

Introduction aux nombres complexes

MAT3

2 - Le corps des nombres complexes

Résumé du document

Introduction aux nombres complexes, rappelant les séries arithmétiques et géométriques, le discriminant pour les équations quadratiques, et les propriétés des nombres complexes, y compris la forme cartésienne, le conjugué, et les opérations comme l'addition, la soustraction et la multiplication. Il explore également l'application du discriminant dans les polynômes irréductibles sur \mathbb{R} mais réductibles sur \mathbb{C} .

Table des matières

- 1. Rappel 2
 - 1.1. Série arithmétique 2
 - 1.2. Série géométrique 2
 - 1.2.1. Finie 2
 - 1.2.2. Infinie 2
 - 1.3. Tableau cercle trigonométrique 2
 - 1.4. Delta 2
- 2. Nomenclature 3
 - 2.1. Exemple 3
- 3. Forme cartésienne 4
 - 3.1. Addition 4
 - 3.2. Soustraction 4
 - 3.3. Multiplication 4
 - 3.4. Opposé 4
 - 3.5. Inverse 4
- 4. Conjugué complexes 5
 - 4.1. Propriétés 5
 - 4.2. Utilisation du discriminant 5
 - 4.3. Discriminant avec j 6
 - 4.3.1. Exemple 6

1. Rappel

1.1. Série arithmétique

La formule pour calculer la valeur d’une série arithmétique est:

$$S(n) = n * \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

1.2. Série géométrique

1.2.1. Finie

La formule pour calculer la valeur d’une série géométrique finie est:

$$S(n) = \text{premier terme} * \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

1.2.2. Infinie

La formule pour calculer la valeur d’une série géométrique infinie est dans le cas ou la raison vérifie $| r | < 1$, nous utiliserons la formule:

$$S(\infty) = \frac{\text{terme initial}}{1 - \text{raison}}$$

1.3. Tableau cercle trigonométrique

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

1.4. Delta

Dans le cas d’une équation du deuxième degré nous pouvons utiliser la formule du discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1. Si $\Delta > 0$ alors l’équation possède 2 solutions réelles:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l’équation possède une unique solution réelle:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$ alors l’équation n epossède pas de solution réelle.

2. Nomenclature

Pour pouvoir résoudre la fonction:

$$x^2 + 1 = 0$$

nous avons du créer la valeur suivante:

$$j^2 = -1$$

Nous aurons la formule suivante:

$$z = a + bj$$

a = Partie réelle et notée $\text{Re}(z)$

b = Partie imaginaire et notée $\text{Im}(z)$

Deux nombres complexes sont considéré comme égaux si:

$$z = a + bj \text{ et } w = c + dj$$

$$a = c \text{ et } b = d$$

2.1. Exemple

Dans un nombre complexe $z = 2 + 3j$ nous aurons:

$$\text{Re}(z) = 2 \text{ et } \text{Im}(z) = 3$$

- Un nombre $z = 3 + 0j$ est un nombre réel
- Un nombre $z = 0 + 6j$ est un imaginaire pure

3. Forme cartésienne

Très pratique pour l'addition et la soustraction.

3.1. Addition

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

3.2. Soustraction

$$(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$$

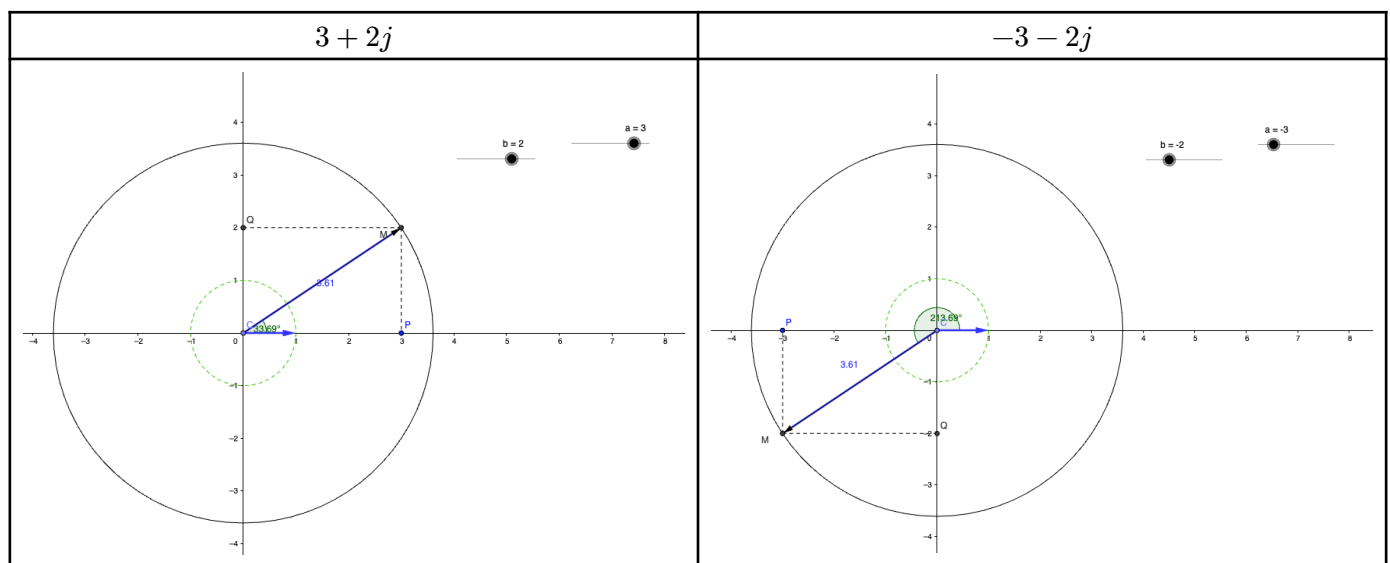
3.3. Multiplication

$$(a + bj) * (c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

3.4. Opposé

Un nombre complexe $z = a + bj$ possède un **opposé** $-z = -a - bj$ avec les propriétés usuelles:

$$z_1 - z_2 = z_1 - (+z_2), \quad z + (-z) = 0 \quad \text{et} \quad -z = (-1) * z$$



3.5. Inverse

Considérons $z = a + bj$ **non nul**, alors son inverse est:

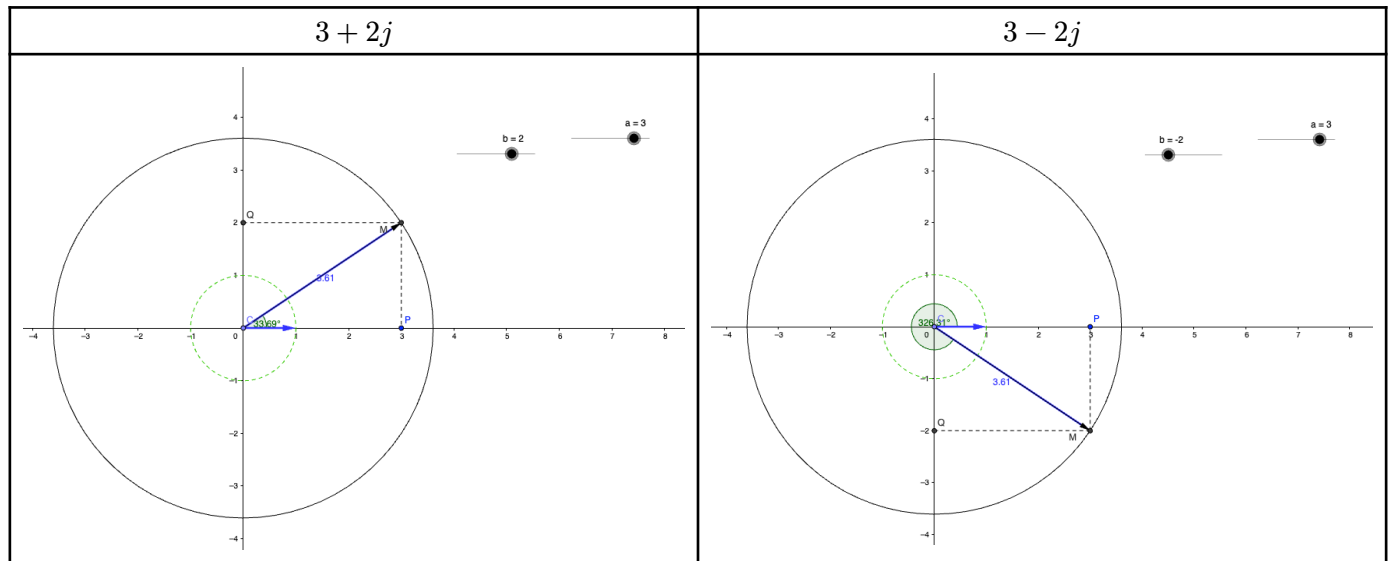
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bj} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}$$

4. Conjugué complexes

Le conjugué d'un nombre complexe est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire. Il est noté: \bar{z} . De ce fait on peut dire que :

$$z * z^* = a^2 + b^2$$

cela signifie que nous pouvons obtenir **un nombre réel** en multipliant un nombre complexe par son conjugué.



4.1. Propriétés

1. $z \cdot z^* = a^2 + b^2$, (si $z = a + bj$),
2. $(z^*)^* = z$,
3. $(z + w)^* = z^* + w^*$,
4. $(z - w)^* = z^* - w^*$,
5. $(zw)^* = z^*w^*$
6. Si $w \neq 0$, alors $\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$.

$$\text{Module } 1 = a^2 + b^2 = 1$$

Soit z un nombre complexe, alors:

z est un nombre réel si et seulement si $z = z^*$

$$\text{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\text{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2j}$$

4.2. Utilisation du discriminant

Regardons maintenant une application aux racines d'un polynôme à coefficients réels d'ordre 2.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On considère uniquement les cas où $\Delta < 0$. Le polynôme est donc irréductible sur R mais est réductible sur C . Ses racines sont des nombres complexes valant:

$$z_1 = \frac{-b + j * \sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - j * \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La décomposition de $P(x)$ sur les complexes donne:

$$P(x) = (z - z_1)(z - z_2)$$

4.3. Discriminant avec j

Dans la situation ou notre Δ est un nombre complexe, nous devons calculer la racine de ce nombre complexe pour avoir les deux possibilités. Pour cela nous devons poser $w^2 = \Delta$ puis utiliser les propriétés des nombres complexes pour résoudre une équation à deux inconnues.

4.3.1. Exemple

Cherchons à résoudre l'équation suivante dans \mathbb{C} :

$$(1 - j)z^2 - 2z + 4 - 8j = 0$$

Première chose à faire, cherchons Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \text{ ici nous avons} \\ a &= 1 - j, \quad b = -2 \text{ et } c = 4 - 8j \\ \Delta &= -2^2 - 4(1 - j)(4 - 8j) = 20 + 48j\end{aligned}$$

Maintenant en déduisant de l'équation $w^2 = 20 + 48j$, nous pouvons en tirer les racines carrées du nombre complexe :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(w^2) = \operatorname{Re}(20 + 48j) \\ \operatorname{Im}(w^2) = \operatorname{Im}(20 + 48j) \\ |w^2| = |20 + 48j| \end{cases} \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 20 \\ 2ab = 48 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \end{cases}$$

De ça nous pouvons additionner la première et la dernière équation :

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 + a^2 + b^2 &= 20 + 52 \\ 2a^2 &= 72 \\ a^2 &= 36 \\ a_{1,2} &= \pm 6\end{aligned}$$

Remplacer a dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}2 * 6 * b_1 &= 48 \\ b_1 &= 4 \\ \text{et} \\ b_2 &= -4\end{aligned}$$

Nous trouvons donc nos deux racines du nombre w^2

$$\delta_1 = 6 + 4j \text{ et } \delta_2 = -6 - 4j$$

Puis utilisons la formule du Δ en remplaçant la partie $\sqrt{-\Delta}$ par nos deux nombres complexes δ_1 et δ_2 :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2 + 6 + 4j}{2 - 2j} = \frac{8 + 4j}{2 - 2j} = \frac{4 + 2j}{1 - j} = 1 + 3j \\ z_2 &= \frac{2 - 6 - 4j}{2 - 2j} = \frac{-4 - 4j}{2 - 2j} = \frac{-2 - 2j}{1 - j} = \frac{-4j}{2} = -2j\end{aligned}$$

Nous trouvons donc les deux solutions de l'équation $(1 - j)z^2 - 2z + 4 - 8j = 0$ avec les valeurs $z_1 = 1 + 3j$ et $z_2 = -2j$.