9^1\,36^8+C_9^2\,36^7+\cdots+C_9^8 36-19$，

因为$(C_9^0\,36^9+C_9^1\,36^8+C_9^2\,36^7+\cdots+C_9^8 36)$能被6除，而$-19=(-4)\times6+5$，即$-19$被6除余数为5，所以$f(20)-20$被6整除的余数为5.

【章末检测】

1.A **【解析】**根据题意可知，可分三步考虑：

第一步，在7项中选取2项，共有$C_7^2=21$种不同的方法；

第二步，甲在剩下5项中选取1项，共有$C_5^1=5$种不同的方法；

第三步，乙在剩下4项中选取1项，共有$C_4^1=4$种不同的方法.

根据分步乘法计数原理可知，两人恰好选中相同2项的不同报名情况有$21\times5\times4=420$(种)，故选A.

2.D **【解析】**$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$的展开式通项为$C_5^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-r}(-1)^r=C_5^r x^{2r-10}(-1)^r$，由$2r-10=0$得$r=5$，所以$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$的常数项系数为$C_5^5(-1)^5=-1$；由$2r-10=-2$得$r=4$，所以$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$的$x^{-2}$项系数为$C_5^4(-1)^4=5$，所以$(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$的展开式的常数项是$2\times(-1)+5=3$，故选D.

3.B **【解析】**当甲乙不在一个路口，甲乙路口都有2个人时，有$A_3^2\cdot A_3^3=36$种情况；

当甲乙不在一个路口，甲路口有2个人，乙路口有1人时，有$A_3^2\cdot C_3^2=18$种情况；

当甲乙不在一个路口，甲路口有1个人，乙路口有2人时，有$A_3^2\cdot C_3^2=18$种情况；

共有$36+18+18=72$种情况.故选B.

4.A **【解析】**令$t=x+1$，可得$x=t-1$，则$[2-(t-1)]^{2021}=(3-t)^{2021}=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{2021}t^{2021}$，

二项式$(3-t)^{2021}$的展开式通项为$T_{r+1}=C_{2021}^r\cdot3^{2021-r}\cdot(-t)^r$，则$a_r=C_{2021}^r\cdot3^{2021-r}\cdot(-1)^r$.

当r为奇数时，$a_r<0$，当r为偶数时，$a_r>0$，

因此，$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2021}|=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2021}=(3+1)^{2021}=2^{4042}$.故选A.

5.B **【解析】**因为平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点任意三个均不共线，

故从8个顶点中任取三个均可构成一个三角形，共有$C_8^3=56$个三角形，

从中任选两个，共有$C_{56}^2=1540$种情况，

因为平行六面体有六个面，六个对角面，

从8个顶点中4点共面共有12种情况，

每个面的四个顶点共确定6个不同的三角形，

故任取出2个三角形，则这2个三角形不共面共有$1540-12\times6=1468$种，故选B.

6.B **【解析】**根据题意，如图，假设5个区域依次为A,B,C,D,E，分4步分析：

①对于A区域，有4种涂法；

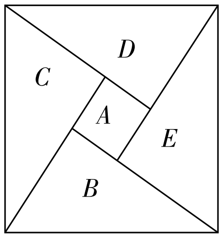
②对于B区域，与A相邻，有3种涂法；

③对于C区域，与A、B相邻，有2种涂法；

④对于D区域，若其与B区域同色，则E有2种涂法，

若D区域与B区域不同色，则E有1种涂法，则D,E区域有$2+1=3$种涂色方法.

则不同的涂色方案共有 $4\times3\times2\times3=72$ 种.故选 B.



7.B 【解析】依题意,$(1+x)^{2021}$ 的展开式中各项系数 $a_i(i\in\mathbf{N},i\leqslant2021)$ 就是对应项的二项式系数,即 $a_i=\mathrm{C}_{2021}^{i}(i\in\mathbf{N},i\leqslant2021)$,

由二项展开式中二项式系数的对称性 $\mathrm{C}_{2021}^{i}=\mathrm{C}_{2021}^{2021-i}$ 知 $a_i=a_{2021-i}(i\in\mathbf{N},i\leqslant2021)$,

所以原等式为 $f(x)=(1+x)^{2021}=a_{2021}+a_{2020}x+a_{2019}x^2+\cdots+a_2x^{2019}+a_1x^{2020}+a_0x^{2021}$,

求导得 $f'(x)=2021(1+x)^{2020}=a_{2020}+2a_{2019}x+3a_{2018}x^2+\cdots+2020a_1x^{2019}+2021a_0x^{2020}$,

取 $x=1$ 得 $2021\times2^{2020}=a_{2020}+2a_{2019}+3a_{2018}+4a_{2017}+\cdots+2020a_1+2021a_0$,

所以 $a_{2020}+2a_{2019}+3a_{2018}+4a_{2017}+\cdots+2020a_1+2021a_0=2021\times2^{2020}$.故选 B.

8.BC 【解析】根据题意,依次分析选项:对于A,如果4人中男生女生各有2人,男生的选法有 $\mathrm{C}_6^2=15$ 种,女生的选法有 $\mathrm{C}_4^2=6$ 种,则4人中男生女生各有2人有 $15\times6=90$ 种选法,A 错误;

对于B,如果男生中的甲和女生中的乙必须在内,在剩下的8人中再选2人即可,有 $\mathrm{C}_8^2=28$ 种选法,B 正确;

对于C,在10人中任选4人,有 $\mathrm{C}_{10}^4=210$ 种选法,甲乙都不在其中的选法有 $\mathrm{C}_8^4=70$,故男生中的甲和女生中的乙至少要有1人在内的选法有 $210-70=140$ 种,C 正确;

对于D,在10人中任选4人,有 $\mathrm{C}_{10}^4=210$ 种选法,只有男生的选法有 $\mathrm{C}_6^4=15$ 种,只有女生的选法有 $\mathrm{C}_4^4=1$ 种,则4人中必须既有男生又有女生的选法有 $210-15-1=194$ 种,D 错误.故选 BC.

9.BCD 【解析】对选项A,由题意可得 $4^n-2^n=992$,求得 $2^n=32$ 或 $2^n=-31$(舍),$\therefore n=5$.

所以 $(x^{\frac{2}{3}}+3x^2)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\cdot3^r\cdot x^{\frac{10+4r}{3}}$,$(r=0,1,2,3,4,5)$

所以当 $r=2$ 或 $r=5$ 时,$\dfrac{10+4r}{3}$ 是整数,

所以展开式中的有理项是第3项和第6项,所以选项 A 错误;

对选项B,令 $\dfrac{10+4r}{3}=0$,$\therefore r=-\dfrac{5}{2}$,所以展开式中没有常数项,所以选项 B 正确;

对选项C,因为 $n=5$,

故展开式中二项式系数最大的项为第三项或第四项,所以选项 C 正确;

对选项D,第 $r+1$ 项的系数为 $3^r\cdot\mathrm{C}_5^r$,$(r=0,1,2,3,4,5)$

计算得展开式各项的系数依次为 1,15,90,270,405,243,

所以展开式第5项的系数最大.所以选项 D 正确.故答案为 BCD.

10.(1)150 (2)100

【解析】(1)5名学生可分成2,2,1和3,1,1两种形式,当5名学生分成2,2,1时,共有 $\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_3^3=90$ 种方法;当5名学生分成3,1,1时,共有 $\mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_3^3=60$ 种方法.根据分类加法计数原理知共有 $90+60=150$ 种保送方法.

(2)先将五人分成三组,因为要求每组至少一人,所以可选择的只有2,2,1或3,1,1,所以有 $\dfrac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_1^1}{\mathrm{A}_2^2}+\dfrac{\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1}{\mathrm{A}_2^2}=25$(种)分组方法.因为甲不能被保送到北大,所以有甲的那组只有上海交大和浙大两个选择,剩下的两组无限制,一共有4种方法,所以不同的保送方案共有 $25\times4=100$(种).

故答案为 150;100.

11.45 【解析】因为$\left(1+x+\frac{1}{x^{2022}}\right)^{10}=\left((1+x)+\frac{1}{x^{2022}}\right)^{10}=(1+x)^{10}+C_{10}^{1}(1+x)^{9}\frac{1}{x^{2022}}+\cdots$,所以$x^2$项只能在$(1+x)^{10}$展开式中,即为$C_{10}^{8}x^2$,系数为$C_{10}^{8}=45$.

12.2^{n-1}　2037

【解析】n次二项式系数对应杨辉三角形的第$n+1$行,例如:$(x+1)^2=x^2+2x+1$,系数分别为1,2,1,对应杨辉三角形的第三行;

令$x=1$,就可以求出该行的系数和,第1行为2^0,第2行为2^1,第3行为2^2,依此类推即每一行数字和为首项为1,公比为2的等比数列,即杨辉三角第$n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$行的数字之和为$2^{n-1}$,杨辉三角的前$n$行的所有项的和为$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

若去除所有为1的项,则剩下的每一行的个数为1,2,3,4,…,可以看成构成一个首项为1,公差为1的等差数列,则$T_n=\frac{n(n+1)}{2}$,且$T_9=45$,可得当$n=9$即第11行,再加上第12行的前1个数(去除两边的1),所有项的个数和为46,则杨辉三角形的前11行所有项的和为$S_{11}=2^{11}-1$.

则此数列前46项的和为$S_{11}-21+11=2^{11}-11=2037$.故答案为$2^{n-1}$;2037.

13.解:(1)二项式$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^n$展开式的第$r+1$项为$T_{r+1}=C_n^r\cdot x^{n-r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{-r}=C_n^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{n-2r}$,

因为该二项式的展开式中,前三项的系数成等差数列,

所以$C_n^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+C_n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=2C_n^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1$,即$1+\frac{n(n-1)}{8}=n$,整理得$n^2-9n+8=0$,解得$n=8$或$n=1$,又$n=1$显然不满足题意,所以$n=8$.

(2)由(1)得$T_{r+1}=C_8^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{8-2r}$,令$8-2r=2$得$r=3$,

所以展开式中的x^2项的系数为$C_8^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=7$.

14.解:(1)设"三只小球恰在两个盒子中"为事件A,则$P(A)=\frac{C_3^1C_2^2C_4^2A_2^2}{4^3}=\frac{9}{16}$.

(2)设"恰有两个球的编号与盒子编号不同"为事件B,"三个球的编号与盒子的编号不同"为事件C,则"至少有两个球的编号与所在盒子编号不同"为事件$B+C$.

$P(B)=\frac{C_3^1(1+2)}{4^3}=\frac{9}{64}$,$P(C)=\frac{2+C_3^2\times3}{4^3}=\frac{11}{64}$,

B与C互斥,故$P(B+C)=P(B)+P(C)=\frac{9}{64}+\frac{11}{64}=\frac{5}{16}$.

15.解:(1)因为$a_n=2n-1$,所以$F(5)=1+3C_5^1+5C_5^2+\cdots+11C_5^5$,①

同时,$F(5)=11C_5^5+9C_5^4+7C_5^3+\cdots+1$,②

①②两式相加得:$2F(5)=12+12C_5^1+12C_5^2+\cdots+12C_5^5=12\times2^5$.

所以$F(5)=12\times2^4=192$.

(2)因为$a_n=7^{n-1}$,所以$F(20)=1+7C_{20}^1+7^2C_{20}^2+\cdots+7^{20}C_{20}^{20}=C_{20}^0\cdot7^0\cdot1^{20}+C_{20}^1\cdot7^1\cdot1^{19}+\cdots+C_{20}^{20}\cdot7^{20}\cdot1^0$

$=(7+1)^{20}=8^{20}=(9-1)^{20}=1-C_{20}^1\cdot9+C_{20}^2\cdot9^2-\cdots+C_{20}^{20}\cdot9^{20}$,

因为$-C_{20}^1\cdot9+C_{20}^2\cdot9^2-\cdots+C_{20}^{20}\cdot9^{20}$都能被9整除,所以1除以9的余数就是$F(20)$除以9的余数,故$F(20)$除以9的余数为1.

(3)因为$a_n=(n-1)^2$,所以通项$T_k=k^2C_n^k=k^2\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=k\cdot n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=nkC_{n-1}^{k-1}$,

所以$F(n)=1^2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+n^2C_n^n=n(1C_{n-1}^0+2C_{n-1}^1+\cdots+nC_{n-1}^{n-1})$.

同时 $F(n)=n[nC_{n-1}^{n-1}+(n-1)C_{n-1}^{1}+\cdots+1C_{n-1}^{1}]$,

上述两式相加有 $2F(n)=n[(1+n)C_{n-1}^{0}+(1+n)C_{n-1}^{2}+\cdots+(1+n)C_{n-1}^{n-1}]=n(1+n)(C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{2}+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n(1+n)\cdot 2^{n-1}=(n^2+n)\cdot 2^{n-1}$,

所以 $F(n)=(n^2+n)\cdot 2^{n-2}$.

第七章　随机变量及其分布

7.1　条件概率与全概率公式

第1课时　条件概率

【课时清单】

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$　　$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

【典型例题】

【例1】(1)0.42　(2)0.08

【例2】(1)$\dfrac{2}{5}$　(2)$\dfrac{1}{3}$

【基础夯实】

1.B　2.B　3.A　4.B　5.$\dfrac{3}{4}$　6.$\dfrac{4}{9}$　7.$\dfrac{3}{4}$　8.$\dfrac{1}{14}$　9.(1)0.21　(2)$\dfrac{4}{7}$

【能力提升】

10.D　11.B　12.$\dfrac{1}{3}$　13.(1)$\dfrac{1}{3}$　(2)$\dfrac{1}{5}$　14.(1)$\dfrac{2}{3}$　(2)$\dfrac{2}{5}$　(3)$\dfrac{3}{5}$

【素质拓展】

15.(1)$\dfrac{1}{3}$　(2)$P(X=2)=\dfrac{173}{1125}$,$P(X=3)=\dfrac{412}{1125}$.

第2课时　全概率公式

【课时清单】

$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

【典型例题】

【例1】$\dfrac{5}{9}$　【例2】(1)$\dfrac{3}{70}$　(2)$\dfrac{1}{3}$

【基础夯实】

1.B　2.C　3.A　4.C　5.$\dfrac{41}{70}$　6.0.00025　7.0.013　8.0.5275

9.该人迟到的概率是0.18,他乘轮船迟到的概率是$\dfrac{4}{9}$.

【能力提升】

10.B　11.B　12.$\dfrac{8}{15}$　13.(1)$\dfrac{83}{420}$　(2)$\dfrac{28}{83}$　14.(1)$\dfrac{1}{2}$　(2)$\dfrac{31}{55}$

【素质拓展】

15.(1)$P(B)=0.28$,$P(A|B)=\frac{5}{14}$.　(2)$P(B)=0.3$,$P(A|B)=\frac{1}{3}$.

7.2　离散型随机变量及其分布列

【典型例题】

【例 1】(1)$P(X=1)=\frac{1}{2}$　(2)分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

【例 2】(1)$P(X=0)=\frac{1}{4}$,$P(X=1)=\frac{11}{24}$.　(2)$\frac{11}{48}$

【基础夯实】

1.D　2.C　3.D　4.B　5.$\frac{13}{35}$　6.$\frac{1}{6}$　7.$\frac{1}{5}$

8.

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

9.(1)

X	0	1	2	3
结果	取得 3 个黑球	取得 1 个白球,2 个黑球	取得 2 个白球,1 个黑球	取得 3 个白球

(2)Y 的可能取值为 6,11,16,21,Y 是离散型随机变量.

【能力提升】

10.C　11.B　12.9.1

13.X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$

$P(X\geqslant 4)=\frac{7}{20}$

14.(1)$\frac{1}{9}$　(2)总付款额的分布列为

X	250	350	400	500
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{64}{81}$

【素质拓展】

15.(1)$\frac{8}{9}$　(2)X 的分布列为

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{2}{27}$

$E(X)=\frac{14}{3}$

7.3　离散型随机变量的数字特征

第1课时　离散型随机变量的均值

【课时清单】

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$　$aE(X)+b$

【典型例题】

【例1】(1)$E(X)=2.8$　(2)$E(3X+2)=10.4$

【例2】(1)

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(2)$\because \xi\sim B(4,\frac{1}{2})$,$\therefore E(\xi)=4\times\frac{1}{2}=2$.$\therefore \eta=2300-100\xi$.$\therefore E(\eta)=2300-100E(\xi)=2300-200=2100$(元).

【基础夯实】

1.A　2.C　3.D　4.C　5.$\frac{7}{3}$　6.$\frac{13}{9}$　7.2　8.$\frac{6}{5}$　9.(1)$E(X)=-\frac{17}{30}$　(2)$E(Y)=-\frac{62}{15}$

【能力提升】

10.D　11.B　12.6

13.(1)X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.002	0.044	0.306	0.648

$E(X)=2.6$　(2)755棵

14.(1)芯片甲为合格品的概率为$\frac{4}{5}$,芯片乙为合格品的概率为$\frac{3}{4}$.

(2)分布列为

X	90	45	30	-15
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

数学期望为66

【素质拓展】

15.(1)3

(2)分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

数学期望是$\frac{9}{10}$.故技师和高级技师应该抽取的人数是$(40+20)\times\frac{1}{20}=3$.

第 2 课时　离散型随机变量的方差

【课时清单】

$(x_1-E(x))^2p_1+(x_2-E(x))^2p_2+\cdots+(x_n-E(x))^2p_n$　$a^2D(X)$

【典型例题】

【例 1】$E(X^2+4X+4)=27$,$D(2X-1)=8$.

【例 2】(1)

X	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(2)均值为$\frac{8}{3}$,方差为$\frac{2}{9}$.

【基础夯实】

1.A　2.D　3.A　4.A　5.$\frac{9}{16}$　6.$\frac{2}{9}$　7.2　8.5

9.(1)$E(\xi)=-\frac{1}{3}$,$D(\xi)=\frac{5}{9}$,$\sqrt{D(\xi)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.　(2)$E(\eta)=\frac{7}{3}$,$D(\eta)=\frac{20}{9}$.

【能力提升】

10.C　11.D　12.$\frac{1}{2}$

13.(1)$E(\xi)=2$,$D(\xi)=\frac{4}{3}$.　(2)$E(\eta)=60$,$D(\eta)=1200$.

14.(1)$E(X+2)=5$,$E(3X)=9$,$E(X^2)=11$.　(2)$D(X+2)=2$,$D(3X)=18$,$D(X^2)=74.8$.

(3)由(1)(2)可得$E(X+2)=E(X)+2=5$,$E(3X)=3E(X)=9$,$D(X+2)=D(X)$,$D(3X)=3^2D(X)=9D(X)$,可得性质:若 X 和 Y 都是随机变量,且$Y=aX+b(a\neq0)$,

则$E(Y)=aE(X)+b$,$D(Y)=a^2D(X)$,$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

【素质拓展】

15.(1)分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$E(X)=\frac{9}{10}$　(2)1650 元

7.4　二项分布与超几何分布

第1课时　二项分布

【课时清单】

$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$　$X \sim B(n,p)$

【典型例题】

【例1】(1)

X	0	1	…	k	…	15
P	$C_{15}^{0}\times\left(\frac{14}{15}\right)^{15}$	$C_{15}^{1}\times\left(\frac{1}{15}\right)\times\left(\frac{14}{15}\right)^{14}$	…	$C_{15}^{k}\times\left(\frac{1}{15}\right)^{k}\times\left(\frac{14}{15}\right)^{15-k}$	…	$C_{15}^{15}\times\left(\frac{1}{15}\right)^{15}$

(2)$E(X)=1$

【例2】

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{625}$

【基础夯实】

1.A　2.B　3.A　4.A　5.$\frac{5}{16}$　6.0.7　7.$\frac{5}{32}$　8.$\frac{11}{27}$

9.

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

10.C　11.C　12.4　13.5.199×$(0.9)^{17}$

14.(1)分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$E(X)=1$

(2)$P_{n+1}=-\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$

(3)分配到餐厅甲和餐厅乙的志愿者人数分别是8和12,理由略.

【素质拓展】

15.(1)$P=\frac{208}{625}$　(2)最终获得省一等奖的可能性能达到$\frac{1}{2}$,理由略.

第2课时　超几何分布

【课时清单】

$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

【典型例题】

【例 1】(1)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)$\frac{4}{5}$

【例 2】(1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)$\frac{4}{5}$

【基础夯实】

1.B　2.A　3.A　4.C　5.$\frac{15}{38}$　6.$\frac{C_5^rC_5^{4-r}}{C_{10}^4}$,$r=0,1,2,3,4$　7.$\frac{7}{15}$　8.$\frac{6}{7}$

9.(1)

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2)

Y	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

【能力提升】

10.C　11.B　12.576

13.(1)$X\sim H(30,5,20)$　(2)$X\sim B(300,0.25\%)$　(3)$X\sim H(7,3,3)$

14.(1)$n=5,x=2$ 或 $n=6,x=3$.

(2)①当 $n=5,X=2$ 时,X 可能的取值为 0,1,2,$P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$.故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

②当 $n=6,X=3$ 时,X 可能的取值为 0,1,2.$P(X=0)=\frac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\frac{1}{5}$.故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

【素质拓展】

15.(1)$\frac{36}{125}$ (2)

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

(3)最有可能是 1 人,理由略.

7.5 正态分布

【课时清单】

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

【典型例题】

【例 1】1 人

【例 2】$P(X \leqslant -1.4)=0.08076$, $P(|X|>2.1)=0.03572$.

【基础夯实】

1.D 2.C 3.B 4.B

5.$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 0.5 0.6826 0.8413 0.1587 6.-5 7.$\frac{13}{125}$ 8.0.8185(或$\frac{1637}{2000}$)

9.(1)0.2721 (2)0.1489 (3)0.2295

【能力提升】

10.B 11.B

12.④ 13.(1)0.9970 (2)0.6915 (3)0.9332 (4)0.0209 (5)0.9753 14.最晚 1 点 6 分出发

【素质拓展】

15.(1)0.22 (2)①分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$

数学期望为 1 ②47000 条;4136 条

章末整合七

【典型例题】

题型一

【例 1】D

巩固练习

1.B 2.$\frac{11}{20}$ 3.0.645 4.$\frac{2}{5}$

题型二

【例 2】C

巩固练习

1.B

2.C

3.(1)η 的分布列为

η	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

(2)$E(\xi)=\frac{5}{2}$,$D(\xi)=\frac{15}{8}$.

4.(1)$\frac{1}{3}$　(2)分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$D(X)=\frac{2}{3}$

【章末检测】

1.B　2.A　3.C　4.D　5.C　6.D　7.A　8.D　9.A

10.$\frac{3}{5}$　11.$\frac{3}{5}$　12.②③④

13.(1)0.55　(2)$\frac{3}{11}$　(3)1.23

14.(1)①20 次　②分布列略;数学期望为$\frac{320}{11}$.　(2)$E(Y)>E(X)$

15.(1)概率为 0.025　(2)概率估计为 0.35　(3)$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$

第八章　成对数据的统计分析

8.1　成对数据的统计相关性

【课时清单】

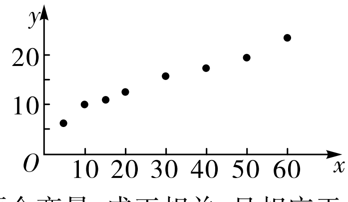
1.相关关系　2.正相关　负相关　3.散点图

4.线性相关　线性相关　非线性相关

5.样本相关系数　正相关　负相关　$-1\leqslant r\leqslant 1$　强　弱

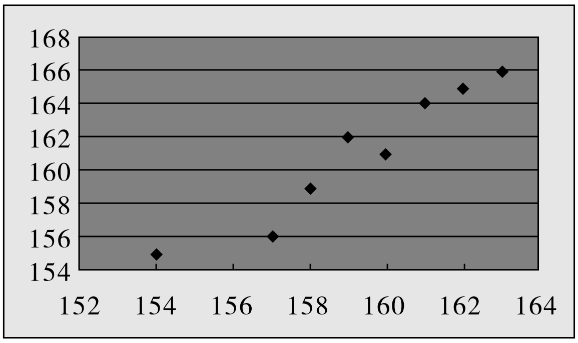
【典型例题】

【例 1】(1)如图所示散点图.



(2)结论:x 与 y 是具有相关关系的两个变量,成正相关,且相应于 n 组观测值的 n 个点大致分布在一条直线附近,x 与 y 成线性相关,其中整体上与这 n 个点最接近的一条直线最能代表 x 与 y 之间的关系.

【例2】所给数据的散点图如图所示:由图可以看出,这些点在一条直线附近,



因为 $\bar{x}=(154+157+\cdots+163)\div 8=159.25$,$\bar{y}=(155+156+\cdots+166)\div 8=161$,

$\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-8(\bar{x})^2=(154^2+\cdots+163^2)-8\times 159.25^2=59.5$,

$\sum\limits_{i=1}^{8}y_i^2-8(\bar{y})^2=(155^2+\cdots+166^2)-8\times 161^2=116$,

$\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\bar{y}=(154\times 155+\cdots+163\times 166)-8\times 159.25\times 161=80$,

所以 $r=\dfrac{80}{\sqrt{59.5\times 116}}\approx 0.963$,所以可以认为 x 与 y 之间具有较强的线性相关关系.

【基础夯实】

1.C　2.D　3.D　4.C　5.BC　6.AB

7.$D(3,10)$　8.$\dfrac{3}{4}$　9.13　正相关

【能力提升】

10.D　11.C　12.-1　13.$r=\dfrac{130}{\sqrt{20\times 1000}}\approx 0.919$

14.据公式,求得 $r\approx 0.9792$,故两个变量之间有很强的线性相关关系.

【素质拓展】

15.列出下表,并用计算器进行相关计算:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	70	74	80	78	85	92	90	95
y_i	5.1	6.0	6.8	7.8	9.0	10.2	10.0	12.0
x_iy_i	357	444	544	608.4	765	938.4	900	1140

i	9	10	11	12	13	14	15
x_i	92	108	115	123	130	138	145
y_i	11.5	11.0	11.8	12.2	12.5	12.8	13.0
x_iy_i	1058	1188	1357	1500.6	1625	1766.4	1885

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{15}x_iy_i-15\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{15}y_i^2 15\bar{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{16076.8-15\times 101\times 10.11}{\sqrt{(161125-15\times 101^2)(1628.55-15\times 10.11^2)}}\approx\frac{760.15}{879.45}\approx 0.864$$

两个变量之间有很强的线性相关关系;$x\leqslant 100$ 时随着 x 的增大 y 增大,$x>100$ 时随着 x 的增大 y 的变化不明显.

8.2　一元线性回归模型及其应用

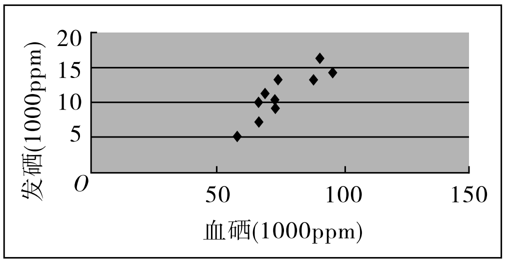
【课时清单】

1.经验回归方程　残差　2.小　好　大　差

【典型例题】

【例 1】$\hat{y}=0.817x+9.5$;126.34;0.957.

【例 2】(1)散点图如下图所示：



(2)利用计算器或计算机，求得经验回归方程 $\hat{y}=0.2358x-6.9803$

(3)当 $x=94$ 时，$\hat{y}\approx15.2$.

因此，当儿童的血硒含量为 94(1000 ppm)时，该儿童的发硒含量约为 15.2(1000ppm).

【基础夯实】

1.B　2.A　3.C　4.A

5.$\hat{y}=1.23x+0.08$　6.-121.04　7.2410.6　8.①②

9.(1)$\bar{x}=\frac{1}{5}(2+4+5+6+8)=5$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(30+40+60+50+70)=50$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=2^2+4^2+5^2+6^6+8^2=145$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=30^2+40^2+60^2+50^2+70^2=13500$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1380$，$\therefore\hat{b}=\frac{1380-5\times5\times50}{145-5\times5^2}=6.5$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=50-6.5\times5=17.5$，

$\therefore$经验回归方程为 $\hat{y}=6.5x+17.5$.

(2)$x=10$ 时，预报 y 的值为 $y=10\times6.5+17.5=82.5$.

【能力提升】

10.C　11.BC　12.$\hat{y}=-3.2x+40$　13.$R^2=1$

14.(1)$\hat{y}=6.5x-12843.8$

(2)$x=2022$ 时，代人 $\hat{y}=6.5x-12843.8$，得到 $\hat{y}=299.2$(万吨).

【素质拓展】

15.(1)设抽到相邻两个月的数据为事件 A，因为从 6 组数据中选取 2 组数据共有 15 种情况，每种情况都是等可能出现的，其中，抽到相邻两个月的数据的情况有 5 种，

所以 $P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

(2)由表中数据求得 $\bar{x}=11$，$\bar{y}=24$，由参考公式可得 $\hat{b}=\frac{18}{7}$，

再由 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$ 求得 $\hat{a}=-\frac{30}{7}$，

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=\frac{18}{7}x-\frac{30}{7}$.

(3)当 $x=10$ 时，$\hat{y}=\frac{150}{7}$，$\left|\frac{150}{7}-22\right|=\frac{4}{7}<2$；

同样,当 $x=6$ 时,$\hat{y}=\frac{78}{7}$,$\left|\frac{78}{7}-12\right|=\frac{6}{7}<2$.

所以,该小组所得经验回归方程是理想的.

8.3 列联表与独立性检验

【课时清单】

1.分类变量 2.$\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

【典型例题】

【例1】根据表中数据,$\chi^2=\frac{50\times(13\times20-10\times7)^2}{23\times27\times20\times30}\approx4.844$,

由于 $3.841<4.844<5.025$,故有95%的把握认为选修文科与性别有关系,所以认为选修文科与性别有关系出错的可能性为5%.

【例2】(1)2×2列联表为

	看电视	运动	合计
女	43	27	70
男	21	33	54
合计	64	60	124

(2)假设"休闲方式与性别无关",计算得

$\chi^2=\frac{124\times(43\times33-27\times21)^2}{70\times54\times64\times60}\approx6.201$.

因为 $x_\alpha=5.024$,所以有理由认为假设"休闲方式与性别无关"是不合理的,

即有97.5%的把握认为休闲方式与性别有关.

【基础夯实】

1.D 2.A 3.B 4.D

5.是 6.90% 7.0.01 8.99.9% 9.$k^2=36$,99.9%以上的把握

【能力提升】

10.B 11.D 12.99%

13.(1)由题意,甲、乙两班均有学生50人,

甲班优秀人数为30人,优秀率为$\frac{30}{50}=60\%$,

乙班优秀人数为25人,优秀率为$\frac{25}{50}=50\%$,

所以甲、乙两班的优秀率分别为60%和50%.

(2)

	优秀人数	非优秀人数	合计
甲班	30	20	50
乙班	25	25	50
合计	55	45	100

注意到 $\chi^2=\frac{100\times(30\times25-20\times25)^2}{50\times50\times55\times45}=\frac{100}{99}\approx1.010$,

所以由参考数据知，没有 75％的把握认为“加强‘语文阅读理解’训练对提高‘数学应用题’得分率”有帮助.

14.(1)调查的 500 位老年人中有 70 位需要志愿者提供帮助，因此该地区老年人中需要帮助的老年人的比例的估计值为$\frac{70}{500}=14\%$.

(2)$\chi^2=\frac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967$.

由于 $9.967>6.635$，则有 99％的把握认为该地区的老年人是否需要帮助与性别有关.

(3)由(2)的结论知，该地区的老年人是否需要帮助与性别有关，并且从样本数据能看出该地区男性老年人与女性老年人中需要帮助的比例有明显差异，因此在调查时，先确定该地区老年人中男，女的比例，再把老年人分成男，女两层并采用分层抽样方法比采用简单随即抽样方法更好.

【素质拓展】

15.(1)男生 22　28　女生 14　32　合计 20　40

(2)$\chi^2=\frac{60\times(6\times18-22\times14)^2}{40\times20\times32\times28}=3.348>2.706$，

$P(\chi^2\geqslant2.706)=0.10$.

因此在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为“性别与测评的结果有关”.

(3)由(2)可知性别可能对是否优秀有影响，所以采用分层抽样按男女生的比例抽取一定的学生，这样得到的结果对学生在该维度的总体表现情况会比较符合实际情况.

章末整合八

【典型例题】

【例 1】(1)$r=0.995$，所以 y 与 x 有线性相关关系

(2)$y=0.7286x-0.8571$

(3)x 小于等于 14.9013

巩固练习

1.(1)$\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7+8+9}{7}=6$，$\bar{y}=\frac{66+69+73+81+89+90+91}{7}\approx79.86$.

(2)略

(3)由散点图知，y 与 x 有线性相关关系，

设经验回归方程 $\hat{y}=bx+a$，$b=\frac{3487-7\times6\times\frac{559}{7}}{280-7\times36}=\frac{133}{28}=4.75$，

$a=79.86-6\times4.75=51.36$.∴经验回归方程 $\hat{y}=4.75x+51.36$.

【例 2】利用 χ^2 对其进行独立性检验.

假设“打鼾与患心脏病无关”

计算

$$\chi^2=\frac{n\,(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{1633\times(30\times1355-24\times224)^2}{254\times1379\times1579\times54}=68.03.$$

因为 $\chi^2>10.828$，所以有 99.9％以上的把握认为打鼾与患心脏病有关.

巩固练习

99.9%

【章末检测】

1.D 2.B 3.C 4.D 5.C 6.D 7.A 8.D 9.A

10.5% 11.(−3,4) 12.3.7

13.能.(提示:先假设二者无关,代入公式得 $\chi^2 \approx 84 > 10.828$)

14.先假设无关,$\chi^2 \approx 27.1$,有 99.9%的把握认为有关系.

15.(1)$\hat{y} = 1.23x + 0.08$ (2)12.38