集合と位相

内田伏一著「集合と位相」のまとめ

1　集合

集合

集合とは数学的要素の集まりである.

a が集合 A の元であることを, 記号では $a \in A$ と書く.

集合の直積

$\{X_i\}$ を I を添字集合とする集合族とする, このとき $\{X_i\}$ の直積 $\prod_i X_i$ は次のように表される.

$\prod_i X_i$ は以下の性質を満たす写像 $f\colon I \longrightarrow X = \bigcup_i X_i$ の集まりである.

$$\forall i \in I,\ \ f(i) \in X_i \tag{1}$$

もう少し分かりやすい形で書くと,

$$\prod_i X_i = \{(\cdots, x_i, \cdots) | \forall i \in I,\ \ x_i \in X_i\} \tag{2}$$

例えば集合 A, B の直積 $A \times B$ は (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$ という順序対からなる集合である.

集合の直和

$\{X_i\}$ を I を添字集合とする集合族とする，このとき $\{X_i\}$ の直和は以下で表される．

$$\coprod_i X_i := \bigcup_i Y_i \tag{3}$$

ここで Y_i は $x \in X_i$ と i の順序対 (x, i) 全体からなる集合である．
直和 $\coprod_i X_i$ の要素は (x, i) と表されるが，x は $X = \bigcup_i X_i$ から選んだ要素 x を表し，i はその x を $\{X_i\}$ のうちどの集合 X_i から選んだかを表す．

集合 A, B の直和 $A \oplus B$ について，$A \cap B = \emptyset$ の場合と $A \cap B \neq \emptyset$ の場合に分けて考えよう．
(i)$A \cap B = \emptyset$ の場合
$A \oplus B$ の要素は (x, i) とおけるが，$A \cap B = \emptyset$ より，x が定まれば i も定まる．すなわち $A \oplus B \sim A \cup B$ である．このことから，A, B の直和を $A \cup B$ で表すこともある．
$A \cap B \neq \emptyset$ の場合
$A \oplus B$ の要素 (x, i) について，x という情報だけでは A からとったものか B からとったものかがわからないことがあるので，添字 i を示す必要がある．