集合と位相

内田伏一著「集合と位相」のまとめ

1　集合

集合

集合とは数学的要素の集まりである.

a が集合 A の元であることを, 記号では $a \in A$ と書く.

A の部分集合全体からなる集合を A の冪集合といい, 2^A で表す.

集合の濃度

集合 A の濃度を $|A|$ と表す. 集合の濃度は以下を満たす.

A が有限集合のとき, $|A|$ は A の元の個数

無限集合 A, B について, A から B への単射が存在するなら $|A| \leq |B|$

無限集合 A, B について, A から B への全単射が存在するなら $|A| = |B|$

Cantor の定理

$$\left|2^A\right| > |A| \tag{1}$$

集合の直積

$\{X_i\}$ を I を添字集合とする集合族とする, このとき $\{X_i\}$ の直積 $\prod_i X_i$ は次のように表される.

$\prod_i X_i$ は以下の性質を満たす写像 $f\colon I \longrightarrow X = \bigcup_i X_i$ の集まりである.

$$\forall i \in I,\ \ f(i) \in X_i \tag{2}$$

もう少し分かりやすい形で書くと,

$$\prod_i X_i = \{(\cdots, x_i, \cdots) | \forall i \in I,\ \ x_i \in X_i\} \tag{3}$$

例えば集合 A, B の直積 $A \times B$ は (a, b) $(a \in A,\ \ b \in B)$ という順序対からなる

集合である.

集合の直和

$\{X_i\}$ を I を添字集合とする集合族とする, このとき $\{X_i\}$ の直和は以下で表される.

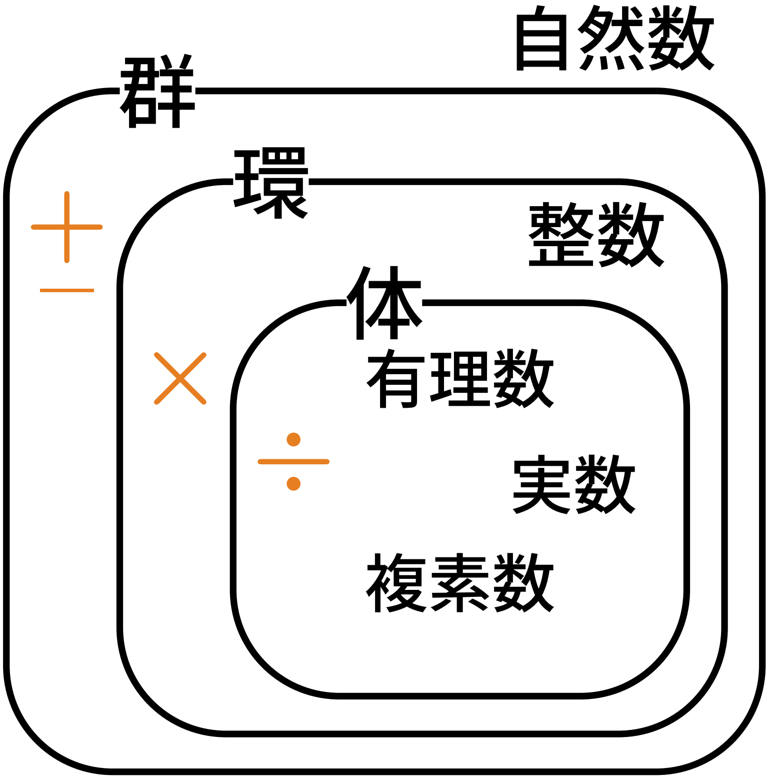
$$\coprod_i X_i := \bigcup_i Y_i \tag{4}$$

ここで Y_i は $x \in X_i$ と i の順序対 (x, i) 全体からなる集合である.
直和 $\coprod_i X_i$ の要素は (x, i) と表されるが, x は $X = \bigcup_i X_i$ から選んだ要素 x を表し, i はその x を $\{X_i\}$ のうちどの集合 X_i から選んだかを表す.

集合 A, B の直和 $A \oplus B$ について, $A \cap B = \emptyset$ の場合と $A \cap B \neq \emptyset$ の場合に分けて考えよう.
(i)$A \cap B = \emptyset$ の場合
$A \oplus B$ の要素は (x, i) とおけるが, $A \cap B = \emptyset$ より, x が定まれば i も定まる. すなわち $A \oplus B \sim A \cup B$ である. このことから, A, B の直和を $A \cup B$ で表すこともある.
$A \cap B \neq \emptyset$ の場合
$A \oplus B$ の要素 (x, i) について, x という情報だけでは A からとったものか B からとったものかがわからないことがあるので, 添字 i で示す必要がある.

2　群・環・体

群・環・体とはある条件件を満たす集合と演算のセットのことである.



群 (Group)

集合 G と演算 $\times$ が群となるのは以下の条件を満たすときである.

(1)単位元 : $\exists e$ s.t. $\forall a \in G,\ ae = ea = a$

(2)逆元 : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ s.t. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

(3)結合法則 : $\forall a, b, c \in G,\ (ab)c = a(bc)$

さらに以下の交換法則が成り立つとき, **Abelian 群** (可換群) と呼ばれる.

(4)交換法則 : $\forall a, b \in G,\ ab = ba$

環 (Ring)

集合 A と演算 $+, \times$ が環となるのは以下の条件を満たすときである.

(1)和に関して可換群： A は $+$ に関して可換群となる. (以下 $+$ に関する単位元を 0 と書く)

(2)積の結合法則：$\forall a, b, c \in A,\ (ab)c = a(bc)$

(3)分配法則：$\forall a, b, c \in A,\ a(b+c) = ab + ac,\ (a+b)c = ac + bc$

(4)積の単位元：$\exists 1$ s.t. $\forall a \in G,\ a1 = 1a = a$

A の任意の元 a, b が可換のとき, A を**可換環**という.

$a \in A$ が積に関して逆元を持つとき, a を**可逆元**または**単元**という.

A の単元全体の集合を A の**乗法群**といい, $A^{\times}$ と表す.

$\forall a \in A$ について, $0a = (0+0)a = 0a + 0a$ より, $0a = 0$ である.

$1 = 0$ のとき, $A = \{0\}$ となる, この環を**零環**あるいは**自明な環**という.

体 (Field)

集合 K と演算 $+, \times$ が体となるのは以下の条件を満たすときである.

(1)環：K は演算 $+, \times$ に関して環となる

(2)零環でない：$1 \neq 0$

(3)可逆：任意の $a (\neq 0) \in K$ は可逆元である

(4)可換：K は可換環

(1)(2)(3) が成り立つとき, K は**可除環**という.

3　順序

4　距離空間

5　位相空間