Introductiona aux nombres complexes

MAT3

2 - Le corps des nombres complexes

Résumé du document

Introduction aux nombres complexes, rappelant les séries arithmétiques et géométriques, le discriminant pour les équations quadratiques, et les propriétés des nombres complexes, y compris la forme cartésienne, le conjugué, et les opérations comme l'addition, la soustraction et la multiplication. Il explore également l'application du discriminant dans les polynômes irréductibles sur R mais réductibles sur C.

Table des matières

1. Rappel

1.1. Série arithmétique

La formule pour calculer la valeur d'une série arithmétique est:

$$S(n) = n * \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

1.2. Série géométrique

1.2.1. Finie

La formule pour calculer la valeur d'une série géométrique finie est:

$$S(n) = \text{premier terme} * \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

1.2.2. Infinie

La formule pour calculer la valeur d'une série géométrique infinie est dans le cas ou la raison vérifie $| \ r \ | < 1$, nous utiliserons la formule:

$$S(\infty) = \frac{\text{terme initial}}{1 - \text{raison}}$$

1.3. Tableau cercle trigonométrique

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

1.4. Delta

Dans le cas d'une équation du deuxième degré nous pouvons utiliser la formule du discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4\text{ac}$$

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation possède 2 solutions réelles:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède une unique solution réelle:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation n epossède pas de solution réelle.

2. Nomenclature

Pour pouvoir résoudre la fonction:

$$x^2 + 1 = 0$$

nous avons du créer la valeur suivante:

$$j^2 = -1$$

Nous aurons la formule suivante:

$$z = a + \text{bj}$$
$$a = \text{Partie réelle et notée } \text{Re}(z)$$
$$b = \text{Partie imaginaire et notée } \text{Im}(z)$$

Deux nombres complexes sont considéré comme égaux si:

$$z = a + \text{bj} \ \text{ et } w = c + \text{dj}$$
$$a = c \ \text{ et } b = d$$

2.1. Exemple

Dans un nombre complexe $z = 2 + 3j$ nous aurons:

$$\text{Re}(z) = 2 \ \text{ et } \text{Im}(z) = 3$$

- Un nombre $z = 3 + 0j$ est un nombre réel
- Un nombre $z = 0 + 6j$ est un imaginaire pure

3. Forme cartésienne

Très pratique pour l'addition et la soustraction.

3.1. Addition

$$(a + \mathrm{bj}) + (c + \mathrm{dj}) = (a + c) + (b + d)j$$

3.2. Soustraction

$$(a + \mathrm{bj}) - (c + \mathrm{dj}) = (a - c) + (b - d)j$$

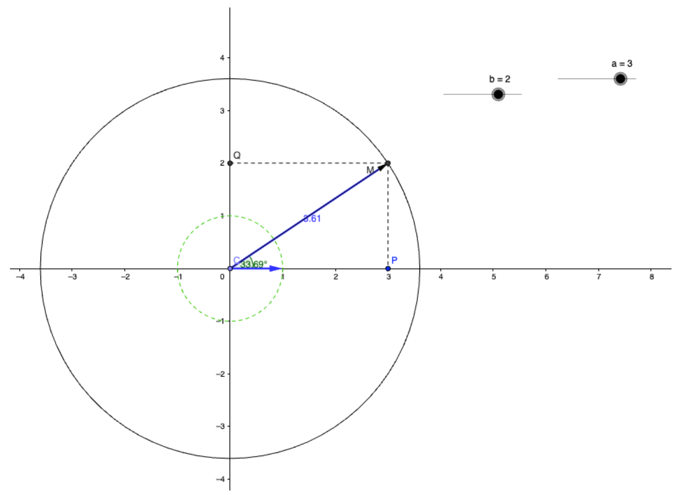
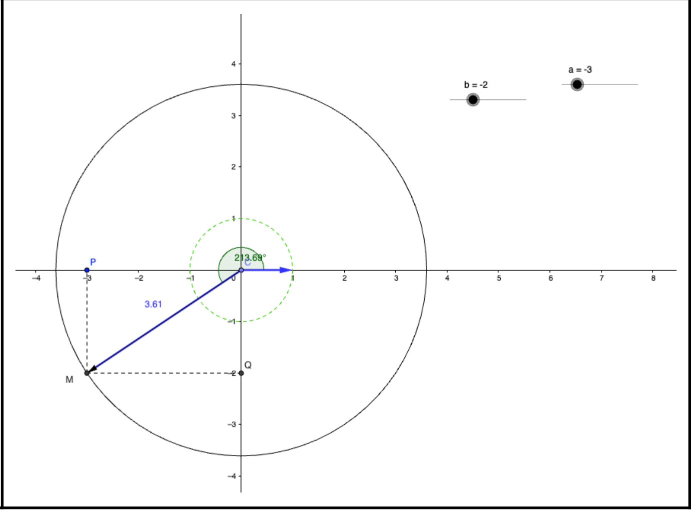
3.3. Multiplication

$$(a + \mathrm{bj}) * (c + \mathrm{dj}) = (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}) + (\mathrm{ad} + \mathrm{bc})j$$

3.4. Opposé

Un nombre complexe $z = a + \mathrm{bj}$ possède un **opposé** $-z = -a - \mathrm{bj}$ avec les propritétés usuelles:

$$z_1 - z_2 = z_1 - (+z_2),\ \ z + (-z) = 0 \ \text{ et} - z = (-1) * z$$

$3 + 2j$	$-3 - 2j$
	

3.5. Inverse

Considérons $z = a + \mathrm{bj}$ **non nul**, alors son inverse est:

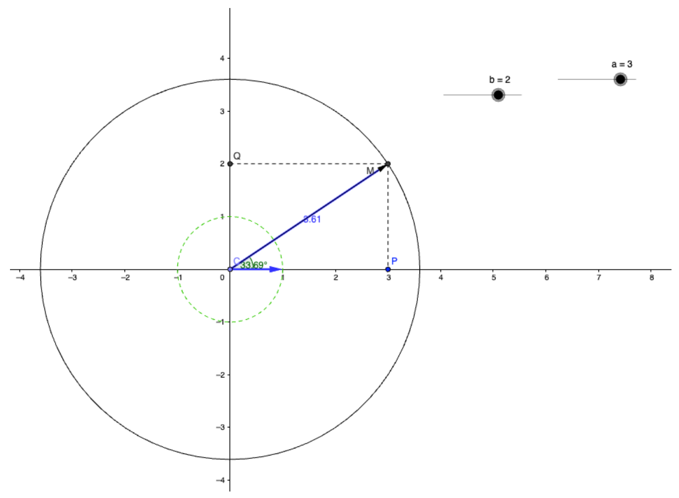
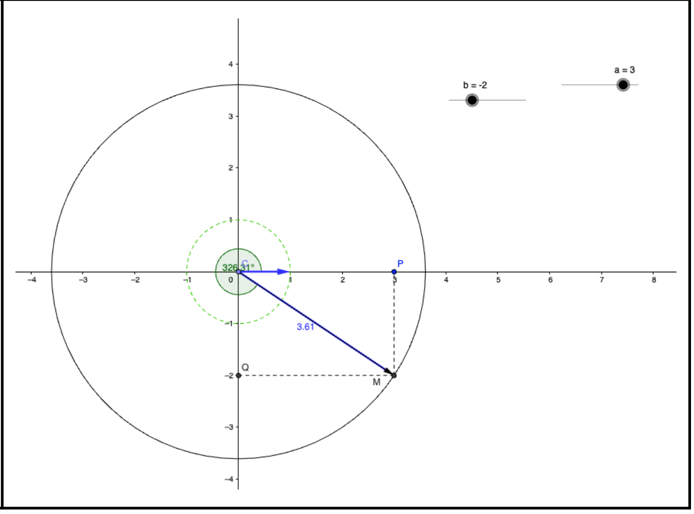
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{bj}} = \frac{a - \mathrm{bj}}{a^2 + b^2}$$

4. Conjugé complexes

Le conjugué d'un nombre complexe est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire. Il est noté: $\overline{z}$. De ce fait on peut dire que :

$$z * z^* = a^2 + b^2$$

cela signifie que nous pouvons obtenir **un nombre réel** en multipliant un nombre complexe par son conjugué.

$3 + 2j$	$3 - 2j$
	

4.1. Propriétés

1. $z \cdot z^* = a^2 + b^2,\ (si\ z = a + bj),$
2. $(z^*)^* = z,$
3. $(z + w)^* = z^* + w^*,$
4. $(z - w)^* = z^* - w^*,$
5. $(zw)^* = z^* w^*$
6. $Si\ w \neq 0,\ alors\ \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}.$

$$\text{Module } 1 = a^2 + b^2 = 1$$

Soit z un nombre compelxe, alors:

$$z \ \text{ est un nombre réel si et seulement si } z = z^*$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2j}$$

4.2. Utilisation du discriminant

Regardons maintenant une application aux racines d'un polynôme à coefficients réels d'ordre 2.

$$\Delta = b^2 - 4\text{ac}$$

On considère uniquement les cas ou $\Delta < 0$. Le polymôme est donc irreductible sur R mais est réductible sur C. Ses racines sont des nombres comlexes valant:

$$z_1 = \frac{-b + j * \sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - j * \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La décomposition de $P(x)$ sur les complexes donne:

$$P(x) = (z - z_1)(z - z_2)$$

4.3. Discriminant avec j

Dans la situation ou notre Δ est un nombre complexe, nous devons calculer la racine de ce nombre complexe pour avoir les deux possibilités. Pour cela nous devons poser $w^2 = \Delta$ puis utiliser les propriétés des nombres complexes pour résoudre une équation à deux inconnues.

4.3.1. Exemple

Cherchons à résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$(1-j)z^2 - 2z + 4 - 8j = 0$$

Première chose à faire, cherchons Δ :

$$\begin{gathered} \Delta = b^2 - 4ac \text{ ici nous avons} \\ a = 1-j,\ b = -2 \ \text{ et } c = 4 - 8j \\ \Delta = -2^2 - 4(1-j)(4-8j) = 20 + 48j \end{gathered}$$

Maintenant en déduisant de l'équation $w^2 = 20 + 48j$, nous pouvons en tirer les racines carrées du nombre complexe :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(w^2) = \mathrm{Re}(20+48j) \\ \mathrm{Im}(w^2) = \mathrm{Im}(20+48j) \\ |w^2| \quad = |20+48j| \end{cases} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = 20 \\ 2ab \quad = 48 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \end{cases}$$

De ça nous pouvons additionner la première et la dernière équation :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a^2 + b^2 &= 20 + 52 \\ 2a^2 &= 72 \\ a^2 &= 36 \\ a_{1,2} &= \pm 6 \end{aligned}$$

Remplacer a dans la deuxième équation :

$$\begin{gathered} 2 * 6 * b_1 = 48 \\ b_1 = 4 \\ \text{et} \\ b_2 = -4 \end{gathered}$$

Nous trouvons donc nos deux racines du nombre w^2

$$\delta_1 = 6 + 4j \ \text{ et } \delta_2 = -6 - 4j$$

Puis utilisons la formule du Δ en remplaçant la partie $\sqrt{-\Delta}$ par nos deux nombres complexes δ_1 et δ_2 :

$$z_1 = \frac{2+6+4j}{2-2j} = \frac{8+4j}{2-2j} = \frac{4+2j}{1-j} = 1 + 3j$$

$$z_2 = \frac{2-6-4j}{2-2j} = \frac{-4-4j}{2-2j} = \frac{-2-2j}{1-j} = \frac{-4j}{2} = -2j$$

Nous trouvons donc les deux solutions de l'équation $(1-j)z^2 - 2z + 4 - 8j = 0$ avec les valeurs $z_1 = 1 + 3j$ et $z_2 = -2j$.