

Affectation linéaire et transbordement

GRE

7 - Flots

Abstract

Définition

Table des matières

1. Différentes modélisations	1
1.1. Problème d'affectation linéaire	2
1.2. Problème du transbordement	2
1.3. Modélisation	2
1.4. Conditions et cas particuliers	2
1.5. Transformation en flot max-coût min	2

1. Différentes modélisations

1.1. Problème d'affectation linéaire

Posons le problème suivant:

- On considère n personnes et n tâches
- Pour chaque personne i et chaque tâche j , on connaît la durée c_{ij} que mets la personne à réaliser la tâche
- On cherche comment répartir les tâches entre les personnes pour minimiser la durée totale de réalisation

Dans ce genre de problème nous sommes amenés à chercher un **couplage parfait de coût minimum dans un graphe biparti**. En utilisant la même technique que pour un couplage maximum dans un graphe biparti, nous pouvons facilement le transformer en problème de flot maximum à coût minimum.

1.2. Problème du transbordement

Réseau $R = (V, E, c, u)$ avec :

- **Sources** (offre $b_i < 0$), **puits** (demande $b_i > 0$), **transit** ($b_i = 0$)
- **Coûts** c_{ij} et **capacités** u_{ij} sur les arcs
- **Objectif** : minimiser les coûts de transport

1.3. Modélisation

Équation de conservation pour chaque sommet i :

$$\sum_{j \in \text{Pred}(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \text{Succ}(i)} x_{ij} = b_i$$

1.4. Conditions et cas particuliers

- **Équilibre nécessaire** : $\sum_{i \in V} b_i = 0$
- **Transport** : graphe biparti complet
- **Affectation** : transport avec offres/demandes = 1

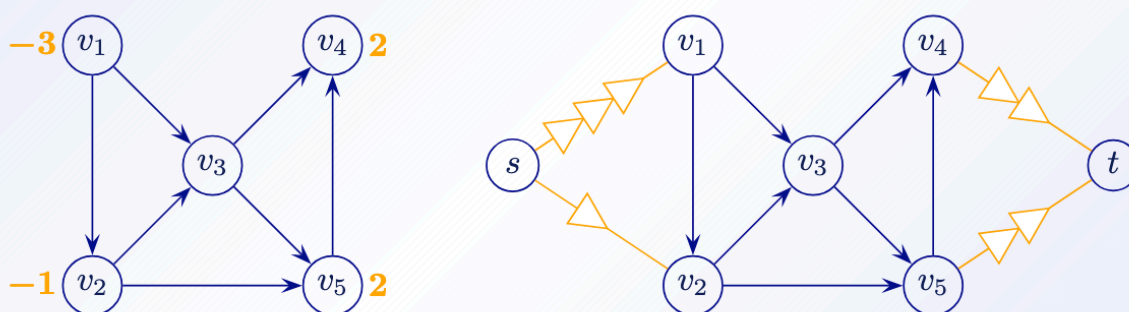
1.5. Transformation en flot max-coût min

1. Ajouter source $s \rightarrow$ sommets sources (coût 0, capacité = offre)
2. Ajouter puits sommets $\rightarrow t$ puits (coût 0, capacité = demande)
3. Chercher flot max de s à t de coût min

Condition : solution optimale \iff valeur du flot = somme des demandes

À gauche : réseau initial comptant 2 sources (v_1 et v_2), 2 puits (v_4 et v_5) et un sommet de transbordement (v_3) (les coûts et les capacités des arcs ne sont pas représentés, ils ne sont pas affectés par la transformation).

À droite : réseau après transformation où il faut déterminer un flot max à coût min de s à t (les arcs ajoutés ont un coût unitaire d'utilisation nul).



RAPPEL. En transbordement, il est conventionnel de représenter les offres par des nombres négatifs et les demandes par des nombres positifs.