参考答案及解析

第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

第1课时　空间向量及其线性运算

【课时清单】

1.(1)大小　方向　(2)大小　(3)有向线段　(4)长度为0　模为1　相等　相反　平行或重合　$\mathbf{0}/\!/\boldsymbol{a}$　相同　相等　3.(1)$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$　4.(2)$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

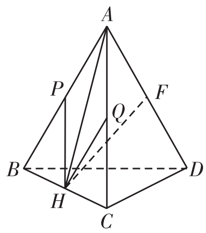
【典型例题】

【例1】解　(1)因为 G 是$\triangle BCD$ 的重心,所以$|\overrightarrow{GE}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BE}|$,所以$\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GE}$,又因为$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EF}$,

所以由向量的加法法则,可知$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

从而$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AF}$.

(2)如图所示,分别取 AB,AC 的中点 P,Q,连接 PH,QH,



则四边形 $APHQ$ 为平行四边形,且有$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$,而$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AH}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$,

所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

【例2】证明　因为 M 在 BD 上,且 $BM=\frac{1}{3}BD$,所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

同理$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线，根据向量共面的充要条件可知$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$共面.

【基础夯实】

1. C　2. C　3. A　4. C

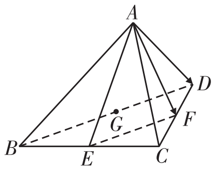
5. $\overrightarrow{OC}$

6. -1　**【解析】**由题意知 A，B，C，D 共面的充要条件是：对空间任意一点 O，存在实数 x_1，y_1，z_1，使得 $\overrightarrow{OA}=x_1\overrightarrow{OB}+y_1\overrightarrow{OC}+z_1\overrightarrow{OD}$，且 $x_1+y_1+z_1=1$，因此，$2x+3y+4z=-1$.

7. 2

8. (1)AC_1　(2)BD_1　**【解析】**(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$；(2)$\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD_1}$.

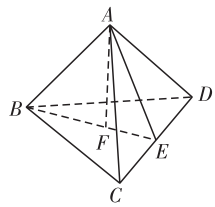
9. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
因为 E，F，G 分别为 BC，CD，DB 的中点，
所以$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GD}$.
所以$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}$.
故所求向量为$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$，如图所示.



【能力提升】

10. C

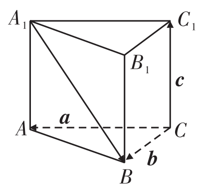
11. D　**【解析】**因为 E 是棱 CD 的中点，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，



所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

12. $-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　**【解析】**如图，$\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{B_1A_1}$
$=\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{CC_1}-(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})$
$=-\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



13. (1)$\overrightarrow{A_1A}$　(2)$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$　**【解析】**(1)$\overrightarrow{A_1O}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1O}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{A_1O}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A_1A}$.

(2)因为$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

所以$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

14. 证明　$\because\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1M}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

$\therefore\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1B}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1M}$，

$\therefore \overrightarrow{A_1N}$与$\overrightarrow{A_1B}$,$\overrightarrow{A_1M}$共面.

【素质拓展】

15. 证明　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$,

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$

$=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

$=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BG}$,

$\therefore \overrightarrow{BN}\parallel\overrightarrow{BG}$.

又 $BN\cap BG=B$,$\therefore B,G,N$ 三点共线.

第 2 课时　空间向量的数量积运算

【课时清单】

1.(1)$\angle AOB$　(2)$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$　2.$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　3.(1)$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$　(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面β上的投影向量

【典型例题】

【例1】解　(1)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\rangle=\frac{1}{2}\cos 60^\circ=\frac{1}{4}$.

(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{2}$.

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{1}{2}\cos 120^\circ=-\frac{1}{4}$.

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$

$=\cos 60^\circ-\cos 60^\circ=0$.

【例2】证明　设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,

由题意得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$,$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$,

因为$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,所以$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,又$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\frac{1}{4}(\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{b}^2)=0$,

所以$OG\perp BC$.

【基础夯实】

1. D 【解析】$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=2\times4-2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$.

2. B 【解析】设向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,所以$\theta=120°$,
则两个方向向量对应的直线的夹角为$180°-120°=60°$.

3. B 【解析】由题意可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$,$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,
所以$(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)=0$,所以$2k-12=0$,所以$k=6$.

4. A 【解析】可用排除法.因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以$PA\perp CD$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,排除D.
又由$AD\perp AB$,$AD\perp PA$可得$AD\perp$平面PAB,所以$AD\perp PB$,所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,
同理$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,排除B,C,故选A.

5. $\frac{1}{4}a^2$ 【解析】$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}\left(a\times a\times\frac{1}{2}+a\times a\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a^2$.

6. 22 【解析】$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+19^2=24^2$,
$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=46$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=530-46=484$,故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=22$.

7. 0° 180° 90° 【解析】由题意得$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OC}$方向相同,是在同一条直线AC上,故$\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}\rangle=0°$;$\overrightarrow{C_1O_1}$可平移到直线$AC$上,与$\overrightarrow{OC}$方向相反,故$\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{C_1O_1}\rangle=180°$;由题意知$OO_1$是正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的高,故$OO_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$,所以$OO_1\perp A_1B_1$,故$\langle\overrightarrow{OO_1},\overrightarrow{A_1B_1}\rangle=90°$.

8. 解 不妨设正方体的棱长为1,
设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,
则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$,$\overrightarrow{A_1B}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.
$\therefore\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
$=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$,
而$|\overrightarrow{A_1B}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,
$\therefore\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,
$\because 0°\leqslant\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle\leqslant180°$,
$\therefore\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$.
$\therefore$异面直线A_1B与AC所成的角为$60°$.

9. (1)证明 $\because\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$,
$\therefore\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{PC}|\cdot\cos 60°+|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{PC}|\cos 120°$
$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2=0$.

$\therefore \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{PC}, \therefore BD \perp PC$.

(2)解　$\because \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PC}$

$=a^2+a^2+a^2+0+2a^2\cos 60^\circ+2a^2\cos 60^\circ=5a^2$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PC}|=\sqrt{5}a$.

【能力提升】

10. C　**【解析】**$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$,

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=0+1^2+0=1$,

又$|\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{CD}|=1. \therefore \cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{ab}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{1}{2\times 1}=\dfrac{1}{2}$.

$\because$异面直线所成的角是锐角或直角，$\therefore a$ 与 b 所成的角是 60°.

11. A　**【解析】**$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}, \therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{0}, \therefore \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3^2+1^2+4^2}{2}=-13$.

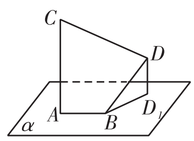
12. 1　**【解析】**由于$\overrightarrow{AO_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1O_1}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1})=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，而$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

则$\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\left[\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\right)\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=1$.

13. 锐角　**【解析】**在$\triangle BCD$ 中，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}^2>0, \therefore B$ 为锐角，

同理，C,D 均为锐角.

14. 解　由 $AC\perp\alpha$，可知 $AC\perp AB$,



过点 D 作 $DD_1\perp\alpha$,

D_1为垂足，连接 BD_1,

则$\angle DBD_1$为 BD 与α 所成的角，

即$\angle DBD_1=30^\circ$,

所以$\angle BDD_1=60^\circ$,

因为 $AC\perp\alpha, DD_1\perp\alpha$，所以 $AC\parallel DD_1$,

所以$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}\rangle=60^\circ$，所以$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=120^\circ$.

又$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,

所以$|\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

因为 $BD\perp AB, AC\perp AB$,

所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

故$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=24^2+7^2+24^2+2\times 24\times 24\times\cos 120^\circ=625$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=25$，即 CD 的长为 25.

【素质拓展】

15.1　2　$2\sqrt{2}$　**【解析】**$|\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)|^2=\boldsymbol{b}^2+(x\boldsymbol{e}_1)^2+(y\boldsymbol{e}_2)^2-2x\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1-2y\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2+2xy\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$,

$\because \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{2}, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=2, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{5}{2}, \therefore |\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)|^2=x^2+y^2-4x-5y+xy+\boldsymbol{b}^2=x^2+(y-4)x+$

$y^2-5y+\boldsymbol{b}^2=\left(x+\dfrac{y-4}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y-2)^2-7+\boldsymbol{b}^2$,

$\therefore$当且仅当$x+\dfrac{y-4}{2}=0,y-2=0$时,$|\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)|^2$的值最小,其最小值为1.

$\therefore\begin{cases}x_0+\dfrac{y_0-4}{2}=0,\\y_0-2=0,\\-7+|\boldsymbol{b}|^2=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}x_0=1,\\y_0=2,\\|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}.\end{cases}$

1.2 空间向量基本定理

第1课时 空间向量基本定理(一)

【课时清单】

1.不共面 基底 2.(1)两两垂直 (2)$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

【典型例题】

【例1】解 假设$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$共面,

则存在实数λ,μ使得$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$,

$\therefore\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=\lambda(-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+\mu(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$

$=(-3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2+(2\lambda-\mu)\boldsymbol{e}_3$,

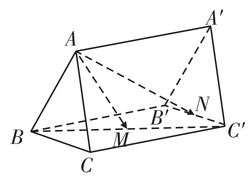
$\because\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$不共面,

$\therefore\begin{cases}-3\lambda+\mu=1,\\\lambda+\mu=2,\\2\lambda-\mu=-1\end{cases}$ 此方程组无解,

$\therefore\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$不共面,

$\therefore\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$可以作为空间的一个基底.

【例2】解 连接$A'N$,



$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'})$

$=\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

【基础夯实】

1. B 【解析】当非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面时,$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以当基底,否则不能当基底,

当$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为基底时,一定有$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为非零向量.

因此$p\nRightarrow q,q\Rightarrow p$.

2. C 【解析】对于选项A,由$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)\Rightarrow M,A,B,C$四点共面,知$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$共面;对于选项B,D,易知$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$共面,故选C.

3. D 【解析】$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

4. C 【解析】假设 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{p}+k_2\boldsymbol{q}$，即 $\boldsymbol{c}=k_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+k_2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得 $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}+(k_1-k_2)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=0$，这与 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底矛盾，故 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 是空间的一组基底，故选 C.

5. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 【解析】$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1})=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

6. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ 【解析】设 AC 的中点为 F，则 $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

7. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC})$ 【解析】$\because 2\overrightarrow{AC_1}=2\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC})$.

8. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$ 【解析】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.

9. (1) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.

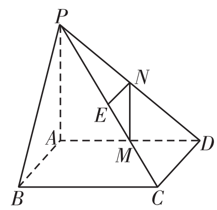
(2) $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}$

$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC'})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OO'})$

$=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$.

【能力提升】

10. D 【解析】取 PC 的中点 E，连接 NE，

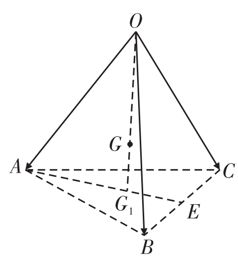


则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$，

比较知 $x=-\frac{2}{3}$，$y=-\frac{1}{6}$，$z=\frac{1}{6}$，故选 D.

11. A 【解析】如图所示，连接 AG_1 交 BC 于点 E，则点 E 为 BC 的中点，



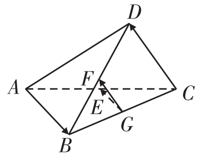
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，

$\overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，

$\because\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{GG_1}=3(\overrightarrow{OG_1}-\overrightarrow{OG})$，

$\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG_1}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_1})=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，故选 A.

12. $3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$ 【解析】如图所示，取 BC 的中点 G，连接 EG，FG，



则$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})=$

$3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$.

13. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$ 【解析】$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

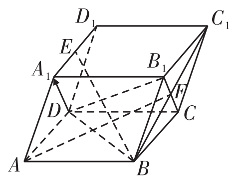
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left[\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\right]$

$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

14. 解 (1)$\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.



(2)$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DA_1}$.

如图，连接 DA_1，则$\overrightarrow{DA_1}$即为所求.

【素质拓展】

15.C

第2课时 空间向量基本定理(二)

【课时清单】

1.(1)$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ (2)$p=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 2.(1)$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ (2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 3.$\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$

【典型例题】

【例1】证明 因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,

所以$\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$共面，所以 A，E，C_1，F 四点共面.

【例2】(1)证明 因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$,

又 DA，DB，DC 两两垂直，且 $DB=DC=DA=2$，

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，故 $AE\perp BC$.

(2)解 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{DC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^2=2$,

由$\overrightarrow{AE}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DA}^2=6$,得$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{6}$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故直线 AE 与 DC 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

【基础夯实】

1. D **【解析】**根据“$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,若 $x+y+z=1$,则点 M 与点 A,B,C 共面”,

因为 $2+(-1)+(-1)=0\neq1$,$1+1+1=3\neq1$,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\neq1$,$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$,故 D 满足要求.

2. D **【解析】**因为$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

同理$\overrightarrow{SR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$,

所以四边形 $PQRS$ 为平行四边形.

又$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,所以$|\overrightarrow{PS}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$,即 $PS=\frac{1}{2}BD$.

又$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$,故 $PQ=\frac{1}{2}AC$,而 $AC=BD$,

所以 $PS=PQ$,故四边形 $ABCD$ 为菱形.

3. A **【解析】**根据题意,可得$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{GF}=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})=$

$(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC})\cdot(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}^2-\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}^2=\frac{1}{2}\times4-1-\frac{1}{4}\times4=0$,

从而得到$\overrightarrow{A_1E}$和$\overrightarrow{GF}$垂直,故其所成角的余弦值为 0.

4. C **【解析】**设$|\overrightarrow{BB_1}|=\boldsymbol{m}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{CA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{C_1B}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^2=\sqrt{2}\boldsymbol{m}\cdot\sqrt{2}\boldsymbol{m}\cos\frac{\pi}{3}+0-0-\boldsymbol{m}^2=0$,

$\therefore\overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{C_1B}$,$\therefore$ CA_1 与 C_1B 所成的角的大小是 $90°$.

5. $\sqrt{13}$ **【解析】**$\because$二面角 $\alpha-l-\beta$ 等于$\frac{2\pi}{3}$,$AC\perp l$,$BD\perp l$,所以$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$,

$\because\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,

$\therefore\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=2^2+1^2+2^2+0+0+2\times2\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=13$.即 $CD=\sqrt{13}$.

6. $-\frac{3}{2}$ **【解析】**因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=0$,所以 $\boldsymbol{a}^2+(1+\lambda)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}^2=0$,

所以 $18+(1+\lambda)\times3\sqrt{2}\times4\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})+16\lambda=0$,解得 $\lambda=-\frac{3}{2}$.

7. $\frac{\pi}{3}$ **【解析】**依题意可知 $CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=\sqrt{2}$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos 45°=1$.

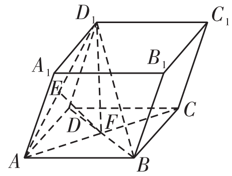
设直线 AB 与 CD 所成角为 α，则 $\cos\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，故 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

8. $\sqrt{2}$　**【解析】**$\because\ \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，

$\therefore\ \overrightarrow{AC_1}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=1+1+1+2\times1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\times1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\times1\times1\times\dfrac{1}{2}=2$，$\therefore AC_1=\sqrt{2}$.

9. 解　(1)如图，连接 AC，EF，D_1F，BD_1，



$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{D_1A}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$.

(2)$\overrightarrow{D_1F}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{D_1B})=\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{D_1B})=\dfrac{1}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$，$z=-1$.

【能力提升】

10. A　**【解析】**连接 AG，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}+z\,\overrightarrow{OC}$，$\therefore x=y=z=\dfrac{1}{3}$，则 $\log_3|xyz|=\log_3\dfrac{1}{27}=-3$.

11. ABC　**【解析】**对于 A，$\because\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\therefore 3\,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{AB}$，

$\therefore 2\,\overrightarrow{AD}-2\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$，$\therefore 2\,\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore 3\,\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$，

即 $3\,\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$，故 A 正确；

对于 B，若 Q 为$\triangle ABC$ 的重心，则$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\mathbf{0}$，

$\therefore 3\,\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=3\,\overrightarrow{PQ}$，

$\therefore 3\,\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，即$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}$，故 B 正确；

对于 C，$\because\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\therefore(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{PC})=0$，$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，故 C 正确；

对于 D，$\because\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$，

$\therefore|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$，$\because|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|=2\sqrt{2}$.

$\therefore|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$，故 D 错误，故选 ABC .

12. $[0,2]$　**【解析】**设球心为 O，则

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

$=\overrightarrow{PO}^2-1$，所以当点 P 为正方体的顶点时$|\overrightarrow{PO}|$最大，最大值为$\sqrt{3}$；所以当点 P 为正方体与内切球的切点时$|\overrightarrow{PO}|$最小，最小值为 1，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的取值范围为$[0,2]$.

13. ①②　**【解析】**以顶点 A 为端点的三条棱长都相等，它们彼此的夹角都是 $60°$，

可设棱长为 1,则$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$,

$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=1+1+1+3\times2\times\frac{1}{2}=6$,

而 $2(\overrightarrow{AC})^2=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=2(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})$

$=2\left(1+1+2\times\frac{1}{2}\right)=2\times3=6$,所以①正确.

$\overrightarrow{AC_1}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2=0$,所以②正确.

向量$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{A_1D}$,

显然$\triangle AA_1D$ 为等边三角形,则$\angle AA_1D=60^\circ$.

所以向量$\overrightarrow{A_1D}$与$\overrightarrow{AA_1}$的夹角是 120°,向量$\overrightarrow{B_1C}$与$\overrightarrow{AA_1}$的夹角是 120°,则③不正确.

又$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

则$|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})^2}=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2}=\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=1$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以④不正确.

故①②正确.

14. (1)解　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1E}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$,

所以$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)=\frac{1}{2}$.

又$|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{CE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AF}\rangle=\frac{2}{5}$.

(2)证明　$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$,

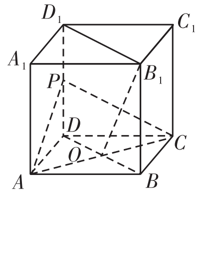
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED_1}+\overrightarrow{D_1F}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})$,

所以$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,所以$\overrightarrow{BD_1}\perp\overrightarrow{EF}$.

【素质拓展】

15.证明　如图,连接 BD,则 BD 过点 O,令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,设正方体的棱长为 1,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,

且$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,



$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB_1}$,即 $AC\perp OB_1$.

又$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,

$\therefore\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)\cdot\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$,$\therefore\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{AP}$,

即$OB_1\perp AP$.又$AC\cap AP=A$,$AC,AP\subset$平面PAC,$\therefore OB_1\perp$平面PAC.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

第1课时 空间直角坐标系

【课时清单】

1.(1)①x轴、y轴、z轴 空间直角坐标系$Oxyz$ ②O 每两条坐标轴 Oxy Oyz Ozx (2)x轴 y轴 z轴 2.有序实数组(x,y,z) $A(x,y,z)$ 3.$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$

【典型例题】

【例1】解 (1)由于点P关于x轴对称后,它在x轴的分量不变,在y轴,z轴的分量变为原来的相反数,所以对称点坐标为$P_1(-2,-1,-4)$.

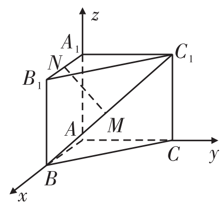
(2)由点P关于xOy平面对称后,它在x轴,y轴的分量不变,在z轴的分量变为原来的相反数,所以对称点的坐标为$P_2(-2,1,-4)$.

(3)设对称点为$P_3(x,y,z)$,则点M为线段PP_3的中点,

由中点坐标公式,可得$x=2\times2-(-2)=6$,

$y=2\times(-1)-1=-3$,$z=2\times(-4)-4=-12$,所以点P_3的坐标为$(6,-3,-12)$.

【例2】解 建立如图所示的空间直角坐标系,设$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$,$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$,$\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$,



$\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(4,0,0)$,

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(0,4,4)$,

$\therefore\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=-4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(-4,4,4)$.

【基础夯实】

1. C 【解析】点B_1到三个坐标平面的距离都为1,易知其坐标为$(1,1,1)$,故选C.
2. C 【解析】$\because$点A的横坐标为0,$\therefore$点$A(0,-2,3)$在yOz平面内.
3. C 【解析】当三个坐标均相反时,两点关于坐标原点对称.
4. B 【解析】由于垂足在平面yOz上,所以纵坐标,竖坐标不变,横坐标为0.
5. $\left(0,-\frac{1}{4},1\right)$ 【解析】$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1E}=\boldsymbol{k}-\frac{1}{4}\boldsymbol{j}=\left(0,-\frac{1}{4},1\right)$.
6. 0 【解析】点$P(1,2,-1)$在xOz平面内的射影为$B(1,0,-1)$,$\therefore x=1,y=0,z=-1$,
   $\therefore x+y+z=1+0-1=0$.
7. $(4,0,-1)$ 【解析】设中点坐标为(x_0,y_0,z_0),
   则$x_0=\frac{3+5}{2}=4$,$y_0=\frac{2-2}{2}=0$,$z_0=\frac{-4+2}{2}=-1$,$\therefore$中点坐标为$(4,0,-1)$.
8. $(5,4,1)$ 【解析】设B点的坐标为(x,y,z),则有$\frac{x+3}{2}=4$,$\frac{y+2}{2}=3$,$\frac{z+1}{2}=1$,解得$x=5,y=4,z=1$,故

B 点的坐标为$(5,4,1)$.

9. 解　正方体 $DABC-D'A'B'C'$ 的棱长为 a，且 E,F,G,H,I,J 分别是棱 $C'D',D'A',A'A,AB,BC,CC'$ 的中点，∴正六边形 $EFGHIJ$ 各顶点的坐标为 $E\left(0,\frac{a}{2},a\right),F\left(\frac{a}{2},0,a\right),G\left(a,0,\frac{a}{2}\right),H\left(a,\frac{a}{2},0\right)$, $I\left(\frac{a}{2},a,0\right),J\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$.

【能力提升】

10. B　11. A

12. $(1,1,1)$　$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$　【解析】由题意知 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{p}$ 在基底$\{2\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$(1,1,1)$.

设向量 $\boldsymbol{p}$ 在基底$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$(x,y,z)$，则

$\boldsymbol{p}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+z\boldsymbol{c}=(x+y)\boldsymbol{a}+(x-y)\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$,

又∵$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，∴$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1,\\z=-1,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3}{2},y=\frac{1}{2},z=-1$,

∴$\boldsymbol{p}$ 在基底$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$.

13. $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$　【解析】由题意知 $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$.由重心坐标公式得点 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$.

14. 解　由题意知，点 B 的坐标为$(1,1,0)$.由点 A 与点 B 关于 x 轴对称，得 $A(1,-1,0)$,

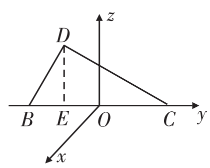
由点 C 与点 B 关于 y 轴对称，得 $C(-1,1,0)$，由点 D 与点 C 关于 x 轴对称，得 $D(-1,-1,0)$.

又 $P(0,0,2)$，E 为 AP 的中点，F 为 PB 的中点，

所以由中点坐标公式可得 $E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

【素质拓展】

15.解　过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为 E.



在 Rt△BDC 中，$\angle BDC=90°$，$\angle DCB=30°$，$BC=2$，得$|\overrightarrow{BD}|=1,|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$,

∴$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{CD}|\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{OB}|-|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{OB}|-|\overrightarrow{BD}|\cos 60°=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，∴点 D 的坐标为$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

第 2 课时　空间向量运算的坐标表示

【课时清单】

1.$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$　$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$　$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$　$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

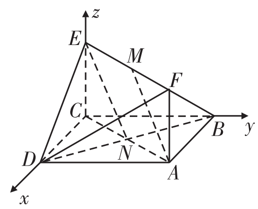
2.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$　$\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ ，

$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\cdot\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$

3.$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【典型例题】

【例1】证明　(1)如图,建立空间直角坐标系,



设 $AC\cap BD=N$,连接 NE,

则点 N,E 的坐标分别为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$(0,0,1)$.

$\therefore\overrightarrow{NE}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

又点 A,M 的坐标分别是$\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

$\therefore\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.$\therefore\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AM}$.

又 NE 与 AM 不共线,$\therefore NE/\!/AM$.

又$\because NE\subset$平面 BDE,$AM\not\subset$平面 BDE,

$\therefore AM/\!/$平面 BDE.

(2)由(1)知$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

$\because D(\sqrt{2},0,0)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$,

$\therefore\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1)$,$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0$,$\therefore\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF}$.

同理,$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$.

又 $DF\cap BF=F$,且 $DF\subset$平面 BDF,$BF\subset$平面 BDF,

$\therefore AM\perp$平面 BDF.

【例2】解　由题意知 $A(1,0,1)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$D(1,1,1)$.

(1)由 $PB=2PA$ 得 $P\left(1,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,所以 $M\left(-1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$,所以 $|PM|=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

(2)当点 P 是面对角线 AB 的中点时,$P\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,点 Q 在面对角线 DC 上运动,

设点 $Q(a,1,a)$,$a\in[0,1]$,

则 $|PQ|=\sqrt{(a-1)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2a^2-3a+\frac{3}{2}}=\sqrt{2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{8}}$,

所以当 $a=\frac{3}{4}$时,$|PQ|$取得最小值$\frac{\sqrt{6}}{4}$,此时点 $Q\left(\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}\right)$.

【基础夯实】

1. A　【解析】$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-(-1,2,-1)=(1,-2,1)-(-1,2,-1)=(2,-4,2)$.

2. A　【解析】设点 C 的坐标为 (x,y,z),

则$\overrightarrow{OC}=(x,y,z)$,又$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,-4)$,$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$,

所以 $x=-\frac{6}{5}$,$y=-\frac{4}{5}$,$z=-\frac{8}{5}$,所以 $C\left(-\frac{6}{5},-\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$.

3. C　【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2+2k,5)$,且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-k,2)$,

又因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行，则 $2(2+2k)-5(2-k)=0$，解得 $k=\frac{2}{3}$.

4. C 【解析】$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-3)=-\boldsymbol{a}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=7$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-7$，

而 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=-\frac{1}{2}$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=120^\circ$.

5. $\sqrt{29}$ 【解析】由已知，可得 $C_1(0,2,3)$，所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{29}$.

6. 0 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=(m-1,1,m-2n-3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-2,6)$，

由题意得 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{m-1}{2}=\frac{1}{-2}=\frac{m-2n-3}{6}$，所以 $m=0,n=0,m+n=0$.

7. $\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{13},-\frac{4}{13},-\frac{12}{13}\right)$

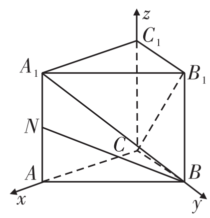
解析设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由题意有 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ |\boldsymbol{a}|=1,\end{cases}$

代入坐标可解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{13},\\ y=\frac{4}{13},\\ z=\frac{12}{13};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{3}{13},\\ y=-\frac{4}{13},\\ z=-\frac{12}{13}.\end{cases}$

8. $(-1,3,3)$ 【解析】设点 $P(x,y,z)$，则由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，得 $(x+1,y-3,z-1)=2(-1-x,3-y,4-z)$，

则 $\begin{cases}x+1=-2-2x,\\ y-3=6-2y,\\ z-1=8-2z,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\\ z=3,\end{cases}$ 即 $P(-1,3,3)$.

9. 解 如图，以 C 为坐标原点，CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $Cxyz$.



(1)依题意得 $B(0,1,0)$，$N(1,0,1)$，

$\therefore|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$线段 BN 的长为 $\sqrt{3}$.

(2)依题意得 $A_1(1,0,2)$，$C(0,0,0)$，$B_1(0,1,2)$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{B_1C}=(0,-1,-2)$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=(-1)\times0+1\times(-1)+(-2)\times(-2)=3$.

又 $|\overrightarrow{A_1B}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{5}$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{B_1C}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

又异面直线所成的角为锐角或直角，

故 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

【能力提升】

10. D 【解析】P 关于 xOy 平面对称的点为 $P'(1,1,-1)$，则光线所经过的距离为

$|P'Q|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(6+1)^2}=\sqrt{57}$.

11. C 【解析】设$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$,

则$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP}=(1-\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)$,

$\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OP}=(2-\lambda,1-\lambda,2-2\lambda)$,

所以$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(1-\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)\cdot(2-\lambda,1-\lambda,2-2\lambda)=2(3\lambda^2-8\lambda+5)=2\left[3\left(\lambda-\frac{4}{3}\right)^2\right]-\frac{1}{3}$.

所以当$\lambda=\frac{4}{3}$时,$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$取得最小值,此时$\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$,即点$Q$的坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$.

12. $\left(\frac{33}{7},-\frac{15}{7},-3\right)$ 【解析】因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

即$1\times3+5\times1+(-2)\times z=0$,所以$z=4$.

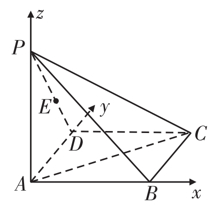
因为$BP\perp$平面ABC,所以$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{BC}$,即

$\begin{cases}1\times(x-1)+5y+(-2)\times(-3)=0,\\3(x-1)+y+(-3)\times4=0,\end{cases}$解得$x=\frac{40}{7}$,$y=-\frac{15}{7}$,于是$\overrightarrow{BP}=\left(\frac{33}{7},-\frac{15}{7},-3\right)$.

13. 1 【解析】由A,B,C,P四点的坐标,知$\triangle ABC$为直角三角形,$AB\perp AC$,$PA\perp$底面ABC.由空间两点间的距离公式,得$AB=1$,$AC=2$,$PA=3$,

所以三棱锥$P-ABC$的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times3=1$.

14. 解 (1)由题意,建立如图所示的空间直角坐标系,



则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,2)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,从而$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-2)$.

设$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{PB}$的夹角为θ,则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

$\therefore AC$与PB所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

(2)由于N点在侧面PAB内,故可设N点的坐标为$(x,0,z)$,则$\overrightarrow{NE}=\left(-x,\frac{1}{2},1-z\right)$,

由$NE\perp$平面PAC可得,

$\begin{cases}\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\left(-x,\frac{1}{2},1-z\right)\cdot(0,0,2)=0,\\\left(-x,\frac{1}{2},1-z\right)\cdot(\sqrt{3},1,0)=0,\end{cases}$

化简得$\begin{cases}z-1=0,\\-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{6},\\z=1,\end{cases}$

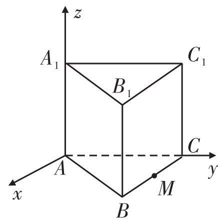
即N点的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{6},0,1\right)$时,$NE\perp$平面$PAC$.

【素质拓展】

15.解 以A点为原点,建立如图所示的空间直角坐标系$Axyz$.

由题意知$A(0,0,0)$,$C(0,2,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$B_1(\sqrt{3},1,2)$,$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

又点N在CC_1上,可设$N(0,2,m)(0\leqslant m\leqslant2)$,



则$\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},m\right)$,

所以$|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{m^2+1}$,

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=2m-1$.

如果异面直线AB_1和MN所成的角等于45°,那么向量$\overrightarrow{AB_1}$和$\overrightarrow{MN}$的夹角等于45°或135°.

又$\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MN}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{2m-1}{2\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+1}}$.

所以$\dfrac{2m-1}{2\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+1}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得$m=-\dfrac{3}{4}$,

这与$0\leqslant m\leqslant 2$矛盾.

所以在CC_1上不存在点N,使得异面直线AB_1和MN所成的角等于45°.

1.4 空间向量的应用

第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示

【课时清单】

2.$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$　3.(1)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$　(2)$\{P|\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$

【典型例题】

【例1】(1)A　(2)(不唯一)(0,0,1)　(0,1,1)　**【解析】**(1)∵$A(0,y,3)$和$B(-1,2,z)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,2-y,z-3)$,

∵直线l的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$,故设$\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{m}$.

∴$-1=2k$,$2-y=-k$,$z-3=3k$.

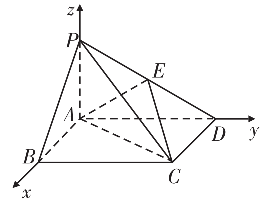
解得$k=-\dfrac{1}{2}$,$y=z=\dfrac{3}{2}$.∴$y-z=0$.

(2)(0,0,1)　(0,1,1)　**【解析】**∵$DD_1/\!/AA_1$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$,直线$DD_1$的一个方向向量为(0,0,1);$BC_1/\!/AD_1$,$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,故直线$BC_1$的一个方向向量为(0,1,1).

【例2】解　因为$PA\perp$平面$ABCD$,底面$ABCD$为矩形,

所以AB,AD,AP两两垂直.

如图,以A为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AP}$的方向分别为x轴,y轴,z轴的正方向,建立空间直角坐标系,



则$D(0,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,1)$,$E\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$C(1,\sqrt{3},0)$,

于是$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.$\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面ACE的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}x=-\sqrt{3}y,\\z=-\sqrt{3}y.\end{cases}$

令$y=-1$,则$x=z=\sqrt{3}$.

所以平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$.

【基础夯实】

1. A 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$\begin{cases}2x^2=2,\\6x=-6,\end{cases}$解得 $x=-1$.

2. D 【解析】$\because\alpha\parallel\beta$,$\therefore\beta$ 的法向量与 α 的法向量平行,
又$\because(4,-2,-2)=2(2,-1,-1)$,故选 D.

3. C
解析$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$\therefore BD\perp PA$.
又 $AC\perp BD$,$\therefore BD\perp$平面 PAC,$\therefore PC\perp BD$.
故选项 B 成立,选项 A 和 D 显然成立.故选 C.

4. D 【解析】$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$.
设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则有$\begin{cases}-x+y=0,\\-x+z=0,\end{cases}$
取 $x=-1$,则 $y=-1$,$z=-1$.
故平面 ABC 的一个法向量是$(-1,-1,-1)$.

5. AC 【解析】$\because\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$,$AB\perp AD$,$AA_1\perp AD$,又 $AB\cap AA_1=A$,
$\therefore AD\perp$平面 ABB_1A_1,$\therefore$A 正确;
$\because\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$,而$(1,1,1)\cdot\overrightarrow{CD}=-1\neq0$,
$\therefore(1,1,1)$不是平面 B_1CD 的法向量,$\therefore$ B 不正确;
$\because\overrightarrow{B_1C}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{CD_1}=(-1,0,1)$,$(1,1,1)\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$,$(1,1,1)\cdot\overrightarrow{CD_1}=0$,$B_1C\cap CD_1=C$,
$\therefore(1,1,1)$是平面 B_1CD_1 的一个法向量,$\therefore$C 正确;
$\because\overrightarrow{BC_1}=(0,1,1)$,而$\overrightarrow{BC_1}\cdot(0,1,1)=2\neq0$,
$\therefore(0,1,1)$不是平面 ABC_1D_1 的法向量,即 D 不正确.

6. $(2,1,0)$(答案不唯一) 【解析】$\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(2,-4,2)$,
设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}x-2y=0,\\2x-4y+2z=0,\end{cases}$
令 $y=1$,得 $x=2$,$z=0$,
故平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,0)$.

7. $\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{\pi}{3}$ 【解析】由 $OP\perp OQ$,得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,即$(2\cos x+1)\cdot\cos x+(2\cos 2x+2)\cdot(-1)=0$.
$\therefore\cos x=0$ 或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$.$\because x\in[0,\pi]$,$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$或 $x=\dfrac{\pi}{3}$.

8. ①②③ 【解析】$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$,故①正确;$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,故②正确;直线 $AD\perp$平面 ABB_1A_1,$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$,故③正确;向量$\overrightarrow{AC_1}$的坐标为$(1,1,1)$,与平面 B_1CD 不垂直,$\therefore$④错.

9. 解 (1)$\because B(2,0,0)$,$C(0,2,-2)$,
$\therefore\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$,即$(-2,2,-2)$为直线 BC 的一个方向向量.
(2)由题意$\overrightarrow{AM}=(x-2,y-2,z-2)$,
$\because\overrightarrow{BC}\perp$平面 α,$AM\subset\alpha$,$\therefore\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AM}$,$\therefore(-2,2,-2)\cdot(x-2,y-2,z-2)=0$.

$\therefore -2(x-2)+2(y-2)-2(z-2)=0$. 化简得 $x-y+z-2=0$.

【能力提升】

10. B 【解析】要判断点 P 是否在平面 α 内,只需判断向量$\overrightarrow{PA}$与平面 α 的法向量 n 是否垂直,即$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}$ 是否为 0,因此,要对各个选项进行检验.对于选项 A,$\overrightarrow{PA}=(1,0,1)$,则$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=(1,0,1)\cdot(3,1,2)=5\neq 0$,故排除 A;对于选项 B,$\overrightarrow{PA}=\left(1,-4,\frac{1}{2}\right)$,则$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=\left(1,-4,\frac{1}{2}\right)\cdot(3,1,2)=0$,故 B 正确;同理可排除 C,D.故选 B.

11. D 【解析】因为 $\overrightarrow{PM}=(0,2,4)$,直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量,则必须满足 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\end{cases}$ 把选项代入验证,只有选项 D 不满足,故选 D.

12. $2:3:(-4)$ 【解析】由已知得,$\overrightarrow{AB}=\left(1,-3,-\frac{7}{4}\right)$,$\overrightarrow{AC}=\left(-2,-1,-\frac{7}{4}\right)$,

$\because \boldsymbol{a}$ 是平面 α 的一个法向量,$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

即 $\begin{cases}x-3y-\frac{7}{4}z=0,\\ -2x-y-\frac{7}{4}z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}y,\\ z=-\frac{4}{3}y,\end{cases}$ $\therefore x:y:z=\frac{2}{3}y:y:\left(-\frac{4}{3}y\right)=2:3:(-4)$.

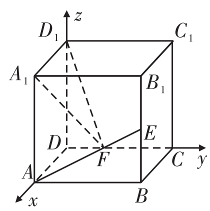
13. ①②③ 【解析】$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,

$\therefore AB\perp AP$,$AD\perp AP$,则①②正确.

又$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$不平行,$\therefore\overrightarrow{AP}$是平面 $ABCD$ 的法向量,

则③正确,由于$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$,$\therefore\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{AP}$不平行,故④错误.

14. 证明 设正方体的棱长为 1,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$E\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$D_1(0,0,1)$,$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,$A_1(1,0,1)$,$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{D_1F}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$.

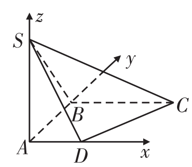
$\because\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,

又$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0$,$\therefore\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{D_1F}$,$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{A_1D_1}$.

又 $A_1D_1\cap D_1F=D_1$,$\therefore AE\perp$平面 A_1D_1F,$\therefore\overrightarrow{AE}$是平面 A_1D_1F 的法向量.

【素质拓展】

15.解 以 A 为坐标原点,AD,AB,AS 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,



则 $A(0,0,0)$,$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$C(1,1,0)$,$S(0,0,1)$,则$\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{DS}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$.

向量$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$是平面 SAB 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 SCD 的一个法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DS}=-\frac{1}{2}x+z=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\ z=\frac{1}{2}x.\end{cases}$

取 $x=2$,得 $y=-1$,$z=1$,

故平面 SCD 的一个法向量为 $(2,-1,1)$.

第2课时　空间中直线、平面的平行

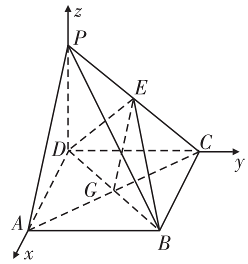
【课时清单】

1.$\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2$　$\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2$　2.$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$　$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$　3.$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$　$\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$

【典型例题】

【例1】证明　如图所示,建立空间直角坐标系,D 是坐标原点,设 $PD=DC=a$.

连接 AC,交 BD 于点 G,连接 EG,



依题意得 $D(0,0,0)$,$A(a,0,0)$,$P(0,0,a)$,$E\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

方法一　设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,又 $\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{EB}=\left(a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a}{2}(y+z)=0,\\ a\left(x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+z=0,\\ 2x+y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,则 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,

又 $\overrightarrow{PA}=(a,0,-a)$,所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=(1,-1,1)\cdot(a,0,-a)=a-a=0$.

所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PA}$.又 $PA\not\subset$ 平面 EDB,所以 $PA/\!/$ 平面 EDB.

方法二　因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 G 是此正方形的中心,

故点 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$,所以 $\overrightarrow{EG}=\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)$.

又 $\overrightarrow{PA}=(a,0,-a)$,

所以 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$,这表明 $PA/\!/EG$.

而 $EG\subset$ 平面 EDB,且 $PA\not\subset$ 平面 EDB,

所以 $PA/\!/$ 平面 EDB.

方法三　假设存在实数 λ,μ 使得 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{EB}$,

即 $(a,0,-a)=\lambda\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)+\mu\left(a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,

则有 $\begin{cases}a=\mu a,\\ 0=\lambda\cdot\frac{a}{2}+\mu\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\lambda+\mu),\\ -a=\lambda\cdot\frac{a}{2}-\mu\cdot\frac{a}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-1,\\ \mu=1.\end{cases}$

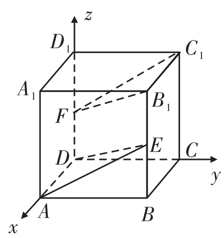
所以 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}$,又 $PA\not\subset$ 平面 EDB,所以 $PA/\!/$ 平面 EDB.

【例2】证明　建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,

则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$C_1(0,2,2)$,$E(2,2,1)$,$F(0,0,1)$,$B_1(2,2,2)$,

所以$\overrightarrow{FC_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,0)$，

设$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$是平面$ADE$的法向量，则$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AE}$，



即$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=2y_1+z_1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=0,\\ z_1=-2y_1.\end{cases}$

令$z_1=2$，则$y_1=-1$，所以可取$\boldsymbol{n}_1=(0,-1,2)$.

同理，设$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$是平面$B_1C_1F$的一个法向量.

由$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{FC_1}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{C_1B_1}$，得$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{FC_1}=2y_2+z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=2x_2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_2=0,\\ z_2=-2y_2.\end{cases}$

令$z_2=2$，得$y_2=-1$，所以$\boldsymbol{n}_2=(0,-1,2)$.

因为$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$，即$\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$，

所以平面$ADE\parallel$平面B_1C_1F.

【基础夯实】

1. C **【解析】**$\boldsymbol{a}=(1,-3,2)=-2\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$.

2. D **【解析】**因为$\boldsymbol{n}=-3\boldsymbol{m}$，所以$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以$\alpha\parallel\beta$或$\alpha$与$\beta$重合.

3. D **【解析】**因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=-3+4-1=0$，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u}$.所以$l\parallel\alpha$或$l\subset\alpha$.

4. BC **【解析】**$\because\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}=-6+2\times3+0=0$，$\therefore\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore$直线$l$与平面$\alpha$的位置关系是直线$l$在平面$\alpha$内或与平面$\alpha$平行.

5. 6 **【解析】**$\because\alpha\parallel\beta$，$\therefore\alpha$的法向量与$\beta$的法向量也互相平行.

$\therefore\frac{2}{4}=\frac{3}{\lambda}=\frac{-1}{-2}$，$\therefore\lambda=6$.

6. $\alpha\parallel\beta$ **【解析】**$\overrightarrow{AB}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$，

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)\cdot(0,1,-1)$

$=-1\times0+(-1)\times1+(-1)\times(-1)=0$，

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-1)\cdot(1,0,-1)$

$=-1\times1+0+(-1)\cdot(-1)=0$，

$\therefore\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\therefore\boldsymbol{n}$也为α的一个法向量，又α与β不重合，

$\therefore\alpha\parallel\beta$.

7. $\left(-\frac{9}{52},\frac{1}{26},-\frac{1}{4}\right)$ **【解析】**由题意，知$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-x+4y-\frac{9}{4}=0,\\ 3x+y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\frac{9}{52},\\ y=\frac{27}{52},\end{cases}$

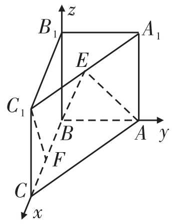
所以$\boldsymbol{a}=\left(-\frac{9}{52},\frac{1}{26},-\frac{1}{4}\right)$.

8. 平行 **【解析】**由题意得$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$分别为α，β的一个法向量，又$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore\alpha\parallel\beta$.

9. 证明　如图，以B为坐标原点，分别以BC，BA，BB_1所在直线为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $BC=a$,$AB=b$,$BB_1=c$,

则 $B(0,0,0)$,$A(0,b,0)$,$C_1(a,0,c)$,$F\left(\frac{a}{2},0,0\right)$,$E\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},c\right)$.



所以$\overrightarrow{AB}=(0,-b,0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2},-\frac{b}{2},c\right)$.

设平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-by=0,\\ \frac{a}{2}x-\frac{b}{2}y+cz=0,\end{cases}$

令 $x=2$,则 $y=0$,$z=-\frac{a}{c}$,即 $\boldsymbol{n}=\left(2,0,-\frac{a}{c}\right)$.

又$\overrightarrow{C_1F}=\left(-\frac{a}{2},0,-c\right)$,所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1F}=0$,

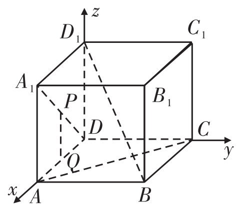
又 $C_1F\not\subset$平面 ABE,

所以 $C_1F\,/\!/$平面 ABE.

【能力提升】

10. B **【解析】**设正方体的棱长为 1,取 D 点为坐标原点建系后,$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,

设$\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)$,



则$\begin{cases}a+c=0,\\ -a+b=0,\end{cases}$

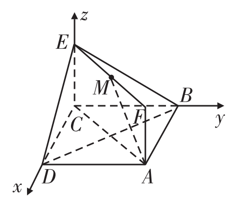
取$\overrightarrow{PQ}=(1,1,-1)$,

$\because\overrightarrow{BD_1}=(0,0,1)-(1,1,0)=(-1,-1,1)=-\overrightarrow{PQ}$,

$\therefore\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\overrightarrow{BD_1}$,$\therefore PQ\,/\!/\,BD_1$.

11. C **【解析】** 方法一 以 C 为原点,建立空间直角坐标系如图所示.

则 $C(0,0,0)$,$D(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$E(0,0,1)$,$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,



$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,1)$,$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$,

设 $M(a,a,1)$,平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

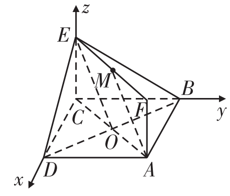
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x+z=0,\\ \sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{2}$,则 $x=1$,$y=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$,

又$\overrightarrow{AM}=(a-\sqrt{2},a-\sqrt{2},1)$,$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=a-\sqrt{2}+a-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$,

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

方法二 设 AC 与 BD 相交于 O 点,连接 OE,由 $AM\,/\!/$平面 BDE,且 $AM\subset$平面 $ACEF$,平面 $ACEF\cap$平面 $BDE=OE$,



所以 $AM\,/\!/\,EO$,

又 O 是正方形 $ABCD$ 对角线交点,

所以 M 为线段 EF 的中点.

在空间直角坐标系中,$E(0,0,1)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.

由中点坐标公式，知点 M 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

12. ACD 【解析】因为 $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{A_1M}\parallel\overrightarrow{D_1P}$，从而 $A_1M\parallel D_1P$，可得 ACD 正确.

又 B_1Q 与 D_1P 不平行，故 B 不正确.

13. 平行 【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，

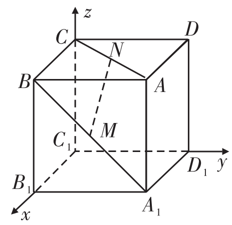
设正方体的棱长为 2，则 $A(2,2,2)$，$A_1(2,2,0)$，$C(0,0,2)$，$B(2,0,2)$，

$\therefore M(2,1,1)$，$N(1,1,2)$，$\therefore \overrightarrow{MN}=(-1,0,1)$.

又平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，

$\because -1\times0+0\times1+1\times0=0$，$\therefore \overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}$，

$\therefore MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C.



14. 证明 如图，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，$A_1(1,0,1)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$A(1,0,0)$，$D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，则 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{B_1A}=(0,-1,-1)$，

设 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$，$\overrightarrow{A_1F}=\mu\overrightarrow{A_1D}$，$\overrightarrow{B_1M}=v\overrightarrow{B_1A}$（$\lambda,\mu,v\in\mathbf{R}$，且均不为 0）.

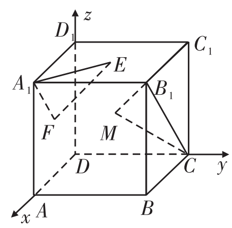
设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是平面 A_1EF 与平面 B_1MC 的法向量，

可得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+y_1=0,\\ x_1+z_1=0,\end{cases}$ 所以可取 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1M}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1A}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_2-z_2=0,\\ -x_2-z_2=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,-1)$，所以 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$，所以 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$，

所以平面 $A_1EF\parallel$ 平面 B_1MC.



【素质拓展】

15. 解 分别以 AB，AD，AP 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图.

则 $P(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，设 $E(0,y,z)$，则

$\overrightarrow{PE}=(0,y,z-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$，

$\because \overrightarrow{PE}\parallel\overrightarrow{PD}$，$\therefore \frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$，①

$\because \overrightarrow{AD}=(0,2,0)$ 是平面 PAB 的法向量，$\overrightarrow{CE}=(-1,y-1,z)$，

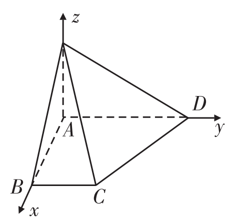
$\therefore$ 由 $CE\parallel$ 平面 PAB，可得 $\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{AD}$，

$\therefore (-1,y-1,z)\cdot(0,2,0)=2(y-1)=0$，

$\therefore y=1$，代入①式得 $z=\frac{1}{2}$.

$\therefore E$ 是 PD 的中点，

即存在点 E，且当点 E 为 PD 的中点时，$CE\parallel$ 平面 PAB.



第 3 课时 空间中直线、平面的垂直

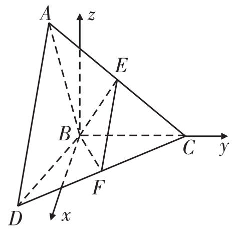
【课时清单】

1.$\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2$ $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0$ 2.$\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{n}$ $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{n}$ 3.$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$

【典型例题】

【例1】 证明 由题意,以点 B 为坐标原点,在平面 DBC 内过点 B 作垂直于 BC 的直线为 x 轴,BC 所在直线为 y 轴,在平面 ABC 内过点 B 作垂直 BC 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

易得 $B(0,0,0)$,$A(0,-1,\sqrt{3})$,$D(\sqrt{3},-1,0)$,$C(0,2,0)$,

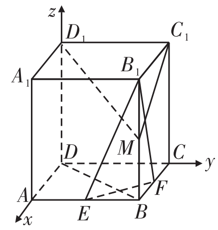


因而 $E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,所以$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$,

因此$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.从而$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BC}$,所以 $EF\perp BC$.

【例2】 解 以点 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$,设正方体的棱长为 2,

则 $E(2,1,0)$,$F(1,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,$B_1(2,2,2)$.



设 $M(2,2,m)$,则$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{B_1E}=(0,-1,-2)$,$\overrightarrow{D_1M}=(2,2,m-2)$,

$\because D_1M\perp$平面 EFB_1,

$\therefore D_1M\perp EF$,$D_1M\perp B_1E$,

$\therefore \overrightarrow{D_1M}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ 且$\overrightarrow{D_1M}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0$,

于是$\begin{cases}-2+2=0,\\-2-2(m-2)=0,\end{cases}$ $\therefore m=1$,故取$\overrightarrow{BB_1}$的中点为 M 就能满足 $D_1M\perp$平面 EFB_1.

【基础夯实】

1. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即$-2\times3+2\times(-2)+m=0$,解得 $m=10$.

2. B 【解析】因为 $\alpha\perp\beta$,所以它们的法向量也互相垂直,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1,2,4)\cdot(x,-1,-2)=0$,解得 $x=-10$.

3. C 【解析】由题意知$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(x,-1,z)$,又 $PA\perp$平面 ABC,所以有

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=(-1,-1,-1)\cdot(x,-1,z)=0$,得$-x+1-z=0$.①

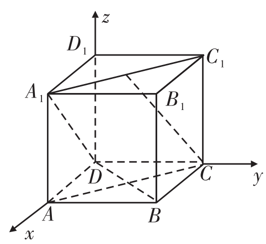
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(2,0,1)\cdot(x,-1,z)=0$,得 $2x+z=0$,②

联立①②得 $x=-1$,$z=2$,故点 P 的坐标为$(-1,0,2)$.

4. A 【解析】以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系 $Dxyz$.设正方体的棱长为 1.

则 $C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$A(1,0,0)$,$D(0,0,0)$,$C_1(0,1,1)$,$A_1(1,0,1)$,

$E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$,



$\therefore \overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,

$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$,$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-1)$,

$\because \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BD}=(-1)\times\dfrac{1}{2}+(-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times1=0$,

$\therefore CE\perp BD$.

5. AC 【解析】以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

设正方体的棱长为 $2a$,

则 $D(0,0,0)$,$D_1(0,0,2a)$,$M(0,0,a)$,$A(2a,0,0)$,$C(0,2a,0)$,$O(a,a,0)$,$N(0,a,2a)$.

$\therefore \overrightarrow{OM}=(-a,-a,a)$,$\overrightarrow{MN}=(0,a,a)$,$\overrightarrow{AC}=(-2a,2a,0)$.

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$,$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\therefore OM\perp AC$,$OM\perp MN$.$OM$ 和 AA_1 显然不垂直,

故选 AC.

6. -9 【解析】由题意得 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$，$\therefore \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=3+6+z=0$，$\therefore z=-9$.

7.0 或 9 【解析】$\because A(-3,-2,1)$，$B(-1,-1,-1)$，$C(-5,x,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,x+1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,x+2,-1)$，

分三种情况：

①A 为直角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore -4+x+2+2=0$，$\therefore x=0$；

②B 为直角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore -8+x+1-2=0$，$\therefore x=9$；

③C 为直角，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore 8+(x+1)(x+2)-1=0$，$x^2+3x+9=0$，方程无解.

综上，x 的值为 0 或 9.

8. $(-2,4,1)$或$(2,-4,-1)$ 【解析】据题意，得$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\because \boldsymbol{n}$ 与平面 ABC 垂直，

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x-y+2z=0,\\ x+2z=0,\end{cases}$ 可得$\begin{cases}x=-\dfrac{y}{2},\\ z=\dfrac{y}{4}.\end{cases}$

$\because |\boldsymbol{n}|=\sqrt{21}$，$\therefore \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{21}$，解得 $y=4$ 或 $y=-4$.

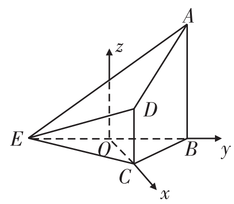
当 $y=4$ 时，$x=-2$，$z=1$；当 $y=-4$ 时，$x=2$，$z=-1$.

$\therefore \boldsymbol{n}$ 的坐标为$(-2,4,1)$或$(2,-4,-1)$.

9. 证明 取 BE 的中点 O，连接 OC，

又 $AB\perp$平面 BCE，

所以以 O 为原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$(如图所示).



则有 $C(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$E(0,-\sqrt{3},0)$，$D(1,0,1)$，$A(0,\sqrt{3},2)$.

于是$\overrightarrow{AE}=(0,-2\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{DA}=(-1,\sqrt{3},1)$.

设平面 ADE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(a,b,c)\cdot(0,-2\sqrt{3},-2)=-2\sqrt{3}b-2c=0$，

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=(a,b,c)\cdot(-1,\sqrt{3},1)=-a+\sqrt{3}b+c=0$.

令 $b=1$，则 $a=0$，$c=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$.

又 $AB\perp$平面 BCE，$OC\subset$平面 BCE，

所以 $AB\perp OC$.

因为 $BE\perp OC$，$AB\cap BE=B$，AB，$BE\subset$平面 ABE，

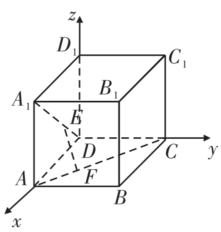
所以 $OC\perp$平面 ABE.

所以平面 ABE 的法向量可取为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=(0,1,-\sqrt{3})\cdot(1,0,0)=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$，

所以平面 $ADE\perp$平面 ABE.

【能力提升】



10.B 【解析】以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，

设正方体的棱长为 1，则 $A_1(1,0,1)$，$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E\left(\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{3}\right)$，

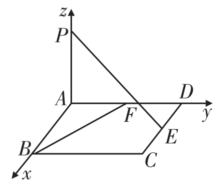
$F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$,$B(1,1,0)$,$D_1(0,0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{EF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$,$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,

从而 $EF/\!/BD_1$,$EF\perp A_1D$,$EF\perp AC$,故选 B.

11. B 【解析】以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,



设正方形的边长为 1,$PA=a$,则 $B(1,0,0)$,$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$P(0,0,a)$.

设点 F 的坐标为 $(0,y,0)$,则 $\overrightarrow{BF}=(-1,y,0)$,$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2},1,-a\right)$.

因为 $BF\perp PE$,所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{PE}=0$,解得 $y=\frac{1}{2}$,即点 F 的坐标为 $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,

所以 F 为 AD 的中点,所以 $AF:FD=1:1$.

12. 垂直 【解析】以 D 为原点,DA,DC,DP 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(图略),则 $P(0,0,1)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$F\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,

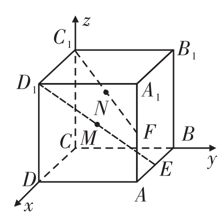
$\therefore \overrightarrow{EF}=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,设平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=x+y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x=0,\end{cases}$

取 $y=1$,则 $z=1$,

$\therefore$ 平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$,

$\because \overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$,$\therefore \overrightarrow{EF}/\!/\boldsymbol{n}$,$\therefore EF\perp$ 平面 PBC.

13. 1 【解析】假设存在满足条件的直线 MN,建立空间直角坐标系如图所示,不妨设正方体的棱长为 2,则 $D_1(2,0,2)$,$E(1,2,0)$,



设 $M(x,y,z)$,$\overrightarrow{D_1M}=m\,\overrightarrow{D_1E}(0\leqslant m\leqslant 1)$,

所以 $(x-2,y,z-2)=m(-1,2,-2)$,$x=2-m$,$y=2m$,$z=2-2m$,

所以 $M(2-m,2m,2-2m)$,

同理,若设 $\overrightarrow{C_1N}=\boldsymbol{n}\,\overrightarrow{C_1F}(0\leqslant n\leqslant 1)$,可得 $N(2n,2n,2-n)$,

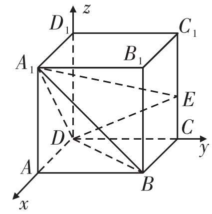
$\overrightarrow{MN}=(m+2n-2,2n-2m,2m-n)$,

又因为 $MN\perp$ 平面 $ABCD$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$,

所以 $\begin{cases}m+2n-2=0,\\ 2n-2m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{2}{3},\\ n=\frac{2}{3}.\end{cases}$

即存在满足条件的直线 MN,有且只有一条.

14. (1)证明 以 D 为坐标原点,以 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.



设正方体棱长为 a,则 $A(a,0,0)$,$B(a,a,0)$,$C(0,a,0)$,$A_1(a,0,a)$,$C_1(0,a,a)$.

设 $E(0,a,b)(0\leqslant b\leqslant a)$,

$\overrightarrow{A_1E}=(-a,a,b-a),\overrightarrow{BD}=(-a,-a,0)$,

$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BD}=a^2-a^2+(b-a)\cdot 0=0$,$\therefore\overrightarrow{A_1E}\perp\overrightarrow{BD}$,即 $A_1E\perp BD$.

(2)解　设平面 A_1BD,平面 EBD 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

$\because\overrightarrow{DB}=(a,a,0),\overrightarrow{DA_1}=(a,0,a),\overrightarrow{DE}=(0,a,b)$,

$\therefore\begin{cases}ax_1+ay_1=0,\\ax_1+az_1=0,\end{cases}\begin{cases}ax_2+ay_2=0,\\ay_2+bz_2=0.\end{cases}$取 $x_1=x_2=1$,

得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,-1)$,$\boldsymbol{n}_2=\left(1,-1,\frac{a}{b}\right)$,

由平面 $A_1BD\perp$平面 EBD,得 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,$\therefore 2-\frac{a}{b}=0$,即 $b=\frac{a}{2}$.

$\therefore$当 E 为 CC_1 的中点时,平面 $A_1BD\perp$平面 EBD.

【素质拓展】

15.D　**【解析】**以 A_1 为坐标原点,A_1B_1,A_1C_1,A_1A 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(图略),则由已知得 $A_1(0,0,0)$,$B_1(1,0,0)$,$C_1(0,1,0)$,$B(1,0,1)$,$D\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$P(0,2,0)$,

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(1,0,1),\overrightarrow{A_1D}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{B_1P}=(-1,2,0),\overrightarrow{DB_1}=\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$.设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=x+z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$取 $z=-2$,则 $x=2$,$y=1$,所以平面 A_1BD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$.

假设 $DQ\perp$平面 A_1BD,且 $B_1Q=\lambda\overrightarrow{B_1P}=\lambda(-1,2,0)=(-\lambda,2\lambda,0)$,

则$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1Q}=\left(1-\lambda,-1+2\lambda,-\frac{1}{2}\right)$,

因为$\overrightarrow{DQ}$也是平面 A_1BD 的法向量,

所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$与$\overrightarrow{DQ}=\left(1-\lambda,-1+2\lambda,-\frac{1}{2}\right)$共线,于是有$\frac{1-\lambda}{2}=\frac{-1+2\lambda}{1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-2)}=\frac{1}{4}$成立,但此方程关于 λ 无解.故不存在 DQ 与平面 A_1BD 垂直.

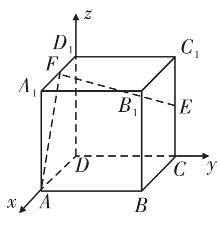
第 4 课时　用空间向量研究距离、夹角问题(一)

【课时清单】

1.$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$　2.$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

【典型例题】

【例1】解　如图所示,以 D 点为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,设 $DA=2$,则 $A(2,0,0)$,$E(0,2,1)$,$F(1,0,2)$,则$\overrightarrow{EF}=(1,-2,1)$,$\overrightarrow{FA}=(1,0,-2)$.

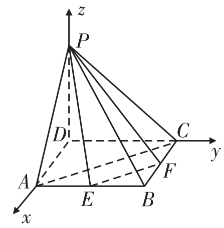


$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$,$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{EF}=1\times1+0\times(-2)+(-2)\times1=-1$,

$\overrightarrow{FA}$在$\overrightarrow{EF}$上的投影长为$\frac{|\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{EF}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

所以点 A 到 EF 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{FA}|^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{6}}=\frac{\sqrt{174}}{6}$.

【例2】解　(1)建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$,$P(0,0,1)$,$A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$F\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

设 $DH\perp$平面 PEF,垂足为 H,则

$\overrightarrow{DH}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}+z\overrightarrow{DP}=\left(x+\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+y,z\right)$,

$x+y+z=1$,

$\overrightarrow{PE}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$,

所以$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PE}=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+y\right)-z=\frac{5}{4}x+y-z=0$.

同理,$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PF}=x+\frac{5}{4}y-z=0$,

又 $x+y+z=1$,解得 $x=y=\frac{4}{17}$,$z=\frac{9}{17}$.

所以$\overrightarrow{DH}=\frac{3}{17}(2,2,3)$,所以$|\overrightarrow{DH}|=\frac{3}{17}\sqrt{17}$.

因此,点 D 到平面 PEF 的距离为$\frac{3}{17}\sqrt{17}$.

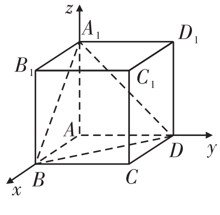
(2)连接 AC,则 $AC\parallel EF$,直线 AC 到平面 PEF 的距离即为点 A 到平面 PEF 的距离,
平面 PEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,2,3)$,

所求距离为$\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

【基础夯实】

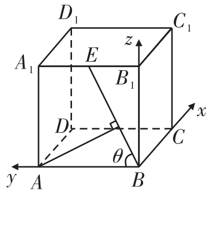
1. D　【解析】$\overrightarrow{PA}=(1,2,-4)$,则点 P 到 α 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{10}{3}$.

2. D　【解析】如图,以 A 为原点,AB,AD,AA_1所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,
则$\overrightarrow{AC_1}=(a,a,a)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,a,a)$,



由于 $AC_1\perp$平面 A_1BD,所以点 C_1到平面 A_1BD 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{2a^2}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

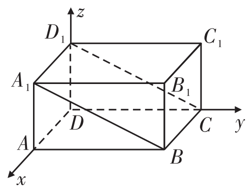
3. B　【解析】建立如图所示的空间直角坐标系,
则$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BE}=(0,1,2)$,



设$\angle ABE=\theta$,则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故点 A 到直线 BE 的距离 $d=|\overrightarrow{AB}|\sin\theta=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

4. C　【解析】以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $C(0,12,0)$，$D_1(0,0,5)$.

设 $B(x,12,0)$，$B_1(x,12,5)(x>0)$.

设平面 A_1BCD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD_1}$，得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=(a,b,c)\cdot(-x,0,0)=-ax=0$，

$n\cdot\overrightarrow{CD_1}=(a,b,c)\cdot(0,-12,5)=-12b+5c=0$，

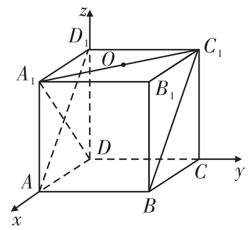
所以 $a=0$，$b=\dfrac{5}{12}c$，所以可取 $\boldsymbol{n}=(0,5,12)$.

又 $\overrightarrow{B_1B}=(0,0,-5)$，所以点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{B_1B}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{60}{13}$.

因为 B_1C_1∥平面 A_1BCD_1，所以 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\dfrac{60}{13}$.

5. 2 **【解析】**$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2-6+2|}{\sqrt{4+4+1}}=2$.

6. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **【解析】**以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系，

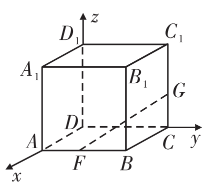


则 $A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$\overrightarrow{C_1O}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，

平面 ABC_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离

$d=\dfrac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

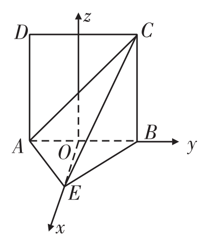
7. $\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ **【解析】**如图，以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在的直线为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D_1(0,0,2)$，$F(1,1,0)$，$G(0,2,1)$，于是有 $\overrightarrow{GF}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{GD_1}=(0,-2,1)$，

所以 $\dfrac{|\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GD_1}|}{|\overrightarrow{GF}|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$|\overrightarrow{GD_1}|=\sqrt{5}$，

所以点 D_1 到直线 GF 的距离为 $\sqrt{5-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$.



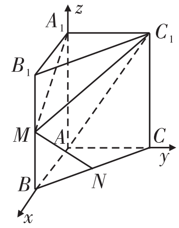
8. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **【解析】**以 AB 的中点 O 为坐标原点，分别以 OE，OB 所在的直线为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0,-1,2)$，$C(0,1,2)$.$\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$，

设平面 ACE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，$\therefore\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$.

故点 D 到平面 ACE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. 解 (1)建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$M(2,0,1)$，$C_1(0,2,2)$，

直线 AC_1 的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{s}_0=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AM}=(2,0,1)$，

故点 M 到直线 AC_1 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{s}_0|^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2)设平面 MA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x-z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $z=2$，故 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$ 为平面 MA_1C_1 的一个法向量，

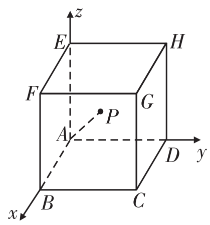
因为 $N(1,1,0)$，所以 $\overrightarrow{MN}=(-1,1,-1)$，

故 N 到平面 MA_1C_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【能力提升】

10. C **【解析】**如图，分别以 AB，AD，AE 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ 可作为 x，y，z 轴方向上的单位向量，

因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{3}{4}$，

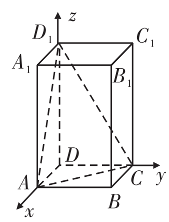


所以 P 点到 AB 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|^2}=\sqrt{\frac{181}{144}-\frac{9}{16}}=\frac{5}{6}$.

11. A **【解析】**如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,4)$，$B_1(2,2,4)$，

$\therefore\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$.



设平面 AD_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+4z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $x=y=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$，

所以点 B_1 到平面 AD_1C 的距离为 $\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{3}$，故选 A.

12. $\sqrt{2}$ **【解析】**AD 到平面 PBC 的距离等于点 A 到平面 PBC 的距离.由已知可得 AB，AD，AP 两两垂直.以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系(图略)，

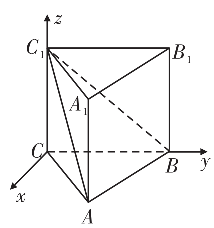
则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，则 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a-2c=0,\\ b=0,\end{cases}$ 取 $a=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$，又 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

所以 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\sqrt{2}$.

13. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ **【解析】**建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$B(0,1,0)$，$B_1(0,1,1)$，$C_1(0,0,1)$，

则$\overrightarrow{C_1A}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{C_1B}=(0,1,-1)$.

设平面ABC_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,1)$，

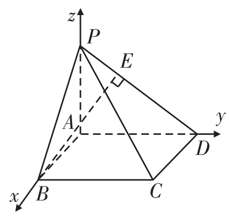
则有$\begin{cases}\overrightarrow{C_1A}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1=0,\\ \overrightarrow{C_1B}\cdot\boldsymbol{n}=y-1=0,\end{cases}$解得$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,1\right)$，

则所求距离为$\frac{|\overrightarrow{C_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

14. 解　∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$\angle PDA$即为PD与平面$ABCD$所成的角，

∴$\angle PDA=45°$，∴$PA=AD=4$，$AB=2$.

以A为原点，AB，AD，AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，如图所示.



∴$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,4,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-4,4)$.

方法一　设存在点E，使$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DP}$，且$BE\perp DP$，

设$E(x,y,z)$，∴$(x,y-4,z)=\lambda(0,-4,4)$，∴$x=0$，$y=4-4\lambda$，$z=4\lambda$，

∴点$E(0,4-4\lambda,4\lambda)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,4-4\lambda,4\lambda)$.

∵$BE\perp DP$，∴$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DP}=-4(4-4\lambda)+4\times4\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$.

∴$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$，∴$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$，

故点B到直线PD的距离为$2\sqrt{3}$.

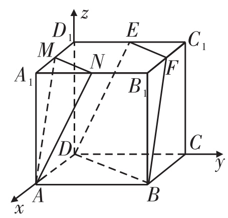
方法二　$\overrightarrow{BP}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-4,4)$，∴$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}=16$，

∴$\overrightarrow{BP}$在$\overrightarrow{DP}$上的投影的长度为$\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{DP}|}=\frac{16}{\sqrt{16+16}}=2\sqrt{2}$.

所以点B到直线PD的距离为$d=\sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{20-8}=2\sqrt{3}$.

【素质拓展】

15.(1)证明　如图所示，建立空间直角坐标系，



则$A(4,0,0)$，$M(2,0,4)$，$D(0,0,0)$，$B(4,4,0)$，$E(0,2,4)$，$F(2,4,4)$，$N(4,2,4)$.

从而$\overrightarrow{EF}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{MN}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,0,4)$，

所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BF}$，所以$EF/\!/MN$，$AM/\!/BF$.

因为$EF\cap BF=F$，$MN\cap AM=M$，

所以平面$AMN/\!/$平面$EFBD$，

(2)解　设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面AMN的法向量，

从而$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-2x+4z=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2z,\\ y=-2z,\end{cases}$取$z=1$，得$\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，

由于$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，所以$\overrightarrow{AB}$在$\boldsymbol{n}$上的投影为$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{8}{3}$，

所以两平行平面间的距离$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{3}$.

第5课时　用空间向量研究距离、夹角问题(二)

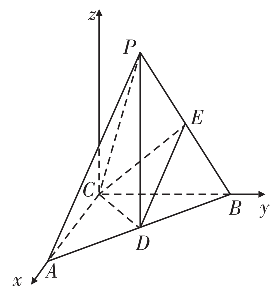
【课时清单】

1.不大于90°　2.$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$　$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　$\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$　$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$　$\left[0\quad\dfrac{\pi}{2}\right]$

【典型例题】

【例1】【解析】建立如图所示的空间直角坐标系,易知$C(0,0,0)$,



$A(2,0,0),D(1,1,0),E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right),P(1,1,3)$,

$\overrightarrow{PA}=(1,-1,-3),\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,

设直线CE与直线PA的夹角为θ,则

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

整理得$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{209}}{19}$.∴直线$CE$与直线$PA$夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{209}}{19}$.

(2)设直线PC与平面DEC的夹角为θ_0,平面DEC的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

因为$\overrightarrow{CD}=(1,1,0),\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,所以有$\begin{cases}x+y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0,\end{cases}$

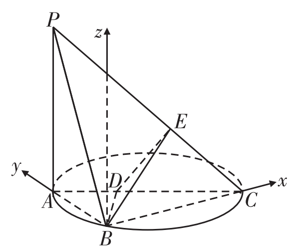
取$x=1$,解得$y=-1,z=\dfrac{2}{3}$,

即面DEC的一个法向量为$\boldsymbol{m}=\left(1,-1,\dfrac{2}{3}\right),\overrightarrow{CP}=(1,1,3)$,

$$\therefore\sin\theta_0=\frac{|\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{11}.$$

∴直线PC与平面DEC夹角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{11}$.

【例2】【解析】(1)如图,连接AB,因为$PA\perp$平面ABC,所以$PA\perp BC$.



又因为B在圆周上,AC为圆的直径,所以$AB\perp BC$,$PA\cap AB=A$.

故$BC\perp$平面PAB.

(2)因为$\angle ABC=90°$,直径$AC=2$,$\angle ACB=30°$,所以$AB=1,BC=\sqrt{3}$,

由(1)得$BC\perp PB$,$\sin\angle BPC=\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{\sqrt{3}}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,$PC=2\sqrt{2}$,

PA垂直于圆所在的平面,所以$PA=2$.

因为$\angle ABC=90°$,所以以点B为坐标原点,以BC,BA为x,y轴建立如图所示的空间直角坐标系,则$B(0,0,0),A(0,1,0),C(\sqrt{3},0,0),P(0,1,2)$,

$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,1,2)$，

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{BC},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{BP},\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ y+2z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得$\boldsymbol{n}_1=(0,-2,1)$.

同理可求得平面 PAC 的一个法向量$\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},0)$.

设 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 θ，故 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

又由图知二面角 $B-PC-A$ 为锐二面角，故二面角 $B-PC-A$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

【基础夯实】

1. A **【解析】**$\because\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3,-3)$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{5}{3\times\sqrt{22}}=\dfrac{5\sqrt{22}}{66}$，

$\therefore$直线 AB，CD 所成角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{22}}{66}$.

2. A **【解析】**$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即$\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=45°$.所以两平面的夹角为 $45°$.

3. C **【解析】**线面角的范围是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

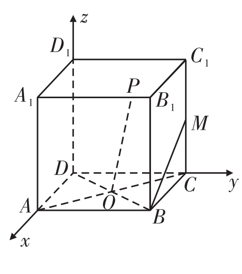
$\because\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore l$ 与法向量所在直线所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore l$ 与 α 所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$.

4. D **【解析】**设 α 与 l 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|(-2,-3,3)\cdot(4,1,1)|}{\sqrt{4+9+9}\times\sqrt{16+1+1}}=\left|\dfrac{-4}{3\sqrt{11}}\right|=\dfrac{4\sqrt{11}}{33}$，

故直线 l 与 α 所成角的余弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{4\sqrt{11}}{33}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{913}}{33}$.



5. $\dfrac{\pi}{2}$ **【解析】**建立如图所示的空间直角坐标系，

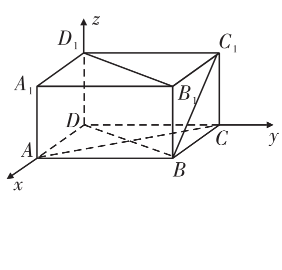
设正方体的棱长为 2，$A_1P=x$，

则 $O(1,1,0)$，$P(2,x,2)$，$B(2,2,0)$，$M(0,2,1)$，

$\overrightarrow{OP}=(1,x-1,2)$，$\overrightarrow{BM}=(-2,0,1)$.

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，

所以直线 BM 与 OP 所成的角为$\dfrac{\pi}{2}$.



6. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **【解析】**如图所示，建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(-2,0,1)$.

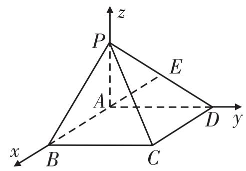
连接 AC,易证 $AC\perp$平面 BB_1D_1D,

$\therefore$平面 BB_1D_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$.

$\therefore$所求角的正弦值为 $|\cos\langle \boldsymbol{a},\overrightarrow{BC_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\boldsymbol{a}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

7. 45°

解　如图所示,建立空间直角坐标系,



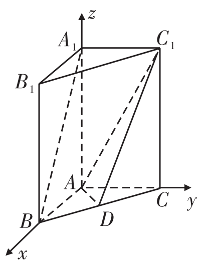
设 $PA=AB=1$,则 $A(0,0,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,1)$.

于是$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$,取 PD 的中点 E,则 $E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,易知$\overrightarrow{AD}$是平面 PAB 的法向量,$\overrightarrow{AE}$是平面 PCD 的法向量,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore$平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 45°.

8. 解　以点 A 为原点,AB,AC,AA_1所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系 $Axyz$,



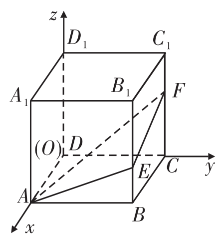
则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$A_1(0,0,4)$,$D(1,1,0)$,$C_1(0,2,4)$,

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{C_1D}=(1,-1,-4)$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{C_1D}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1D}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{C_1D}|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore$异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

9.解　如图,建立空间直角坐标系.



设正方体的棱长为 1,

平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$,

平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$.

所以 $A(1,0,0)$,$E\left(1,1,\dfrac{1}{3}\right)$,$F\left(0,1,\dfrac{2}{3}\right)$,

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\dfrac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{EF}=\left(-1,0,\dfrac{1}{3}\right)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y+\dfrac{1}{3}z=0,\\ -x+\dfrac{1}{3}z=0.\end{cases}$

取 $x=1$,则 $y=-1$,$z=3$.故 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,3)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$.

所以平面 AEF 与平面 ABC 夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$.

【能力提升】

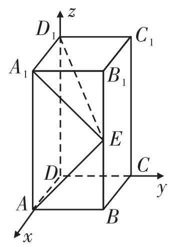
10. A　**【解析】**不妨设 $CA=CC_1=2CB=2$,

则$\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,1)$,$\overrightarrow{C_1B}=(0,-2,1)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{C_1B}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{C_1B}|}=\dfrac{(-2)\times0+2\times(-2)+1\times1}{\sqrt{9}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 BC_1 与直线 AB_1 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

11. B 【解析】以点 D 为原点，分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，如图.



由题意知，$A_1(1,0,2)$，$E(1,1,1)$，$D_1(0,0,2)$，$A(1,0,0)$，

所以$\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{EA}=(0,-1,-1)$.

设平面 A_1ED_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}y-z=0,\\x+y-z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $y=1$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EA}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EA}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-1$，

设直线与平面 A_1ED_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=1$，

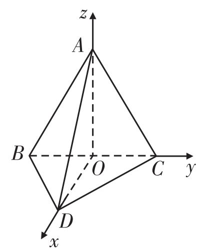
所以直线 AE 与平面 A_1ED_1 所成的角为 90°.

12. $\dfrac{12}{5}$ 【解析】平面 xOy 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}-3x+4y=0,\\-3x+az=0,\end{cases}$

即 $3x=4y=az$，取 $z=1$，则 $\boldsymbol{u}=\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{4},1\right)$.

而 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{a^2}{16}+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$\because a>0$，$\therefore a=\dfrac{12}{5}$.

13. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】取 BC 的中点 O，连接 AO，DO，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $BC=1$，则 $A\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$.

所以$\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$.

由于$\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$为平面 BCD 的一个法向量.

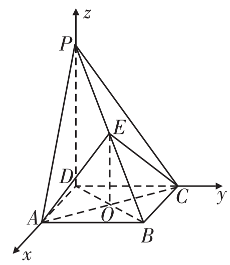
设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

14. (1)证明　如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$，



设 $AB=a$，$PD=h$，

则 $A(a,0,0)$，$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,0,h)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,h)$，$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，

$\therefore AC\perp DP$，$AC\perp DB$，又 $DP\cap DB=D$，DP，$DB\subset$平面 PDB，

$\therefore AC\perp$平面 PDB，又 $AC\subset$平面 AEC，$\therefore$平面 $AEC\perp$平面 PDB.

(2)解　当 $PD=\sqrt{2}AB$ 且 E 为 PB 的中点时，$P(0,0,\sqrt{2}a)$，$E\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，

设 $AC\cap BD=O$，$O\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，连接 OE，由(1)知 $AC\perp$平面 PDB，

$\therefore \angle AEO$ 为 AE 与平面 PDB 所成的角，

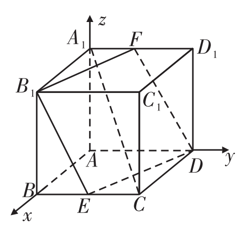
$\because \overrightarrow{EA}=\left(\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{EO}=\left(0,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，

$\therefore \cos\angle AEO=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EO}}{|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{EO}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle AEO=45^\circ$，即 AE 与平面 PDB 所成角的大小为 45°.

【素质拓展】

15.解　以 A 为坐标原点，分别以 AB，AD，AA_1所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $Axyz$.



(1)$A_1(0,0,a)$，$C(a,a,0)$，$D(0,a,0)$，$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C}=(a,a,-a)$，$\overrightarrow{DE}=\left(a,-\frac{a}{2},0\right)$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{A_1C}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\sqrt{15}}{15}$，故 A_1C 与 DE 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(2)连接 DB_1，$\because \angle ADE=\angle ADF$，

$\therefore AD$ 在平面 B_1EDF 内的射影在$\angle EDF$ 的平分线上.

又四边形 B_1EDF 为菱形，$\therefore DB_1$为$\angle EDF$ 的平分线，

故直线 AD 与平面 B_1EDF 所成的角为$\angle ADB_1$.

由 $A(0,0,0)$，$B_1(a,0,a)$，$D(0,a,0)$，得$\overrightarrow{DA}=(0,-a,0)$，$\overrightarrow{DB_1}=(a,-a,a)$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{DB_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又直线与平面所成角的范围是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

故直线 AD 与平面 B_1EDF 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)由已知得 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,a)$，$B_1(a,0,a)$，$D(0,a,0)$，$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$，

则$\overrightarrow{ED}=\left(-a,\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EB_1}=\left(0,-\frac{a}{2},a\right)$，

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{AA_1}=(0,0,a)$.

设平面 B_1EDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}y=2,\\ z=1,\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,2,1)$，$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$平面 B_1EDF 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

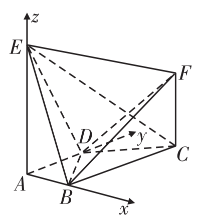
第 6 课时　用空间向量研究距离、夹角问题(三)

【课时清单】

1.用空间向量表示立体图形中的点、直线、平面等元素　进行空间向量的运算，研究点、直线、平面之间的关系　把运算结果"翻译"成相应的几何意义　2.综合法　向量法　坐标法

【典型例题】

【例1】(1)证明　依题意，可以建立以 A 为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系(如图)，



可得 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$.

设 $CF=h(h>0)$，则 $F(1,2,h)$.

依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面 ADE 的法向量，

又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 $BF\parallel$平面 ADE.

(2)解　由(1)得$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 BDE 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$

不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$，

因此有 $\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{4}{9}$.

所以直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{4}{9}$.

【例2】解 (1)证明：因为 $PC\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PC\perp AC$.因为 $AB=2AD=2CD$，

所以 $AC=BC=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}CD$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，

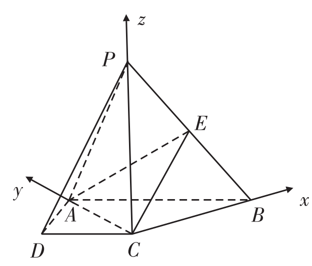
故 $AC\perp BC$.又 $BC\cap PC=C$，所以 $AC\perp$平面 PBC.

因为 $AC\subset$平面 EAC，所以平面 $EAC\perp$平面 PBC.

(2)如图，以 C 为原点，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CP}$分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系，设 $CB=2$，$CP=2a(a>0)$，则 $C(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,2a)$，

则 $E(1,0,a)$，$\overrightarrow{CA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,2a)$，$\overrightarrow{CE}=(1,0,a)$，

易知 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$为平面 PAC 的一个法向量.



设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 EAC 的一个法向量，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y=0,\\ x+az=0,\end{cases}$$\therefore y=0$.

取 $x=a$，则 $z=-1$，$\boldsymbol{n}=(a,0,-1)$.

依题意,$|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,解得 $a=\sqrt{2}$.

于是,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$,$\overrightarrow{PA}=(0,2,-2\sqrt{2})$.

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

【基础夯实】

1.D **【解析】**以 D 为原点,DA 为 x 轴,DC 为 y 轴,DD_1 为 z 轴,建立空间直角坐标系,

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,

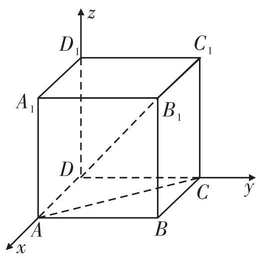
则 $A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,

$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{B_1D}=(-1,-1,-1)$,

设异面直线 AC 与 B_1D 所成的角为 θ,

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B_1D}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{B_1D}|}=0$,

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{2}$.



∴异面直线 AC 与 B_1D 所成的角为$\dfrac{\pi}{2}$.

2. D **【解析】**由题意可得$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$,$|\overrightarrow{A_1M}|=\sqrt{|\overrightarrow{A_1B_1}|^2+|\overrightarrow{B_1M}|^2}=\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1}$,$|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BB_1}|^2}=2\sqrt{2}$,$\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{B_1C}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{A_1M}||\overrightarrow{B_1C}|}=$

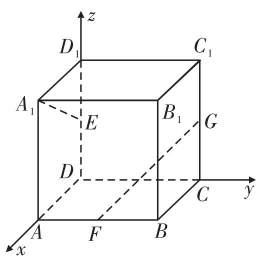
$$\frac{\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\right)\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1})}{2\sqrt{10}}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}^2}{2\sqrt{10}}=\frac{2\times2\times\cos 60^0+\frac{1}{2}\times4}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

3. A **【解析】**如图,

$A_1(2,0,4)$,$E(0,0,2)$,$F(2,2,0)$,$G(0,4,2)$,

所以$\overrightarrow{A_1E}=(-2,0,-2)$,$\overrightarrow{GF}=(2,-2,-2)$,

所以异面直线 A_1E 与 GF 所成角的余弦值$\left|\dfrac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{GF}}{|\overrightarrow{A_1E}||\overrightarrow{GF}|}\right|=0$.



4.C **【解析】**由平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,$AB\perp BD$,平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,

$AB\subset$平面 ABD,所以 $AB\perp$ 平面 BCD.

又 $DC\subset$平面 BCD,所以 $AB\perp DC$.

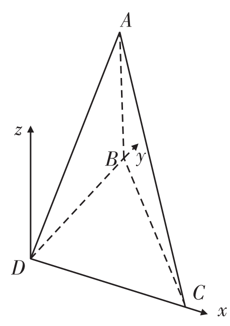
又 $DB\perp DC$,所以作 z 轴//AB,建立空间直角坐标系 $B-xyz$,如图,

设 $AB=1$,所以 $BD=1$,$DC=1$,$BC=\sqrt{2}$.

则 $A(0,1,1)$,$B(0,1,0)$,$C(1,0,0)$,$D(0,0,0)$.

所以$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(0,-1,0)$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

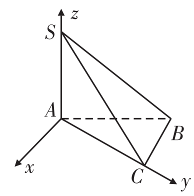


5. 0 【解析】设$\overrightarrow{VA}$与$\overrightarrow{VC}$的夹角为θ，则$\overrightarrow{VA}$与$\overrightarrow{VB}$的夹角也是θ.

$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VB}$，$\therefore\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB}=9\cos\theta-9\cos\theta=0$.

则VA与BC所成角的余弦值为$\left|\dfrac{\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{VA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|=0$.

6. 是 【解析】如图，以A为坐标原点，平行于BC的直线为x轴，AC，AS所在直线分别为y轴，z轴建立空间直角坐标系$Axyz$，



则由$AC=2$，$BC=\sqrt{13}$，$SB=\sqrt{29}$，

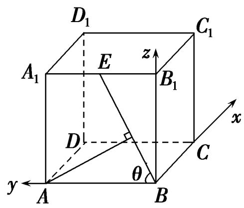
得$B(-\sqrt{13},2,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，

$\overrightarrow{SC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(-\sqrt{13},0,0)$.

因为$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，所以$SC\perp BC$.

7. $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ 【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，则$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,1,2)$.

$\therefore\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.



故点A到直线BE的距离$d=|\overrightarrow{AB}|\sin\theta=2\times\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

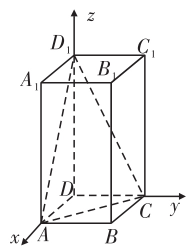
8. 4 【解析】以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设$DD_1=a$，则$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,a)$，故

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,a)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,a)$，

设平面ACD_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+2y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-2x+az=0,\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(1,1,\dfrac{2}{a})$，



故$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CC_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CC_1}|}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2a^2+4}}$，

又直线CC_1与平面ACD_1所成角的正弦值为$\dfrac{1}{3}$，

$\therefore\dfrac{2}{\sqrt{2a^2+4}}=\dfrac{1}{3}$，解得$a=4$.则四棱柱的高为4.

9.(1)证明：连接AB_1交A_1B于点E，连接DE，则点E为A_1B的中点，

又D是AC的中点，所以$DE//B_1C$，

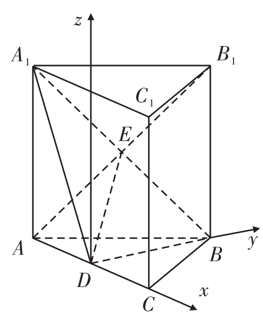
因为$DE\subset$平面A_1BD，$B_1C\not\subset$平面A_1BD，

所以$B_1C//$平面A_1BD.

(2)解：因为$B_1C//$平面A_1BD，

所以B_1C到平面A_1BD的距离就等于点B_1到平面A_1BD的距离.

以点D为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$B_1(0,2\sqrt{2},3)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$A_1(-1,0,3)$，

$\overrightarrow{DB_1}=(0,2\sqrt{2},3)$，$\overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(-1,0,3)$.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA_1},\end{cases}$即$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2\sqrt{2}y=0,\\ -x+3z=0,\end{cases}$

令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(3,0,1)$.

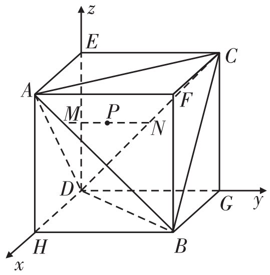
所求距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

【能力提升】

10. D **【解析】**$E(1,0,0)$,$B_1(2,0,2)$,$C(2,2,0)$,所以$\overrightarrow{B_1E}=(-1,0,-2)$,$\overrightarrow{CF}=(-2,y-2,z)$,

因为 $CF\perp B_1E$,所以$\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{CF}=0$,即 $2-2z=0$,即 $z=1$.

11. D **【解析】**把正四面体 $ABCD$ 放在正方体 $AFCE-HBGD$ 中,并建立如图所示的空间直角坐标系,设该正方体的棱长为 a,



因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4,所以有$\sqrt{a^2+a^2}=4\Rightarrow a=2\sqrt{2}$,

因此相应点的坐标为 $D(0,0,0)$,$A(2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$,$B(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$,$C(0,2\sqrt{2},2\sqrt{2})$,

因为 N 是 CD 上的动点,所以设点 N 的坐标为$(0,n,n)$,

设$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$,$M(x_0,y_0,z_0)$,因此有$(x_0-2\sqrt{2},y_0,z_0-2\sqrt{2})=m(0,2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$,

因此 $x_0=2\sqrt{2}$,$y_0=2\sqrt{2}m$,$z_0=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m$,

设 MN 的中点为 $P(x,y,z)$,因此有$\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{2},\\ y=\dfrac{2\sqrt{2}m+n}{2},\\ z=\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m+n}{2}.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ 2\sqrt{2}m+n=2y,\\ 2\sqrt{2}m-n=2\sqrt{2}-2z,\end{cases}$ (1)

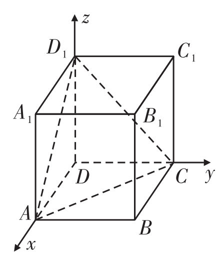
因为$|MN|=3$,所以$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}m-n)^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m-n)^2}=3$,

化简得$(2\sqrt{2}m-n)^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m-n)^2=1$ (2),把(1)代入(2)中得

$(y-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{4}$,显然 MN 中点的轨迹是圆,半径为$\dfrac{1}{2}$.

所以圆的周长为 $2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\pi$.

12. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】**设正方体的棱长为 1,建立空间直角坐标系如图.

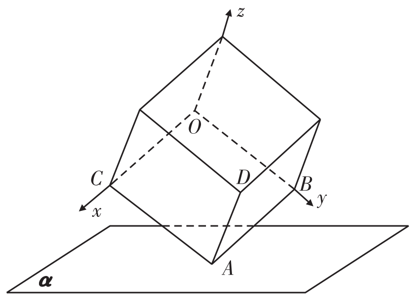


则 $D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$B_1(1,1,1)$.

平面 ACD_1 的一个法向量为$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$.又$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,

则 $\cos\langle\overrightarrow{DB_1},\overrightarrow{BB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\overrightarrow{DB_1}||\overrightarrow{BB_1}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. $\sqrt{5}$ 【解析】 如图，以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$，$C(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$A(3,3,0)$，$D(3,3,3)$，

所以$\overrightarrow{BA}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{CA}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$

设平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则点 B 到平面 α 的距离 $d_1=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|3x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{2}$，①

点 C 到平面 α 的距离 $d_2=\dfrac{|\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|3y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{2}$，②

由①②可得 $|y|=|x|$，$|z|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}|x|$，

所以点 D 到平面 α 的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|3z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{3\sqrt{\dfrac{5}{2}}|x|}{\dfrac{3}{\sqrt{2}}|x|}=\sqrt{5}$.

14. 由题意可知 $AC=a$，$BD=b$，$CD=c$，$AB=d$，

所以 $d^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DB}^2+2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB})$

$=a^2+c^2+b^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=a^2+c^2+b^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$，

则 $2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=a^2+b^2+c^2-d^2$，

设向量$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{DB}$的夹角为 θ，θ 就是库底与水坝所在平面的夹角，

因此 $2ab\cos\theta=a^2+b^2+c^2-d^2$，所以 $\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ab}$，

故库底与水坝所在平面夹角的余弦值为$\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ab}$.

【素质拓展】

15.【解析】(1)证明：连接 DP，CP，设 DP 与 AC 交于点 O，如图 1 所示.

∵四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB\parallel DC$，∴$AD=BC$，$\angle DCA=\angle CAB$，

又 AC 平分$\angle DAB$，∴$\angle DAC=\angle CAB=\angle DCA$，∴$CD=AD$，

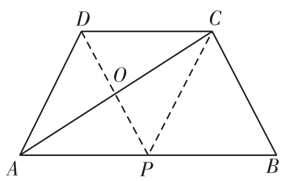


图 1

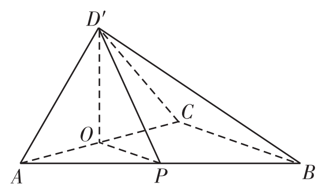


图 2

结合 P 为 AB 的中点，$AB=2AD$，易证得四边形 $APCD$ 为菱形，∴$AC\perp DP$.

如图 2，∵$AC\perp OP$，$AC\perp OD'$，且 $OP\cap OD'=O$，

∴$AC\perp$平面 $D'PO$，又 $PD'\subset$平面 $D'PO$，∴$PD'\perp AC$.

(2)∵二面角 $B-AC-D'$ 为直二面角，$AC\perp OP$，

∴$OP\perp$平面 ACD'，易知 $OP\parallel BC$，

∴$BC\perp$平面 ACD'，∴二面角 $A-D'C-B$ 为直二面角，

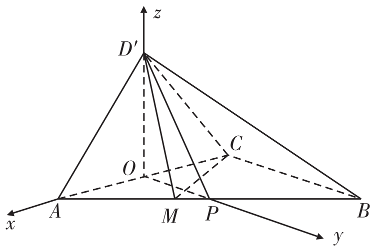
又∵二面角 $A-D'C-M$ 与二面角 $M-D'C-B$ 大小相等，

∴二面角 $A-D'C-M$ 的平面角为 $45°$，

以 O 为坐标原点，OA 所在直线为 x 轴，OP 所在直线为 y 轴，OD' 所在直线为 z 轴，建立如图 3 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，

如图 1，在菱形 $APCD$ 中，易知$\angle PAD=\dfrac{\pi}{3}$，∴$OD=OP=1$，$OA=OC=\sqrt{3}$.

∴$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D'(0,0,1)$，$\overrightarrow{CD'}=(\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$，



设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，∴ $M(\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda,2\lambda,0)$，∴ $\overrightarrow{CM}=(2\sqrt{3}(1-\lambda),2\lambda,0)$，

易知平面 ACD' 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 MCD' 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD'}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2\sqrt{3}(1-\lambda)x+2\lambda y=0,\\ \sqrt{3}x+z=0,\end{cases}$取 $x=1$，

则 $z=-\sqrt{3}$，$y=-\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda},-\sqrt{3}\right)$，

∴ $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}}{\sqrt{1+\left[-\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}\right]^2+3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $\lambda=2\sqrt{3}-3$，满足题意，

故 $\dfrac{AM}{AB}=2\sqrt{3}-3$.

章末整合一

【典型例题】

题型一　空间向量的概念及运算

【例1】(1)1　$\dfrac{1}{4}$　(2)CD　**【解析】**(1)由题意知 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

从而有 $x=1$，$y=\dfrac{1}{4}$.

(2)因为 $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$，所以C正确；又因为底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，$SA=SB=SC=SD=2$，所以 $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=2\times2\times\cos\angle ASB$，$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}=2\times2\times\cos\angle CSD$，而 $\angle ASB=\angle CSD$，于是 $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}$，因此D正确，其余两个都不正确.

【巩固练习1】

1.C　**【解析】**设 $P(0,0,z)$，则有 $\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2+(1-z)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-z)^2}$，解得 $z=3$.

2.解　记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=60°$，

∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}$.

(1) $|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$

$=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$

$=1+1+1+2\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=6$，

∴ $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$.

(2) $\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

∴ $|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，

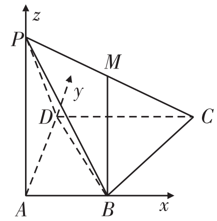
$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

题型二　利用空间向量证明位置关系

【例2】(1)证明　以 A 为原点,以 AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,则 $B(1,0,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,$C(2,2,0)$,$M(1,1,1)$,



$\because\overrightarrow{BM}=(0,1,1)$,平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,

$\therefore\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即$\overrightarrow{BM}\perp\boldsymbol{n}$,

又 $BM\not\subset$平面 PAD,

$\therefore BM\parallel$平面 PAD.

(2)证明　由(1)知,$\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$,

假设平面 PAD 内存在一点 N,使 $MN\perp$平面 PBD.

设 $N(0,y,z)$,则$\overrightarrow{MN}=(-1,y-1,z-1)$,

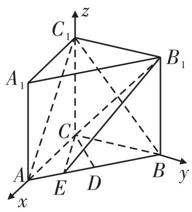
从而 $MN\perp BD$,$MN\perp PB$,

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}1+2(y-1)=0,\\-1-2(z-1)=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}y=\dfrac{1}{2},\\z=\dfrac{1}{2},\end{cases}\therefore N\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$\therefore$在平面 PAD 内存在一点 $N\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,使 $MN\perp$平面 PBD.

【巩固练习 2】

(1)证明　在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中,因为 $AC=3$,$BC=4$,$AB=5$,所以 AC,BC,CC_1两两垂直,以 C 为坐标原点,直线 CA,CB,CC_1分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $C(0,0,0)$,$A(3,0,0)$,$C_1(0,0,4)$,$B(0,4,0)$,$B_1(0,4,4)$.

因为$\overrightarrow{AC}=(-3,0,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,-4,4)$,

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC_1}$,即 $AC\perp BC_1$.

(2)解　假设在 AB 上存在点 E,使得 $AC_1\parallel$平面 CEB_1,

设$\overrightarrow{AE}=t\,\overrightarrow{AB}=(-3t,4t,0)$,其中 $0\leqslant t\leqslant1$.

则 $E(3-3t,4t,0)$,$\overrightarrow{B_1E}=(3-3t,4t-4,-4)$,

$\overrightarrow{B_1C}=(0,-4,-4)$.

又因为$\overrightarrow{AC_1}=m\,\overrightarrow{B_1E}+n\,\overrightarrow{B_1C}$成立,

所以 $m(3-3t)=-3$,$m(4t-4)-4n=0$,

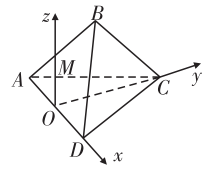
$-4m-4n=4$,

解得 $t=\dfrac{1}{2}$.

所以在 AB 上存在点 E,使得 $AC_1\parallel$平面 CEB_1,这时点 E 为 AB 的中点.

题型三　利用空间向量求空间距离

【例3】解　如图所示,以 AD 的中点 O 为原点,以 OD,OC 所在直线为 x 轴、y 轴,过 O 作 $OM\perp$平面 ACD 交 AB 于 M,以直线 OM 为 z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABC 的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$

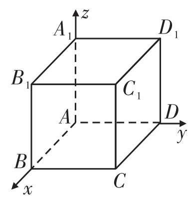
$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$,$z=-\sqrt{3}x$,可取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,3)$,

代入 $d=\frac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$,得 $d=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$,

即点 D 到平面 ABC 的距离是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

【巩固练习 3】

B **【解析】**以点 A 为原点,分别以直线 AB,AD,AA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图,



易知 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$D(0,1,0)$,$A_1(0,0,1)$,则向量 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{3}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

则点 P 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}=\frac{5}{12}$.

题型四　利用空间向量求空间角

【例4】解　(1)由题意得 $A(2,0,0)$,$F\left(1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$B(2,2,0)$,$E(1,1,\sqrt{2})$,$C(0,2,0)$.

$\therefore \overrightarrow{AF}=\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,-1,\sqrt{2})$,

$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=1-2+1=0$.

$\therefore$异面直线 AF 和 BE 所成的角为 90°.

(2)设平面 BEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

又 $\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,-1,\sqrt{2})$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x=0$,$n\cdot\overrightarrow{BE}=-x-y+\sqrt{2}z=0$,

$\therefore x=0$,取 $z=1$,则 $y=\sqrt{2}$,

$\therefore$平面 BEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{22}}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{33}}{33}$.

设直线 AF 和平面 BEC 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{5\sqrt{33}}{33}$,

即直线 AF 和平面 BEC 所成角的正弦值为$\frac{5\sqrt{33}}{33}$.

【巩固练习 4】

解 (1)取 AD 的中点 O,设 $AC\cap BD=E$,连接 OP,OE.

因为 $PA=PD$,所以 $OP\perp AD$,

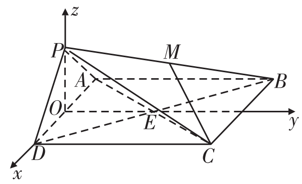
又因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,且 $OP\subset$平面 PAD,

所以 $OP\perp$平面 $ABCD$.

因为 $OE\subset$平面 $ABCD$,所以 $OP\perp OE$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $OE\perp AD$,



如图,建立空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $P(0,0,\sqrt{2})$,$D(2,0,0)$,$B(-2,4,0)$,$\overrightarrow{BD}=(4,-4,0)$,$\overrightarrow{PD}=(2,0,-\sqrt{2})$.

设平面 BDP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}4x-4y=0,\\ 2x-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=1$,$z=\sqrt{2}$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$.

平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(0,1,0)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=\frac{1}{2}$.

所以平面 BDP 与平面 PAD 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

(2)由题意知 $M\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$C(2,4,0)$,

$\overrightarrow{MC}=\left(3,2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设直线 MC 与平面 BDP 所成的角为 α,

则 $\sin\alpha=|\cos\langle n,\overrightarrow{MC}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{MC}|}{|n||\overrightarrow{MC}|}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

所以直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

【章末检测】

1.D **【解析】**由 $l/\!/\alpha$,故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{\mu}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\mu}=0$,故选 D.

2.B **【解析】**设 BC 边的中点为 D,则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(-1,-2,2)$,

所以$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{1+4+4}=3$.

3. A **【解析】**因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x,4,5)\cdot(1,-2,2)=x-8+10=x+2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$,

所以$\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4^2+5^2}\times\sqrt{1+4+4}}$,解得 $x=3$ 或-11(舍去),故选 A.

4. A 【解析】由题意知，$\because \alpha /\!/ \beta$，$\therefore \boldsymbol{u}=\lambda \boldsymbol{v}$，

即$\begin{cases} x=-\lambda, \\ 1=\lambda y, \\ -2=\dfrac{1}{2}\lambda, \end{cases}$ 解得 $\lambda=-4$，$y=-\dfrac{1}{4}$，$x=4$，$\therefore x+y=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$.

5. A 【解析】 如图所示，根据题意可知平面 α 过点 D 且平行于平面 PQF，

则平面 α 可以平移至平面 A_1BC_1，

木块在平面 α 内的正投影即可看成是在平面 A_1BC_1 的正投影，

根据投影的性质可得投影为正六边形 $A_1A'BC'C_1D_1{}'$

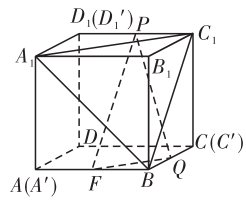
因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

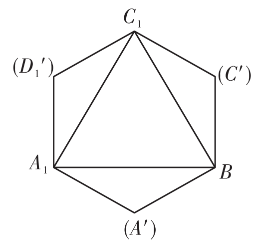
所以 $A_1B=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

则投影面内正六边形的边长为 $A_1A'=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

根据正六边形的面积公式可得投影的面积为

$S_{A_1A'BC'C_1D_1{}'}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=4\sqrt{3}$.





6. B 【解析】如图，以 B 为坐标原点，分别以 BC，BA，BP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(0,0,0)$，$A(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$D(3,3,0)$，$E(0,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{BD}=(3,3,0)$.

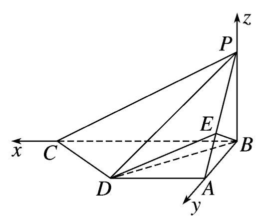
设平面 BED 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=2y+z=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=3x+3y=0, \end{cases}$ 取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$.

又平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

$\therefore$平面 ABE 与平面 BED 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.



7.ABC 【解析】因为$\overrightarrow{PM}=(0,2,4)$，直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，则必须满足$\overrightarrow{PM}$与法向量垂直，把选项代入验证，只有选项 D 不满足，故选 ABC.

8. ACD 【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，由题意可得 $A(3,0,0)$，$B(3,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D'(0,0,1)$，$A'(3,0,1)$，$C'(0,2,1)$，$B'(3,2,1)$.

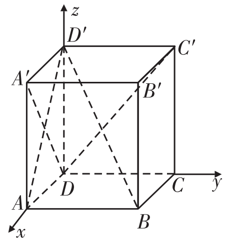
所以$\overrightarrow{BD'}=(-3,-2,1)$，则 A 正确.

而$\overrightarrow{DA'}=(3,0,1)$，$\overrightarrow{BD'}=(-3,-2,1)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{BD'}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{BD'}}{|\overrightarrow{DA'}|\cdot|\overrightarrow{BD'}|}=\dfrac{-8}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{-4\sqrt{35}}{35}$.

所以异面直线 $A'D$ 与 BD' 所成角的余弦值为$\dfrac{4\sqrt{35}}{35}$，则 B 不正确.

设平面 $A'C'D$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ，



由$\overrightarrow{DA'}=(3,0,1)$,$\overrightarrow{DC'}=(0,2,1)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA'}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC'}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}3x+z=0,\\2y+z=0,\end{cases}$取 $z=6$,得 $\boldsymbol{n}=(-2,-3,6)$,则 C 正确.

由上可得平面 $A'C'D$ 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(-2,-3,6)$,

又平面 $A'DD'$ 的法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-3}{1\times7}=-\dfrac{3}{7}$.

所以二面角 $C'-A'D-D'$ 的余弦值为$\dfrac{3}{7}$,则 D 正确.

9.$\dfrac{1}{2}$ 【解析】由于$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1})=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,所以 $m=\dfrac{1}{2}$,$n=-\dfrac{1}{2}$.

10.-2 【解析】 ∵$l\perp\alpha$,直线 l 的方向向量为$(4,2,m)$,平面 α 的法向量为$(2,1,-1)$,

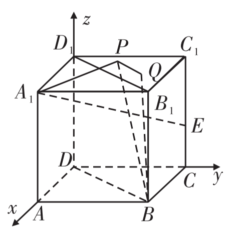
∴直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量平行.

则存在实数 λ 使$(4,2,m)=\lambda(2,1,-1)$,即$\begin{cases}4=2\lambda,\\2=\lambda,\\m=-\lambda,\end{cases}$ ∴$m=-2$.

11.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】不妨设 $CB=1$,则 $B(0,0,1)$,$A(2,0,0)$,$C_1(0,2,0)$,$B_1(0,2,1)$.

∴$\overrightarrow{BC_1}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,1)$.$\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{0+4-1}{\sqrt{5}\times3}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

12.(1)平行 (2)$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 【解析】(1)以 D 为原点,以 DA,DC,DD_1 所在的直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系如图所示,



$A_1(1,0,1)$,$E\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$,$B(1,1,0)$,因为 P,Q 均在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内,

所以设 $P(a,b,1)$,$Q(m,n,1)$,

$\overrightarrow{A_1E}=\left(-1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{BP}=(a-1,b-1,1)$,$\overrightarrow{BQ}=(m-1,n-1,1)$,

因为 $BP\perp A_1E$,$BQ\perp A_1E$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{A_1E}=-(a-1)+(b-1)-\dfrac{1}{2}=0,\\\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{A_1E}=-(m-1)+(n-1)-\dfrac{1}{2}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b-a=\dfrac{1}{2},\\n-m=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$\overrightarrow{PQ}=(n-b,n-b,0)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,所以 PQ 与 BD 的位置关系是平行.

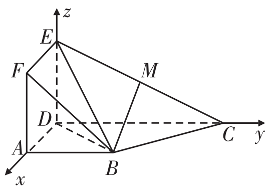
(2)由(1)可知 $b-a=\dfrac{1}{2}$,$|\overrightarrow{A_1P}|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2a^2-a+\dfrac{5}{4}}=\sqrt{2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}}$,当 $a=\dfrac{1}{4}$时,$|\overrightarrow{A_1P}|$有最小值,最小值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

13.证明 ∵平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$,平面 $ADEF\cap$平面 $ABCD=AD$,$AD\perp ED$,$ED\subset$平面 $ADEF$,

∴$ED\perp$平面 $ABCD$.

以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DE}$分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,4,0)$,$E(0,0,2)$,$F(2,0,2)$.

(1)∵M 为 EC 的中点,∴$M(0,2,1)$,

则$\overrightarrow{BM}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{AF}=(0,0,2)$,

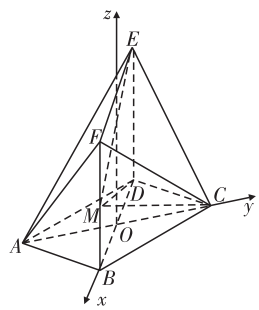
∴$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$,故$\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}$共面.又 $BM\not\subset$平面 $ADEF$,∴BM//平面 $ADEF$.

(2)$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$,

∵$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}=-4+4=0$,∴$BC\perp DB$.又$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,∴$BC\perp DE$.

又 $DE\cap DB=D$,∴$BC\perp$平面 BDE.

14. (1)设 $AC\cap BD=O$,以 O 为原点,OB 所在直线为 x 轴,OC 所在直线为 y 轴,过 O 且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示.



易知 z 轴在平面 $BDEF$ 内,且 $BF//DE//z$ 轴,则 $C(0,\sqrt{3},0)$,$D(-1,0,0)$,$E(-1,0,2)$,$M(1,0,1)$,

∴$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DM}=(2,0,1)$,

设平面 DEC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$取 $x=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,0)$,

∴M 到平面 DEC 的距离 $h=\frac{|\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}$,

又 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}\times DE\times DC=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

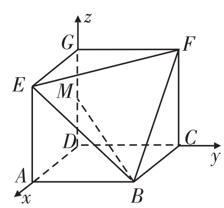
因此,三棱锥 $M-CDE$ 的体积 $V_{M-CDE}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle DEC}\times h=\frac{1}{3}\times2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)证明:由(1)易知 $A(0,-\sqrt{3},0)$,则$\overrightarrow{AC}=(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AE}=(-1,\sqrt{3},2)$,

∵$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DM}=0\times2+2\sqrt{3}\times0+0\times1=0$,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DM}=-1\times2+\sqrt{3}\times0+2\times1=0$,

∴$DM\perp AC$,$DM\perp AE$,∵$AC\cap AE=A$,∴$DM\perp$平面 ACE.

15. (1)证明:因为四边形 $ABCD$,$CDGF$,$ADGE$ 均为正方形,



所以 $GD\perp DA$,$GD\perp DC$,$AD\perp CD$,

又 $DA\cap DC=D$,所以 $GD\perp$平面 $ABCD$.

以点 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,

则 $B(1,1,0)$,$E(1,0,1)$,$F(0,1,1)$.

因为点 M 在边 DG 上,故可设 $M(0,0,t)(0\leqslant t\leqslant1)$.

可得$\overrightarrow{MB}=(1,1,-t)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$,

所以$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{EF}=1\times(-1)+1\times1+(-t)\times0=0$,所以 $BM\perp EF$.

(2)解 假设存在点 M,使得直线 MB 与平面 BEF 所成的角为 $45°$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,因为$\overrightarrow{BE}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-y+z=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令 $z=1$,得 $x=y=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面 BEF 的一个法向量,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{2-t}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+t^2}}$.

因为直线 MB 与平面 BEF 所成的角为 $45°$,所以 $\sin 45°=|\cos\langle n,\overrightarrow{MB}\rangle|$,

所以 $\left|\dfrac{2-t}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+t^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $t=-4\pm3\sqrt{2}$.

又 $0\leqslant t\leqslant1$,所以 $t=3\sqrt{2}-4$.所以存在点 $M(0,0,3\sqrt{2}-4)$.

所以当点 M 位于 DG 上,且 $DM=3\sqrt{2}-4$ 时,直线 MB 与平面 BEF 所成的角为 $45°$.

第二章　直线和圆的方程

2.1　直线的倾斜角与斜率

第 1 课时　倾斜角与斜率

【课时清单】

1.x 轴正向　向上　$0°\leqslant\alpha<180°$　倾斜程度　倾斜角

2.倾斜角的正切值　$k=\tan\alpha,\alpha\neq90°$

3.$90°$　0　$(0,+\infty)$　$(-\infty,0)$

【典型例题】

【例1】$P\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$或$(0,2-\sqrt{3})$

【例2】(1)$m=\dfrac{3}{2}$　(2)$m=1$　(3) $1<m<2$

【基础夯实】

1.B　2.D　3.C　4.CD

5.$30°$　6.$\dfrac{\pi}{6}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　7.$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3})$　8.$-\dfrac{2}{3}$

9.直线 OD,BC 的倾斜角都是 $60°$,斜率都是 $\tan60°=\sqrt{3}$;

直线 DC,OB 的倾斜角都是 $0°$,斜率也都为 0;

直线 OC 的倾斜角为 $30°$,斜率 $k_{OC}=\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

直线 BD 的倾斜角为$\angle DBx=180°-60°=120°$,斜率 $k_{BD}=\tan120°=-\sqrt{3}$.

【能力提升】

10.D　11.ACD

12.$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

13.(1)$k_{AB}=0,k_{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(2)k_{CD}由k_{CA}增大到k_{CB},所以 k_{CD}的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$　14.$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【素质拓展】

15.解:(1)设点 A,B 的横坐标分别为 x_1,x_2 由题设知,$x_1>1,x_2>1$.则点 A,B 纵坐标分别为$\log_8x_1$、$\log_8x_2$.

因为 A,B 在过点 O 的直线上,所以$\dfrac{\log_8x_1}{x_1}=\dfrac{\log_8x_2}{x_2}$.

点 C,D 的坐标分别为$(x_1,\log_2x_1),(x_2,\log_2x_2)$.

由于$\log_2 x_1=\dfrac{\log_8 x_1}{\log_8 2}=3\log_8 x_1$,$\log_2 x_2=\dfrac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2$.

OC 的斜率 $k_1=\dfrac{\log_2 x_1}{x_1}=\dfrac{3\log_8 x_1}{x_1}$,$OD$ 的斜率 $k_2=\dfrac{\log_2 x_2}{x_2}=\dfrac{3\log_8 x_2}{x_2}$.

由此可知,$k_1=k_2$,即点 O,C,D 在同一条直线上.

(2)由 BC 平行于 x 轴知$\log_2 x_1=\log_8 x_2$,即$\log_2 x_1=\dfrac{1}{3}\log_2 x_2$,$\therefore x_2=x_1^3$.

把 $x_2=x_1{}^3$ 代入 $x_2\log_8 x_1=x_1\log_8 x_2$ 得 $x_1^3\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1$.

由于 $x_1>1$ 知$\log_8 x_1\neq0$,$\therefore x_1^3=3x_1$.考虑 $x_1>1$,解得 $x_1=\sqrt{3}$.

于是点 A 的坐标为$(\sqrt{3},\log_8\sqrt{3})$.

第2课时　两条直线平行和垂直的判定

【课时清单】

1.$k_1=k_2$　平行　2.$k_1k_2=-1$

【典型例题】

【例1】(1)$m=-\dfrac{3}{2}$或1　(2)$m=\dfrac{3}{2}$或-3　(3)$m=\dfrac{3}{4}$或-1

【例2】四边形 $OPQR$ 为矩形

【基础夯实】

1.D　2.C　3.D　4.C

5.-10　6.$(0,0)$或$(5,0)$　7.-2或1　8.2　$-\dfrac{9}{8}$

9.(1)$m=4,n\neq-2$或$m=-4,n\neq-2$　(2)$m=0,n\in\mathbf{R}$

【能力提升】

10.B　11.B

12.垂直　13.$m=4+\sqrt{3}$　14.$\dfrac{5}{2}$

【素质拓展】

15.解:(1)设顶点 R 的坐标为(x,y),

由题意知 $k_{OP}=\dfrac{t-0}{1-0}=t$,$k_{PQ}=\dfrac{2+t-t}{1-2t-1}=-\dfrac{1}{t}$,

易知 $OP//QR$,$PQ//OR$,

所以 $t=\dfrac{y-2-t}{x-1+2t}$,$-\dfrac{1}{t}=\dfrac{y-0}{x-0}$,

解得$\begin{cases}x=-2t,\\y=2,\end{cases}$即顶点 R 的坐标为$(-2t,2)$.

(2)易得 $S_{矩形OPQR}=|OP|\cdot|OR|=2(1+t^2)$.

①如图1,当$1-2t\geqslant0$,即$0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$时,设线段 RQ 与 y 轴交于点 M,易知直线 RQ 的方程为 $y-2=t(x+2t)$,则点 M 的坐标为$(0,2+2t^2)$,所以 $S_{\triangle OMR}=\dfrac{1}{2}|OM||x_R|=2t(1+t^2)$,所以 $S(t)=S_{矩形OPQR}-S_{\triangle OMR}=2(1-t)(1+t^2)$.

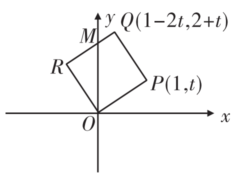


图1

②如图2,当 $1-2t<0$,即 $t>\frac{1}{2}$ 时,设线段 QP 与 y 轴交于点 N,易知直线 QP 的方程为 $y-t=-\frac{1}{t}(x-1)$,则点 N 的坐标是 $\left(0,t+\frac{1}{t}\right)$,所以 $S(t)=S_{\triangle OPN}=\frac{1}{2}|ON|\cdot x_P=\frac{1+t^2}{2t}$.综上,$S(t)=\begin{cases}2(1-t)(1+t^2),0<t\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{1+t^2}{2t},t>\frac{1}{2}.\end{cases}$

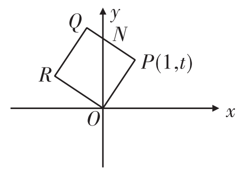


图2

2.2 直线的方程

第1课时 直线的点斜式方程

【课时清单】

1.$y-y_0=k(x-x_0)$　2.$y=kx+b$　(2)横坐标或纵坐标

【典型例题】

【例1】(1)$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$　(2)$x-y+1=0$ 或 $x+y-7=0$

【例2】$x=2$ 或 $y=\frac{1}{2}x+1$

【基础夯实】

1.D　2.D　3.A　4.C

5.-7　6.$k\geqslant\frac{3}{2}$　7.$k\geqslant1$ 或 $k\leqslant-1$

8.$y+3=\frac{4}{3}(x-0)$或 $y-1=\frac{4}{3}(x-3)$

9.(1)直角三角形　(2)$3x+4y-1=0$

【能力提升】

10.B　11.BCD

12.$(-4,0)$　13.(1)$2x+3y-4=0$　(2)$2x+y-8=0$

14.(1)$k\geqslant0$　(2)$S_{\min}=16$,直线 l:$x-2y+8=0$

【素质拓展】

15.(1) ①当 $k=0$ 时,此时 A 点与 D 点重合,折痕所在的直线方程 $y=\frac{1}{2}$;

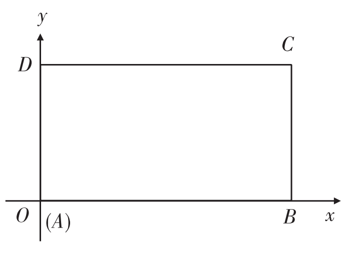
②当 $k\neq0$ 时,将矩形折叠后 A 点落在线段 DC 上的点记为 $G(a,1)$,

所以 A 与 G 关于折痕所在的直线对称,

有 $k_{OG}\cdot k=-1\Rightarrow\frac{1}{a}\cdot k=-1\Rightarrow a=-k$,故 G 点的坐标为 $G(-k,1)$,

从而折痕所在的直线与 OG 的交点坐标(线段 OG 的中点)为 $M\left(-\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$,

折痕所在的直线方程为 $y-\frac{1}{2}=k\left(x+\frac{k}{2}\right)$,即 $y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.



由①②得折痕所在的直线方程为 $y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.

(2)当 $k=0$ 时,折痕的长为2.

当$-2+\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 0$时,折痕直线交$BC$于点$M\left(2,2k+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$,交$y$轴于点$N\left(0,\frac{k^2+1}{2}\right)$,

$\because y=|MN|^2=2^2+\left[\frac{k^2+1}{2}-\left(2k+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^2=4+4k^2\leqslant 4+4(7-4\sqrt{3})=32-16\sqrt{3}$,

$\therefore$折痕长度的最大值为$\sqrt{32-16\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

而$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})>2$,故折痕长度的最大值为$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

(3)当$-2\leqslant k\leqslant -1$时,折痕直线交$DC$于点$P\left(\frac{1}{2k}-\frac{k}{2},1\right)$,交$x$轴于点$Q\left(-\frac{k^2+1}{2k},0\right)$,

$\because |PQ|^2=1^2+\left[-\frac{k^2+1}{2k}-\left(\frac{1}{2k}-\frac{k}{2}\right)\right]^2=1+\frac{1}{k^2}$,$\therefore t=k(2|PQ|^2-1)=k+\frac{2}{k}$.

$\because -2\leqslant k\leqslant -1$,$\therefore k+\frac{2}{k}\leqslant -2\sqrt{2}$(当且仅当$k=-\sqrt{2}\in(-2,-1)$时取“=”号).

$\therefore$当$k=-\sqrt{2}$时,t取最大值,t的最大值是$-2\sqrt{2}$.

第2课时　直线的两点式方程

【课时清单】

1.$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$　2.$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

【典型例题】

【例1】$3x+y-6=0$

【例2】(1)$x+2y-4=0$　(2)$x+2y+2=0$

【基础夯实】

1.C　2.A　3.B　4.D

5.-2　6.$y=-x+2$　7.64　8.$5x-6y+1=0$　9.$9x+2y+12=0$或$x+2y-4=0$

【能力提升】

10.AD　11.B

12.$x+2y-6=0$　13.$7x+24y+31=0$　14.(1)$a=0$或2　(2)$(-\infty,-1]$

【素质拓展】

15.(1)$2x+y-6=0$或$8x+y-12=0$　(2)$S_{\min}=8$;$4x+y-8=0$

第3课时　直线的一般式方程

【课时清单】

1. 一条直线　$Ax+By+C=0$(其中A,B不同时为0)

2.(1)$A_1B_2-A_2B_1=0$且$B_1C_2-B_2C_1\neq 0$(或$A_1C_2-A_2C_1\neq 0$)　(2)$A_1A_2+B_1B_2=0$

3.(1)$Ax+By+m=0(m\neq C)$　(2)$Bx-Ay+m=0$

【典型例题】

【例1】(1)$3x+2y-12=0$　(2)$3x+2y+7=0$　(3)$2x-3y+9=0$

【例2】(1)$m=2$或-3　(2)$a=\pm 1$

【基础夯实】

1.A　2.B　3.B　4.BC

5.$-\frac{1}{3}$　6.(1)2　2　(2)$\frac{3}{4}$　3　7.$(-2,0)$　8.$\frac{25}{2}$

9.(1)$3x-2y+1=0$　(2)$2x+3y-8=0$

【能力提升】

10.A　11.D

12.$\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]$

13.(1)$(-1,-2)$　(2)$m=\frac{4}{7}$;$2\sqrt{13}$　(3)最小值为 4;此时直线的方程 $2x+y+4=0$.

14.动直线 $mx+y=0$ 过定点 $A(0,0)$,动直线 $x-my-m+3=0$

即 $x+3-m(y+1)=0$ 过定点 $B(-3,-1)$,且此两条直线垂直.

∴点 P 在以 AB 为直径的圆上,$|AB|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

设$\angle ABP=\theta$,则$|PA|=\sqrt{10}\sin\theta$,$|PB|=\sqrt{10}\cos\theta$,$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

∴$|PA|+\sqrt{3}|PB|=\sqrt{10}\sin\theta+\sqrt{30}\cos\theta=2\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$,

∵$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,∴$\theta+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$,

∴$\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\in[\frac{1}{2},1]$,

∴$|PA|+\sqrt{3}|PB|=2\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\in[\sqrt{10},2\sqrt{10}]$.

【素质拓展】

15.(1)$P(2,3)$

(2)由$(a+1)x+y-5-2a=0$得,

当 $x=0$ 时,$y_B=5+2a$,当 $y=0$ 时,$x_A=\frac{5+2a}{a+1}$,

又由$\begin{cases}y_B=5+2a>0\\x_A=\frac{5+2a}{a+1}>0,\end{cases}$得 $a>-1$,

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot(5+2a)\cdot\frac{5+2a}{a+1}=\frac{1}{2}\left[4(a+1)+\frac{9}{a+1}+12\right]\geqslant\frac{1}{2}\left[2\sqrt{4(a+1)\cdot\frac{9}{a+1}}+12\right]=12$,

当且仅当 $4(a+1)=\frac{9}{a+1}$,即 $a=\frac{1}{2}$时,取等号.

∴$A(4,0)$,$B(0,6)$,

∴$\triangle AOB$ 的周长为$OA+OB+AB=4+6+\sqrt{4^2+6^2}=10+2\sqrt{13}$.

∴直线方程为 $3x+2y-12=0$.

(3)直线 l 在两坐标轴上的截距均为正整数,即 $5+2a$,$\frac{5+2a}{a+1}$均为正整数,而 a 也为正整数,∵$\frac{5+2a}{a+1}=2+\frac{3}{a+1}$,∴$a=2$ 即直线 l 的方程为 $3x+y-9=0$.

2.3　直线的交点坐标与距离公式

第 1 课时　两条直线的交点坐标

【课时清单】

2.相交　重合　平行

【典型例题】

【例1】$3x-2y+9=0$

【例2】$5x-4y+2=0$，$4x-5y+1=0$

【基础夯实】

1.C　2.A　3.A　4.C

5.$(3,3)$　6.-2　7.$2x-y=0$　8.$27x+54y+37=0$

9.(1)$(2,1)$　(2)$y=\frac{1}{2}x$ 或 $2x+y-5=0$

【能力提升】

10.BD　11.D

12.$[2,+\infty)$　13.(1)$A'\left(-\frac{33}{13},\frac{4}{13}\right)$　(2)$9x-46y+102=0$　(3)$2x-3y-9=0$

14.解:(1)如图,可判断A,B在直线l的同侧,设点A关于l的对称点A'的坐标为(x_1,y_1).

则有$\begin{cases}\frac{x_1+2}{2}+2\cdot\frac{y_1+3}{2}-2=0,\\ \frac{y_1-3}{x_1-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{5},\\ y_1=-\frac{9}{5}.\end{cases}$

由两点式求得直线$A'B$的方程为$y=\frac{7}{11}(x-4)+1$.由平面几何知识可知,当点P为直线$A'B$与直线l的交点时,$|PA|+|PB|$最小,此时$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|=|A'B|$,若$P$不在此点时,$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|>|A'B|$.

由$\begin{cases}y=\frac{7}{11}(x-4)+1,\\ x+2y-2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{56}{25},\\ y=-\frac{3}{25},\end{cases}$即直线$A'B$与$l$的交点$P$的坐标为$\left(\frac{56}{25},-\frac{3}{25}\right)$.

(2)由点斜式求得直线AB的方程为$y-1=-(x-4)$,即$x+y-5=0$.由平面几何知识可知,当点P为直线AB与l的交点时,$|PA|-|PB|$最大,此时$|PA|-|PB|=|AB|$.

由$\begin{cases}y-1=-(x-4),\\ x+2y-2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=8,\\ y=-3,\end{cases}$即直线$AB$与$l$的交点$P$的坐标为$(8,-3)$.

【素质拓展】

15.(1)$a>\frac{1}{2}$

(2)当直线l的斜率不存在时,即$B(2,0)$,$A(2,4)$,此时$S=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

当直线l的斜率存在时,设直线l的方程为$y=k(x-2)+3$,

由于斜率存在,则$a>\frac{1}{2}$且$a\neq2$,又$\because k_{BP}=\frac{3}{2-a}$,$\therefore k>2$或$k<0$.

由$\begin{cases}y=k(x-2)+3,\\ y=2x,\end{cases}$得$A\left(\frac{3-2k}{2-k},\frac{6-4k}{2-k}\right)$,

则$S=\frac{1}{2}\times\frac{2k-3}{k}\times\frac{6-4k}{2-k}=\frac{4k^2-12k+9}{k^2-2k}$,

即$(4-S)k^2-(12-2S)k+9=0$.

由$\Delta=(12-2S)^2-36(4-S)\geqslant0$,整理得$S(S-3)\geqslant0$,

则$S\geqslant3$,即S的最小值为3,此时$k^2-6k+9=0$,解得$k=3$.

则直线 l 的方程为 $y=3(x-2)+3=3x-3$.

第 2 课时　两点间的距离公式

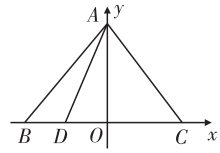
【课时清单】

1.(1)$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　(2)②$|x_2-x_1|$　$|y_2-y_1|$

【典型例题】

【例1】(1)$(-2,-5)$　(2)14

【例2】证明:如图,以 BC 的中点为原点 O,BC 所在的直线为 x 轴,建立直角坐标系.



设 $A(0,a)$,$B(-b,0)$,$C(b,0)$,$D(m,0)(-b<m<b)$.

则 $|AB|^2=(-b-0)^2+(0-a)^2=a^2+b^2$,

$|AD|^2=(m-0)^2+(0-a)^2=m^2+a^2$,

$|BD|\cdot|DC|=|m+b|\cdot|b-m|=(b+m)(b-m)=b^2-m^2$,所以 $|AD^2|+|BD|\cdot|DC|=a^2+b^2$,

所以 $|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$.

【基础夯实】

1.A　2.A　3. B　4.B　5.$\sqrt{17}$　6.$\frac{1}{2}$

7.10　**【解析】**将直角三角形的直角顶点 C 与原点重合,设 $B(a,0)$,$A(0,b)$,那么 $D\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$,$P\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4}\right)$.

$$\therefore \frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\frac{\frac{a^2}{16}+\frac{9b^2}{16}+\frac{9}{16}a^2+\frac{b^2}{16}}{\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{16}}=10.$$

8.$\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$　9.最小值为 a^2,此时点 P 的坐标为$(0,\frac{\sqrt{3}}{6}a)$.

【能力提升】

10.B　11.A

12.$\sqrt{3}$　**【解析】**由题意,设点 $P(1-my,y)$.

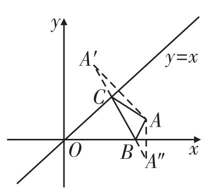
$\because |PA|=2|PB|$,$\therefore |PA|^2=4\,|PB|^2$,即 $(1-my-1)^2+y^2=4[(1-my-4)^2+y^2]$,

整理得 $(m^2+1)y^2+8my+12=0$,则 $\Delta=(8m)^2-4(m^2+1)\times12\geqslant0$,

解得 $m\geqslant\sqrt{3}$ 或 $m\leqslant-\sqrt{3}$.$\because m>0$,$\therefore m\geqslant\sqrt{3}$,$\therefore m_{\min}=\sqrt{3}$.

13.(1)垂直,$P\left(\frac{-t-1}{t^2+1},\frac{-t+1}{t^2+1}\right)$　(2)$[1,\sqrt{2}]$,$|OP|$最小时,$P(-1,0)$或 $P(0,1)$,$|OP|$最大时,$P(-1,1)$.

14.作 $A(3,1)$关于 $y=x$ 的对称点 $A'(1,3)$,关于 x 轴的对称点 $A''(3,-1)$,根据两点间线段最短,则$|A'A''|$的长即为所求.

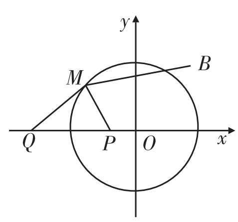


则 $|AC|=|A'C|$,$|AB|=|A''B|$,

$\therefore \triangle ABC$ 周长的最小值为 $|A'A''|=\sqrt{(1-3)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$.

【素质拓展】

15.设 $Q(a,0)$,$M(x,y)$,因为$\frac{|MQ|}{|MP|}=\lambda$ 且 $\lambda=2$,所以$\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}}=2$,整理可得



$x^2+y^2+\frac{4+2a}{3}x=\frac{a^2-1}{3}$,又动点 M 的轨迹是 $x^2+y^2=1$,所以 $\begin{cases}\frac{4+2a}{3}=0,\\ \frac{a^2-1}{3}=1,\end{cases}$ 解得 $a=-2$,所以 $Q(-2,0)$,又 $|MQ|=2|MP|$,所以 $2|MP|+|MB|=|MQ|+|MB|$,因为 $B(1,1)$,所以 $2|MP|+|MB|$ 的最小值为 $|BQ|=\sqrt{(1+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$.

第3课时　点到直线的距离公式

【课时清单】

3.$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【典型例题】

【例1】$x=-1$ 或 $x+3y-5=0$

【例2】设圆心 O,点 A 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2,则 $d_1=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,$d_2=\frac{|m-1|}{\sqrt{1+k^2}}$,

根据 $\angle BAC=60°$,可得 BC 对的圆心角 $\angle BOC=120°$,则 $BC=\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times OB\times OC\times\sin\angle BOC=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{|m-1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4},\end{cases}$ $\therefore k=\pm\sqrt{3}$,$m=-1$.

【基础夯实】

1.D　2.A　3. D　4.C

5.$\frac{1}{2}$或-6　6.$(-1,0)$或$\left(\frac{5}{3},8\right)$

7.$4x-3y-5=0$ 或 $x=2$　8.$3\sqrt{2}$　9.(1)$(3m,m^2-m)$　(2)$\sqrt{2}$

【能力提升】

10.B　11.A

12.$\sqrt{2}$　13.当 $\sqrt{m}=\frac{3}{2}$,即 $m=\frac{9}{4}$ 时,$\triangle ABC$ 的面积 S 最大.

14.(1)第一步,在直线 $y=2x+1$ 上取两点 $A(0,1)$ 和 $B(1,3)$,则向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$;

第二步,设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$ 且 $\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{n}$,则有 $x+2y=0$,令 $y=1$,则 $x=-2$,即 $\boldsymbol{n}=(-2,1)$;

第三步,$\overrightarrow{PA}=(-1,0)$,在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量

$$\overrightarrow{PA_1}=\frac{|\overrightarrow{PA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{|\overrightarrow{PA}|\cdot\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{2}{(\sqrt{(-2)^2+1^2})^2}\cdot(-2,1)$$

$$=(-\frac{4}{5},\frac{2}{5});$$

第四步,求出距离 $d=|\overrightarrow{PA_1}|=\sqrt{(-\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以点 $P(1,1)$ 到直线 $y=2x+1$ 的距离为 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

(2)第一步,在直线 $y=kx+b$ 上取两点 $A(0,b)$ 和 $B(1,k+b)$,则向量 $\overrightarrow{AB}=(1,k)$;

第二步,设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$ 且 $\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{n}$,则有 $x+ky=0$,令 $y=1$,则 $x=-k$,即 $\boldsymbol{n}=(-k,1)$;

第三步,$\overrightarrow{PA}=(-x_0,b-y_0)$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量

$$\overrightarrow{PA_1}=\frac{|\overrightarrow{PA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{PA_1},\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{|\overrightarrow{PA}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{kx_0+b-y_0}{(\sqrt{(-k)^2+1^2})^2}\cdot(-k,1)$$

$$=\frac{kx_0+b-y_0}{k^2+1}\cdot(-k,1);$$

第四步,求出距离 $d=|\overrightarrow{PA_1}|=\left|\dfrac{kx_0-y_0+b}{k^2+1}\right|\cdot\sqrt{k^2+1}=\dfrac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{k^2+1}}$.

所以点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离为 $\dfrac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{k^2+1}}$.

【素质拓展】

15.解:(1)设交点为 $(k,2k)$,则直线 l 的方程为 $y-2k=k(x-k)$,即 $kx-y-k^2+2k=0$.

点 $(-2,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-2k-k^2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{k^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 关于 k^2 单调递增,所以,当 $k=0$ 时,距离最小为 0,此时直线 l 的方程为 $y=0$.

(2)因为 $d(a)=\dfrac{|-2k-a-k^2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|k^2+a|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{k^2+1+\dfrac{(a-1)^2}{k^2+1}+2(a-1)}$,

因为设 $t=k^2+1\geqslant1$,$d(a)=f(t)=\sqrt{t+\dfrac{(a-1)^2}{t}+2(a-1)}$,

所以当 $(a-1)^2\geqslant1$,即 $a\geqslant2$ 或 $a\leqslant0$ 时,$d(a)=\sqrt{2|a-1|+2(a-1)}=\begin{cases}2\sqrt{a-1}, & a\geqslant2\\ 0, & a\leqslant0\end{cases}$;

当 $(a-1)^2<1$ 即 $0<a<2$ 时,$f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,$d(a)=f(1)=|a|=a$.

综上,$d(a)=\begin{cases}2\sqrt{a-1}, & a\geqslant2,\\ a, & 0<a<2,\\ 0, & a\leqslant0.\end{cases}$

第 4 课时　两条平行直线间的距离

【课时清单】

3.(2)$\dfrac{|b_1-b_2|}{\sqrt{k^2+1}}$　$\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【典型例题】

【例1】(1)$3x-2y-25=0$ 或 $3x-2y-9=0$

(2)$l_1:12x-5y+5=0$,$l_2:12x-5y-60=0$ 或 $l_1:x=0$,$l_2:x=5$

【例2】$x-7y+19=0$ 或 $7x+y-17=0$

【基础夯实】

1.D　2.AB　3. A　4.A

5.$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$　6.$\dfrac{5}{2}$　7.$3x-y-2=0$

8.$2\sqrt{3}$　【提示】$\because l_1//l_2$,$\therefore a^2=b$,若 $a=0$,则 $b=0$,不合题意,$\therefore a\neq0$;

$\therefore l_2$ 方程可化为 $ax+by+ab=0$,

$\therefore l_1,l_2$ 间的距离 $d=\dfrac{|a-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$,解得 $b=3$,

$\therefore P(a,b)$ 到坐标原点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2+b}=2\sqrt{3}$.

9.$P\left(-\dfrac{13}{20},-\dfrac{1}{20}\right)$ 或 $P\left(\dfrac{1}{20},\dfrac{27}{20}\right)$

【能力提升】

10.C　11.A　12.4

13.(1)$4x+y-3=0$

(2)设 l 的方程为 $y-1=-m(x-1)$,令 $y=0$,得 $x=1+\dfrac{1}{m}$;令 $x=0$,得 $y=m+1$,

即 $P\left(1+\dfrac{1}{m},0\right)$,$Q(0,1+m)$.从而可得直线 PR 和 QS 的方程分别为

$x-4y-1-\dfrac{1}{m}=0$ 和 $x-4y+4(1+m)=0$,

又 $PR//QS$,$PR\perp RS$,$\therefore RS$ 为两平行线 PR,QS 的距离,

$\because m>0$,$\therefore |RS|=\dfrac{\left|4m+4+1+\dfrac{1}{m}\right|}{\sqrt{17}}=\dfrac{4m+\dfrac{1}{m}+5}{\sqrt{17}}\geqslant\dfrac{9}{\sqrt{17}}=\dfrac{9\sqrt{17}}{17}$.

当且仅当 $m=\dfrac{1}{2}$ 等号成立.

14.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$,$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$,

由 $x_1{}^2+y_1{}^2=1$,$x_2{}^2+y_2{}^2=1$,$x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{1}{2}$,可得 A,B 两点在圆 $x^2+y^2=1$ 上,

且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos\angle AOB=\dfrac{1}{2}$,即有 $\angle AOB=60^\circ$,即三角形 OAB 为等边三角形,$AB=1$,

$\dfrac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\dfrac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为 A,B 两点到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d_1 与 d_2 之和,

显然 A,B 在第三象限,AB 所在直线与直线 $x+y=1$ 平行,

可设 AB:$x+y+t=0(t>0)$,

由圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{2}}$,可得 $2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}=1$,解得 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

即两平行线间的距离为 $\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$,

即 $\dfrac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\dfrac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

【素质拓展】

15.(1)当 $a=1$,$b=2$ 时,曲线 C 的方程是 $|x|+\dfrac{|y|}{2}=1$,对绝对值内的数进行讨论,得到四条直线围成一个菱形,并求出面积为 4.

(2)对 x,y 进行讨论,化简曲线方程,并与直线方程联立,求出点 M,N 的坐标,由 $OM\perp ON$ 得到 a,b 的关系式为 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+2$,再利用点到直线的距离公式 $d=\dfrac{\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}{\sqrt{2}}$,从而求得 $d_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

2.4 圆的方程

第1课时 圆的标准方程

【课时清单】

1.$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (a,b) $r(r>0)$

2.(1)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ (2)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$ (3)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

【典型例题】

【例1】$(x-1)^2+(y-3)^2=10$或$(x-1)^2+(y-5)^2=10$

【例2】$(-\frac{1}{13},\frac{1}{13})$

【基础夯实】

1.B 2.B 3.D 4.A

5.$\frac{1}{2}$ 6.$(x-2)^2+(y-4)^2=2$ 7.$x-\sqrt{3}y+2=0$ 8.$x-y-3=0$ 9.$(x-2)^2+y^2=10$

【能力提升】

10.B 11.D

12.$\sqrt{26}+2$

13.$(x-4)^2+(y-1)^2=5$ 14.$(x-1)^2+(y-3)^2=9$或$(x+1)^2+(y+3)^2=9$

【素质拓展】

15.(1)$(x+2)^2+(y+2)^2=25$或$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

(2)是定值,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-|OA|\cdot|OB|=-3$.

第2课时 圆的一般方程

【课时清单】

1.$D^2+E^2-4F>0$ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

2.(1)标准方程 一般方程 (2)一般方程 标准方程

【典型例题】

【例1】(1)不能表示圆 (2)不能表示圆 (3)表示圆 圆心$\left(\frac{5}{4},0\right)$ $r=\frac{5}{4}$

【例2】$(x+1)^2+y^2=4$

【基础夯实】

1.C 2.D 3.B 4.B 5.$x-y+1=0$ 6.$x^2+y^2-4x-3y=0$ 7.1 8.$(0,-1)$

9.$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

【能力提升】

10.C 11.B 12.$2\sqrt{2}$ 13.$3-\sqrt{2}$

14.(1)$(-\infty,0)\cup(0,1)$ (2)$x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$ (3)$(0,1),(-2,1)$

【素质拓展】

15.(1)$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ (2)$a=-1$

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

第1课时 直线与圆的位置关系(一)

【课时清单】

1.(1)相交 (2)相切 (3)相离

2.方法一(1)相离 (2)①相交 ②相切 方法二(1)相交 (2)相切 (3)相离

【典型例题】

【例1】点(a,b)在圆$x^2+y^2=r^2$外.

【例2】$24x-7y-20=0$或$x=2$.

【基础夯实】

1.C 2.C 3.D 4.A

5.相交 6.$2x-y=0$ 7.$\frac{\pi}{3}$ 8.$2\sqrt{2}$ 9.(1)$A(-4,4)$,$B(1,-1)$ (2)$x^2+y^2+3x-3y-8=0$

【能力提升】

10.B 11.C 12.3 13.(1)$x=4$或$3x+4y-8=0$ (2)$2\sqrt{2}$

14.$3x+4y-3=0$或$4x+3y+3=0$

【素质拓展】

15.$2\sqrt{2}$

第2课时 直线与圆的位置关系(二)

【典型例题】

【例1】$x^2+y^2=16$

【例2】$\sqrt{293}$

【基础夯实】

1.A 2.B 3.C 4.D

5.充分不必要条件 6.$x+y-\sqrt{2}=0$ 7.6 8.$2\sqrt{15}$

9.大约90分钟后开始受影响,持续时间10 h.

【能力提升】

10.A 11.C

12.$\sqrt{7}$ 13.$x+y-3=0$ 14.$-1<k\leqslant 1$或$k=-\sqrt{2}$

【素质拓展】

15.$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

第3课时 圆与圆的位置关系

【课时清单】

2.(3)相交 外切 外离 内切 内含

【典型例题】

【例1】(1)$m=-5$,$m=2$ (2)$-2<m<-1$

【例2】(1)略 (2)$x+y-2=0$

【基础夯实】

1.C　2.A　3.C　4.D

5.$x-y+2=0$　6.-9或11　7.$\sqrt{2}$　8.$\frac{9}{4}$　9.(1)略　(2)$4x+3y-23=0$　$2\sqrt{7}$

【能力提升】

10.D　11.1　12.$y=\frac{1}{6}x^2$　13.$x=0,y+4=0,4x-3y=0,3x+4y+10=0$

14.(1)$(x-3)^2+(y-2)^2=1$　(2)$[0,\frac{12}{5}]$

【素质拓展】

15.证明:令圆O的方程为$x^2+y^2=r^2$.　①

EF与CD相交于点H,令$C(x_1,y_1)$,则可得圆C的方程为

$(x-x_1)+(y-y_1)^2=y_1{}^2$,即$x^2+y^2-2x_1x-2y_1y+x_1{}^2=0$.　②

①−②得$2x_1x+2y_1y-r^2-x_1{}^2=0$.　③

③式就是直线EF的方程,设CD的中点为H',其坐标为$\left(x_1,\frac{y_1}{2}\right)$,

将H'的坐标代入③式,得$2x_1^2+2y_1\cdot\frac{y_1}{2}-r^2-x_1^2=2x_1^2+y_1^2-r^2-x_1^2=x_1^2+y_1^2-r^2=0$.

即H'在EF上,$\therefore EF$平分CD.

章末整合二

【典型例题】

【例1】$2x+11y+16=0$

【巩固练习1】

(1)A　(2)(2,4)

【例2】(1)(1,1)　(2)$x+y-2=0$　(3)存在,$x-y=0$

【巩固练习2】

(1)D　(2)$[4,8],[8,32],[1-\frac{\sqrt{6}}{2},1+\frac{\sqrt{6}}{2}]$

【例3】(1)解:不能出现$AC\perp BC$的情况,理由如下:

设$A(x_1,0),B(x_2,0)$,则x_1,x_2满足$x^2+mx-2=0$,所以$x_1x_2=-2$.

又点C的坐标为(0,1),故AC的斜率与BC的斜率之积为$\frac{-1}{x_1}\cdot\frac{-1}{x_2}=-\frac{1}{2}$,

所以不能出现$AC\perp BC$的情况.

(2)证明:设过A,B,C三点的圆的方程是$x^2+mx-2+y^2+ty=0$

因此圆过点(0,1),所以$t=1$,所以方程为$x^2+y^2+mx+y-2=0$.

令$x=0$,得$y=1,-2$,所以在y轴上截得的弦长为定值3.

【巩固练习3】

(1)D　(2)C

【章末检测】

1.B　2.D　3.D　4.B　5.D　6.D　7.C　8.A

9.$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0$　10.$\frac{8\sqrt{2}}{3}$

11.$x+\sqrt{3}y=0$　12.$\sqrt{3}\leqslant m<\sqrt{7}$　13.(1)$a=2,b=2$　(2)$a=2,b=-2$ 或 $a=\frac{2}{3},b=2$.

14.(1)$(x-6)^2+(y-1)^2=1$　(2)$2x-y+5=0$ 或 $2x-y-15=0$

15.(1)$[-5\sqrt{2}-6,5\sqrt{2}-6]$　(2)$[-16,4]$

第三章　圆锥曲线的方程

3.1　椭圆

第1课时　　椭圆及其标准方程

【课时清单】

1.(1)和　焦点　(2)线段 F_1F_2　2.$c^2=a^2-b^2$

【典型例题】

【例1】(1)$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　(2)$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$　(3)$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

【例2】$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

【基础夯实】

1.C　2.A　3.C　4.A

5.$\frac{1}{32}$　6.$\frac{3\sqrt{3}}{5}$　7.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(x\neq\pm4)$　8.10

9.椭圆;$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

【能力提升】

10.C　11.A

12.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$　13.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　(2)$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=1$

14.(1)$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1(x<2)$　(2)6

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　(2)$(0,\sqrt{3}]$

第2课时　椭圆的简单几何性质(一)

【课时清单】

$-b\leqslant x\leqslant b$　$-a\leqslant y\leqslant a$　$(0,\pm\sqrt{a^2-b^2})$　$e=\frac{c}{a}\in(0,1)$

【典型例题】

【例1】(1)长轴长和短轴长分别是8和6,离心率$\frac{\sqrt{7}}{4}$,焦点坐标分别是$(-\sqrt{7},0)$,$(\sqrt{7},0)$,顶点坐标分别是$(-4,0)$,$(4,0)$,$(0,-3)$,$(0,3)$　(2)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{y^2}{27}+\frac{x^2}{9}=1$

【例 2】$\frac{\sqrt{10}}{4}$

【基础夯实】

1.B 2.C 3.D 4.D

5.$(-5,0)$ 6.$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 7.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ 8.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

9.(1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 或$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$ (2)$x^2+\frac{y^2}{9}=1$

【能力提升】

10.A 11.C

12.6 13.(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

14.(1)$\sqrt{2}-1$ 或$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)$b=3,a\in[3\sqrt{2},+\infty)$

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ (2)$\frac{\sqrt{5}}{5}$

第 3 课时 椭圆的简单几何性质(二)

【课时清单】

1.(2)$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}<1$ 2.$\Delta>0$

【典型例题】

【例 1】(1)$-2\sqrt{5}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{5}$ (2)$x+2y-4=0$

【例 2】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (2)$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$

【基础夯实】

1.A 2.A 3.D 4.C

5.点在椭圆外 6.$6\sqrt{2}$ 7.8 8.$\frac{1}{2}$

9.(1)$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ (2)$\sqrt{10}$

【能力提升】

10.A 11.C

12.$\sqrt{3}$ 13.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ (2)存在,$y=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}x+3$.

14.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (2)$|PQ|_{\max}=2$,直线 l 的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ (2)设 $M(x_0,m)$,$N(-x_0,m)$,$x_0\neq 0$,$-1<m<1$,

所以直线 BM 的斜率为$\frac{m-(-1)}{x_0-0}=\frac{m+1}{x_0}$,

因为直线 BD,BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{3}$,所以直线 BD 的斜率为 $-\frac{x_0}{3(m+1)}$,

则直线 AN 的方程为 $y=\frac{1-m}{x_0}x+1$,直线 BD 的方程为 $y=-\frac{x_0}{3(m+1)}x-1$,

联立直线 $\begin{cases} y=\frac{1-m}{x_0}x+1, \\ y=-\frac{x_0}{3(m+1)}x-1, \end{cases}$ 解得 D 点的纵坐标为 $y_D=\frac{6(m^2-1)}{x_0^{\ 2}-3m^2+3}+1$,

$\because$ 点 M 在椭圆上,$\therefore \frac{x_0^{\ 2}}{3}+m^2=1$.$\therefore x_0^{\ 2}=3-3m^2$.

$\therefore y_D=\frac{6(m^2-1)}{3-3m^2-3m^2+3}+1=-1+1=0$,所以点 D 在 x 轴上.

3.2 双曲线

第1课时 双曲线及其标准方程

【课时清单】

1.(1)差 2.$c^2=a^2+b^2$

【典型例题】

【例1】(1)$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (2)$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ (3)$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

【例2】(1)10或22 (2)$S_{\triangle F_1PF_2}=16$

【基础夯实】

1.B 2.A 3.A 4.C

5.$\frac{34}{3}$ 6.$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$ 7.$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1(x>3)$ 8.6

9.(1)$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ (2)钝角三角形

【能力提升】

10.C 11.C 12.4 13.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{96}=1(x\geqslant 2)$ 14.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ (2)最大值2;$P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

第2课时 双曲线的简单几何性质(一)

【课时清单】

1.$y=\pm\frac{a}{b}x$ $c^2=a^2+b^2(c>a>0,c>b>0)$

【典型例题】

【例1】(1)$x^2-\frac{y^2}{2}=1$ (2)实轴长2,离心率为$\sqrt{3}$,距离为$\sqrt{2}$

【例2】(1)$x^2-y^2=6$

(2)①当 $a\leqslant 2\sqrt{6}$ 时,$|PM|_{\min}=|\sqrt{6}-a|$;②当 $a>2\sqrt{6}$ 时,$|PM|_{\min}=\sqrt{\frac{a^2}{2}-6}$.

【基础夯实】

1.B　2.B　3.C　4.A　5.4　6.26　7.4　8.$\sqrt{2}$

9.双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$,所以其实轴长 $2a=10$,虚轴长 $2b=4$,焦距为 $2c=2\sqrt{29}$,

焦点坐标为$(\sqrt{29},0)$,$(-\sqrt{29},0)$,顶点坐标为$(-5,0)$,$(5,0)$,

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{5}$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{5}x$.

【能力提升】

10.B　11.D　12.$\sqrt{5}$　13.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$　14.(1)$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\geqslant 1)$　(2)8

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$　(2)是,$|OR|\cdot|OS|=\frac{3}{4}$

第3课时　双曲线的简单几何性质(二)

【课时清单】

2.$\sqrt{1+k^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

【典型例题】

【例1】(1)$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　(2)$|AB|=\frac{16\sqrt{3}}{5}$

【例2】(1)$(\pm\frac{2\sqrt{5}}{3},\frac{1}{3})$　(2)$y=\pm\frac{1}{2}x+1$

【基础夯实】

1.D　2.A　3.D　4.C

5.$y=\pm\sqrt{2}x$　6.$3\sqrt{10}$　7.$\frac{\sqrt{10}}{2}$　8.$\pm\sqrt{3}$或± 2　9.北偏东30°.

【能力提升】

10.A　11.B

12.$1+\sqrt{2}$

13.(1)$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　(2)$S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

14.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　(2)$(0,1)$

【素质拓展】

15.(1)$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(2)24

3.3 抛物线

第1课时 抛物线及其标准方程

【课时清单】

2.$y^2=2px(p>0)$ $(-\frac{p}{2},0)$ $y=\frac{p}{2}$

【典型例题】

【例1】9

【例2】水面上涨到与抛物线拱顶相距2米时,小船开始不能通航.

【基础夯实】

1.A 2.C 3.B 4. C 5.9 6.6 7.(2,2)

8.$4\sqrt{6}$ m 9.(1)$y^2=-12x$ (2)$y^2=\pm 2x$ 或 $y^2=\pm 18x$

【能力提升】

10.B 11.D

12.1 13.(1)最小值为$\frac{7}{2}$,点 P 的坐标为(2,2) (2)2 14.(1)$x^2=-5y$ (2)4.05 m

【素质拓展】

15.$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$为定值,且定值为1.

第2课时 抛物线的简单几何性质(一)

【课时清单】

$x\leqslant 0,y\in\mathbf{R}$ $2p$

【典型例题】

【例1】(1)(0,0),(2,0),$x=-2$,x 轴,$x\geqslant 0$ (2)$2\sqrt{33}+4\sqrt{6}$

【例2】$x^2=4y$

【基础夯实】

1.B 2.D 3.B 4.B

5.$y^2=16x$ 6.2 7.$y^2=16x$ 8.6 9.$x^2=4y$ 或 $x^2=8y$

【能力提升】

10.B 11.A 12.2 13.(1)$y^2=4x$ (2)最大值为$\frac{1}{3}$ 14.(1)$\sqrt{5}$ (2)4

【素质拓展】

15.(1)抛物线的方程是 $y^2=4x$,准线方程是 $x=-1$ (2)证明:因为 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补,

所以 $k_{PA}=-k_{PB}$,即$\frac{y_1-2}{x_1-1}=-\frac{y_2-2}{x_2-1}$.

又 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$均在抛物线上,

所以 $x_1=\frac{y_1^{\ 2}}{4}$,$x_2=\frac{y_2^{\ 2}}{4}$,从而有$\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=-\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$,即$\frac{4}{y_1+2}=-\frac{4}{y_2+2}$,得 $y_1+y_2=-4$,

故直线 AB 的斜率$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=-1$.

第3课时　抛物线的简单几何性质(二)

【课时清单】

3.(2)①$-p^2$　③$\frac{2}{p}$

【典型例题】

【例1】(1)0　(2)$2x+3y+2=0$ 或 $2x-3y+2=0$

【例2】(1)$y^2=2x$　(2)$(1,-1)$

【基础夯实】

1.A　2.B　3.C　4. B

5.1　6.$2\sqrt{2}$　7.$\frac{8}{3}$　8.2　9.$y^2=\pm 3x$

【能力提升】

10.C　11.A　12.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

13.(1)$y^2=4x$　(2)当直线 l 的斜率不存在时,其方程为 $x=4$.

由$\begin{cases}x=4,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $y=\pm 4$.

$\therefore |AB|=8.\therefore \frac{|AB|}{2}=4$.

∴以 AB 为直径的圆过原点.

当直线 l 的斜率存在时,设其方程为 $y=k(x-4)(k\neq 0)$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\y^2=4x,\end{cases}$得 $k^2x^2-(4+8k^2)x+16k^2=0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{4+8k^2}{k^2},x_1x_2=16$.

$y_1y_2=k^2(x_1-4)(x_2-4)=k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]=k^2\left[16-4\times\frac{4+8k^2}{k^2}+16\right]=$

$k^2\left(32-\frac{16+32k^2}{k^2}\right)=-16$,

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$.

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$,$\therefore OA\perp OB$.

∴以 AB 为直径的圆必过原点.

综上可知,以 AB 为直径的圆必过原点.

14. (1)$y^2=4x$　(2)-4

【素质拓展】

15.(1)$x^2=4y$　(2)$|AC|\cdot|BD|$为定值1

章末整合三

【典型例题】

【例 1】A

【巩固练习 1】

B

【例 2】A

【巩固练习 2】

A

【例 3】(1)$\frac{x^2}{9}+y^2=1$　(2)3

【巩固练习 3】

(1)$y^2=8x$　(2)$4x-3y-4=0$

【章末检测】

1.B　2.B　3.A　4.C　5.A　6.D　7.B　8.A　9.1

10.$(-2,-1)\cup(2,+\infty)$　11.36　12.$(1,3]$　13.(1)$\pm4\sqrt{6}$　(2)$y^2=8x-16$

14.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　$e=\frac{1}{2}$　(2)6　15.(1)$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　(2)$\frac{8}{3}$