Formulaire RegNum

Kenzi Antonin

24 janvier 2023

Concept 1

3 objectif à la régulation :

1. Stable
2. Rapide
3. Bien amorti

Deux genres de régulation :

1. Correspondance : signal y(t) suit la consigne w(t)
2. maintien : signal y(t) devrait ne pas ou peu être influencé par les perturbations v(t)

Différence analogique/numérique 2

Analogique	Numérique
Signaux temp u(t), y(t)	signaux temp u[k], y[k]
signaux fréq U(s), Y(s)	signaux fréq U(z), Y(z)
transformée en s	transformée en z
équations différentielles	équation aux différences
fonction de transfert : $G(s) = Y(s)/U(s)$	fonction de transfert : $G(z) = Y(z)/U(z)$
gain statique : G(s=0)	gain statique : G(z=1)
pôles, zéros,	pôles, zéros,
diagr. de Bode	diagr. de Bode
stabilité : $Re(s_k) < 0$ (demi-plan gauche)	stabilité : $\|z_k\| < 1$ (int. du cercle unit.)

Régulateur Numérique 3

Loi de commande

régulateur PD numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

avec :

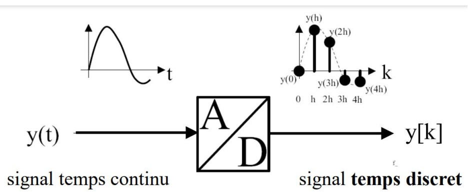
$$b_0 = Kp \cdot (1 + \frac{T_d}{T_e}) \qquad \text{et} \qquad b_1 = -Kp \cdot \frac{T_d}{T_e}$$

régulateur PI numérique

$$u[k] = u[k] + b_0 \cdot e[k] + b_1 \cdot e[k-1]$$

Échantillonnage 4

temps d'échantillonnage, sampling h ou T_s



avec

$$y[k] = y(k \cdot h)$$

Il doit être choisi afin d'éviter les variations trop brutales.

$h = T_{reg}/20 \ldots T_{reg}/10$

Inventaire des retards 5

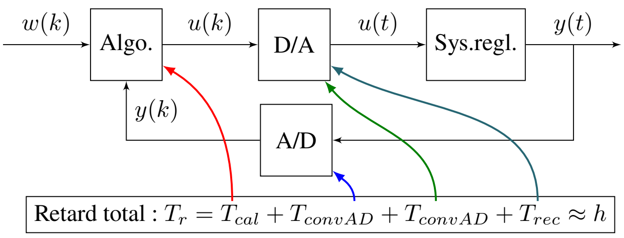
L'étude « quasi temps-continu » est une première approche pour l'analyse et la synthèse approximative d'un système de régulation numérique. Elle est basée sur l'inventaire des retards incontournables que possède une boucle de régulation numérique.

Retard du temps de calcul : $T_{cal} < \frac{h}{2}$

Retard du bloqueur d'ordre 0 : $T_{rec} \approx \frac{h}{2}$

Retard des conversions :

$T_{convAD} \approx T_{convAD} \approx \frac{h}{100} \cdots \frac{h}{10}$



Ce qui est approximable avec un retard pur par :

Approximations du retard

1. Retard analogique (régime harmonique) :
   $e^{-j\omega T_r} = e^{j\varphi}$ avec $\varphi = -\omega T_r$
   $|e^{-j\omega T_r}| = 1$
   $arg(e^{-j\omega T_r}) = -T_r \cdot \omega$
2. diagramme de Bode du retard analogique exact :
   a) système d'ordre 1 :
   $$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1}{1 + T_r \cdot j\omega}$$
   b) Padé :
   $$e^{-j\omega T_r} \approx \frac{1 - \frac{T_r}{2} j\omega}{1 + \frac{T_r}{2} j\omega}$$
   Exact pour le module (1), mais pas pour la phase !

Rappel Nyquist 6

1. Condition de stabilité en boucle fermée basée sur un critère en boucle ouverte !
2. Outil important pour l'analyse des systèmes réglés, marge de gain A_m , marge de phase φ_m.
3. Outil important pour la synthèse des systèmes réglés, choix de K_p pour obtenir φ_m souhaitée.

$\varphi_m = arg(G_o(j\omega_{co})) - (-\pi)$ [rad]

$A_{m,dB} = -|G_o(j\omega_\pi)|$ [dB]

$\omega_{co} \cdot T_{reg} = \pi$

Liens entre la boucle ouverte et la boucle fermée

bande passante à -3 dB en boucle fermée $\omega_{bp} \approx$ pulsation de coupure en boucle ouverte ω_{co}

$\omega_{bande,passante} = \omega_{co}$

Pulsation de coupure en b.o. $\omega_{co} \Leftrightarrow$ rapidité en b.f

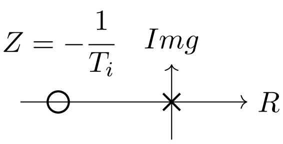
Compensation du pôle dominant 7

1. Améliorer la dynamique, c-à-d rendre la boucle fermée plus rapide
2. Faciliter les calculs

Zéros libres du régulateur PI, PD, PID

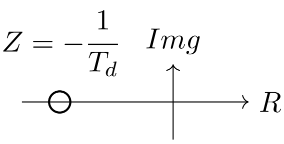
PI :

$G_c(s) = K_p \dfrac{1 + T_i \cdot s}{T_i \cdot s} \rightarrow$



PD :

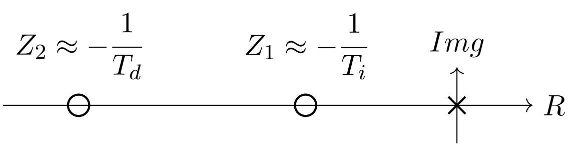
$G_c(s) = K_p(1 + T_d \cdot s) \rightarrow$



PID :

$$G_c(s) = K_p \frac{1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2}{T_i \cdot s}$$

zéros réels si : $T_i > 4 \cdot T_d$



La compensation se fait en appliquant la règle suivante :
Zéro du régulateur = Pôle de système à régler

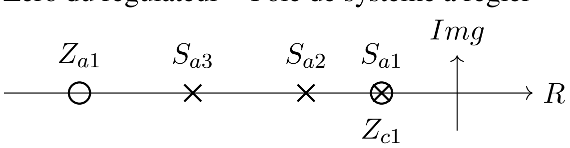
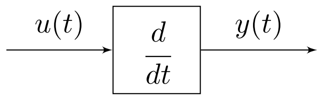


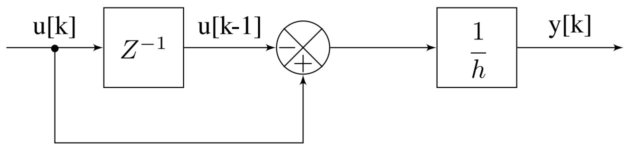
schéma et FTZ dérivateur 8



Méthode des séquentes :

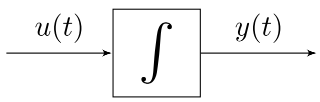
$$y[k] = \frac{du}{dt} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u[k] - u[k-1]}{h}$$

schéma bloc numérique :



$$G_d(Z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{h} = \frac{z-1}{h\ z}$$

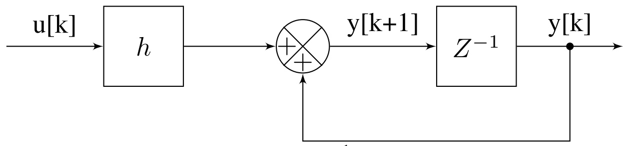
schéma et FTZ intégrateur 9



Méthode des rectangles :

$$y[k+1] = y[k] + h \cdot u[k]$$

schéma bloc numérique :



$$G_i(Z) = \frac{h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{h}{z-1}$$

Méthode de "Tustin" (trapèzes) : 10

Idée de la méthode de numérisation de "Tustin" :

pour une fonction de transfert analogique quelconque, remplacer chaque occurrence de s par l'expression en z ci-dessous

$$y[k] = y[k-1] + h \cdot \frac{u[k-1] + u[k]}{2}$$

$$G_i(Z) = \frac{h \cdot (z^{-1}+1)}{2(1-z^{-1})} \approx \frac{1}{s}$$

$$G_d(Z) = \frac{2(1-z^{-1})}{h \cdot (z^{-1}+1)} \approx s$$

l'idée de la methode de tustin est de remplacer s par l'expression en z

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} = \frac{1}{1+\tau \frac{2(1-z^{-1})}{h \cdot (z^{-1}+1)}} = \frac{hz+h}{(h+2\tau)z+h-2\tau}$$

Lieu des poles(Root locus)

Outil important permettant la synthèse de systèmes réglés :

pôles complexes conjugués :

$$s_{1,2} = -\delta \pm j\omega$$

Réponse indicielle :

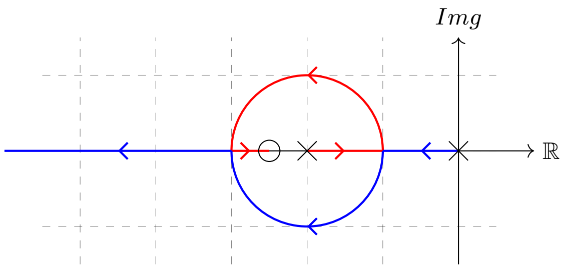
$$g(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\omega t)$$

Rappel (formulaire régulation automatique) :

$$T_{reg} = \frac{3}{\delta} = \frac{-3}{\mathbb{R}(s_f)}$$

Règles de tracer du lieu des pôles (L.d.P) :

1. L.d.P a n branches = degré du dénominateur
2. L.d.P a M branches = degré du numérateur
3. L.d.P symétrique par l'axe $\mathbb{R}$
4. Points de départ à $K_p = 0$
5. Points de fin à $K_p = \infty$
6. $d = n - m$ branches restante partent en asymptote infinie, où d correspond au degré relatif de la B.O
   les asymptotes forment des étoiles régulières
7. Tout point de l'axe réel situé à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros réels fait partie du lieu



Régulation Numérique 11 sook

Théorème de la valeur final en Z

valable que si la valeur finale existe et est finie !

$x_\infty = \lim_{z\to 1}((z-1)X(z))$

contre-exemple :

$X(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow x[k] = 2^k$

pas fini

Théorème de la valeur final en Z

Décomposer en élément simple :

$F(z) = \frac{z}{(z+A)(z+B)} \Rightarrow \frac{F(z)}{z} = \frac{R_1}{z+A} + \frac{R_2}{z+B}$

$F(z) = R_1 \frac{z}{z+A} + R_2 \frac{z}{z+B} \Rightarrow f[k] = R1 \cdot (A)^k + R1 \cdot (B)^k$

Système dynamique discret : 12

Système discret si signaux entrés et sortis sont discrets.

Système discret est dynamique quand la sortie présente dépend de l'entrée présente et des entrées et sorties passées.

Système dynamique LTI

- Linéaire : principe de superposition
- Stationnaire(invariant) : Coefficients constants
- Causal : pas de dépendance des états future
- Au repos à l'instant 0 : condition de départ nul

Décrit par sa réponse impulsionnelle :

Si $u(k) = \Delta(k) + 3\Delta(k-1) - 2\Delta(k-2)$

$y(k) = g(k) + 3g(k-1) - 2g(k-2)$

donc :

$g(k)$ est un algorithme

$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \Leftrightarrow y(k) = g(k) * u(k)$

Gain statique 13

$K = G_a(s=0) = G_n(z=1)$

Erreur statique 14

par le gain statique (s'appliquant à un système) :

correspondance :

$e_i nfty = G_{ew}(1) \cdot w_\infty$

Maintien :

$e_i nfty = G_{ev}(1) \cdot w_\infty$

par le théorème de la valeur finale (s'appliquant à un signal)

correspondance :

1. Calculer $G_{ew}(z)$ et vérifier la stabilité
2. Calculer $W(z) = w_i nfty \cdot \frac{z}{z-1}$
3. Calculer $E(z) = G_{ew}(z) \cdot W(z)$
4. Appliquer le théorème : $e_\infty = \lim_{z\to 1}((z-1)E(z))$

Condition pour que l'erreur statique correspondance soit nulle :

Soit le système à régler doit avoir un intégrateur pur, soit le régulateur (action I).

Condition pour que l'erreur statique maintien soit nulle :

Soit le système doit avoir un intégrateur pur en amont du point d'introduction de la perturbation.

Erreur de rampe obligatoirement par valeur final

correspondance :

1. Calculer $G_{ew}(z)$ et vérifier la stabilité
2. Calculer $W(z) = pente \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$
3. Calculer $E(z) = G_{ew}(z) \cdot W(z)$
4. Appliquer le théorème : $e_\infty = \lim_{z\to 1}((z-1)E(z))$

Condition pour que l'erreur rampe soit nulle :

Minimum 2 intégrateur pur dans la boucle ouverte

Transformé en Z 15

	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f[k]$	$F(z) = \mathscr{Z}\{f[k]\}$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta[k]$	1
3	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$k \cdot h$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2} \cdot t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \epsilon[k]$	$\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}$
7			$a^{k \cdot h}$	$\frac{z}{z-a^h}$
8	$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$k \cdot h \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h \cdot e^{-a \cdot h} \cdot z}{\left(z-e^{-a \cdot h}\right)^2}$
9			$k \cdot h \cdot a^{k \cdot h}$	$\frac{h \cdot a^h \cdot z}{\left(z-a^h\right)^2}$
10	$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{\sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+1}$
11	$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z-\cos(\omega \cdot h))}{z^2-2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+1}$
12	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{e^{-a \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
13	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot \left(z-e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h)\right)}{z^2-2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
14			$a^{k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{a^h \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+a^{2 \cdot h}}$
15			$a^{k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot \left(z-a^h \cdot \cos(\omega \cdot h)\right)}{z^2-2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+a^{2 \cdot h}}$
16	$1-e^{-a \cdot t}$	$\frac{a}{s \cdot (s+a)}$	$1-e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{\left(1-e^{-a \cdot h}\right) \cdot z}{(z-1) \cdot \left(z-e^{-a \cdot h}\right)}$
17	$\frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot t-\left(1-e^{-a \cdot t}\right)\right)$	$\frac{a}{s^2 \cdot (s+a)}$	$\frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot k \cdot h-\left(1-e^{-a \cdot k \cdot h}\right)\right)$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2}-\frac{\frac{1-e^{-a \cdot h}}{a} \cdot z}{(z-1) \cdot \left(z-e^{-a \cdot h}\right)}$
18	$1-(1+a \cdot t) \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)^2}$	$1-(1+a \cdot k \cdot h) \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}-\frac{e^{-a \cdot h} \cdot a \cdot h \cdot z}{\left(z-e^{-a \cdot h}\right)^2}$
19	$e^{-a \cdot t}-e^{-b \cdot t}$	$\frac{b-a}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$e^{-a \cdot k \cdot h}-e^{-b \cdot k \cdot h}$	$\frac{\left(e^{-a \cdot h}-e^{-b \cdot h}\right) \cdot z}{\left(z-e^{-a \cdot h}\right) \cdot \left(z-e^{-b \cdot h}\right)}$
20	$1+\frac{b \cdot e^{-a \cdot t}-a \cdot e^{-b \cdot t}}{a-b}$	$\frac{a \cdot b}{s \cdot (s+a) \cdot (s+b)}$	$1+\frac{b \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}-a \cdot e^{-b \cdot k \cdot h}}{a-b}$	$\frac{z}{z-1}+\frac{b}{a-b} \cdot \frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}-\frac{a}{a-b} \cdot \frac{z}{z-e^{-b \cdot h}}$
21	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\left(\frac{\pi}{h}\right)^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\pi \cdot k)$	$\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}$
22	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2 \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^{-a \cdot h} \cdot z \cdot \left(z+e^{-a \cdot h}\right)}{\left(z-e^{-a \cdot h}\right)^3}$

Modèle échantillonné du système à régler 16

Boucle fermé hybride

Parie analogique et numérique

$$\xrightarrow{u(k)} \boxed{D/A} \xrightarrow{u(t)} \boxed{G_a(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{A/D} \xrightarrow{y(k)}$$

Ce problème peut être résolu en utilisant le modèle échantillonné $H(z)$ dans les calculs dans le domaine en z.

$$\xrightarrow{U(z)} \boxed{H(z)} \xrightarrow{Y(z)}$$

$H(z) = \dfrac{Y(z)}{U(u)} = \dfrac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{G_a(s)}{s}\right)\Big|_{t=k\cdot h}\right\}$

Exemple :

1. $\dfrac{G_a(s)}{s} = \dfrac{G_a(s)}{s(s-p_a)}$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{G_a(s)}{s}\right) = \dfrac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot t}$ (Réponse indicielle)
3. $\dfrac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot t}\Big|_{t=k\cdot h} = \dfrac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot k \cdot h}$
4. $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{ka}{-pa} \cdot 1 - e^{p_a \cdot k \cdot h}\right\} = \dfrac{ka}{-pa} \dfrac{z \cdot (1 - e^{pa \cdot h})}{(z-1) \cdot (Z - e^{pa \cdot h})}$
5. $\dfrac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{...\right\} = \dfrac{ka}{-pa} \dfrac{1 - e^{pa \cdot h}}{Z - e^{pa \cdot h}}$

Donc les relations entre le plan s et Z sont :

$p_n = e^{p_a\,h}$

$z = e^{s\,h}$

Propriétés du "modèle échantillonné"

1. pôles analogique se transforme selon $z = e^{s\,h}$
2. Le gain statique est préservé : $H(z=1) = G_a(s=0)$
3. $H(z)$est linéaire en $G_a(s)$: $G_{a1}(s) + G_{a2}(s) \Leftrightarrow H_1(z) + H_2(z)$ Pas valable pour le produit
4. Un retard pur de N période coté analogique donne lieu à un facteur z dans la modèle échantillonné $e^{-H\,h} \Leftrightarrow z^N$

Calcul du modèle échantillonné du système à régler

le calcul se fait avec la réponse impulsionnelle.

$u[k] = \Delta[k]$ (Dirac numérique)

$\mathcal{L}\left(u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-h)\right) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s} \cdot e^{-h\,s} = U(s)$

Exemple sans retard :

$u[k] = \{1, 0, 0, 0\} \to y[k] = \{0, h, h, h\}$ (Intégrateur)

$y[k] = h \cdot \varepsilon[k-1] \to \mathcal{Z}(y) = H(z) = h \cdot z^{-1} \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{h}{z-1}$

Exemple avec retard h/2 :

$u[k] = \{1, 0, 0, 0\} \to y[k] = \{0, h/2, h, h\}$ (Intégrateur)

$y[k] = h \cdot \varepsilon[k-2] + \dfrac{h}{2}\Delta[k-1]$

$\mathcal{Z}(y) = H(z) = h \cdot z^{-2} \dfrac{z}{z-1} + \dfrac{h}{2} \cdot z^{-1} = h\dfrac{1 + \frac{1}{2}(z-1)}{z(z-1)}$

Avantages du modèle échantillonné

- Analyse et synthèse complètement en z
- Pas besoin de traiter le système hybride.
- Calculs exacts contrairement à l'inventaire des retards.

Correspondance entre le plan de s et le plan de z

- Le plan de z est "moins parlant" que le plan de s
- Beaucoup de caractéristiques, p.ex. taux d'amortissement sont définies en s
- Pour la synthèse par "placement de pôles", d'abord choisir les pôles en s et calculer les pôles en z correspondants
- Pour l'analyse, d'abord calculer les pôles en z, puis calculer les pôles en s correspondants en utilisant la fonction réciproque (log)

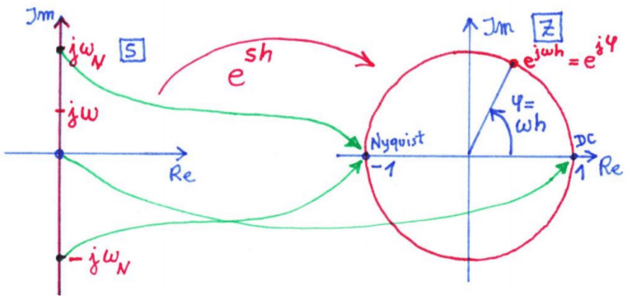
Avec ma calculatrice nulle

$s = delta + j\omega$

$z = e^{s\,h} = e^{delta\,h + j\omega\,h} = 1\angle j\omega h$

$s = \dfrac{ln(z)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(ln(|z|) + ln(e^{j\,arg(z)})\right)$

$= \dfrac{1}{h}\left(ln(|z|) + j\,arg(z)\right)$



Régime harmonique 17

Rappel :

$$\xrightarrow{u(t) = U \cdot sin(wt)} \boxed{G_a(s)} \xrightarrow{y(t) = Y \cdot sin(wt + \varphi)}$$

donc : $y = |G_a(jw)| \cdot U \ ; \ \varphi = arg(G_a(jw))$

La représentation du régime amorti établi, la fonction de transfert analogique est évaluée sur l'axe imaginaire. $s = j\omega$

en numérique cela donne :

$u[k] = U \cdot sin(w\,k\,h)$

$y[k] = Y \cdot sin(w\,k\,h + \varphi)$

donc : $y = |G_n(e^{jwh})| \cdot U \ ; \ \varphi = arg(G_n(e^{jwh}))$

La représentation du régime amorti établi, la fonction de transfert numérique est évaluée sur le cercle unité.

Par conséquent,

$G_a(e^{jwh}) = G_n(z = e^{jwh})$