高某人的随笔

——泛函分析

高

2021 年 12 月 16 日

前言

开坑时间:2021.8.30, 兜兜转转还是回来学数学了

高

2021 年 12 月 16 日

目录

第一章　距离线性空间

1.1　选择公理, 良序定理,Zorn 引理

选择公理: 设 $\mathcal{N} = \{N\}$ 是一个非空集合构成的族, 则必然存在定义在 $\mathcal{N}$ 上的函数 f, 使得对一切 $N \in \mathcal{N}$ 都有 $f(N) \in \mathcal{N}$

换成白话记为, 对于一族集合, 都有一定的法则 f, 使得能够在每一个集合中挑出一个元素

该公理在大多数时候是显然的, 比如无穷多双鞋子构成的集合, 可以依照法则" 挑出左脚的鞋子", 从每个集合中挑出一个元素.

但也有部分情况是不显然的, 比如将上例中的无穷多双鞋子换成无穷多双袜子, 袜子部分左右脚, 此时按照上例的法则挑元素就并不显然.

但这并不妨碍我承认该公理.

定义 1.1.1. *$\mathcal{X}$ 为非空集合,$\prec$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个二元关系且满足以下条件 (关系的定义在抽象代数中说明),*

- *$\forall a \in \mathcal{X}$, 都有 $a \prec a$, 也就是 $(a, a) \in \prec$*
- *$\forall a, b \in \mathcal{X}$, 如果 $a \prec b$ 且 $b \prec a$, 则 $a = b$*
- *$\forall a, b, c \in \mathcal{X}$, 如果 $a \prec b$ 且 $b \prec c$, 则 $a \prec c$*

则称 $(\mathcal{X}, \prec)$ 为一个偏序集 (部分有序集),$\prec$ 为偏序集的一个序

例 1.1.2. E 为非空集合 $\mathcal{X}$ 表示 E 的某些子集构成的集族 $\prec$ 表示 $\subseteq$, 即对 $\forall A,B\in\mathcal{X}, A\prec B\Longleftrightarrow A\subseteq B$ 此时 $(\mathcal{X},\prec)$ 为一个偏序集.

依次验证

第一条,$A\subseteq A$, 这是显然的

第二条, 如果 $A\subseteq B, B\subseteq A$ 那么 $A=B$

第三条, 如果 $A\subseteq B, B\subseteq C$ 那么 $A\subseteq C$

验证完毕, 这是一个偏序集, 也就是部分有序的, 因为有些集合并没有包含关系, 但有部分集合却有包含关系

设 $(\mathcal{X},\prec)$ 为一个偏序集

定义 1.1.3. 上界 如果 $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}, m\in\mathcal{X}$ 满足 $\forall a\in\mathcal{A}$, 都有 $a\prec m$ 称 m 为 $\mathcal{A}$ 的一个上界

定义 1.1.4. 全序子集 $\mathcal{A}\in\mathcal{X}$, 满足 $\forall a,b\in\mathcal{A}, a\prec b$ 或者 $b\prec a$ 二者之一总会成立此时称 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{X}$ 的全序子集

定义 1.1.5. 极大元 $S\in\mathcal{X}$, 如果对 $\forall a\in\mathcal{A}$, 满足 $S\prec a$, 则必有 $S=a$, 称 S 为 $\mathcal{X}$ 的一个极大元

Zorn 引理:$(\mathcal{X},\prec)$ 为偏序集, 如果 $(\mathcal{X},\prec)$ 中的任何全序子集都有上界, 则 $(\mathcal{X},\prec)$ 必有极大元

如果你不承认 Zorn 引理, 就别往下看了

1.2　线性空间,Hamel 基

定义 1.2.1. 线性空间 X 为非空集合,$\mathbb{K}$ 为数域 $(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 如果在 X 上定义加法和数乘

$+: X\times X\to X, \cdot:\mathbb{K}\times X\to X$

且满足以下八条:

- $x+y=y+x,\forall x,y\in X$
- $(x+y)+z=x+(y+z),\forall x,y,z\in X$
- $\exists\theta\in X,\forall x\in X$ 都有 $x+\theta=\theta+x=x$
- 对 $\forall x\in X,\exists y\in X,s.t.x+y=y+x=\theta$
- 对 $\forall\alpha\in\mathbb{K},x,y\in X$ 都有 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
- 对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},x\in X$ 都有 $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},x\in X$ 都有 $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x=(\beta\alpha)x=\beta(\alpha x)$
- $1\cdot x=x,\forall x\in X$

称 $(X,+,\cdot)$ 为一个线性空间

例 1.2.2. $0\cdot x=\theta,\forall x\in X$

任取 $y\in X$,
根据加法逆元的性质有 $y+0\cdot x=y+0\cdot x+x+(-x)$
由结合律有 $y+(0\cdot x+1\cdot x)+(-x)$
由左分配律有 $y+(0+1)\cdot x+(-x)=y+1\cdot x+(-x)$
由结合律有 $y+(1\cdot x+(-x))=y$

例 1.2.3. $(-1)\cdot x=-x$

$(-1\cdot x)+x=\theta=(-1\cdot x)+1\cdot x$
由左结合律有 $(-1+1)x=0\cdot x=\theta$

例 1.2.4. $\alpha\theta=\theta$

$\forall x\in X$
此前证明的 $0x=\theta$, 有 $\alpha\theta=\alpha(0x)+x$
由乘法的结合率有 $\alpha(0x)+x=(\alpha 0)x+x=0x+x$
由左分配率得到 $0x+x=(0+1)x=x$

例 1.2.5. 如果 $x+y=x+z$ 则 $y=z$

两边同时加上 x 的逆元

$(-x)+x+y=(-x)+x+z$

由加法的结合律有

$y=z$

例 1.2.6. 如果有 $\lambda x=\theta$ 则 $\lambda=0$ 或者 $x=\theta$ 至少之一成立

若 $\lambda\neq 0$

证明:$\forall y\in X,\lambda x+y=y$

$$\begin{aligned}\lambda(x+\frac{1}{\lambda}y)=\lambda x+y=y\\ x+\frac{1}{\lambda}y=\frac{1}{\lambda}y\\ x+\frac{1}{\lambda}y+(-\frac{1}{\lambda}y)=(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}y)x \qquad &=\theta\end{aligned}$$

定义 1.2.7. X 为线性空间,$M\subset X$, 如果 M 关于 X 中的加法和数乘封闭, 则称 M 为 X 的一个线性流形

$x,y\in M,x+y\in M$

$\forall\lambda\in\mathbb{K},x\in M,\lambda x\in M$

易知 X 有两个平凡的线性流形 $\{\theta\},\{X\}$

若 M 是 X 的一个线性流形, 且 $M\subsetneq X$, 称 M 为真的线性流形

定义 1.2.8. 线性组合 如果 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ 称 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n x_n$ 为 $\{x_1,\cdots.x_n\}$ 的一个线性组合

定义 1.2.9. 张成的线性流形 $S\subset X$(S 不是线性流形), 称 $span(S)$ 为由 S 中元素所有的线性组合形成的集合 M, 可以证明这是一个线性流形. 称 $span(S)$ 为由 S 张成的线性流形

有以下推论成立:

- $Span(S)$ 为所有包含 S 的线性流形的交
- $Span(S)$ 为最小的包含 S 的线性流形, 即 $\forall M$ 为线性流形,$M \supset S$, 则必有 $M \supset Span(S)$

定义 1.2.10. 线性相关, 线性无关 X 为线性空间,$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 如果存在不含零的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$, 则称 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为线性相关. 否则, 对 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$, 都有 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, 称 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 线性无关,$S \subset X$ 如果对于 S 中任意有限个元素都是线性无关的, 称 S 为线性无关的.

定义 1.2.11. 维数 X 为线性空间, 如果 X 中存在 n 个线性无关的元素, 且任何 *n+1* 个元素线性相关, 则称 X 为 n 维的 $\dim X = n$

如果 X 中存在无穷多个元素构成的无关集合, 称 X 为无穷维的,$\dim X = \infty$

定义 1.2.12. 基 有限维线性空间 X,$\dim X = n$, 存在 n 个线性无关的元素,$x_1, \cdots, x_n$, X 中任何一个元素必表示为 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ 形式,$X \subset Span(\{x_1, \cdots, x_n\})$, $x_1, \cdots, x_n$ 为 X 的一组基

定义 1.2.13. X 为 *(无穷维)* 的线性空间,$S \subset X$ 线性无关且 $Span(S) = X$ 则称 S 为 X 的一个 *Hamel* 基.

定义 1.2.14. 直和 X 线性空间,M,N 为 X 的两个线性子流形, 记 $M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$, 如果 $M \cap N = \{\theta\}$, $M + N \triangleq M \oplus N$, 称为 M 和 N 的直和

如果 $M \oplus N = X$ 称为 M 与 N 线性互补.

定理 1.2.15. M,N 为线性空间 X 中的线性流形, 则 $M \oplus N$ 为直和当且仅当对 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $m \in M, n \in N$ 使得, $x = m + n$

证明: 必要性, 若为直和, 则只有一种表示方式.

若有两种表示方式, 那么 $\exists m, m' \in M, n, n' \in N$ 使得 $x = m + n = m' + n'$, 则 $m - m' = n' - n$ 而由于线性流形对加法和数乘的封闭性可知,$m - m' \in M, n' - n \in N$ 那么则有 $m - m', n - n' \in M \cap N$ 而因为是直和, 所以 $M \cap N = \{\theta\}$, 因此 $m - m' = \theta, n - n' = \theta$ 于是有 $m = m', n = n'$

充分性, 若只有一种表示方式, 则为直和.

$M \cap N = \{\theta\}$, 否则 $M \cap N$ 中不仅仅有 $\theta, \exists x \neq \theta$, 使 $x \in M \cap N$

$x = x + \theta = \theta + x$ 这就是两种表示了, 与题目矛盾

定理 1.2.16. $X = M \oplus N$ 则 $\dim X = \dim M + \dim N$

无穷维的时候是显然的

只考虑有限维

设 $\dim M = m, \dim N = n, m, n < +\infty$

M 中取出 m 个 $x_1, \cdots, x_m$ 线性无关

N 中取出 n 个 $y_1, \cdots, y_n$ 线性无关

下证明 $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ 线性无关

$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n = \theta$

$-(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$

由于线性流形加法数乘的封闭性, 因此上式两端分别属于 M, N, 而由于是直和, 所以

$-(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = 0$, 由于 $x_1, \cdots, x_m$ 线性无关

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$

$\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n = 0$, 由于 $y_1, \cdots, y_n$ 线性无关

$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$

$\forall x \in X$, 由 $X = M \oplus N, \exists u \in M, v \in N$ 使得 $x = u + v$

$u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m, v = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$

$x = u + v = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$

定理 1.2.17. *X 为线性空间,$\dim = \infty$,S 为 X 的一组线性无关的子集, 则存在 X 的一个 $Hamel$ 基 H 使得 $S \subset H$*

令 $\mathcal{S}$ 表示 X 中线性无关的包含 S 的子集构成的集族

$(\mathcal{S}, \subset)$ 构成一组偏序集

下证明:$(\mathcal{S}, \subset)$ 中的任何全序子集有上界

任取 $\mathcal{S}$ 中的一个全序子集 $\mathcal{A}, \forall A, B \in \mathcal{A}$ 都有 $A \subset B$ 或者 $B \subset A$

下证 $\mathcal{A}$ 存在上界, 令 $M = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset X, S \subset M$

下证 M 线性无关,

任取 $x_1, \cdots, x_k \in M, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = \theta \Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_k = 0$

$x_1 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow A_1 \in \mathcal{A}$ 使得 $x_1 \in A_1$

$\vdots$

$x_k \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow A_k \in \mathcal{A}$ 使得 $x_k \in A_k$

所以不妨设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$

由 Zorn 引理,$(\mathcal{S}, \subset)$ 必有一个极大元 H

H 为包含 S 的线性无关的 X 的子集

可以证明 H 为 X 的一个 Hamel 基, 下证明 $Span(H) = X$, 否则 $Span(H) \subsetneq X$

$\exists x \in X - (Span(H))$

$H \cup \{x\} \in \mathcal{S}, H \subset H \cup \{x\}$

由 H 是极大元,$H \cup \{x\} = H, \{x\} \in H$ 矛盾于 $x \in X - (Span(H))$

定理 1.2.18. *X 为线性空间,M 为 X 的一个线性流形, 则存在 X 的线性流形使得 $X = M \oplus N$*

证明:M 的 Hamel 基为 H_1

存在 X 的 Hamel 基为 $H_0, H_0 \supset H_1$

令 $H_2 = H_0 - H_1, N = Span(H_2)$

下证 $X = M \oplus N$

先证明 $X=M+N$

$\forall x\in X,\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{K}$, 以及有限个 $z_1,\cdots,z_k\in H_0$ 使得 $x=\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_k z_k$

$z_1,\cdots,z_k$ 分为 H_1,H_2 中两类 $w_1,\cdots,w_l\in H_1,w_{l+1},\cdots,w_k\in H_2$

$\forall x\in M\cap N,x\in M,x=\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n,z_1\cdots z_n\in H_1$

$x\in N,x=\beta_1 w_1+\cdots+\beta_k w_k,w_1,\cdots,w_k\in H_2$

$\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n=\beta_1 w_1+\cdots+\beta_k w_k$

移项得到:

$\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_n z_n-(\beta_1 w_1+\cdots+\beta_k w_k)=\theta$

线性无关得到,$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\beta_1=\cdots=\beta_k=0$

故 $M\cap N=\{\theta\}$

1.3　距离空间

定义 1.3.1. X 为非空集合,$d:X\times X\to\mathbb{R}$ 满足

- $d(x,y)\geq 0$ 并且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y,\forall x,y\in X$
- $d(x,y)\geq 0,\forall x,y\in X$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)\forall x,y,z\in X$

称 d 为 X 上的距离, 称 (X,d) 为距离空间

定义 1.3.2. 设 (X,d) 为距离空间,$\{x_n\}\subset X,x\in X$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ 称 $\{x_n\}$ 按 d 收敛于 x, 记为 $x_n\xrightarrow{d}x$

定义 1.3.3. X 为线性空间且 d 为 X 上的一个距离, 如果 X 中的加法数乘按 d 的意义下是连续的, 则称 (X,d) 为距离线性空间

- $x_n\xrightarrow{d}x,y_n\xrightarrow{d}y\Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to 0$

- $x_n \xrightarrow{d} x, \alpha_n \xrightarrow{d} \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow d(\alpha_n x_n, \alpha x) \to 0$

例 1.3.4. 例子之后再写吧

两个常用的不等式:
Holder 不等式:$|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n| \leq (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}$
young 不等式:$\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \geq AB, A, B \geq 0 p \geq 1$
证明之后再写

1.4 可分空间

省略乱七八糟的定义, 那些东西在点集拓扑学中都有阐述

定义 1.4.1. (X, d) 为距离空间, 如果 $A \subset X, \bar{A} = X$ 称 A 在 X 中为稠密的, 如果 X 存在一个可数的稠密子集, 称 X 是可分的

1.5 完备空间

定义 1.5.1. (X, d) 中一个点列 $\{x_n\}$ 称之为 *Cauthy* 的, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in Z^+, n, m > N$ 时, 总有 $d(x_n, x_m) < \epsilon$

如果一个数列有极限, 那么该数列为 Cauthy 列, 反之不成立

定义 1.5.2. 如果 (X, d) 中的任何 *Cauthy* 列都收敛, 则称 (X, d) 为完备的

定理 1.5.3. 任何距离空间都可以完备化

定义 1.5.4. (X, d) 为距离空间,$M \subset X$ 称为是列紧的, 如果对于 M 中的任何点列, 都可以找到收敛子列, 如果收敛子列都收敛于集合自身中的点, 称 M 为自列紧的

定义 1.5.5. (X, d) 为距离空间,$M \subset X$, 如果对 $\forall \epsilon > 0$, 总存在有限的 $\epsilon-$网, 则称 M 为完全有界的

定义 1.5.6. *$\epsilon-$ 网:$M,N\subset X$, 如果对于 $x\in M,\exists y\in N$, 使 $d(x,y)<\epsilon$, 则称 N 为 M 的 $\epsilon-$ 网*

如果 M 为完全有界的, 则 M 为有界.

$M\subset(X,d)$ 称为有界集 $\Leftrightarrow\exists K>0,s.t.M\subset B(0,K)$

定理 1.5.7. *$(X,d),M$ 如果是列紧的, 则 M 是完全有界的, 如果 (X,d) 为完备的, 则如果 M 为完全有界的, 则 M 为列紧的*

定义 1.5.8. *等度连续 $(X,d),(Y,\rho)$ 距离空间,$\mathcal{F}$ 为一族从 (X,d) 到 (Y,ρ) 的映射, 则 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ 使得只要 $d(x,x')<\delta$ 则对 $\forall f\in\mathcal{F}$ 都有 $\rho(f(x),f'(x))<\epsilon$ 称 $\mathcal{F}$ 为从 (X,d) 到 (Y,ρ) 为等度连续的.*

定理 1.5.9. *$Arzela-Ascoli$ 定理:$C([0,1])$ 中的集合 $\to A$ 为列紧的充要条件是 A 为一个等度连续且一致有界的函数族.*

1.6　赋范线性空间

定义 1.6.1. *X 线性空间,$||\cdot||,X\to\mathbb{R}$, 如果满足:*

- $\|x\|\geq 0,\forall x\in X$ 且 $\|x\|=0\Leftrightarrow 0$
- $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|\,,\forall x\in X,\alpha\in\mathbb{K}$
- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\,,\forall x,y\in X$

称 $||\cdot||$ 为 X 上的一个范数, 称 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间

完备的赋范线性空间为 $Banach$ 空间

定义 1.6.2. *X 为线性空间,$T:X\to X$ 映射, 如果满足 $\forall x_1,x_2\in X,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$ 都有 $T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2$ 称 T 为线性映射.*

命题 1.6.3. $(X, ||\cdot||)$ 为赋范线性空间, 则 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ 为连续, 即 $x \to x_0, \Rightarrow ||x|| \to ||x_0||$

定义 1.6.4. X 为线性空间,$T : X \to X$, 如果满足 $\forall x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ 都有 $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$ 称 T 为线性映射.

如果 $(X, ||\cdot||_1), (Y, ||\cdot||_2)$ 为赋范线性空间, 如果存在 $K > 0$ 使得 $\forall x \in X$ 都有 $||Tx||_2 \leq K||x||_1$ 称 T 为有界线性算子, 称满足上式的 K 的下确界为 T 的算子范数.

$||T||_{x\to y} = \inf\{K > 0 : \forall x \in X, ||Tx||_Y \leq K||x||_X\} = \sup\limits_{x\in X, x\neq\theta} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup\limits_{||x||=1} ||Tx||_Y = \sup\limits_{||x||\leq 1} ||Tx||_Y$

定理 1.6.5. $T : (X, ||\cdot||_X) \to (Y, ||\cdot||_Y)$ 为线性算子:

- T 在 θ 处时连续的
- T 在 X 上是连续的
- T 有界

定义 1.6.6. $T : (X, ||\cdot||_X) \to (Y, ||\cdot||_Y)$ 为双射,T 为有界线性算子, 如果 T 有界,T^{-1} 有界称 T 为有界可逆的, 称从赋范线性空间到 $\mathbb{C}$ 的有界线性算子为有界线性泛函

命题 1.6.7. X $n.l.s.$,$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ 为有限个线性无关的元素, 则存在 $\mu > 0, s.t. |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \leq \mu||\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n||$ 对 $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ 成立

命题 1.6.8. X 为 n 维赋范线性空间, 则 X 中的收敛为按坐标收敛.

定理 1.6.9. 任何的实有限维 $n.l.s$ 与 $\mathbb{R}^n$ 线性同构和同胚.

命题 1.6.10. X 为有限维实的赋范线性空间,$Weierstress$ 聚点定理成立,$M \subset X$ 有界集,$TM \subset R^n$ 有界

定理 1.6.11. *Riesz* 引理 $X, n.l.s., M$ 为 X 的一个闭的线性流形,$M \neq X, \forall \epsilon \in (0,1), \exists x_\epsilon, ||x_\epsilon|| = 1$ 使得 $dist(x_\epsilon, M) > \epsilon$

X 为无穷维 $n.l.s$,X 中的单位闭球不是列紧的.

1.7　压缩映像原理

定义 1.7.1. $T : (X,d) \to (Y,\rho)$, 如果存在 $q > 0$ 使 $\forall x, x' \in X$ 时总有 $\rho(Tx, Tx') < qd(x,x')$, 称 T 为从 (X,d) 到 (Y,ρ) 的 *Lipschitz* 条件,q 称为 T 的 *Lipschiz* 常数, 如果 $q < 1$, 称 T 为压缩映射.

定理 1.7.2. 压缩映像原理 (X,d) 为完备距离空间,$T : (X,d) \to (X,d)$ 压缩映射, 则存在唯一的 $\bar{x} \in X, s.t. T\bar{x} = \bar{x}$

第二章 Hilbert 空间

2.1 内积空间

定义 2.1.1. X 为线性空间,$(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{C}$ 为一个二元函数如果满足:

- $\forall x\in X$ 有 $(x,x)\to 0$ 且 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$
- $\forall x,y,z\in X,(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$
- $\forall \alpha\in\mathbb{C},x,y\in X,(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$
- $\forall x,y\in X$ 有 $(x,y)=\overline{(y,x)}$

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的一个内积, 称 $(X,(\cdot))$ 为内积空间

定义 2.1.2. $(X,(\cdot))$ 为内积空间, 如果 $x,y\in X$ 满足 $(x,y)=0$, 称 x 与 y 是正交的, 记为 $x\perp y$

定义 2.1.3. 标准正交集 设 $\{x_1,\cdots .x_n\}\subset X$ 如果对 $\forall x_j,x_k,j,k=1,\cdots,n$, 满足

$$(x_j,x_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

称 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为 X 中的一个标准正交集 *(*$\{x_\alpha\}$ *可以不可数)*

内积天然引出范数,$||x||\triangleq\sqrt{(x,x)}$

定理 2.1.4. 勾股定理 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$ 为标准正交集, 则 $\forall x\in X$ 有
$||x||^2=\sum\limits_{j=1}^{n}|(x_j,x_j)^2|+||x-\sum\limits_{j=1}^{n}(x,x_j)x_j||^2$

定理 2.1.5. *Bessel* 不等式 $\forall x\in X$, 有 $||x||^2\geq\sum\limits_{j=1}^{n}(x,x_j)^2$

定理 2.1.6. *Schwarz* 不等式

$$\forall x,y\in X,|(x,y)|\leq||x||||y||$$

推论 2.1.7. $(X,(\cdot))$ 按 $||x||=\sqrt{(x,x)}$ 生成拓扑, 则 $(\cdot):X\times X\to\mathbb{C}$ 为连续的

命题 2.1.8. $(X,(\cdot)),M\subset X$ 稠密,$x_0\in X$ 且 $x_0\perp M$, 则 $x_0=\theta$

定理 2.1.9. 极化恒等式 $(X,(\cdot)),||x||=\sqrt{(\cdot)}$, 则 $\forall x,y\in X,(x,y)=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2)$

特别的还有一个平行四边形公式:$||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2$
Hilbert 空间: 完备的内积空间
$(X,(\cdot))$ 不是完备的, 可以完备化为 *Hilbert* 空间.

2.2　标准正交基

定义 2.2.1. H 为 *Hilbert* 空间,$S\subset H$ 为一个标准正交集, 如果任何包含 S 的标准正交集都是 S 本身, 称 S 为 H 的一个标准正交基.

命题 2.2.2. $S\subset H$ 为标准正交基的充分必要条件是, 对任何的 $x\in H$, 如果 $x\perp S$, 则必有 $x=\theta$

定理 2.2.3. 如果 H 是可分的, 则 H 中存在可数的标准正交基.

定理 2.2.4. 任何一个 *Hilbert* 空间存在标准正交基.

定理 2.2.5. 已知 $\{S_\alpha\}$ 为 H 中的一个标准正交基, 则对 $\forall x\in H$, 都有一定的法则 $x=\sum\limits_{\alpha}(x,x_\alpha)x_\alpha$ 且 $\|x\|^2=\sum\limits_{\alpha}|(x,x_\alpha)|^2$, 其中求和表示至多可数个非零数的求和

定理 2.2.6. 任何的可分的 *Hilbert* 空间与 l^2 是同构的

定理 2.2.7. M 为 *Hilbert* 空间 H 中的一个线性流形, 定义 $M^\perp\triangleq\{y\in M: y\in M\}$, 可以证明 $M^\perp$ 为子空间

2.3 射影定理

定理 2.3.1. 投影定理 H 为 *Hilbert* 空间,M 为 H 的一个子空间, 则对 $\forall x\in H$, 存在唯一的 $y\in M, z\in M^\perp$, 使得 $x=y+z$

定理 2.3.2. M 为 *Hilbert* 空间 H 的一个线性流形,$\bar{M}=(M^\perp)^\perp$

定理 2.3.3. H 为 *Hilbert* 空间, 定义 H 上全体有界线性泛函称为 H 的对偶空间 H^*,$(H^*,\|\cdot\|), f:H\to C, \|f\|=\sup\limits_{x\in H,x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$ 构成 *Banach* 空间

定理 2.3.4. *Riesz* 表示定理 对于 $\forall f\in H^*$,$\exists$ 唯一的 $z_f\in H$, 使得 $\forall x\in H, f(x)=(x,z_f)$ 且 $\|z_f\|=\|f\|_{H^*}$

$\tau:H^*\to H, \tau:f\mapsto\tau(f)=z_f, \|\tau f\|_H=\|f\|_{H^*}$

τ 为等距共轭线性同构

2.4 Hilbert 共轭算子

定义 2.4.1. 在 H^* 中定义内积:$f,g\in H^*, (f,g)\in H^*, (f,g)_{H^*}\triangleq\overline{(z_f,z_g)_H}$

定义 2.4.2. 共轭双线性泛函 H 为 *Hilbert* 空间,$\varphi:H\times H\to C$, 满足

1. $\forall x,y,z\in H, \alpha,\beta\in C$ 有 $\varphi(\alpha x+\beta y,z)=\alpha\varphi(x,z)+\beta\varphi(y,z)$

2. $\forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \in C$ 有 $\varphi(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\varphi(z, x) + \bar{\beta}\varphi(z, y)$

称 φ 为 H 上的共轭双线性泛函

如果 $\exists C > 0, s.t. \forall x, y \in H$ 时, 总有 $|\varphi(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$, 称 φ 是有界的

定理 2.4.3. *H 为 Hilbert 空间,φ 为 H 上的有界共轭双线性泛函, 则存在有界线性算子,$A : H \to H, s.t. \forall x, y \in H$ 有 $\varphi(x, y) = (Ax, y)$*

定理 2.4.4. *H_1, H_2 为两个 Hilbert 空间,$T : H_1 \to H_2$ 有界线性算子, 对任意固定的 $y \in H_2, \forall x \in H_1, f_y(x) \triangleq (Tx, y)_{H_2} \in C$, f_y 为 H_1 上的有界线性泛函*

定理 2.4.5. *用 $L(H)$ 表示所有 H 上的有界线性算子*

1. $(T + S)^* = T^* + S^*$
2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
3. $(ST)^* = T^* S^*$
4. $(T^*)^* = T$
5. $\|T^*\| = \|T\|$
6. 如果 T 为有界可逆, 则 T^* 有界可逆的

定义 2.4.6. 零空间 $A : H \to H$ 有界线性算子,$kerA \triangleq \{x \in H : Ax = \theta\}$

定义 2.4.7. 值域 $ranA \triangleq \{Ax : x \in H\}$

定理 2.4.8. *$A : H \to H$ 有界线性算子,$A^* : H \to H$ 有界线性算子, 那么有:*

1. $kerA = (ranA^*)^{\perp}$
2. $kerA^* = (ranA^*)^{\perp}$

3. $\overline{ranA^*} = (kerA)^{\perp}$

4. $\overline{ranA} = (kerA^*)^{\perp}$

定理 2.4.9. *Lax-Milgram* $B(f,g)$ 为 *Hilbert* 空间 H 上有界共轭双线性泛函, 且 $|B(f,f)| \geq r\|f\|^2$, 则称 $\forall l \in H^*, \exists g_0 \in H$, 使得 $l(f) = B(f,g_0)$ 且 $\|g_0\| = \frac{1}{r}\|l\|$

第三章 Banach 空间

3.1 有界线性算子

命题 3.1.1. *X,Y 为赋范线性空间,$L(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的全体有界线性算子,$T,S \in L(X,Y)$, 定义:*

1. $(T+S)x = \triangleq Tx + Sx$

2. $\alpha \in \mathbb{K}, (\alpha T)(x) \triangleq \alpha Tx$

   则 $T+S \in L(X,Y)$ 且 $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|, \|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

命题 3.1.2. *X 为赋范线性空间,Y 为 Banach 空间, 则 $L(X,Y)$ 为 Banach 空间*

命题 3.1.3. *$L(X) \triangleq L(X,X), \forall T,S \in L(X)$*
$(TS)(x) \triangleq T(Sx)$
则 $TS \in L(X)$ 且 $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$

定义 3.1.4. X 为线性空间,$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上的范数, 如果 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ 能推出 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, 则称 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 更强

命题 3.1.5. X 为线性空间,$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上的范数,$\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强, $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 等价于存在常数 $C_1, C_2 > 0, s.t. \forall x \in X, C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$

定义 3.1.6. 有界可逆 $T \in L(X,Y)$ 如果 T 为双射, 且 $T^{-1}: Y \to X$ 有界, 则称 T 为有界可逆的

命题 3.1.7. X,Y 为赋范线性空间,$A: X \to Y$ 为线性算子, 则 A 是单射且 $A^{-1}: ranA \to X$ 上连续, 线性算子的充分必要条件是 $\exists C > 0, \forall x \in X$, 有 $\|Ax\| \geq C\|x\|$

定理 3.1.8. X 为 *Banach* 空间,$T \in L(X)$ 且 $\|T\| \leq 1$, 则 $I - T$ 为有界可逆的且 $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n, \|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$

定理 3.1.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

命题 3.1.10. X 为 *Banach* 空间,*L(X)* 表示 X 上的全体有界线性算子, 则求逆预算 $(\cdot)^{-1}: IL(X) \to L(X)$ 为连续的

3.2 Hahn-Banach 定理

定理 3.2.1. 实的线性空间上的实泛函保持控制延拓

X 为实线性空间,X_0 为 X 的线性流形,$P: X_0 \to R$ 为线性泛函, 满足:

1. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
2. $\rho(tx) \leq t\rho(x), \forall x \in X, t \geq 0$
3. $\forall x \in X_0$ 有 $f(x) \leq P(x)$

则存在 $F: X \to R$ 线性泛函, 使得 $F|_{x_0} = f$ 且 $F(x) \leq P(x), \forall x \in X, \forall x \in X_0$ 有 $F(x) = f(x)$

复的线性空间上的复的线性泛函保持控制条件延拓

1. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
2. $\rho(\alpha x) \leq \alpha\rho(x), \forall x \in X, \alpha \in C$

3. $\forall x \in X_0$ 有 $f(x) \leq P(x)$

则存在 $F : X \to C$ 线性泛函, 使得 $F|_{x_0} = f$ 且 $|F(x)| \leq P(x), \forall x \in X, \forall x \in X_0$ 有 $F(x) = f(x)$

定理 3.2.2. *Hahn-Banach* 定理 X 为赋范线性空间,X_0 为 X 的线性流形,f 为 X_0 上的有界线性泛函, 则存在 $F \in X^*$ 使得 $F|_{x_0} = f$ 且 $\|F\||_X = \|f\|_{X_0}$

命题 3.2.3. X 为赋范线性空间,$x_0 \in X$ 则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| = 1$

推论 3.2.4. X 为赋范线性空间,$x_0 \in X, \|x_0\| = \sup\limits_{\|f\|<1} |f(x_0)|$

命题 3.2.5. X 为赋范线性空间,E 为 X 上的子空间,$x_0 \in X \backslash E$, 则存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x_0) = 1, f|_E = 0$ 且 $\|f\| = \frac{1}{\alpha}$, 其中 $d = dist(x_0, E) = inf\{\|x_0 - x\| : x \in E\}$

命题 3.2.6. X 为赋范线性空间,X_0 为 X 的线性流形, 则 $x_0 \in \overline{X_0} \Leftrightarrow$ 对 $\forall f \in X^*$ 如果有 $f|_{X_0} = 0$, 则必有 $f(x_0) = 0$

命题 3.2.7. X 为 *Banach* 空间,M 为 X 有限维线性流形, 则存在子空间 N, 使得 $X = M + N$ 且 $M \cap N = \{0\}$

定理 3.2.8. *Hahn-Banach* 几何形式 X 为赋范线性空间,$g \subset X$ 的线性簇,K 为 X 中的一个开球, 如果 $g \cap K = \varnothing$, 则存在超平面 H 使得 $H \supset g$ 且 $G \cap K = \varnothing$

3.3　Bare 纲定理

命题 3.3.1. X, Y 为赋范线性空间,$T : X \to Y$ 线性算子,T 有界 $\Leftrightarrow T^{-1}\{y \in Y, \|y\| \leq 1\}$ 中有内点

定义 3.3.2. *(X,d)* 为距离线性空间,$A \subset X$ 如果 $\bar{A}$ 中没有内点, 称 A 为无处稠密集 *(疏朗集)*,$X_0 \subset X$

1. 如果 X_0 可以表示成可数个无处稠密集的并, 则称 X 为第一纲的
2. 否则, 不能表示成可数个无处稠密集的并, 则称 X 为第二纲的

命题 3.3.3. $A \subset X$ 无处稠密 $\Leftrightarrow$ 对任何 X 中的开球 O 存在开球 $B \subset O$ 使得 $B \cap O$ 使得 $B \cap A = \varnothing$

定理 3.3.4. *Bare* 纲定理 (X, d) 完备, 则 (X, d) 为第二纲的

定理 3.3.5. 共鸣定理, 一致有界原理,*Banach-Steinhauss* X 为 *Banach* 空间,Y 为赋范线性空间,$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset B(X, Y)$, 如果对 $\forall x \in X, \sup\limits_{\lambda} \|T_\lambda x\| < +\infty$, 则有 $\sup\limits_{\lambda} \|T_\lambda\| < +\infty$

定理 3.3.6. *X,Y* 为 *Banach* 空间,$T \in L(X, Y), ranT$ 为第二纲的, 则 T 把 X 中的开集映为 Y 中的开集

定理 3.3.7. *X,Y* 为 *Banach* 空间,T 为有界线性算子,T 为双射, 则 T 有界可逆.

定理 3.3.8. 范数等价定理 X 按 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ 形成 *Banach* 空间, 且 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 则二者等价.

定义 3.3.9. 闭算子 *X,Y* 为赋范线性空间,T 为从 X 的某个线性流形到 Y 的线性算子,$M = domT$ 为 T 的定义域. 记 $G(T) = \{(x, Tx) : x \in domT\} \subset X \times Y$ 为 T 的图像. 如果 *G(T)* 在 $X \times Y$ 上为闭集, 则称 T 为闭算子

定理 3.3.10. 闭图像定理 *X,Y* 为 *Banach* 空间,$T : X \to Y$ 为闭算子, 则 T 为有界线性算子.

命题 3.3.11. *Hellinger-Toeplitz* H 为 *Hilbert* 空间,$A : H \to H$ 为处处有定义的线性算子, 且 $(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in H$ 成立, 则 A 有界

定理 3.3.12. X 为 *Banach* 空间, 如果 X^* 是可分的, 则 X 可分

3.4 二次对偶

定义 3.4.1. 二次对偶 X 为 *Banach* 空间,$X^*, X^{**} = (X^*)^*$

定义 3.4.2. 典型映射 $\tau : X \to X^{**}, F_x : X^* \to C, \tau : x \mapsto F_x, F_x : X^* \to C$ 其中 $F_x(f) = f(x)$

命题 3.4.3. X 为 *Banach* 空间,$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset X$, 如果 $\forall f \in X^*$ 有 $\sup\limits_\alpha |f(x_\alpha)| < M_f$, 则有 $\sup\limits_\alpha \|x_\alpha\| < M$

例 3.4.4. 有限维空间为自反的

例 3.4.5. $l^p(1 < p < \infty)$ 自反的

例 3.4.6. *Hilbert* 空间都是自反的

3.5 Banach 共轭算子

定义 3.5.1. *Banach* 共轭算子 $T' = Y^* \to X^*$ 如下:$T'f = f \circ T, \forall f \in Y^*$ 为 T 的 *Banach* 共轭算子

定理 3.5.2. X, Y 为 *Banach* 空间.$T, S \in L(X, Y)$, 则

1. $\|T'\| = \|T\|$
2. $(\alpha T)' = \alpha T'$
3. $(T + S)' = T' + S'$

定理 3.5.3. X 为 *Banach* 空间,$S, T \in L(X)$

1. $(TS)' = S'T'$
2. T 有界可逆 $\Rightarrow T'$ 有界可逆

定理 3.5.4. $T''|_X = T, X^* * \to Y^* *, \tau : X \to X^{**}, \tau(x)(f) = f(x)$

定理 3.5.5. $T : H_1 \to H_2$ 为 *Hilbert* 空间,$T^* : H_2 \to H_1$ 则 $T' : H_2^* \to H_1^*$

3.6　算子的值域与零空间, 商空间

定义 3.6.1. 商空间 $\sim\subset A\times A$ 为 A 上的一个二元关系, 称其为等价类指的是以下三条成立.

1. $\forall a\in A,(a,a)\in\sim,a\sim a$
2. 如果 $a\in A,(a,a)\in\sim$ 则有 $(b,a)\in\sim$
3. 如果 $(a,b)\in\sim,(b,c)\in\sim$ 则 $(a,c)\in\sim$

$A/\sim=\{[x]:x\in A\},[x]=\{y\in A:y\sim x\}$

定义 3.6.2. X 为线性空间,M 为 X 的一个线性流形

$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in M,\sim$ 为 X 上的等价关系:$X/\sim=X/M$

X/M 按等价类的加法勾构成一个线性空间, 称之为商空间, 商范数为 $\|[x]\|=\inf\{\|y\|:y\in[x]=\inf\{\|y-z\|:z\in M,y\in[x]\}$

X/M 按 $\|[x]\|$ 构成赋范线性空间

定理 3.6.3. X 为 *Banach* 空间,X/M 为 *Banach* 空间

定义 3.6.4. 零化子 X 为赋范线性空间,X^* 为对偶空间,M 为 X 中的线性流形,N 为 X^* 的线性流形

$M^\circ\triangleq\{f\in X^*:\forall x\in M,有f(x)=0\}$ 称为 M 的零化子

${}^\circ N\triangleq\{x\in X:\forall f\in N,有f(x)=0\}$ 称为 N 的零化子

定理 3.6.5. X 为 *Banach* 空间,M 为 X 的一个线性流形

1. ${}^\circ(M)^\circ=M$
2. X 为自反的,G 为 X^* 中的子空间, 有 $({}^\circ G)^\circ=G$

定理 3.6.6. X 为 *Banach* 空间,M 为 X 的子空间

1. M^* 与 X^*/M° 保范同构
2. $(X/M)^*$ 与 M° 保范同构

3.7 弱拓扑与弱 * 拓扑

定义 3.7.1. 弱拓扑与弱 * 拓扑 X 为赋范线性空间

$\{x_n\} \subset X$ 称为弱收敛的, 指的是 $\forall f \in X^*$ 有 $f(x_n) \to f(x)$

X^* 为对偶空间,$\{f_n\} \subset X$ 称为弱 * 收敛的, 指的是 $\forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$

第四章　有界线性算子的谱理论

4.1　谱的概念及性质

定义 4.1.1. X 为 *Banach* 空间,$X \neq \{\theta\}, I : X \to X$ 恒等算子,I 不是零算子.$0 : x \mapsto 0, I : x \mapsto x, T \in L(X), \lambda \in C$ 如果 $\lambda I - T$ 在 X 上是有界可逆的, 则称 λ 为 T 的一个正则点,$\lambda \in \rho(T)$, 正则点集记为 $\rho(T)$, 记 $\sigma(T) = C \backslash \rho(T)$,, 称为 T 的谱点集,$\lambda \in \sigma(T)$ 称为 T 的一个谱点.

1. 如果 $\lambda I - T : X \to X$ 不是单射, 称 λ 为 T 的一个特征值 (点谱), 记作 $\lambda \in \sigma_p(T)$
2. 如果 $\lambda I - T : X \to X$ 为单射, 但不是满射,
3. 如果 $\lambda I - T : X \to X$ 是单射,$\overline{ran(\lambda I - T)} = X$, 但 $ran(\lambda I - T) \neq X$, 称 λ 为 T 的一个连续谱点, 记作 $\lambda \in \sigma_c(T)$
4. $\lambda I - T$ 为双射

$$C = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

定理 4.1.2. $T \in L(X)$, 则 $\rho(T)$ 为开集,$\lambda_0 \in \rho(T)$, 记 $r_{\lambda_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - T)^{-n}\|^{\frac{1}{n}}$, $T^{-n} = (T^{-1}) \cdots (T^{-1})$, 当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{r_{\lambda_0}}$, 有 $\lambda \in \rho(T)$

推论 4.1.3. $\sigma(T)$ 为闭集,$\sigma(T) \subset \{\Lambda : |\Lambda| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}$

定义 4.1.4. 谱半径 令 $r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ 称为 T 的谱半径

引理 4.1.5. $T \in L(X), f \in (L(X))^*$ 则 $f((\lambda I - T)^{-1})$ 为 $\lambda \in \rho(T)$ 上的解析函数

定理 4.1.6. 设 $T \in L(X)$, 则有谱半径公式 $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r$

定理 4.1.7. $T \in L(X)$, 则 $\sigma(T) \neq \varnothing$

4.2　紧算子和有限秩算子

定义 4.2.1. 有限秩算子 X,Y 为线性空间,$T : X \to Y$ 为线性算子, 如果 $dim(ranT) < +\infty$, 则称 T 为有限秩算子

定义 4.2.2. 紧算子 X,Y 为赋范线性空间,$A : X \to Y$ 为线性算子, 如果对于每个 X 中的有界集 M, 都有 AM 为 Y 中的列紧集, 则称 A 为紧算子.

1. $C(X,Y) \subset L(X,Y)$
2. $A \in C(X,Y) \Rightarrow ranA$ 可分
3. $T \in C(X,Y) \Leftrightarrow$ 对每个有界 M,$\overline{TM}$ 为 Y 中的紧集 $\Leftrightarrow$ 对任何有界点列 $x_n \subset X, \{Tx_n\}$ 一定有收敛子列
4. T 为有界的有限秩算子, 则 T 为紧的

定理 4.2.3. X,Y 为赋范线性空间, 则 $C(X,Y)$ 为 $L(X,Y)$ 中的线性流形, 如果 Y 为 $Banach$ 空间, 则 $C(X,Y)$ 为 $Banach$ 空间

定理 4.2.4. X,Y,Z 为赋范线性空间,$T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$, 如果 S,T 之一为紧算子, 则 $ST \in C(X,Y)$

定理 4.2.5. X,Y 为赋范线性空间,$T \in C(X,Y)$, 则 T 将 X 中弱收敛的点列映为依范数收敛的点列.

定理 4.2.6. X,Y 为赋范线性空间

1. 如果 $T \in C(X, Y)$, 则 $T' \in C(Y^*, X^*)$

2. 如果 Y 是 *Banach* 的, 且 $T' \in C(Y^*, X^*)$ 则称 $T \in C(X, Y)$

定理 4.2.7. 设 X 为 *Banach* 空间, 且 X 有一个 *Schander* 基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, A \in C(X)$, 则称 A 可以表示成为一列有限秩算子的极限

定理 4.2.8. X 为复 *Banach* 算子,$A \in C(X), \lambda \neq 0$, 则 $ran(\lambda I - A)$ 为闭子空间.

定理 4.2.9. 紧算子的 *Riesz-Schander* 理论 X 为复 *Banach* 空间,A 是 X 上的紧算子, 则:

1. 如果 $dimX = \infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$

2. $\sigma(A) \backslash \{0\} \subset \sigma_p(A)$

3. $\forall \lambda \neq 0$ 有 $dimker(\lambda I - A) < +\infty$

4. $\sigma(A)$ 至少只有一个聚点 0

定理 4.2.10. 设 X 为复 *Banach* 空间,$A \in C(X), \lambda \neq 0$ 则

1. $ran(\lambda I - A) = ker^{\circ}(\lambda I - A')$

2. $ran(\lambda I - A') =^{\circ} ker(\lambda I - A)$

定义 4.2.11. X 为赋范线性空间,M,N 为 X 的闭子空间,$M \cap N = \{0\}, M + N = X$ 称 M 与 N 拓扑互补,$X = M \oplus N$

定义 4.2.12. 投影算子 X 为赋范线性空间,M 为 X 的子空间 $P \in L(X)$ 且 $P : X \to M, P^2 = P$ 称 P 为 X 到 M 的投影算子

命题 4.2.13. X 为 *Banach* 空间,M 为 X 中的有限维子空间, 则 $X = M \oplus N, \exists P : X \to M$ 为投影算子,X/M 与 $(I - P)X$ 拓扑同构

引理 4.2.14. *X 为复 Banach 空间,$A \in C(X), T = I - A$, 则 $codim(ranT) \leq dimkerT$*

定理 4.2.15. *X 为复 Banach 空间,$A \in C(X), \lambda \neq 0$ 则:*

1. $dimker(\lambda I - A) = dimker(\lambda I - A')$

2. $codimran(\lambda I - A) = dimker(\lambda I - A)$

4.3 Fredholm 算子

定义 4.3.1. 设 X, Y 为 Banach 空间,$T \in L(X, Y)$, 如果

1. $ranT$ 闭

2. $dim(kerT) < +\infty$

3. $codim(ranT) < +\infty$

则称 T 为 $X \to Y$ 的 Fredholm 算子

定理 4.3.2. 设 X, Y 为 Banach 空间,$T \in L(X, Y)$

1. 如果 $T \in F(X, Y)$, 则存在 $S \in L(Y, X)$ 以及 $A_1 \in C(X), A_2 \in C(Y), s.t. TS = T_y - A_2, ST = I_x - A_1$

2. 如果存在 $S_2, S_1 \in L(Y, X), A_1 \in C(X), A_2 \in C(Y)$, 使得 $TS_2 = I_y - A_2, S_1 T = I_x - A_1$, 则 $T \in F(X, Y)$