Formulaire RegNum

Kenzi Antonin 15 novembre 2022

Concept 1

3 objectif à la régulation :

1. Stable
2. Rapide
3. Bien amorti

Deux genres de régulation :

1. Correspondance : signal y(t) suit la consigne w(t)
2. maintien : signal y(t) devrait ne pas ou peu être influencé par les perturbations v(t)

Différence analogique/numérique 2

Analogique	Numérique
Signaux temp u(t), y(t)	signaux temp u[k], y[k]
signaux fréq U(s), Y(s)	signaux fréq U(z), Y(z)
transformée en s	transformée en z
équations différentielles	équation aux différences
fonction de transfert : $G(s) = Y(s)/U(s)$	fonction de transfert : $G(z) = Y(z)/U(z)$
gain statique : G(s=0)	gain statique : G(z=1)
pôles, zéros,	pôles, zéros,
diagr. de Bode	diagr. de Bode
stabilité : $Re(s_k)$ < 0 (demi-plan gauche)	stabilité : $\|z_k\| < 1$ (int. du cercle unit.)

Régulateur Numérique 3

Loi de commande

régulateur PD numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

avec :

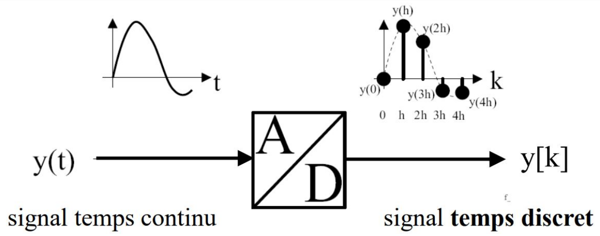
$$b_0 = Kp \cdot (1 + \frac{T_d}{T_e}) \qquad \text{et} \qquad b_1 = -Kp \cdot \frac{T_d}{T_e}$$

régulateur PI numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

Échantillonnage 4

temps d'échantillonnage, sampling h ou T_s



avec $y[k] = y(k \cdot h)$

Inventaire des retards 5

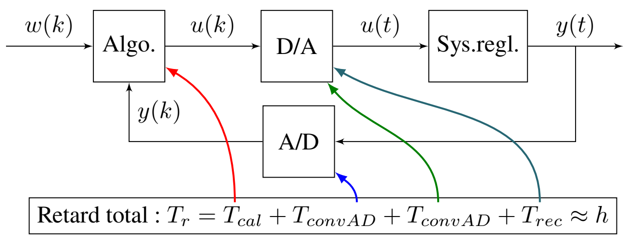
L'étude « quasi temps-continu » est une première approche pour l'analyse et la synthèse approximative d'un système de régulation numérique. Elle est basée sur l'inventaire des retards incontournables que possède une boucle de régulation numérique.

Retard du temps de calcul : $T_{cal} < \frac{h}{2}$

Retard du bloqueur d'ordre 0 : $T_{rec} \approx \frac{h}{2}$

Retard des conversions :

$T_{convAD} \approx T_{convAD} \approx \frac{h}{100} \dots \frac{h}{10}$



Ce qui est approximable avec un retard pur par :

Approximations du retard

1. Retard analogique (régime harmonique) :
   $e^{-j\omega T_r} = e^{j\varphi}$ avec $\varphi = -\omega T_r$
   $|e^{-j\omega T_r}| = 1$
   $arg(e^{-j\omega T_r}) = -T_r \cdot \omega$
2. diagramme de Bode du retard analogique exact :
   a) système d'ordre 1 :
   $$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1}{1 + T_r \cdot j\omega}$$
   b) Padé :
   $$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1 - \frac{T_r}{2} j\omega}{1 + \frac{T_r}{2} j\omega}$$
   Exact pour le module (1), mais pas pour la phase !

Rappel Nyquist 6

1. Condition de stabilité en boucle fermée basée sur un critère en boucle ouverte !
2. Outil important pour l'analyse des systèmes réglés, marge de gain A_m , marge de phase φ_m.
3. Outil important pour la synthèse des systèmes réglés, choix de K_p pour obtenir φ_m souhaitée.

$\varphi_m = arg(G_o(j\omega_{co})) - (-\pi)$ [rad]

$A_{m,dB} = -|G_o(j\omega_\pi)|$ [dB]

Liens entre la boucle ouverte et la boucle fermée

bande passante à -3 dB en boucle fermée $\omega_{bp} \approx$ pulsation de coupure en boucle ouverte ω_{co}

$\omega_{bande,passante} = \omega_{co}$

Pulsation de coupure en b.o. $\omega_{co} \Leftrightarrow$ rapidité en b.f

---

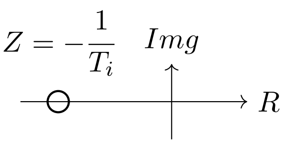
Compensation du pôle dominant 7

1. Améliorer la dynamique, c-à-d rendre la boucle fermée plus rapide
2. Faciliter les calculs

Zéros libres du régulateur PI, PD, PID

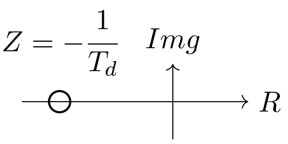
PI :

$$G_c(s) = K_p \frac{1 + T_i \cdot s}{T_i \cdot s} \rightarrow$$



PD :

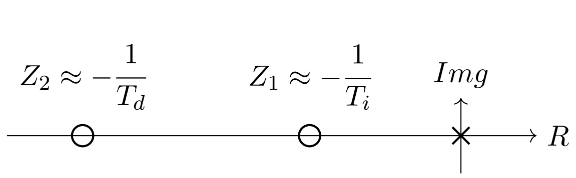
$$G_c(s) = K_p(1 + T_d \cdot s) \rightarrow$$



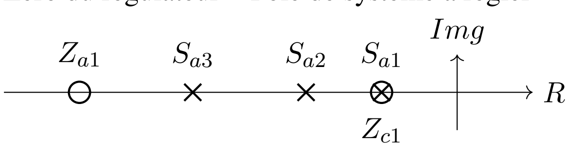
PID :

$$G_c(s) = K_p \frac{1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2}{T_i \cdot s}$$

zéros réels si : $T_i > 4 \cdot T_d$

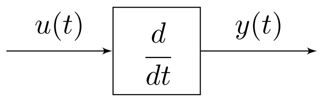


La compensation se fait en appliquant la règle suivante : Zéro du régulateur = Pôle de système à régler



---

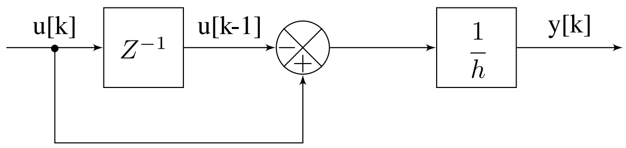
schéma et FTZ dérivateur 8



Méthode des séquentes :

$$y[k] = \frac{du}{dt} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u[k] - u[k-1]}{h}$$

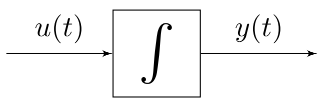
schéma bloc numérique :



$$G_d(Z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{h} = \frac{Z - 1}{hZ}$$

---

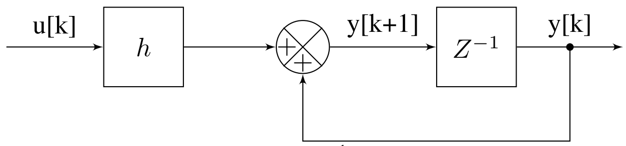
schéma et FTZ intégrateur 9



Méthode des rectangles :

$$y[k+1] = y[k] + h \cdot u[k]$$

schéma bloc numérique :



$$G_i(Z) = \frac{h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{h}{Z - 1}$$

Méthode de "Tustin" (trapèzes) : 10

Idée de la méthode de numérisation de "Tustin" :

pour une fonction de transfert analogique quelconque, remplacer chaque occurrence de s par l'expression en z ci-dessous

$$y[k] = y[k-1] + h \cdot \frac{u[k-1] + u[k]}{2}$$

$$G_i(Z) = \frac{h \cdot (z^{-1}+1)}{2(1-z^{-1})} \approx \frac{1}{S}$$

$$G_d(Z) = \frac{2(1-z^{-1})}{h \cdot (z^{-1}+1)} \approx S$$

Lieu des poles(Root locus)

Outil important permettant la synthèse de systèmes réglés :

1. choix de Kp

pôles complexes conjugués :

$$s_{1,2} = -\delta \pm j\omega$$

Réponse indicielle :

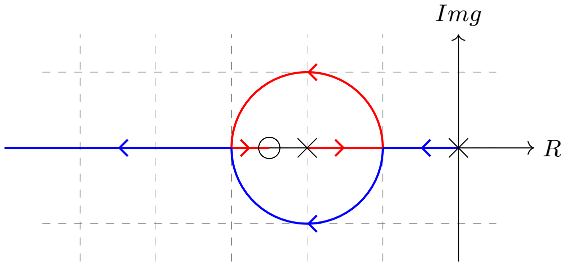
$$g(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\omega t)$$

Rappel (formulaire régulation automatique) :

$$T_{reg} = \frac{3}{\delta} = \frac{-3}{\mathbb{R}(s_f)}$$

Règles de tracer du lieu des pôles (L.d.P) :

1. L.d.P a n branches = degré du dénominateur
2. L.d.P a M branches = degré du numérateur
3. L.d.P symétrique par l'axe $\mathbb{R}$
4. Points de départ à $K_p = 0$
5. Points de fin à $K_p = \infty$
6. $d = n - m$ branches restante partent en asymptote infinie, où d correspond au degré relatif de la B.O
   les asymptotes forment des étoiles régulières
7. Tout point de l'axe réel situé à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros réels fait partie du lieu



Transformé en Z 11

	$f(t)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$	$f[k]$	$F(z)=\mathscr{Z}\{f[k]\}$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta[k]$	1
3	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$k\cdot h$	$\frac{h\cdot z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}\cdot t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}\cdot(k\cdot h)^2$	$\frac{h^2}{2}\cdot\frac{z\cdot(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a\cdot k\cdot h}\cdot\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-e^{-a\cdot h}}$
7			$a^{k\cdot h}$	$\frac{z}{z-a^h}$
8	$t\cdot e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$k\cdot h\cdot e^{-a\cdot k\cdot h}$	$\frac{h\cdot e^{-a\cdot h}\cdot z}{\left(z-e^{-a\cdot h}\right)^2}$
9			$k\cdot h\cdot a^{k\cdot h}$	$\frac{h\cdot a^h\cdot z}{\left(z-a^h\right)^2}$
10	$\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{\sin(\omega\cdot h)\cdot z}{z^2-2\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+1}$
11	$\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{z\cdot(z-\cos(\omega\cdot h))}{z^2-2\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+1}$
12	$e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a\cdot k\cdot h}\cdot\sin(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{e^{-a\cdot h}\cdot\sin(\omega\cdot h)\cdot z}{z^2-2\cdot e^{-a\cdot h}\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+e^{-2\cdot a\cdot h}}$
13	$e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a\cdot k\cdot h}\cdot\cos(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{z\cdot\left(z-e^{-a\cdot h}\cdot\cos(\omega\cdot h)\right)}{z^2-2\cdot e^{-a\cdot h}\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+e^{-2\cdot a\cdot h}}$
14			$a^{k\cdot h}\cdot\sin(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{a^h\cdot\sin(\omega\cdot h)\cdot z}{z^2-2\cdot a^h\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+a^{2\cdot h}}$
15			$a^{k\cdot h}\cdot\cos(\omega\cdot k\cdot h)$	$\frac{z\cdot\left(z-a^h\cdot\cos(\omega\cdot h)\right)}{z^2-2\cdot a^h\cdot\cos(\omega\cdot h)\cdot z+a^{2\cdot h}}$
16	$1-e^{-a\cdot t}$	$\frac{a}{s\cdot(s+a)}$	$1-e^{-a\cdot k\cdot h}$	$\frac{(1-e^{-a\cdot h})\cdot z}{(z-1)\cdot(z-e^{-a\cdot h})}$
17	$\frac{1}{a}\cdot(a\cdot t-(1-e^{-a\cdot t}))$	$\frac{a}{s^2\cdot(s+a)}$	$\frac{1}{a}\cdot\left(a\cdot k\cdot h-\left(1-e^{-a\cdot k\cdot h}\right)\right)$	$\frac{h\cdot z}{(z-1)^2}-\frac{\frac{1-e^{-a\cdot h}}{a}\cdot z}{(z-1)\cdot(z-e^{-a\cdot h})}$
18	$1-(1+a\cdot t)\cdot e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{s\cdot(s+a)^2}$	$1-(1+a\cdot k\cdot h)\cdot e^{-a\cdot k\cdot h}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-a\cdot h}}-\frac{e^{-a\cdot h}\cdot a\cdot h\cdot z}{\left(z-e^{-a\cdot h}\right)^2}$
19	$e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}$	$\frac{b-a}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$e^{-a\cdot k\cdot h}-e^{-b\cdot k\cdot h}$	$\frac{\left(e^{-a\cdot h}-e^{-b\cdot h}\right)\cdot z}{\left(z-e^{-a\cdot h}\right)\cdot\left(z-e^{-b\cdot h}\right)}$
20	$1+\frac{b\cdot e^{-a\cdot t}-a\cdot e^{-b\cdot t}}{a-b}$	$\frac{a\cdot b}{s\cdot(s+a)\cdot(s+b)}$	$1+\frac{b\cdot e^{-a\cdot k\cdot h}-a\cdot e^{-b\cdot k\cdot h}}{a-b}$	$\frac{z}{z-1}+\frac{b}{a-b}\cdot\frac{z}{z-e^{-a\cdot h}}-\frac{a}{a-b}\cdot\frac{z}{z-e^{-b\cdot h}}$
21	$e^{-a\cdot t}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{h}\cdot t\right)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\left(\frac{\pi}{h}\right)^2}$	$e^{-a\cdot k\cdot h}\cdot\cos(\pi\cdot k)$	$\frac{z}{z-e^{-a\cdot h}}$
22	$\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}\cdot(k\cdot h)^2\cdot e^{-a\cdot k\cdot h}$	$\frac{h^2}{2}\cdot\frac{e^{-a\cdot h}\cdot z\cdot\left(z+e^{-a\cdot h}\right)}{\left(z-e^{-a\cdot h}\right)^3}$