Lineare Algebra - Eine informative Einleitung und Zusammenfassung

Dieses Dokument stellt die lineare Algebra aus der sicht eines Informatikers dar

Alexander Sommer

13. Oktober 2018

1 Einleitung

Die Lineare Algebra beschäftigt sich u.a. mit der formalen Definition mathematischer Muster. Durch Abstraktion können Aussagen und Gebilde akurat und kompakt dargestellt werden.
Die am Anfang oft komplizert aussehenden Konstruktionen und Definitionen stellen sich später (im Verlauf des Studiums) aber doch als logisch und sinnvoll heraus.

2 Mengen

Die lineare Algebra bzw. die moderne Mathematik baut auf der Mengenlehre auf. Prinzipiell ist eine Menge eine Ansammlung von **ungeordneten** Objekten, die nur einmal in dieser vorkommen können. Also kann ein Objekt in einer Menge entweder (einmal) enthalten sein oder nicht.
Aber was ist denn nun ein solches Objekt?
Naja prinzipiell begrenzt die lineare Algebra dies nicht. Sinnvoll für die Mathematik wäre nur, wenn man mit diesem auch irgendwie „rechnen“ kann. Zahlen sind hier naheliegend, aber später werden noch andere Objekte auftauchen mit denen man auch „rechnen“ kann.
Wir halten also fest, das eine Menge X eine lose Ansammlung von Objekten ist, aus der man sich Elemente herausnehmen kann bzw. entscheiden kann, ob ein Element x darin enthalten ist oder nicht ($x \in X$ oder $x \notin X$).

2.1 Mengenoperationen- und relationen

Manchmal möchte man gegebene Mengen manipulieren, um eine neue Menge zu erhalten und mit dieser weiter zu arbeiten.
So gibt es die Vereinigung $\cup$, den Schnitt $\cap$ und die Differenz $\setminus$ von Mengen. Bei der Mengendifferenz $A \setminus B$ werden alle Elemente die in A und B enthalten sind herausgenommen und es bleiben die Elemente zurück, die nur in A enthalten sind.
Die Vereinigung und den Schnitt kann man sich als Informatiker relativ einfach merken und herleiten: Die Symbole für diese Operationen ähneln nämlich den logischen Operatoren $\wedge$ (UND) und $\vee$ (ODER). So ist ein Element was in $A \cap B$ enthalten ist, in A **und** in B (also in beiden) enthalten. Währendessen ein Element aus $A \cup B$ entweder in A **oder** in B **oder** in beiden enthalten.
Hier sieht man schon eine erste mögliche Beziehung zwischen Mengen: Es gilt nämlich $A \cap B$ ist **Teilmenge** von $A \cup B$ $\quad (A \cap B \subseteq A \cup B)$. Wenn ein Element im Schnitt enthalten ist, ist es nämlich insbesondere in der Vereinigung enthalten (Warum?).
Eine weitere Relation ist die Gleichheit von Mengen: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Für Beweise ist es jedoch sinnvoller die Folgende Definition zu nutzen: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie jeweils Teilmengen voneinander sind $\quad A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

2.2 Zahlenmengen

Die elementarste Zahlenmenge ist wohl die der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.
Durch hinzunehmen der Null entsteht $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die ganzen Zahlen bekommt man durch hinzunehmen der negativen natürlichen Zahlen $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$
Die rationalen Zahlen werden als Brüche ganzer Zahlen dargestellt
$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ (Man beachte dabei, das nicht durch null geteilt werden darf!).
Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ lassen sich leider nicht so schön aufbauend herleiten. Es sei aber gesagt, dass diese sich aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und den irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aufbauen. Irrationale Zahlen sind dann z.B. π, e oder $\sqrt{2}$.

3 Relationen und Abbildungen

3.1 Relationen

Oben haben wir mögliche Beziehungen zwischen Mengen gesehen. Nun wollen wir uns Beziehungen einzelner Elemente von Mengen anschauen: Die sogenannten Relationen.

Eine Relation sagt verallgemeinert aus, ob ein Element mit einem anderen in einer bestimmten Weise in Beziehung steht oder nicht. Das schöne daran ist nun, das wir Relationen wieder per Definition auf die Mengenlehre zurückführen können.

Wir führen zunächst das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ein:
$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Welche Elemente kann man nun aus dieser neuen Menge $A \times B$ herausnehmen? Im kartesischen Produkt finden wir jede Kombination von den Elementen aus A mit Elementen aus B. Ein Element aus diesem kartesischen Produkt nennen wir (2-)Tupel oder auch Paar. Ein Tupel ist eine Liste oder Folge von Elementen aus Mengen. In unserem Fall ist der erste Eintrag aus der Menge A und der zweite Eintrag aus der Menge B.

Wenn wir uns jetzt nochmal die Relationen von oben anschauen erkennen wir, das eine Relation R von Elementen von zwei Mengen A und B nichts anderes ist als eine Teilmenge des kartesischen Produkts ($R \subseteq A \times B$). Die Elemente $a \in A$ und $b \in B$ stehen also genau dann in Relation ($a \sim b$), wenn sie in der Menge $R \subseteq A \times B$, die die Relation beschreibt, als Tupel enthalten sind ($a \sim b \iff (a, b) \in R$).

Ein einfaches Beispiel ist die Kleiner-Gleich-Relation $R_\leq$ als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, bei der für ein Element $(a, b) \in R_\leq$ stets gilt, das a kleiner oder gleich b ist
$((a, b) \in R_\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \iff a \leq b)$.

3.2 Abbildungen

Abbildungen können wir wieder aufbauend definieren, es hilft aber auch hier erstmal eine intuitivere Beschreibung vorzuziehen.
In der Schule haben wir Funktionen kennengelernt, die (reele) Zahlen als Eingabe nehmen und ihnen andere Zahlen zuweisen. Beispielsweise die Funktion $f(x) = x^2$. Abbildungen verallgemeinern das ganze jetzt nochmal und geben dieser Funktion einen „Kontext", welcher darin besteht, anzugeben von welcher in welche Menge abgebildet wird.
Man kann das obige Beispiel als folgende Abbildung definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$.
Das liest sich folgendermaßen: „f bildet von den reellen Zahlen in die positiven reellen Zahlen ab, indem ein x auf sein quadrat abgebildet wird."
Auffällig ist hier, das die positiven reelen Zahlen als sogenannten **Zielbereich** gewählt wurden. Natürlich hätte man auch hier alle reellen Zahlen dafür wählen können, aber dies verdeutlicht nochmal, das es wirklich nur positive Ergebnisse oder **Bilder** gibt. Alle Elemente, auf die wirklich abgebildet wird (also die Menge aller Bilder), nennt man Bildbereich $Bild(f) := \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.
Das es auch sinnvoll und notwendig ist, den **Definitionsbereich** einzuschränken zu können, zeigt das folgende Beispiel:
$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}$

„g bildet von den rellen Zahlen ohne Null in sich selbst ab, indem ein x auf sein multiplikativ Inverses abgebildet wird.“
Da die Null kein multiplikativ Inverses besitzt (oder ist), wird sie aus dem Definitionsbereich (bzw. Bildbereich) ausgeschlossen. Es existiert also keine Zahl mit der die Null multipliziert werden kann, damit 1 rauskommt, deswegen wird sie hier ausgeschlossen.

Zwei wichtige, mögliche Eigenschaften von Abbildungen können an dieser Stelle schonmal informativ festgehalten werden:

- Eine Abbildung ist surjektiv genau dann, wenn jedes Element im Zielbereich getroffen wird (Zielbereich = Bildbereich).

- Eine Abbildung ist injektiv genau dann, wenn auf jedes Element maximal einmal abgebildet wird.

Nachdem wir nun Abbildungen kennengelernt haben, definieren wir sie jetzt formal mithilfe der Relationen.
Sei folgende Abbildung gegebenen: $f : A \to B$ (f bildet also von A nach B ab).
Wenn wir jetzt das kartesische Produkt aus A und B bilden $A \times B$, erhalten wir alle Kombinationen aus Ein- und Ausgaben.
Nun können wir f als Teilmenge von diesem ansehen $f \subseteq A \times B$. f ist also nichts anderes als eine Relation.
Diese Relation hat aber besondere Eigenschaften: Jedem Element aus der Eingabe muss **genau ein** Element aus der Ausgabe zugewiesen werden.
Es darf also keine Eingabe ausgelassen werden, also undefiniert bleiben (Bsp. $\frac{1}{x}$) und jedes Element darf auf maximal ein Element abgebildet werden. Diese beiden Abbildungseigenschaften werden bei Relationen als linkstotal und rechtseindeutig bezeichnet, Surjektivität und Injektivität als rechtstotal und linkseindeutig.

4 Gruppen

4.1 Verknüpfungen