

# Formulaire RegNum

Kenzi Antonin

21 janvier 2023

## Concept

3 objectif à la régulation :

1. Stable
2. Rapide
3. Bien amorti

Deux genres de régulation :

1. Correspondance : signal  $y(t)$  suit la consigne  $w(t)$
2. maintien : signal  $y(t)$  devrait ne pas ou peu être influencé par les perturbations  $v(t)$

## Différence analogique/numérique

2

Analogique	Numérique
Signaux temp $u(t), y(t)$	signaux temp $u[k], y[k]$
signaux fréq $U(s), Y(s)$	signaux fréq $U(z), Y(z)$
transformée en s	transformée en z
équations différentielles	équation aux différences
fonction de transfert : $G(s) = Y(s)/U(s)$	fonction de transfert : $G(z) = Y(z)/U(z)$
gain statique : $G(s=0)$	gain statique : $G(z=1)$
pôles, zéros, diag. de Bode	pôles, zéros, diag. de Bode
stabilité : $Re(s_k) < 0$ (demi-plan gauche)	stabilité : $ z_k  < 1$ (int. du cercle unit.)

## Régulateur Numérique

3

### Loi de commande

#### régulateur PD numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

avec :

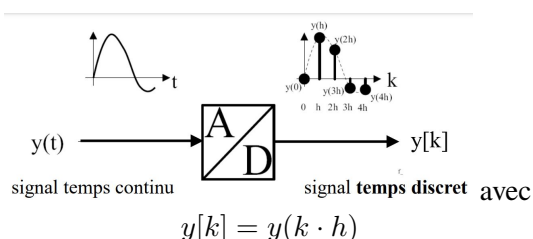
$$b_0 = Kp \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T_e}\right) \quad \text{et} \quad b_1 = -Kp \cdot \frac{T_d}{T_e}$$

#### régulateur PI numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

## Échantillonnage

4

temps d'échantillonnage, sampling  $h$  ou  $T_s$ 

- 1 Il doit être choisi afin d'éviter les variations trop brutales.

$$h = T_{reg}/20 \dots T_{reg}/10$$

## Inventaire des retards

5

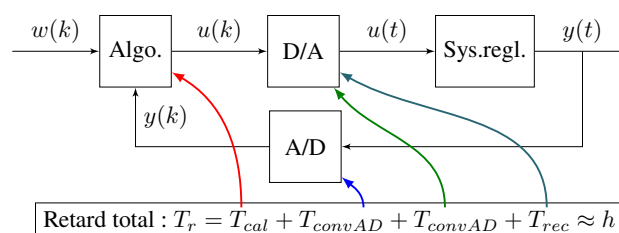
L'étude « quasi temps-continu » est une première approche pour l'analyse et la synthèse approximative d'un système de régulation numérique. Elle est basée sur l'inventaire des retards incontournables que possède une boucle de régulation numérique.

$$\text{Retard du temps de calcul : } T_{cal} < \frac{h}{2}$$

$$\text{Retard du bloqueur d'ordre 0 : } T_{rec} \approx \frac{h}{2}$$

Retard des conversions :

$$T_{convAD} \approx T_{convDA} \approx \frac{h}{100} \dots \frac{h}{10}$$



Ce qui est approximable avec un retard pur par :

### Approximations du retard

1. Retard analogique (régime harmonique) :

$$e^{-j\omega T_r} = e^{j\varphi} \text{ avec } \varphi = -\omega T_r$$

$$|e^{-j\omega T_r}| = 1$$

$$\arg(e^{-j\omega T_r}) = -T_r \cdot \omega$$

2. diagramme de Bode du retard analogique exact :

a) système d'ordre 1 :

$$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1}{1 + T_r \cdot j\omega}$$

b) Padé :

$$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1 - \frac{T_r}{2}j\omega}{1 + \frac{T_r}{2}j\omega}$$

Exact pour le module (1), mais pas pour la phase !

**Rappel Nyquist**

1. Condition de stabilité en boucle fermée basée sur un critère en boucle ouverte !
2. Outil important pour l'analyse des systèmes réglés, marge de gain  $A_m$ , marge de phase  $\varphi_m$ .
3. Outil important pour la synthèse des systèmes réglés, choix de  $K_p$  pour obtenir  $\varphi_m$  souhaitée.

$$\varphi_m = \arg(G_o(j\omega_{co})) - (-\pi) \quad [\text{rad}]$$

$$A_{m,dB} = -|G_o(j\omega_{\pi})| \quad [\text{dB}]$$

$$\omega_{co} \cdot T_{reg} = \pi$$

**Liens entre la boucle ouverte et la boucle fermée**

bande passante à -3 dB en boucle fermée  $\omega_{bp} \approx$  pulsation de coupure en boucle ouverte  $\omega_{co}$

$$\omega_{\text{bande,passante}} = \omega_{co}$$

Pulsation de coupure en b.o.  $\omega_{co} \Leftrightarrow$  rapidité en b.f

**Compensation du pôle dominant**

1. Améliorer la dynamique, c-à-d rendre la boucle fermée plus rapide
2. Faciliter les calculs

**Zéros libres du régulateur PI, PD, PID****PI :**

$$G_c(s) = K_p \frac{1 + T_i \cdot s}{T_i \cdot s} \rightarrow \text{Diagramme de Bode : } Z = -\frac{1}{T_i} \text{ sur l'axe réel négatif, } \text{Im}g \text{ sur l'axe imaginaire positif.}$$

**PD :**

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d \cdot s) \rightarrow \text{Diagramme de Bode : } Z = -\frac{1}{T_d} \text{ sur l'axe réel négatif, } \text{Im}g \text{ sur l'axe imaginaire positif.}$$

**PID :**

$$G_c(s) = K_p \frac{1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2}{T_i \cdot s}$$

zéros réels si :  $T_i > 4 \cdot T_d$

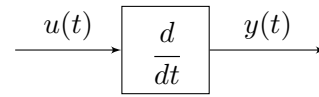
$$Z_2 \approx -\frac{1}{T_d} \quad Z_1 \approx -\frac{1}{T_i} \quad \text{Diagramme de Bode : deux zéros sur l'axe réel négatif, } \text{Im}g \text{ sur l'axe imaginaire positif.}$$

La compensation se fait en appliquant la règle suivante :  
Zéro du régulateur = Pôle de système à régler

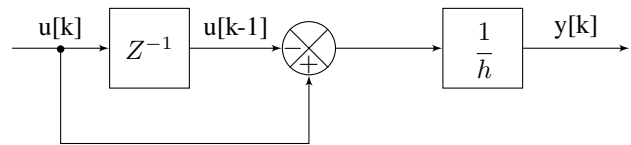
$$\text{Diagramme de Bode : } Z_{a1} \text{ (zéro), } S_{a3} \text{ (pôle), } S_{a2} \text{ (pôle), } S_{a1} \text{ (pôle), } Z_{c1} \text{ (zéro).}$$

**6 schéma et FTZ dérivateur**

8

**Méthode des séquentes :**

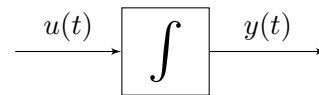
$$y[k] = \frac{du}{dt} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u[k] - u[k-1]}{h}$$

**schéma bloc numérique :**

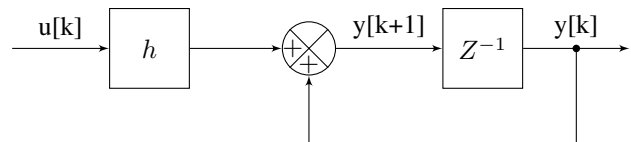
$$G_d(Z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{h} = \frac{z - 1}{h z}$$

**schéma et FTZ intégrateur**

9

**Méthode des rectangles :**

$$y[k+1] = y[k] + h \cdot u[k]$$

**schéma bloc numérique :**

$$G_i(Z) = \frac{h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{h}{z - 1}$$

**Méthode de "Tustin" (trapèzes) :** 10

Idée de la méthode de numérisation de "Tustin" :

pour une fonction de transfert analogique quelconque, remplacer chaque occurrence de  $s$  par l'expression en  $z$  ci-dessous

$$y[k] = y[k-1] + h \cdot \frac{u[k-1] + u[k]}{2}$$

$$G_i(Z) = \frac{h \cdot (z^{-1} + 1)}{2(1 - z^{-1})} \approx \frac{1}{s}$$

$$G_d(Z) = \frac{2(1 - z^{-1})}{h \cdot (z^{-1} + 1)} \approx s$$

l'idée de la méthode de tustin est de remplacer  $s$  par l'expression en  $z$

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{1}{1 + \tau \frac{2(1 - z^{-1})}{h \cdot (z^{-1} + 1)}} = \frac{hz + h}{(h + 2\tau)z + h - 2\tau}$$

**Lieu des poles(Root locus)**

Outil important permettant la synthèse de systèmes réglés :

pôles complexes conjugués :

$$s_{1,2} = -\delta \pm j\omega$$

Réponse indicielle :

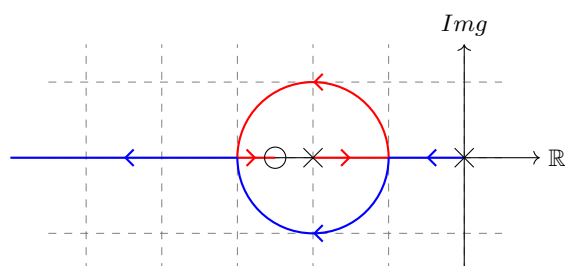
$$g(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$$

Rappel (formulaire régulation automatique) :

$$T_{reg} = \frac{3}{\delta} = \frac{-3}{\Re(s_f)}$$

Règles de tracer du lieu des pôles (L.d.P) :

1. L.d.P a  $n$  branches = degré du dénominateur
2. L.d.P a  $M$  branches = degré du numérateur
3. L.d.P symétrique par l'axe  $\mathbb{R}$
4. Points de départ à  $K_p = 0$
5. Points de fin à  $K_p = \infty$
6.  $d = n - m$  branches restante partent en asymptote infinie, où  $d$  correspond au degré relatif de la B.O  
les asymptotes forment des étoiles régulières
7. Tout point de l'axe réel situé à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros réels fait partie du lieu



**Régulation Numérique**

11 sook

Théorème de la valeur final en Z

valable que si la valeur finale existe et est finie !

$$x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} ((z - 1)X(z))$$

contre-exemple :

$$X(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow x[k] = 2^k$$

pas fini

Théorème de la valeur final en Z

Décomposer en élément simple :

$$F(z) = \frac{z}{(z+A)(z+B)} \Rightarrow \frac{F(z)}{z} = \frac{R_1}{z+A} + \frac{R_2}{z+B}$$

$$F(z) = R_1 \frac{z}{z+A} + R_2 \frac{z}{z+B} \Rightarrow f[k] = R_1 \cdot (A)^k + R_2 \cdot (B)^k$$

**Système dynamique discret :**

12

Système discret si signaux entrés et sortis sont discrets.

Système discret est dynamique quand la sortie présente dépend de l'entrée présente et des entrées et sorties passées.

Système dynamique LTI

- Linéaire : principe de superposition
- Stationnaire(invariant) : Coefficients constants
- Causal : pas de dépendance des états future
- Au repos à l'instant 0 : condition de départ nul

Décrit par sa réponse impulsionnelle :

$$\text{Si } u(k) = \Delta(k) + 3\Delta(k-1) - 2\Delta(k-2)$$

$$y(k) = g(k) + 3g(k-1) - 2g(k-2)$$

donc :

 $g(k)$  est un algorithme

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \Leftrightarrow y(k) = g(k) * u(k)$$

**Gain statique**

13

$$K = G_a(s=0) = G_n(z=1)$$

**Erreur statique**

14

par le gain statique (s'appliquant à un système) :

correspondance :

$$e_{infy} = G_{ew}(1) \cdot w_{\infty}$$

Maintien :

$$e_{infy} = G_{ev}(1) \cdot w_{\infty}$$

par le théorème de la valeur finale (s'appliquant à un signal)

correspondance :

1. Calculer  $G_{ew}(z)$  et vérifier la stabilité

$$2. \text{ Calculer } W(z) = w_{infy} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$3. \text{ Calculer } E(z) = G_{ew}(z) \cdot W(z)$$

$$4. \text{ Appliquer le théorème : } e_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z))$$

Condition pour que l'erreur statique correspondance soit nulle :

Soit le système à régler doit avoir un intégrateur pur, soit le régulateur (action I).

Condition pour que l'erreur statique maintien soit nulle :

Soit le système doit avoir un intégrateur pur en amont du point d'introduction de la perturbation.

Erreur de rampe obligatoirement par valeur final

correspondance :

1. Calculer  $G_{ew}(z)$  et vérifier la stabilité

$$2. \text{ Calculer } W(z) = \text{pente} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$3. \text{ Calculer } E(z) = G_{ew}(z) \cdot W(z)$$

$$4. \text{ Appliquer le théorème : } e_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z))$$

Condition pour que l'erreur rampe soit nulle :

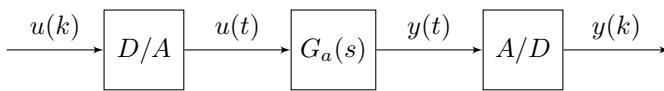
Minimum 2 intégrateur pur dans la boucle ouverte

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f[k]$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\}$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta[k]$	1
3	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$
4	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$k \cdot h$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2} \cdot t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \epsilon[k]$	$\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}$
7			$a^{k \cdot h}$	$\frac{z}{z-a^h}$
8	$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$k \cdot h \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h \cdot e^{-a \cdot h} \cdot z}{(z-e^{-a \cdot h})^2}$
9			$k \cdot h \cdot a^{k \cdot h}$	$\frac{h \cdot a^h \cdot z}{(z-a^h)^2}$
10	$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{\sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + 1}$
11	$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z - \cos(\omega \cdot h))}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + 1}$
12	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{e^{-a \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
13	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z - e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h))}{z^2 - 2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
14			$a^{k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{a^h \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + a^{2 \cdot h}}$
15			$a^{k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z - a^h \cdot \cos(\omega \cdot h))}{z^2 - 2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z + a^{2 \cdot h}}$
16	$1 - e^{-a \cdot t}$	$\frac{a}{s \cdot (s+a)}$	$1 - e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{(1 - e^{-a \cdot h}) \cdot z}{(z-1) \cdot (z - e^{-a \cdot h})}$
17	$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot t - (1 - e^{-a \cdot t}))$	$\frac{a}{s^2 \cdot (s+a)}$	$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot k \cdot h - (1 - e^{-a \cdot k \cdot h}))$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1 - e^{-a \cdot h}}{(z-1) \cdot (z - e^{-a \cdot h})} \cdot z$
18	$1 - (1 + a \cdot t) \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)^2}$	$1 - (1 + a \cdot k \cdot h) \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-a \cdot h}} - \frac{e^{-a \cdot h} \cdot a \cdot h \cdot z}{(z - e^{-a \cdot h})^2}$
19	$e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}$	$\frac{b-a}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} - e^{-b \cdot k \cdot h}$	$\frac{(e^{-a \cdot h} - e^{-b \cdot h}) \cdot z}{(z - e^{-a \cdot h}) \cdot (z - e^{-b \cdot h})}$
20	$1 + \frac{b \cdot e^{-a \cdot t} - a \cdot e^{-b \cdot t}}{a-b}$	$\frac{a \cdot b}{s \cdot (s+a) \cdot (s+b)}$	$1 + \frac{b \cdot e^{-a \cdot k \cdot h} - a \cdot e^{-b \cdot k \cdot h}}{a-b}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b}{a-b} \cdot \frac{z}{z - e^{-a \cdot h}} - \frac{a}{a-b} \cdot \frac{z}{z - e^{-b \cdot h}}$
21	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\pi \cdot k)$	$\frac{z}{z - e^{-a \cdot h}}$
22	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2 \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^{-a \cdot h} \cdot z \cdot (z + e^{-a \cdot h})}{(z - e^{-a \cdot h})^3}$

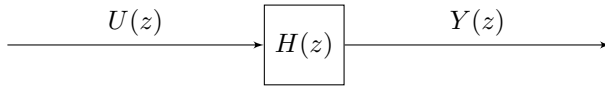
**Modèle échantillonné du système à régler**

Boucle fermée hybride

Partie analogique et numérique



Ce problème peut être résolu en utilisant le modèle échantillonné  $H(z)$  dans les calculs dans le domaine en  $z$ .



$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_a(s)}{s} \right) \right\}_{t=k \cdot h}$$

Exemple :

- $\frac{G_a(s)}{s} = \frac{G_a(s)}{s(s-p_a)}$
- $\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_a(s)}{s} \right) = \frac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot t}$  (Réponse indicielle)
- $\frac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot t} \Big|_{t=k \cdot h} = \frac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot k \cdot h}$
- $\mathcal{Z} \left\{ \frac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot k \cdot h} \right\} = \frac{ka}{-pa} \frac{z \cdot (1 - e^{p_a \cdot h})}{(z-1) \cdot (Z - e^{p_a \cdot h})}$
- $\frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \dots \right\} = \frac{ka}{-pa} \frac{1 - e^{p_a \cdot h}}{Z - e^{p_a \cdot h}}$

Donc les relations entre le plan  $s$  et  $Z$  sont :

$$p_n = e^{p_a \cdot h}$$

$$z = e^{s \cdot h}$$

Propriétés du "modèle échantillonné"

- pôles analogique se transforme selon  $z = e^{s \cdot h}$
- Le gain statique est préservé :  $H(z=1) = G_a(s=0)$
- $H(z)$  est linéaire en  $G_a(s)$  :  $G_{a1}(s) + G_{a2}(s) \Leftrightarrow H_1(z) + H_2(z)$  Pas valable pour le produit
- Un retard pur de  $N$  période coté analogique donne lieu à un facteur  $z$  dans la modèle échantillonné  $e^{-H \cdot h} \Leftrightarrow z^{-N}$

Calcul du modèle échantillonné du système à régler

le calcul se fait avec la réponse impulsionnelle.

 $u[k] = \Delta[k]$  (Dirac numérique)

$$\mathcal{L} \left( u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-h) \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-h \cdot s} = U(s)$$

Exemple sans retard :

$$u[k] = \{1, 0, 0, 0\} \rightarrow y[k] = \{0, h, h, h\} \text{ (Intégrateur)}$$

$$y[k] = h \cdot \varepsilon[k-1] \rightarrow \mathcal{Z}(y) = H(z) = h \cdot z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{h}{z-1}$$

Exemple avec retard  $h/2$  :

$$u[k] = \{1, 0, 0, 0\} \rightarrow y[k] = \{0, h/2, h, h\} \text{ (Intégrateur)}$$

$$y[k] = h \cdot \varepsilon[k-2] + \frac{h}{2} \Delta[k-1]$$

$$\mathcal{Z}(y) = H(z) = h \cdot z^{-2} \frac{z}{z-1} + \frac{h}{2} \cdot z^{-1} = h \frac{1 + \frac{1}{2}(z-1)}{z(z-1)}$$

Avantages du modèle échantillonné

- Analyse et synthèse complètement en  $z$
- Pas besoin de traiter le système hybride.
- Calculs exacts contrairement à l'inventaire des retards.

16

Correspondance entre le plan de  $s$  et le plan de  $z$ 

- Le plan de  $z$  est "moins parlant" que le plan de  $s$
- Beaucoup de caractéristiques, p.ex. taux d'amortissement sont définies en  $s$
- Pour la synthèse par "placement de pôles", d'abord choisir les pôles en  $s$  et calculer les pôles en  $z$  correspondants
- Pour l'analyse, d'abord calculer les pôles en  $z$ , puis calculer les pôles en  $s$  correspondants en utilisant la fonction réciproque (log)

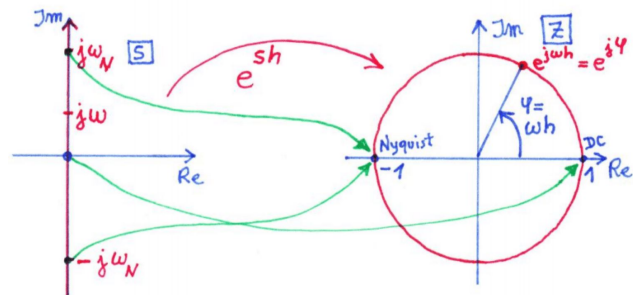
Avec ma calculatrice nulle

$$s = \text{delta} + j\omega$$

$$z = e^{s \cdot h} = e^{\text{delta} \cdot h + j\omega \cdot h} = 1 \angle j\omega h$$

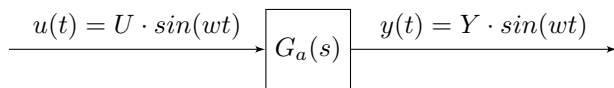
$$s = \frac{\ln(z)}{h} = \frac{1}{h} \left( \ln(|z|) + j \arg(z) \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left( \ln(|z|) + j \arg(z) \right)$$



**Régime harmonique**

17

Rappel :

donc :  $y = |G_a(jw)| \cdot U$  ;  $\varphi = \arg(G_a(jw))$