

# Loi discrètes et continues

## PST

### 6 - Distributions usuelles

#### Résumé du document

##### Definition

### Table des matières

- 1. Loi discrètes ..... 2**
  - 1.1. Loi de Bernoulli ..... 2
    - 1.1.1. Exemples ..... 2
  - 1.2. Loi binomiale ..... 2
    - 1.2.1. Exemples ..... 2
    - 1.2.2. Combinaison ..... 2
  - 1.3. Loi géométrique ..... 3
    - 1.3.1. Exemples ..... 3
  - 1.4. Loi de Poisson ..... 3
    - 1.4.1. Exemples ..... 3
- 2. Loi continues ..... 4**
  - 2.1. Loi uniforme ..... 4
  - 2.2. Loi exponentielle ..... 4
  - 2.3. Loi normale (Laplace - Gauss) ..... 4

# 1. Loi discrètes

## 1.1. Loi de Bernoulli

On utilise la loi de Bernoulli lors-ce qu'on réalise une expérience dont l'issue est interprétée soit comme un **succès** soit comme un **échec**. On définit une variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur 1 si le succès est réalisé et 0 sinon.

La loi de Bernoulli est composée de:

- un paramètre  $p$  qui représente la probabilité de succès  $0 \leq p \leq 1$
- $H$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  qui est  $H = \{0, 1\}$
- la loi de probabilité

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p = q & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'espérance et la variance de la loi de Bernoulli sont respectivement:

$$\begin{aligned} E(X) &= p \\ \text{Var}(X) &= pq \end{aligned}$$

### 1.1.1. Exemples

- lancer d'une pièce de monnaie
- tirage d'une carte

## 1.2. Loi binomiale

La loi binomiale est utilisée pour représenter le nombre de succès dans une série de  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes chacune ayant  $p$  comme probabilité de succès. On définit une variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de succès dans les  $n$  expériences.

La loi binomiale est composée de:

- un paramètre  $n$  qui représente le nombre d'expériences
- un paramètre  $p$  qui représente la probabilité de succès  $0 \leq p \leq 1$  et  $q = 1 - p$
- $H$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  qui est  $H = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- la loi de probabilité

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

L'espérance et la variance de la loi binomiale sont respectivement:

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{Var}(X) &= npq \end{aligned}$$

**Notation:**  $\mathbb{B}(n, p)$

En posant  $n = 1$ , on obtient la loi de Bernoulli.

### 1.2.1. Exemples

- lancer d'une pièce de monnaie  $n$  fois
- tirage de  $n$  cartes

### 1.2.2. Combinaison

La combinaison de  $n$  éléments par  $k$  est notée  $\binom{n}{k}$  et est définie par:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

### 1.3. Loi géométrique

La loi géométrique est utilisée pour représenter le nombre d'expériences de Bernoulli indépendantes nécessaires pour obtenir le premier succès. On définit une variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le premier succès.

La loi géométrique est composée de:

- un paramètre  $p$  qui représente la probabilité de succès  $0 \leq p \leq 1$  et  $q = 1 - p$
- $H$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  qui est  $H = \{1, 2, 3, \dots\}$
- la loi de probabilité

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} = pq^{x-1}$$

L'espérance et la variance de la loi géométrique sont respectivement:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

**Notation:**  $\mathbb{G}(p)$

#### 1.3.1. Exemples

- lancer d'une pièce de monnaie jusqu'à obtenir le premier succès
- tirage de cartes jusqu'à obtenir la première carte rouge

### 1.4. Loi de Poisson

La loi de Poisson est utilisée pour représenter le nombre d'événements rares dans un intervalle de temps ou d'espace donné. On définit une variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre d'événements rares dans un intervalle de temps ou d'espace donné.

La loi de Poisson est composée de:

- un paramètre  $\lambda$  qui représente le nombre moyen d'événements rares dans l'intervalle de temps ou d'espace donné
- $H$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  qui est  $H = \{0, 1, 2, \dots\}$
- la loi de probabilité

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

L'espérance et la variance de la loi de Poisson sont respectivement:

$$E(X) = \lambda$$
$$\text{Var}(X) = \lambda$$

**Notation:**  $\mathbb{P}(\lambda)$

Si  $\lambda = np$  avec  $n$  grand et  $p$  petit, alors la loi de Poisson est une approximation de la loi binomiale  $\mathbb{B}(n, p)$ .

#### 1.4.1. Exemples

- le nombre de fautes d'impression par page dans un livre;
- le nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la production étant de bonne qualité;
- le nombre d'individus dépassant l'âge de 100 ans dans une communauté;
- le nombre de faux numéros téléphoniques composés en un jour.

## **2. Loi continues**

### **2.1. Loi uniforme**

### **2.2. Loi exponentielle**

### **2.3. Loi normale (Laplace - Gauss)**