

Moteur à courant continu

1

1. Stator : fixe
2. Rotor : mobile
3. Collecteur : élément d'usure

Production de couple :

- spire parcourue par un courant $i_a(t)$
- Champ d'induction B

Par Laplace :

$$\vec{F} = (i_a(t) \wedge \vec{B}) \cdot l$$

cette force produit un couple faisant tourner le moteur :

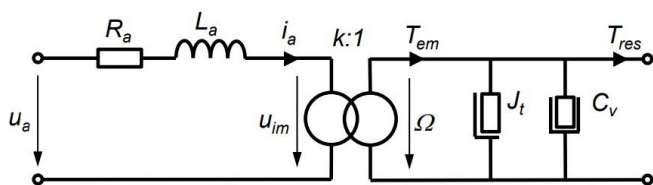
$$T_{em}(t) = k_T \cdot i_a(t)$$

cela induit une tension :

$$u_i(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = k_u \cdot \omega(t)$$

Équations du moteur Dc et de la charge

2



Équation de tension :

$$u_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + u_{im}(t)$$

$$I_a(s) = [U_a(s) \cdot U_{im}(s)] \cdot \frac{1}{1 + s \frac{L_a}{R_a}}$$

Équation de mouvement :

$$J_t \frac{d\Omega(t)}{dt} = T_{em}(t) - C_v \Omega(t) - T_{res}(t)$$

$$\Omega(s) = [T_{em}(s) \cdot T_{res}(s)] \cdot \frac{1}{1 + s \frac{J_t}{C_v}}$$

Équation de couplage :

$$k_T = \frac{T_{em}(t)}{i_a(t)} = \frac{u_{im}(t)}{\Omega(t)} = k_u$$

Hypothèses :

1. Linéarité : pas de saturation du fer, résistance Cst
2. Frottements négligeables, généralement < 5% du couple nominal
3. arbre rigide en torsion : ce n'est pas toujours le cas

Calcul des fonctions de transfert

3

on introduit :

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a}$$

$$\tau_m = \frac{J_t \cdot R_a}{k_T \cdot k_E}$$

Les fonctions de transfert du moteur DC et de la charge, sans frottements visqueux, deviennent :

$$G_{uw} = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{k_E} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

$$G_{ui} = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{J_t}{k_E \cdot k_T} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

Cas particulier : $\tau_m \leq 4 \cdot \tau_e$

Dénominateur défini par 2 pôles réels :

$$s_{1,2} = \frac{-\tau_m \pm \sqrt{\tau_m^2 - 4 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}}{2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

ce qui décompose le système tel que :

$$\frac{1}{(1 + s \cdot \tau_{max})(1 + s \cdot \tau_{min})} \text{ avec : } \tau_{max,min} = -\frac{1}{s_{1,2}}$$

Cas particulier : $\tau_m \gg \tau_e$

$$\frac{1}{(1 + s \cdot \tau_m)(1 + s \cdot \tau_e)}$$

Fonction page 1.22 :

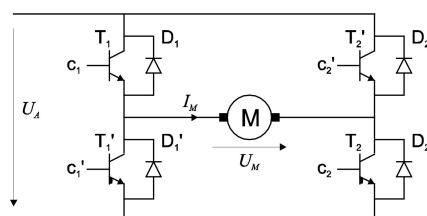
Alimentations des moteurs DC

4

Méthodes :

1. Analogique : Grande perte à basse vitesse.
2. Alimentation à découpage : pertes variateur constant

Pont en « H » :



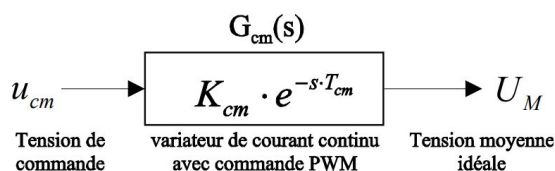
Gestion par pulse width modulation

1. Par régime stationnaire :

$$\bar{U}_M = U_A \cdot \left(2 \cdot \frac{t_e}{T_P} - 1\right)$$

2. Par «sous-oscillation» :

3. Par fonction de transfert :



$$K_{cm} = \frac{U_A}{\hat{u}_{cm}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{1er ordre :} \\ e^{-s \cdot T_{cm}} \simeq \frac{1}{1 + s \cdot T_{cm}} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Padé :} \\ e^{-s \cdot T_{cm}} \simeq \frac{1 - s \cdot \frac{T_{cm}}{2}}{1 + s \cdot \frac{T_{cm}}{2}} \end{array}$$

Approximation du retard pur :

— Si analogique

— u_h triangulaire : $T_{cm} = \frac{T_p}{3}$

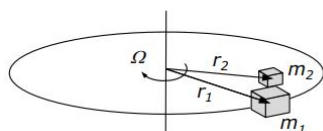
— u_h dent de scie : $T_{cm} = \frac{T_p}{2}$

— Si Numérique : $T_{cm} = T_p$

Rappel sur le moment d'inertie

5

Moment d'inertie d'un corps solide J [kg·m²]

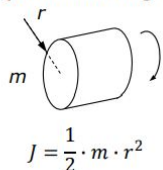


$$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

$$T = J \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

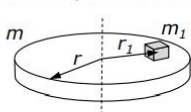
$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \Omega^2$$

Cylindre homogène :



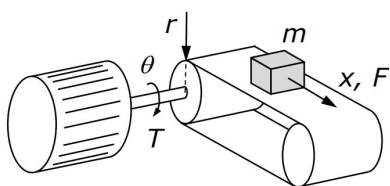
$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

Outil sur un plateau homogène :

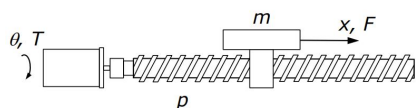


$$J \cong \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m_1 \cdot r_1^2$$

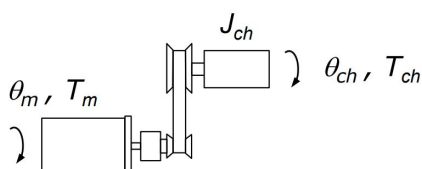
Courroie ou crémaillère : $J_{eq} = m \cdot r^2$



Vis-à-billes : $J_{eq} = m \cdot \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2$

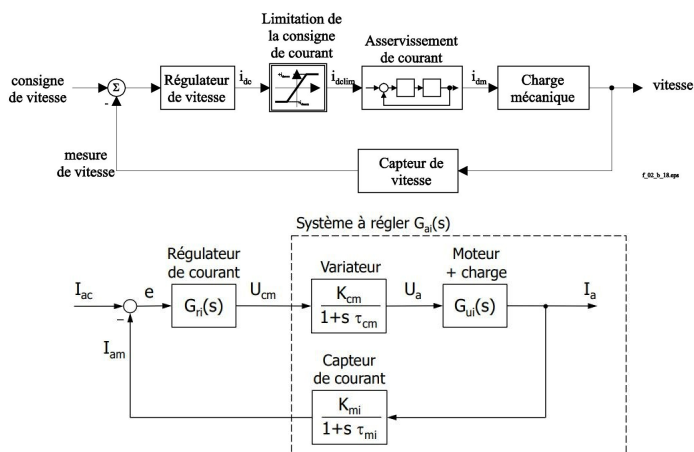


Réducteurs : $J_{eq} = J_{ch} \cdot \frac{1}{i^2}$ avec $i = \frac{\Omega_m}{\Omega_e}$



Réglage du courant / couple

6



$$G_{ai}(s) = K_{ai} \cdot \frac{s}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_e \cdot \tau_m} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{cm}} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{mi}}$$

$$K_{ai} = \frac{K_{cm} \cdot K_{mi} \cdot J_t}{k_t \cdot k_E}$$

Régulateur PI

7

— composante I

— pour compenser le comportement dérivateur à basses fréquences

— pour compenser les couples perturbateur à moyennes fréquences

— composante P

— pour annuler la composante I en hautes fréquences donc, pour ne pas trop dégrader la bande passante

fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{reg,PI}(s) = K_{PI} \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_{ii}}{s \cdot \tau_{ii}} \cdot G_{ai}(s)$$

Ajustage traditionnel (compensation du pôle dominant)

$$\tau_{ii} = \tau_{dominant}$$

Problème :

— erreur statique importante (27%)

Ajustage sur les petites constantes de temps

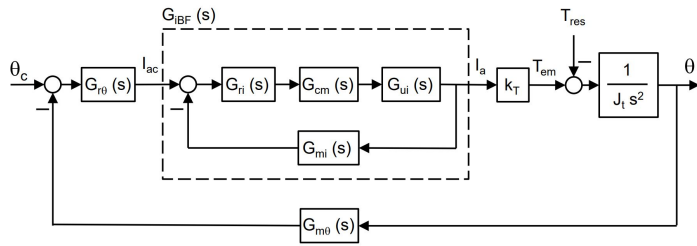
$$\tau_{ii} = N \cdot \sum \tau_{pct} = N \cdot (\tau_{cm} + \tau_{mi}), \text{ avec } N \leq 10 [5...30]$$

Avantages :

— Système en boucle fermée avec $K_{pi} = +13dB$

— Erreur statique quasi nulle

— Bande passante quasi inchangée



Capteur de position Fonction de transfert (approx.) :

$$G_{m\theta}(s) = \frac{K_{m\theta}}{1 + s \cdot \tau_{m\theta}}$$

$$X_{commande} \cdot N_1 = X_{mesure} \cdot N_2$$

$$K_{m\theta} = N_2/N_1$$

Unité de la consigne de courant

Consigne exprimée en :

- Courant : $U_{ci} = I_c \cdot K'_{mi}$ avec $K'_{mi} \approx K_{mi}$
- Couple : $U_{ci} = T_c \cdot K'_{mi}/k'_T$ avec $k'_T \approx k_T$

Boucle fermée de courant

on peut utiliser la fonction de transfert en boucle fermée obtenue précédemment (calcul « exact »), ou on peut en faire une approximation du 1er ordre, dont la fonction de transfert es :

$$G_{iBF}(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{iBF}}$$

$$G_{iBF}(0) \approx 1$$

$$\tau_{iBF} = 1/\omega_{m\phi 45^\circ}$$

Système à régler

$$G_{a\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{I_{ac}(s)} = \underbrace{\frac{1}{1 + s \cdot \tau_{iBF}}}_{G_{iBF}(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{J_t s^2}}_{Charge} \cdot \underbrace{\frac{K_{m\theta}}{1 + s \cdot \tau_{m\theta}}}_{Capt-pos}$$

$$G_{a\theta}(s) = \underbrace{\frac{K_{m\theta} \cdot k_T}{J_t}}_{K_{a\theta}} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{iBF}} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{m\theta}}$$

Régulateur

$$PD = G_{r\theta} = K_{p\theta} \cdot (1 + s \cdot \tau_{d\theta})$$

Ajustage

$$\tau_{ref} = \sum \tau_i \text{ ou } 1/\omega_{ref} \text{ à } -225^\circ$$

$$\tau_{d\theta} = N \cdot \tau_{ref}$$

Puis ajuster $K_{p\theta}$ 0 dB pour ω correspondant à la marge de phase souhaitée.

limiteur de courant

Il nécessaire d'ajouter un limiteur de courant sur la consigne ce qui rend le système non-linéaire.

Réaction aux couples perturbateurs

$$G_{v\theta}(s) = \frac{1}{J_t \cdot s^2} \cdot \frac{K_{m\theta}}{1 + s \cdot \tau_{m\theta}} \cdot K_{p\theta} \cdot (1 + s \cdot \tau_{d\theta}) \cdot G_{iBF} \cdot k_T$$

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{|T_{res}(t)|}{|e_\theta(t)|} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{|G_\theta(s)|} \right]$$

en Statique $T_{em} = T_{res}$

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} [G_{r\theta}(s) \cdot G_{iBF} \cdot k_T]$$

si régulateur PD :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \left[K_{p\theta} \cdot (1 + s \cdot \tau_{d\theta}) \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{iBF}} \cdot k_T \right] = K_{p\theta} \cdot k_T$$

Dilemme du choix du coefficient N

Bonne marge de phase : N grand

peu d'erreur statique : N petit

solution : ajouter un filtre de consigne.

$$G_{f\theta} = \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{fc\theta}}$$

ne détériore pas la réaction aux couples perturbateurs

Evite d'exciter les hautes fréquences par la consigne mais

limite la rapidité de réaction aux sauts de consignes

Effet d'une composante I

— annulerait l'erreur statique

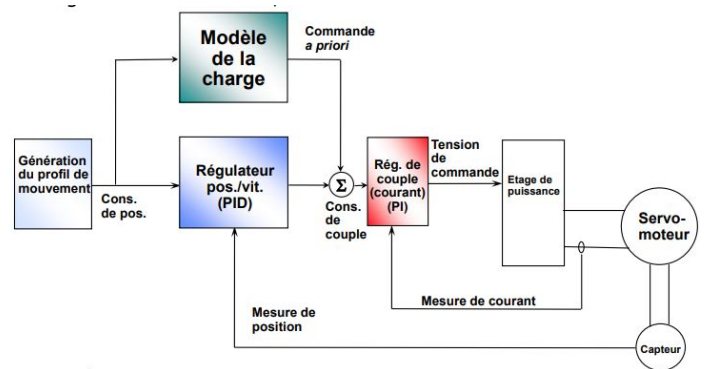
— convient avec rigidité statique d'asservissement $K = \infty$

— provoque un bref écart de position lorsque le couple perturbateur disparaît (overshoots)

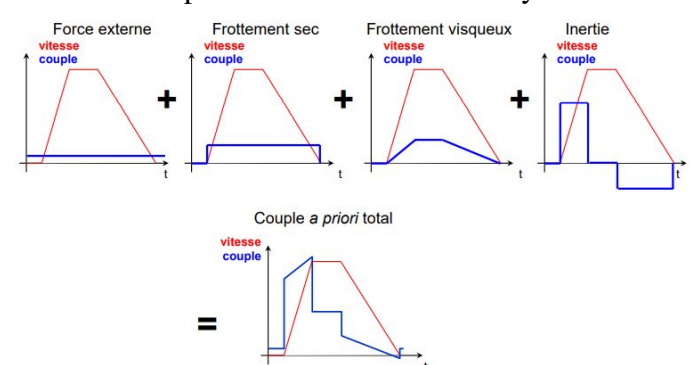
— à éviter lorsqu'il s'agit de garantir un suivi de consigne à forte dynamique

Commande a priori

10



Connaissance parfaite de la réaction du système

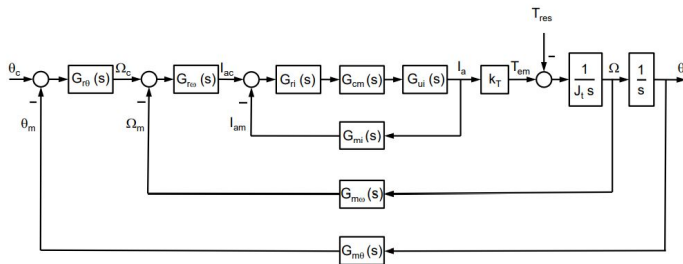
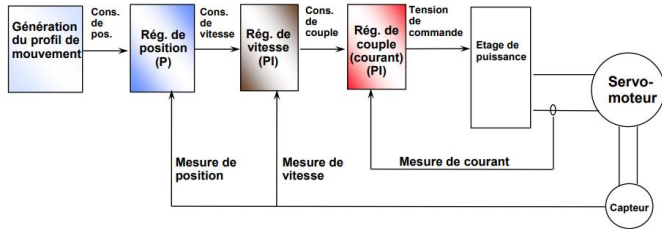


Régulateur ajustés séparément :

→ régulateur de courant, en fonction du moteur

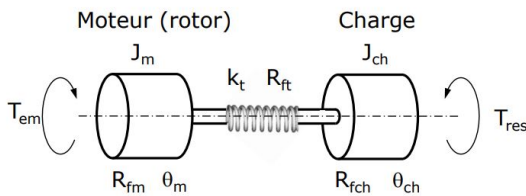
→ régulateur de vitesse, en fonction de la charge mécanique

→ régulateur de position, pour assurer la rigidité parfois exploitant un autre capteur (en aval du réducteur)



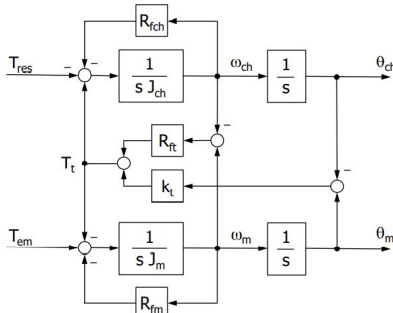
Arbre élastique

12



T_{em}, T_{res} : Couple électromagnétique / résistant [Nm]
 J_m, J_{ch} : Moment d'inertie côté moteur / charge [kgm²]
 R_{fm}, R_{fch} : Coef. de frot. visqueux côté moteur / charge [Nm/(rad/s)]
 θ_m, θ_{ch} : Position angulaire du moteur / de la charge [rad]
 k_t : Rigidité de la transmission [Nm/rad]
 R_{ft} : Coef. de frot. visqueux de la transmission [Nm/(rad/s)]

$$\frac{\theta_m(s)}{T_{em}(s)} = \frac{s^2 J_{ch} + s(R_{ft} + R_{fch}) + k_t}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}$$

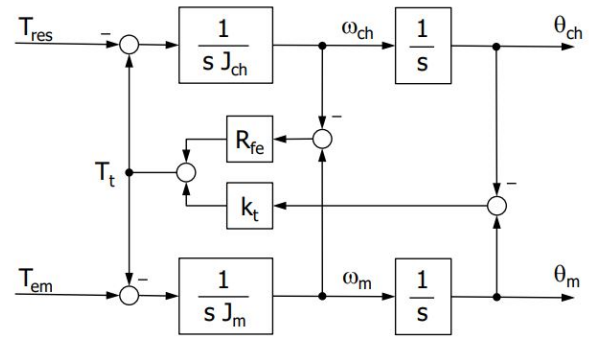


avec :

$$\begin{aligned}
 a_4 &= J_m \cdot J_{ch} \\
 a_3 &= J_m \cdot (R_{ft} + R_{fch}) + J_{ch} \cdot (R_{ft} + R_{fm}) \\
 a_2 &= (J_m + J_{ch}) \cdot k_t + (R_{fch} + R_{fm}) \cdot R_{ft} + R_{fch} \cdot R_{fm} \\
 a_1 &= J_m \cdot j_{ch}
 \end{aligned}$$

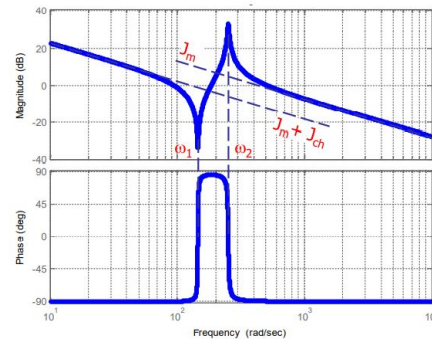
$$\begin{aligned}
 a_4 &= J_m \cdot J_{ch} \\
 a_3 &= (J_m + J_{ch}) \cdot R_{fe} \\
 a_2 &= (J_m + J_{ch}) \cdot k_t \\
 a_1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$R_{fe} = \frac{J_m R_{fch} + J_{ch} R_{fm}}{J_m + J_{ch}} + R_{ft}$$



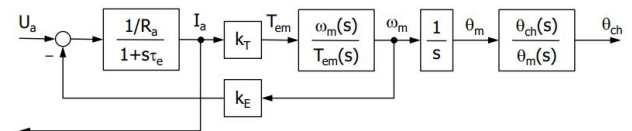
$$\begin{aligned}
 \frac{\theta_m(s)}{T_{em}(s)} &= \frac{s^2 J_{ch} + s R_{fe} + k_t}{J_m J_{ch} s^4 + R_{fe} (J_m + J_{ch}) s^3 + k_t (J_m + J_{ch}) s^2} \\
 \frac{\theta_{ch}(s)}{T_{em}(s)} &= \frac{s R_{fe} + k_t}{J_m J_{ch} s^4 + R_{fe} (J_m + J_{ch}) s^3 + k_t (J_m + J_{ch}) s^2} \\
 \frac{\theta_{ch}(s)}{\theta_m(s)} &= \frac{s R_{fe} + k_t}{s^2 J_{ch} + s R_{fe} + k_t}
 \end{aligned}$$

Réponse harmonique

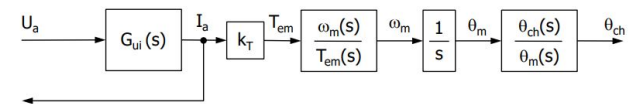


$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= \frac{1}{J_{ch}} \cdot k_t \\
 \omega_2^2 &= \left(\frac{1}{J_m} + \frac{1}{J_{ch}} \right) \cdot k_t \\
 \omega_2^2 - \omega_1^2 &= \frac{1}{J_m} \cdot k_t
 \end{aligned}$$

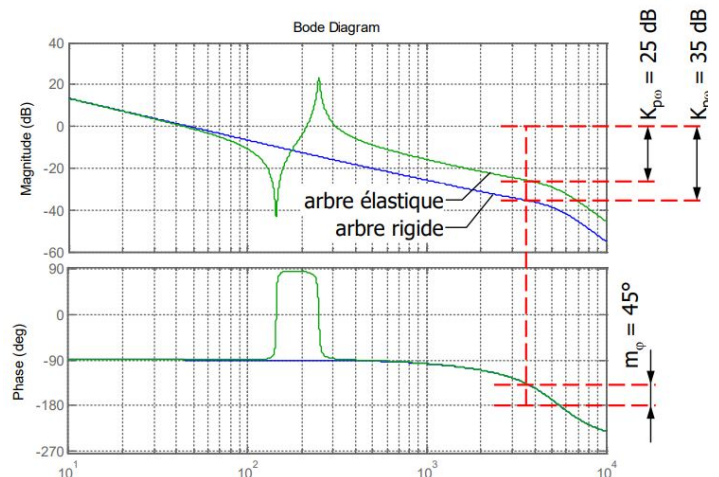
Effet de l'arbre élastique en régulation de courant

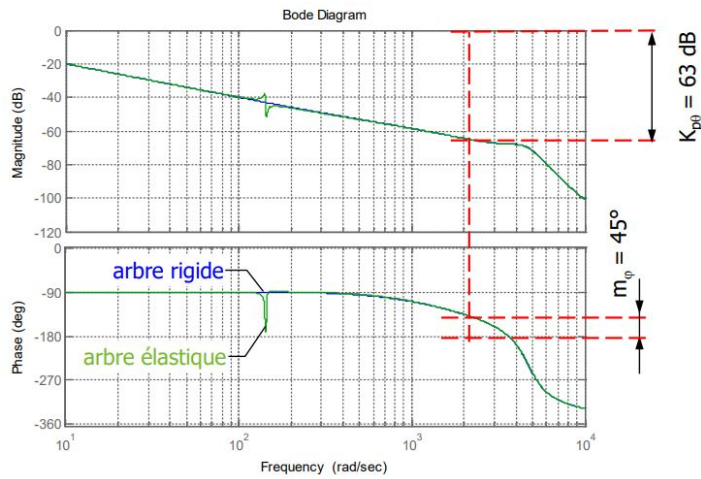


- En pratique, on peut négliger l'oscillation de la tension induite liée à l'élasticité de l'arbre
- On conserve ainsi la fonction de transfert du moteur $G_{ui}(s)$



Effet de l'arbre élastique en régulation de vitesse





Équation de tension :

$$u_a(t) = R_a \cdot i_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + u_{im}(t)$$

$$I_a(s) = [U_a(s) \cdot U_{im}(s)] \cdot \frac{\frac{1}{R_a}}{1 + s \frac{L_a}{R_a}}$$

Équation de mouvement :

$$J_t \frac{d\Omega(t)}{dt} = T_{em}(t) - C_v \Omega(t) - T_{res}(t)$$

$$\Omega(s) = [T_{em}(s) \cdot T_{res}(s)] \cdot \frac{\frac{1}{C_v}}{1 + s \frac{J_t}{C_v}}$$

Équation de couplage :

$$k_T = \frac{T_{em}(t)}{i_a(t)} = \frac{u_{im}(t)}{\Omega(t)} = k_u$$

Équation utile :

$$u_a(t) = U_{in} + R_a \cdot i_a = k_e \Omega + R_a \frac{T_{res}}{k_t}$$

avec

$T_{res} = F_{frot} \cdot V$ par moteur

Constante de temps :

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a}$$

$$\tau_m = \frac{J_t \cdot R_a}{k_T \cdot k_E}$$

Fonctions de transfert :

$$G_{u\omega} = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{k_E} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

$$G_{ui} = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{J_t}{k_E \cdot k_T} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

Pôles :

$$s_{1,2} = \frac{-\tau_m \pm \sqrt{\tau_m^2 - 4 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}}{2 \cdot \tau_m \cdot \tau_e}$$

si : $\tau_m \leq 4 \cdot \tau_e$

$$\frac{1}{(1 + s \cdot \tau_{max})(1 + s \cdot \tau_{min})}$$

avec :

$$\tau_{max,min} = -\frac{1}{s_{1,2}}$$

si : $\tau_m \gg \tau_e$

$$\frac{1}{(1 + s \cdot \tau_m)(1 + s \cdot \tau_e)}$$

Rappel sur le moment d'inertie

Courroie ou crémaillère : $J_{eq} = m \cdot r^2$

Vis-à-billes : $J_{eq} = m \cdot \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2$

Réducteurs : $J_{eq} = J_{ch} \cdot \frac{1}{i^2}$ avec $i = \frac{\Omega_m}{\Omega_e}$

Réglage du courant / couple

$$G_{ai}(s) = K_{ai} \cdot \frac{s}{1 + s \cdot \tau_m + s^2 \cdot \tau_e \cdot \tau_m} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{cm}} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_{mi}}$$

$$K_{ai} = \frac{K_{cm} \cdot K_{mi} \cdot J_t}{k_t \cdot k_E} = \frac{\tau_m \cdot K_{cm}}{R_a}$$