泛函分析复习指南

1^{th} Edition, 2021 年 12 月 18 日

前言

开坑时间:2021.12.16.

本篇为复习资料, 顺便试用一下新模板.

有问题可随时联系我, 知乎:Infty

泛函分析, 其实也可以说是从算子角度出发的线性代数, 可以参考《线性代数应该这样学》, 这本书可以说是有限维的泛函分析.

泛函分析应用范围很广泛, 确实是应用数学, 仝老师毕竟是做纯理论的, 对数学应用这方面不太了解.

所以我从不认为自己是学纯数学的, 学泛函也是为了做应用.

我迄今为止接触的所有数学课程, 都远达不到纯数的水平, 泛函也好, 抽代也好, 拓扑也好, 这就是应数应该学的, 很久之前我也曾经质疑过我学的有什么用, 但随着自己做应用, 研究数据空间的结构, 研究核函数该怎么设定, 这些疑虑也就打消了.

愿各位永远对自己所学心怀敬畏之情

其实我不止一次的吐槽过, 课上讲的题目证明思路乱, 写完更加坚定了我这种想法. 即便是我在写这前言的时候, 这篇指南的某些证明思路依旧是十分混乱的, 我会尽力改进

更多内容可以参考我的随笔.

或者孙七七的主页:

孙七七主页

Infty

2021 年 12 月 18 日

目录

Chapter 1

第一章

1.1 距离线性空间

Definition 1: 距离空间

X 为非空集合,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足

- $d(x,y) \geq 0$ 并且 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x,y \in X$
- $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$

称 d 为 X 上的距离, 称 (X,d) 为距离空间

Definition 2: 距离线性空间

X 为线性空间且 d 为 X 上的一个距离, 如果 X 中的加法数乘按 d 的意义下确定的极限是连续的

- $x_n \xrightarrow{d} x, y_n \xrightarrow{d} y \Rightarrow d(x_n + y_n, x + y) \to 0$
- $x_n \xrightarrow{d} x, \alpha_n \xrightarrow{d} \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow d(\alpha_n x_n, \alpha x) \to 0$

则称 (X,d) 为距离线性空间

1.2 可分性

Definition 3: 稠密集

设 (X,d) 是距离空间, 子集 $S \subset X$ 称为 X 的稠密集, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 对任何的 $x \in X$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $d(x, x_0) < \varepsilon$

Definition 4: 可分空间

(X, d) 为距离空间, 如果 $A \subset X, \bar{A} = X$ 称 A 在 X 中为稠密的, 如果 X 存在一个可数的稠密子集, 称 X 是可分的

Exercice 1

$l^p(1 \leq p < +\infty)$ 空间是可分的

Solution: $l^p = \{\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ 要证明 l^p 存在可数稠密子集.

一般可数稠密我们都会借助有理数, 因此不妨设 $\xi_n = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots) : n \in \mathbb{Z}^+, r_j \in \mathbb{Q}\} \subset l^p$

于是我们得到了一个 l^p 空间中的可数子列, 现在只需要证明其稠密即可. 也就是说, 证明 l^p 空间中任意一点, 都可以被 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逼近.

事实上, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$, 该级数收敛可以推出序列趋于 0, 进而推出求和的尾部趋于 0,(可数项求和趋于零, 我想这很好证明, 取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2^n}$) 也就是 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|^p = 0$, 即 $\exists N, s.t. |\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p| < \varepsilon$, 为了后面凑 ε, 不妨设 $\varepsilon = (\frac{\varepsilon}{2})^p$

对于前 N 项, 定义有理数 $r_1, \cdots, r_N$, 使得 $(|x_1 - r_1|^p + \cdots, |x_N - r_N|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$, 这是可行的, 因为每一个实数都可以由有理数逼近, 因此找到这样的有理数是可行的

取 $\gamma^{(\varepsilon)} = (r_1, \cdots, r_n, 0, \cdots)$

$$
\begin{aligned}
d(\xi, \gamma^{(\varepsilon)}) &= (|x_1 - r_1|^p + \cdots, |x_N - r_N|^p + |x_{N+1}| + \cdots)^{\frac{1}{p}} && (1.1)\\
&< ((\frac{\varepsilon}{2})^p + \frac{\varepsilon}{2}^p)^{\frac{1}{p}} && (1.2)\\
&= \varepsilon(\frac{1}{w^p} + \frac{1}{2^p})^{\frac{1}{p}} && (1.3)\\
&< 1 \cdot \varepsilon \qquad = \varepsilon && (1.4)
\end{aligned}
$$

至此证毕

1.3 紧性, 列紧性, 完全有界性

Definition 5: 紧性

(X, d) 为距离空间,$M \subset X$ 称为是列紧的, 如果 M 的任意开覆盖, 都有有限子覆盖

Definition 6: 列紧性

(X,d) 为距离空间,$M \subset X$ 称为是列紧的, 如果对于 M 中的任何点列, 都可以找到收敛子列, 如果收敛子列都收敛于集合自身中的点, 称 M 为自列紧的

Definition 7: 完全有界

距离空间 X 中的集合 M 称为完全有界的, 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在由某个有限元组成的 $\varepsilon-$ 网

1.4 Arzela-Ascoli 定理

Theorem 1: *Arzela − Ascoli* **定理**

$C([0,1])$ 中的集合 A 为列紧的充要条件是 A 为一个等度连续且一致有界的函数族.

1.5 赋范线性空间与有界线性算子

Definition 8: 赋范线性空间

X 线性空间,$||\cdot||, X \to \mathbb{R}$, 如果满足:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

称 $||\cdot||$ 为 X 上的一个范数, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间

Definition 9: 有界线性算子

X 为线性空间,$T : X \to X$, 如果满足 $\forall x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ 都有 $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$ 称 T 为线性映射.

如果 $(X, ||\cdot||_1), (Y, ||\cdot||_2)$ 为赋范线性空间, 如果存在 $K > 0$ 使得 $\forall x \in X$ 都有 $||Tx||_2 \leq K||x||_1$ 称 T 为有界线性算子, 称满足上式的 K 的下确界为 T 的算子范数.

$||T||_{x \to y} = \inf\{K > 0 : \forall x \in X, ||Tx||_Y \leq K||x||_X\} = \sup\limits_{x \in X, x \neq \theta} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup\limits_{||x||=1} ||Tx||_Y = \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Tx||_Y$

1.6 Riesz 引理

Theorem 2: Riesz 引理

X 为赋范线性空间,M 为 X 的一个闭的线性流形,$M \neq X, \forall \varepsilon \in (0,1), \exists x_\varepsilon, ||x_\varepsilon|| = 1$ 使得 $dist(x_\varepsilon, M) > \varepsilon$

Exercice 2

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间,r>0, 如果求 $B = \{x \in X : \|x\| < r\}$ 是列紧的, 则 X 必是有限维的.

Solution: 假设 X 不是有限维的. 不妨设 r>1

首先构造一个闭的子流形 M, 找到 n 个向量 $\{x_j\}_{j=1}^n, s.t. \|x_j - x_k\| > \frac{1}{2}, M = span x_1, \cdots, x_n$.

证明其为线性流形:

加法封闭:$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in span x_1, x_2, \cdots, x_n$

$\alpha_1 = k_1^{(1)} x_1 + \cdots + k_n^{(1)} x_n, \alpha_2 = k_1^{(2)} x_1 + \cdots + k_n^{(2)} x_n$

$\alpha_1 + \alpha_2 = (k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) x_1 + \cdots + (k_n^{(1)} + k_n^{(2)}) x_n \in M$

数乘同理可证

再证明其为闭的, 有限维都是闭的, 不用证明, 嘿嘿.

由 Riesz 引理, 可以找到 $\|x_{n+1}\| = 1$ 使得 $\|x_{n+1} - x_j\| > \frac{1}{2}, \forall j = 1, 2, 3 \cdots, n$

由数学归纳法, 可以得到这样一串数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}, i \neq j$

这与 B 是列紧的矛盾

证毕

Exercice 3

设 X 是赋范线性空间,$x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$ 如果 $\{\sum\limits_{n=1}^{k} x_n\}_{k=1}^\infty$ 是 X 中的收敛序列, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 如果数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛.

试证明:X 中所有绝对收敛的级数都收敛当且仅当 X 是 Banach 空间

Solution: 首先证明 X 中所有绝对收敛的级数都收敛可以推出 X 为 Banach 空间

取 X 中的 Cauthy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \exists m, n \leq n_k \|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2^k}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq \infty$

由 X 中所有绝对收敛的级数都收敛可以推出

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k} - x_{n_{k+1}}$ 收敛

x_{n_k} 收敛, 子列收敛, 原基本列也收敛, 因此证毕

再证明:X 为 Banach 空间, 可以推出 X 中所有绝对收敛的级数都收敛.

设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$

取 X 中绝对收敛的级数 $x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

设 $n > m, \|S_n - S_m\| = \| \sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k \| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$

S_n 是基本列, 故 S_n 收敛, 故级数收敛

Chapter 2

第二章

2.1 内积空间

Definition 10: 内积空间

X 为线性空间,$(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{C}$ 为一个二元函数如果满足:

- $\forall x \in X$ 有 $(x,x) \to 0$ 且 $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- $\forall x,y,z \in X, (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, x,y \in X, (\alpha x,y) = \alpha(x,y)$
- $\forall x,y \in X$ 有 $(x,y) = \overline{(y,x)}$

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的一个内积, 称 $(X,(\cdot))$ 为内积空间

2.2 Hilbert 空间

Definition 11: Hilbert 空间

完备的内积空间称为 Hilbert 空间

2.3 标准正交基

Definition 12

标准正交集 设 $\{x_1, \cdots .x_n\} \subset X$ 如果对 $\forall x_j, x_k, j, k = 1, \cdots, n$, 满足

$$(x_j, x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

称 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 X 中的一个标准正交集 ($\{x_\alpha\}$ 可以不可数)

Definition 13: 标准正交基

H 为 Hilbert 空间,$S \subset H$ 为一个标准正交集, 如果任何包含 S 的标准正交集都是 S 本身, 称 S 为 H 的一个标准正交基.

2.4 射影定理

Theorem 3: 射影定理

H 为 Hilbert 空间,M 为 H 的一个子空间, 则对 $\forall x \in H$, 存在唯一的 $y \in M, z \in M^{\perp}$, 使得 $x = y + z$

2.5 Riesz 表示定理

Theorem 4: Riesz 表示定理

对于 $\forall f \in H^*$,∃ 唯一的 $z_f \in H$, 使得 $\forall x \in H, f(x) = (x, z_f)$ 且 $\|z_f\| = \|f\|_{H^*}$

$\tau : H^* \to H, \tau : f \mapsto \tau(f) = z_f, \|\tau f\|_H = \|f\|_{H^*}$

Exercice 4

证明: 对任意的 $x \in H$

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |(x, y)|$$

Solution: 定义这样一个泛函: 对于 Hilbert 空间中的任意固定一点 x, 都对应这样一个泛函 $f_x(y) = (y, x)$, 由 Riesz 表示定理,$f_x(y) = (y, z_f), \|z_f\| = \|f\|$,

z_f 是唯一确定的, 因此 $z_f = x, \|x\| = \|f_x\| = \sup\limits_{\|y\| \leq 1} |f_x(y)| = \sup\limits_{\|y\| \leq 1} |(y, x)| = \sup\limits_{\|y\| \leq 1} |(x, y)|$

由此证毕.

当然还有第二种证明: 由 Cauthy-Schwarz 不等式可知 $\sup\limits_{\|y\| \leq 1} |(x, y)| \leq \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|x\| \|y\| \leq \|x\|$

只需要证明可以取到等号即可, 取 $y = \frac{x}{\|x\|}$, 即可取到等号, 证毕

2.6 Hilbert 共轭算子定义和基本性质

Definition 14: Hilbert 共轭算子

设 H_1, H_2 都是 Hilbert 空间,T 是从 H_1 到 H_2 的有界线性算子, 对 H_2 中的每个固定元 y, 设

$$f(x) = (Tx, y)$$

, 当 $x \in H_1$

则 f(x) 是 H_1 上以 x 为变元的连续线性泛函, 由 Riesz 表示定理, 恰有一个 $\hat{y} \in H_1$, 使得

$$f(x) = (x, \hat{y})$$

当 $x \in H_1$

这个 $\hat{y}$ 是由 f, 从而由 y 唯一确定的, 人们定义

$$T^* y = \hat{y}$$

容易验证 T^* 是从 H_2 到 H_1 的有界线性算子, 称 T^* 为 T 的 Hilbert 共轭算子, 通常也称为 T 的伴随算子.

Theorem 5: Hilbert 共轭算子的性质

设 $S, T \in L(H)$, 则

(1) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(2) $(ST)^* = T^* S^*$

(3) $(T^*)^* = T$

(4) 对常数 $\alpha \in C, (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(5) 若 T 有界可逆, 则 T^* 亦有界可逆, 且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

(6) $\|T^*\| = \|T\|$

Chapter 3

第三章

3.1 算子范数的定义

Definition 15: 算子范数

如果 $(X, ||\cdot||_1), (Y, ||\cdot||_2)$ 为赋范线性空间, 如果存在 $K > 0$ 使得 $\forall x \in X$ 都有 $||Tx||_2 \le K||x||_1$ 称 T 为有界线性算子, 称满足上式的 K 的下确界为 T 的算子范数.

$$||T||_{x\to y} = \inf\{K > 0 : \forall x \in X, ||Tx||_Y \le K||x||_X\} = \sup_{x\in X, x\neq\theta} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup_{||x||=1} ||Tx||_Y = \sup_{||x||\le 1} ||Tx||_Y$$

3.2 Hahn-Banach 定理及推论

Theorem 6

Hahn-Banach 定理 X 为赋范线性空间,X_0 为 X 的线性流形,f 为 X_0 上的有界线性泛函, 则存在 $F \in X^*$ 使得 $F|_{x_0} = f$ 且 $\|F\||_X = \|f\|_{X_0}$

Theorem 7: 第一个推论

X 为赋范线性空间,$x_0 \in X$ 则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| = 1$

Theorem 8: 第二个推论

X 为赋范线性空间,E 为 X 上的子空间,$x_0 \in X\backslash E$, 则存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x_0) = 1, f|_E = 0$ 且 $\|f\| = \frac{1}{\alpha}$, 其中 $d = dist(x_0, E) = inf\{\|x_0 - x\| : x \in E\}$

Theorem 9: Hahn-Banach 几何形式

X 为赋范线性空间,$g \subset X$ 的线性簇,K 为 X 中的一个开球, 如果 $g \cap K = \varnothing$, 则存在超平面 H 使得 $H \supset g$ 且 $G \cap K = \varnothing$

Theorem 10: 第三个推论

X 为赋范线性空间,X_0 为 X 的线性流形, 则 $x_0 \in \overline{X_0} \Leftrightarrow$ 对 $\forall f \in X^*$ 如果有 $f|_{X_0} = 0$, 则必有 $f(x_0) = 0$

Theorem 11: 第四个推论

X 为 Banach 空间,M 为 X 有限维线性流形, 则存在子空间 N, 使得 $X = M + N$ 且 $M \cap N = \{0\}$

Exercice 5

设 X 是 Banach 空间, 试证明, 对任给的 $x \in X$,

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \le 1\}$$

Solution: 显然 $|f(x)| \le \|f\|\|x\| \le \|x\|$, 因此 $\|x\| \ge \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \le 1\}$

由 Hahn-Banach 定理的第一个推论可知,$\exists f \in X^*, f(x) = \|x\|, \|f\| = 1$

因此 $\sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \le 1\} \ge \|x\|$

至此证毕

Exercice 6

设 X,Y 都是赋范线性空间,$X \neq \{0\}$, 试证明: 如果 L(X,Y) 是 Banach 空间, 则 Y 必是 Banach 空间

Solution: 只需要证明 Y 完备即可, 取 Y 中 Cauthy 列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, 证明其收敛.

$\exists x_0 \neq 0$ 由 Hahn-Banach 定理,$\exists f_0 \in X^*, s.t. f_0(x_0) \neq 0$

定义 $T_n : X \to Y, T_n x = \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n$

$\|T_n - T_m\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|(T_n - T_m)x\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\frac{f_0(x)}{f_0(x)}| \|y_n - y_0\| \le \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\frac{norm f_0 \|x\|}{f_0(x)}| \|y_n - y_0\| \to 0$

$\{T_n\}$ 为 $L(X,Y)$ 中的 Cauthy 列,$T_n \to T \in L(X,Y)$

对每个 x$\|T_n x - Tx\| \le \|T_n - T\|\|x\| \to 0, Tx_n \to Tx_0$

至此证毕

3.3 Bare 纲定理

Theorem 12: Bare 纲定理

(X,d) 完备, 则 (X,d) 为第二纲的

Definition 16: 第一纲第二纲

(X,d) 为距离线性空间,$A \subset X$ 如果 $\bar{A}$ 中没有内点, 称 A 为无处稠密集 (疏朗集),$X_0 \subset X$

(1) 如果 X_0 可以表示成可数个无处稠密集的并, 则称 X 为第一纲的

(2) 否则, 不能表示成可数个无处稠密集的并, 则称 X 为第二纲的

3.4 共鸣定理 (一致有界定理,Banach-Steinhauss 定理)

Theorem 13: 共鸣定理, 一致有界原理,Banach-Steinhauss

X 为 Banach 空间,Y 为赋范线性空间,$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset B(X,Y)$, 如果对 $\forall x \in X, \sup\limits_{\lambda} \|T_\lambda x\| < +\infty$, 则有 $\sup\limits_{\lambda} \|T_\lambda\| < +\infty$

3.5 开映射定理, 逆算子定理, 闭图像定理

Theorem 14: 开映射定理

设 X 与 Y 都是 Banach 空间,$T \in L(X,Y)$. 如果 $ran(T)$ 都是第二纲的, 则映射 T 变 X 中的开集为 Y 中的开集

Theorem 15: 逆算子定理

设 X 和 Y 都是 Banach 空间,$T \in L(X,Y)$, 如果 T 是一对一的而且满射的, 则 T^{-1} 是连续的

Definition 17: 闭算子

X,Y 为赋范线性空间,T 为从 X 的某个线性流形到 Y 的线性算子,$M = domT$ 为 T 的定义域. 记 $G(T) = \{(x,Tx) : x \in domT\} \subset X \times Y$ 为 T 的图像. 如果 G(T) 在 $X \times Y$ 上为闭集, 则称 T 为闭算子

Theorem 16: 闭图像定理

X,Y 为 Banach 空间,$T : X \to Y$ 为闭算子, 则 T 为有界线性算子.

Exercice 7

设 A,B 都是 Hilbert 空间 H 上处处有定义的线性算子, 且

Exercice 7

$$(Ax, y) = (x, By), \forall x, y \in H$$

证明:A,B 都是有界的, 且 $B = A^*$

Solution: 首先证明 A,B 都是有界的,

证明 A 是闭算子, 即证明 (x, Ax) 是闭集, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (x_0, Ax_0)$, 也就是说 $x_n \to x_0, Ax_n \to y_0$ 时,$x_0 = y_0$

$(Ax_n, y) \to (y_0, y)$

$(Ax_n, y) = (x_n, By) \to (x_0, By) = (Ax_0, y)$

$Ax_0 = y$

由闭图像定理,A 为有界的, 同理 B 是有界的.

有 Riesz 表示定理,$A = B^*$

Exercice 8

用逆算子定理证明共鸣定理.

Solution: 定义 X 上的新的范数为 $\|x\|_1 = max\{\|x\|, \sup\limits_{\lambda}\|T_\lambda x\|\}$,$(X, \|\cdot\|_1)$ 为 Banach 的,

建立映射关系:$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|)$, 显然 I 是双射,I 是有界的, 那么 I^{-1} 是连续的, 进而是有界的, 则有

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|$$

即 $\|T_\lambda\|$ 有界

大概就是这么个意思, 然后补充亿点点细节:

首先, 证明新的范数确实满足范数的定义: 为了方便取指标集 $\Lambda_1 = \Lambda \cup \{\alpha\}$ 其中 $T_\alpha = I$

$$\|x\|_1 = \sup_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda x\| = max\{\|x\|, \sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|x\}$$

(1) $\|x\|_1 = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda x\| \geq \|T_\alpha x\| = \|Ix\| = \|x\|$, 故 $\|x\|_1 \geq \|x\|$ 而 $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 iff x = 0$, 故 $\|x\|_1 \geq 0, \|x\|_1 = 0 iff x = 0$

(2) $\alpha\|x\|_1 = \alpha max\{\|x\|, \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda x\|\} = max\{\|\alpha x\|, \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda \alpha x\|\} = \|\alpha x\|_1$

(3) $\|x+y\|_1 = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda(x+y)\| = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda x + T_\lambda y\| \leq \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda x\| + \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}\|T_\lambda y\| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

再证明 $(X, \|\cdot\|_1)$ 为 Banach 空间, 即证 $(X, \|\cdot\|_1)$ 的任一 Cauthy 列都收敛, 取 $(X, \|\cdot\|_1)$ 的 Cauthy 列, $\forall\varepsilon > 0, m, n > N$ 时,$\|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon$ 即 $\|T_\lambda(x_m - x_n)\| \leq \varepsilon, \|T_\lambda x_n - T_\lambda x_m\| \leq \varepsilon$, 令 $m \to \infty, (X, \|\cdot\|)$ 完备,$\|T_\lambda x_n - T_\lambda x_0\| < \varepsilon$ 故 $(X, \|\cdot\|_1)$ 为 Banach 的

3.6 Banach 共轭算子定义及基本性质

Definition 18: Banach 共轭算子

$T' = Y^* \to X^*$ 如下:$T'f = f \circ T, \forall f \in Y^*$ 为 T 的 Banach 共轭算子

Theorem 17: Banach 共轭算子的性质

X,Y 为 Banach 空间.$T, S \in L(X, Y)$, 则

(1) $\|T'\| = \|T\|$

(2) $(\alpha T)' = \alpha T'$

(3) $(T+S)' = T' + S'$

(4) $(TS)' = S'T'$

(5) T 有界可逆 $\Rightarrow$ T' 有界可逆

3.7 商空间

Definition 19: 商空间

$\tilde{} \subset A \times A$ 为 A 上的一个二元关系, 称其为等价类指的是以下三条成立.

(1) $\forall a \in A, (a,a) \in \tilde{}, a\tilde{}a$

(2) 如果 $a \in A, (a,a) \in \tilde{}$ 则有 $(b,a) \in \tilde{}$

(3) 如果 $(a,b) \in \tilde{}, (b,c) \in \tilde{}$ 则 $(a,c) \in \tilde{}$

$A/\tilde{} = \{[x] : x \in A\}, [x] = \{y \in A : y\tilde{}x\}$

Definition 20: 商范数

X 为线性空间,M 为 X 的一个线性流形

$x\tilde{}y \Leftrightarrow x - y \in M, \tilde{}$ 为 X 上的等价关系:$X/\tilde{} = X/M$

X/M 按等价类的加法勾构成一个线性空间, 称之为商空间, 商范数为 $\|[x]\| = \inf\{\|y\| : y \in [x] = \inf\{\|y - z\| : z \in M, y \in [x]\}$

X/M 按 $\|[x]\|$ 构成赋范线性空间

Chapter 4

第四章

4.1 有界线性算子谱的定义和分类

Definition 21: 谱

X 为 Banach 空间,$X \neq \{\theta\}, I: X \to X$ 恒等算子,I 不是零算子.$0: x \mapsto 0, I: x \mapsto x, T \in L(X), \lambda \in C$ 如果 $\lambda I - T$ 在 X 上是有界可逆的, 则称 λ 为 T 的一个正则点,$\lambda \in \rho(T)$, 正则点集记为 $\rho(T)$, 记 $\sigma(T) = C \backslash \rho(T)$,, 称为 T 的谱点集,$\lambda \in \sigma(T)$ 称为 T 的一个谱点.

(1) 如果 $\lambda I - T: X \to X$ 不是单射, 称 λ 为 T 的一个特征值 (点谱), 记作 $\lambda \in \sigma_p(T)$

(2) 如果 $\lambda I - T: X \to X$ 为单射, 但不是满射,$\overline{ran(\lambda I - T)} \neq X$, 称 λ 为 T 的剩余谱点,$\lambda \in \sigma_r(T)$

(3) 如果 $\lambda I - T: X \to X$ 是单射,$\overline{ran(\lambda I - T)} = X$, 但 $ran(\lambda I - T) \neq X$, 称 λ 为 T 的一个连续谱点, 记作 $\lambda \in \sigma_c(T)$

$C = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$

这挺乱的, 写个注解吧.

首先是有界线性算子 T 的正则集, 满足三个条件

(1) $\lambda I - T$ 满射

(2) $\lambda I - T$ 有界可逆

但实际上, 有界可逆一定是单射, 因此正则点集要求双射.

如果不是单射, 则称 λ 为特征值, 即点谱.

如果是单射, 不是满射, 但 $\overline{ran(\lambda I - T)} = X$, 则称其为连续点谱

如果是单射, 但不是满射, 并且 $\overline{ran(\lambda I - T)} \neq X$, 则称其为剩余点谱

4.2 位移算子的谱

设 $T = S^*$, 对于 $y = \{\eta_0, \eta_1, \cdots\} \in H$

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)y &= S^*\{\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots\} - \lambda\{\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots\} \quad (4.1)\\ &= \{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots\} - \{\lambda\eta_0,\lambda\eta_1,\lambda\eta_2,\cdots\} \quad (4.2)\\ &= \{\eta_1-\lambda\eta_0,\eta_2-\lambda\eta_1,\eta_3-\lambda\eta_2,\cdots\} \quad (4.3)\end{aligned}$$

要想 $(T-\lambda I)y = 0$, 必须且只需

$$\eta_1 = \lambda\eta_0, \eta_2 = \lambda\eta_1, \eta_3 = \lambda\eta_2, \cdots$$

即:

$$y = \{\eta_0, \lambda\eta_0, \lambda^2\eta_0, \cdots\} = \eta_0\{1, \lambda, \lambda^2, \cdots\} \in H$$

当且仅当 $|\lambda| < 1$

$$\sigma_p(T) = D = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$$

且 $dimN(T-\lambda I) = 1$, 当 $\lambda \in D$
因为 S 是保范的, 故 $\|S\| = 1, \|S^*\| = \|S\| = 1$, 于是

$$D = \sigma_p(S^*) \subset \sigma(S^*) \subset \overline{D}$$

又因为 $\sigma(S^*)$ 是闭的, 故 $\sigma(S^*) = \overline{D}$ 根据定理,$\sigma(S) = \overline{D}$

4.3 紧算子的定义与判别

Definition 22

X,Y 为赋范线性空间,$A : X \to Y$ 为线性算子, 如果对于每个 X 中的有界集 M, 都有 AM 为 Y 中的列紧集, 则称 A 为紧算子.

4.4 有限秩算子定义

Definition 23

有限秩算子 X,Y 为线性空间,$T: X \to Y$ 为线性算子, 如果 $dim(ranT) < +\infty$, 则称 T 为有限秩算子

4.5 紧算子的谱理论 (Riesz-schouder 理论)

Theorem 18: 紧算子的 Riesz-Schander 理论

X 为复 Banach 空间,A 是 X 上的紧算子, 则:

(1) 如果 $dimX = \infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} \subset \sigma_p(A)$

(3) $\forall\lambda \neq 0$ 有 $dimker(\lambda I - A) < +\infty$

(4) $\sigma(A)$ 至少只有一个聚点 0

Exercice 9

设 $K(s,t)$ 是 $0 \leq s,t \leq 1$ 上的连续函数, 则积分算子:

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

, 当 $x = x(t) \in C[0,1]$, 是 $X = C[0,1]$ 上的紧算子.

根据 Arzela-Ascoli 引理, 这只需证明 X 中任何有界集 $\{x : \|x\| \leq B\}$ 在 A 之下的像是一致有界且同等连续的.

设 $M = \sup\limits_{0\leq s,t\leq 1} |K(s,t)|$, 则

$$|(Ax)(s)| \leq \int_0^1 |K(s,t)x(t)|dt \tag{4.4}$$

$$\leq \int_0^1 MBdt = MB \tag{4.5}$$

当 $normx \leq B$

这说明像集的一致有界性.

其次, 从 $K(s,t)$ 的一致有界性, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 应有 $\delta > 0$, 使

$$|K(s_1,t) - K(s_2,t)| \leq \varepsilon$$

, 当 $|s_1 - s_2| \leq \delta, 0 \leq t \leq 1$

从而

$$|(Ax)(s_1) - (Ax)(s_2)| \leq \int_0^1 |K(s_1,t) - K(s_2,t)||x(t)|dt \leq \varepsilon \int_0^1 |x(t)|dt \leq B\varepsilon$$

Exercice 9

当 $\|x\| \leq B, |s_1 - s_2| \leq \delta$

这表明像集是同等连续的.