Pfaffian

Pfaffian

$2n \times 2n$ の反対称行列 $A(A^{\mathrm{T}} = -A)$ に定義される以下の量を Pfaffian という.

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{M} \mathrm{sgn}(M) \prod_{(i,j)\in M} a_{ij} \tag{1}$$

ここで M は $\{1, \cdots, 2n\}$ の n 個のペアへの分割

$$\{(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)\} \quad (i_1 < \cdots < i_n,\ i_1 < j_1, \cdots, i_n < j_n) \tag{2}$$

Pfaffian の他の表し方

Pfaffian は以下の形に変形できる.

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} \tag{3}$$

wedge 積を用いて表す方法もある. まず以下のような $W(A)$ を定義する.

$$W(A) \coloneqq a_{ij} e^i \wedge e^j \tag{4}$$

これは縮約を取っていることに注意. このとき

$$\begin{aligned}
[W(A)]^n &= \sum_{\sigma\in S_{2n}} \prod_{k=1}^{2n} a_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} e^{\sigma(2k-1)} \wedge e^{\sigma(2k)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \left[\prod_{k=1}^{2n} a_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}\right] e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n} \\
&= 2^n n! \mathrm{Pf}(A) e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで, 反対称行列の行列式と Pfaffian の関係について述べる. n 次の反対称行列 A について, その固有方程式 $f(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda I + A^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \det(\lambda I + A) \\ &= (-1)^n f(-\lambda) \end{aligned} \tag{6}$$

よって n が $\begin{pmatrix} \text{偶数} \\ \text{奇数} \end{pmatrix}$ のとき, $f(\lambda)$ は $\begin{pmatrix} \text{偶関数} \\ \text{奇関数} \end{pmatrix}$ となる.
n が奇数のときは $\det A = 0$ となり, n が偶数のときは固有値は $\lambda, -\lambda$ のペアで現れる.
特に, n が偶数の時について, 以下の関係が成り立つ.

行列式と Pfaffian の関係

$2n \times 2n$ の反対称行列 A について

$$\det A = [\mathrm{Pf}(A)]^2 \tag{7}$$

証明　(7) は a_{ij} に関する有限次の多項式恒等式なので, A が実反対称行列の場合について示せば十分である.
補題 A より, ある可逆行列 S が存在し,

$$S^{\mathrm{T}} A S = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} (= \Lambda) \tag{8}$$

Λ について簡単な計算により

$$\det \Lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^2 \tag{9}$$

$$\mathrm{Pf}(\Lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \tag{10}$$

さらに

$$\det S^{\mathrm{T}} A S = \det S^{\mathrm{T}} \det A \det S = (\det S)^2 \det A \tag{11}$$

及び補題 B より

$$\mathrm{Pf}(S^{\mathrm{T}}AS) = (\det S)\mathrm{Pf}(A) \tag{12}$$

これらから

$$(\det S)^2 \det A = \det \Lambda = [\mathrm{Pf}(\Lambda)]^2 = (\det S)^2[\mathrm{Pf}(A)]^2 \tag{13}$$

$\det S \neq 0$ より

$$\det A = [\mathrm{Pf}(A)]^2 \tag{14}$$

□

補題 A

$2n \times 2n$ の実反対称行列 A についてある可逆行列 S が存在し,

$$S^{\mathrm{T}}AS = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} (= \Lambda) \tag{15}$$

証明

$$B := A^{\mathrm{T}}A = -A^2 \tag{16}$$

とおくと, B は半正定値実対称行列 □

補題 B

$2n \times 2n$ の反対称行列 A 及び可逆行列 S について

$$\mathrm{Pf}(S^{\mathrm{T}}AS) = (\det S)\mathrm{Pf}(A) \tag{17}$$

証明

$$\Lambda := S^{\mathrm{T}}AS \tag{18}$$

について,

$$\Lambda_{ij} = (S^{\mathrm{T}})_{ik}a_{kl}S_{lj} = a_{kl}S_{ki}S_{lj} \tag{19}$$

よって

$$
\begin{aligned}
W(\Lambda) &= \Lambda_{ij} e^i \wedge e^j = a_{kl} S_{ki} S_{lj} e^i \wedge e^j \\
&= a_{kl} f^k \wedge f^l
\end{aligned} \tag{20}
$$

これは e^i から $f^i \coloneqq S_{ij} e^j$ への基底変換と考えることができ,

$$
[W(\Lambda)]^n = 2^n n! \mathrm{Pf}(A) f^1 \wedge \cdots \wedge f^{2n} \tag{21}
$$

これと

$$
f^1 \wedge \cdots \wedge f^{2n} = (\det S) e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n} \tag{22}
$$

から,

$$
\begin{aligned}
[W(\Lambda)]^n &= 2^n n! \mathrm{Pf}(\Lambda) e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n} \\
&= 2^n n! \mathrm{Pf}(A) (\det S) e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}
\end{aligned} \tag{23}
$$

よって

$$
\mathrm{Pf}(\Lambda) = (\det S) \mathrm{Pf}(A) \tag{24}
$$

□