Familles et problèmes classiques de graphes

GRE
8 - Famille de Graphes

Abstract
Definition

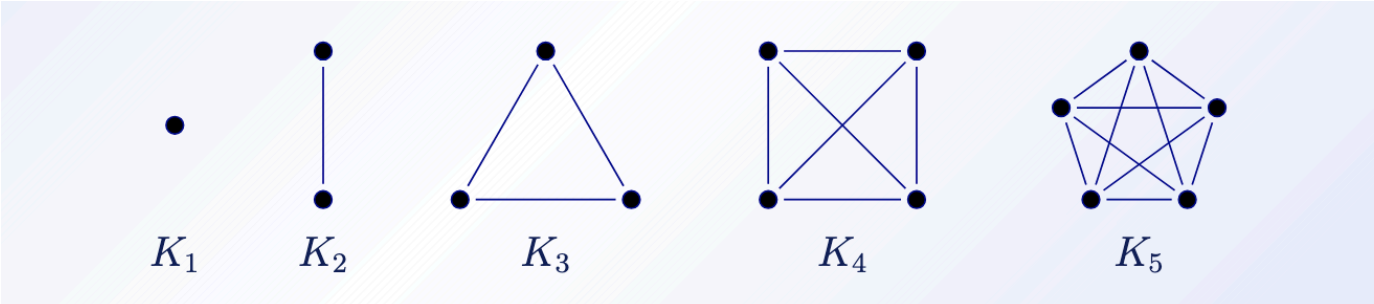
Table des matières

1. Types de Graphes et Couplages

1.1. Graphes complets

Définition : Graphe simple non orienté où toute paire de sommets distincts est reliée.

- **Notation** : K_n (graphe complet sur n sommets)
- **Propriété** : K_n possède $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes



1.2. Graphes complémentaires

Définition : Le complémentaire $\overline{G}$ de $G = (V, E)$ a les mêmes sommets et pour arêtes toutes celles qui ne sont pas dans E :

$$\overline{E} = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E, u \neq v \text{ et } u, v \in V\}$$

1.3. Tournois

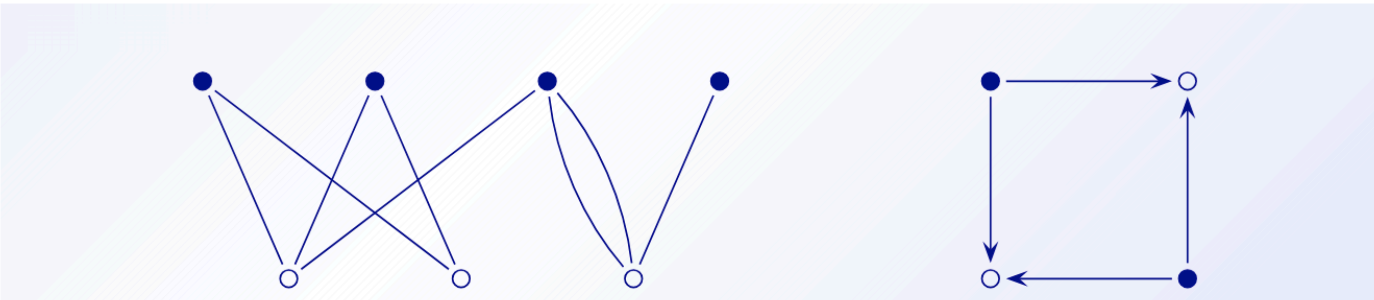
Définition : Graphe orienté simple où chaque paire de sommets est reliée par exactement un arc.

- **Propriétés** :
  - Graphe sous-jacent = graphe complet
  - Au plus 1 sommet sans prédécesseurs, au plus 1 sans successeurs
  - Sans circuits $\Longleftrightarrow$ matrice d'adjacence définit un ordre strict total

1.4. Graphes bipartis

Définition : Graphe $G = (V, E)$ où $V = A \cup B$ (disjoints) tel que chaque arête relie un sommet de A à un de B.

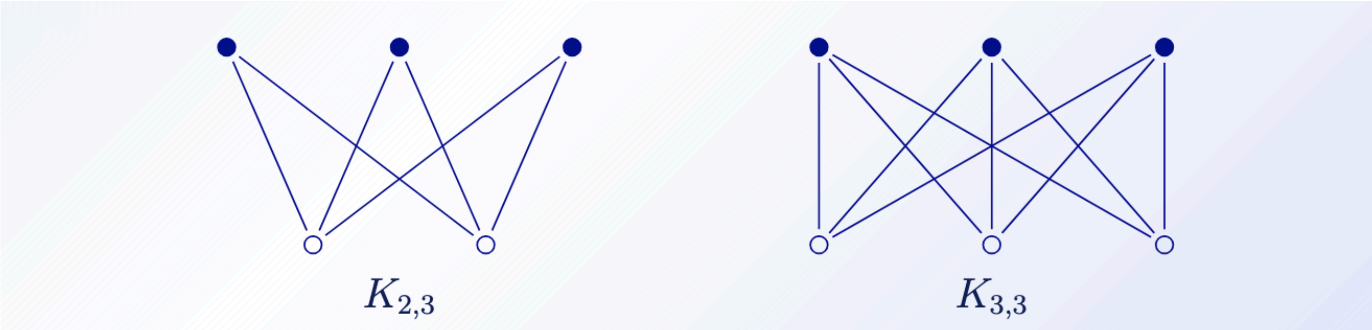
- **Notation** : $G = (A, B, E)$
- **Caractérisation** : Graphe biparti $\Longleftrightarrow$ aucun cycle de longueur impaire



1.4.1. Graphes bipartis complets

Définition : Graphe biparti avec nombre maximal d'arêtes (chaque sommet de A adjacent à tous ceux de B).

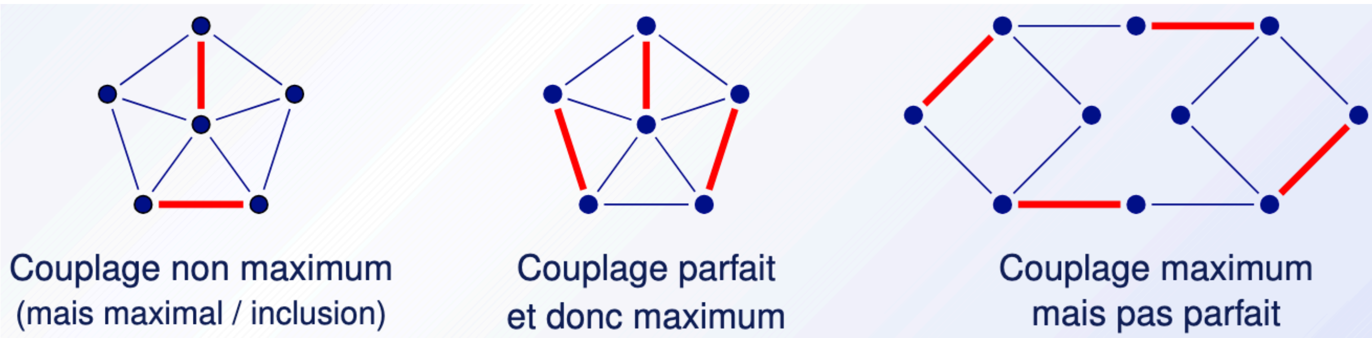
- **Notation** : $K_{r,s}$ (r sommets dans un ensemble, s dans l'autre)



1.5. Couplages

Couplage : Sous-ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes sans extrémités communes.

- **Couplage parfait** : sature tous les sommets
- **Couplage maximum** : cardinal maximal



1.6. Recouvrements et transversaux

Recouvrement : $R \subseteq E$ tel que chaque sommet est extrémité d'au moins une arête de R.

Transversal : $T \subseteq V$ tel que chaque arête est incidente à au moins un sommet de T.

Complexité : Recouvrement minimum = polynomial, Transversal minimum = NP-difficile.

1.7. Chaînes alternées et augmentantes

Soit M un couplage :

- **Chaîne alternée** : arêtes alternent entre M et $\overline{M}$
- **Chaîne augmentante** : chaîne alternée avec extrémités non saturées par M

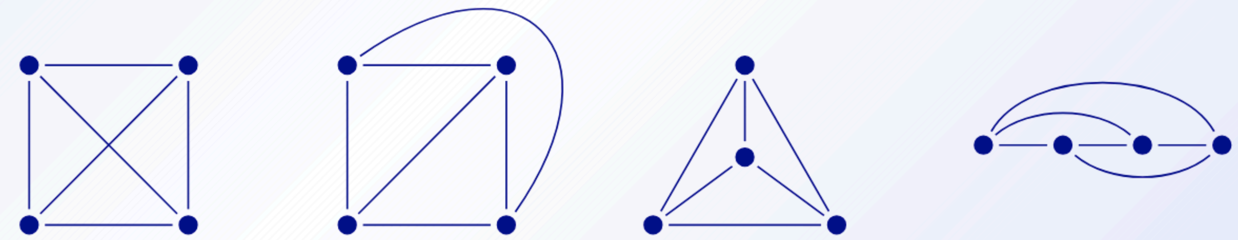
Théorème de Berge (1957) : M est maximum $\Longleftrightarrow$ aucune chaîne augmentante relativement à M.

2. Graphes planaires

2.1. Définition

Graphe planaire : admet une représentation sur le plan où les arêtes ne se coupent pas (sauf aux extrémités).

Graphe planaire topologique : représentation planaire concrète d'un graphe planaire.



Quatre représentations du graphe complet K_4. Seules les trois dernières sont des graphes planaires topologiques.

2.2. Formule d'Euler

Pour tout graphe planaire topologique connexe :

$$n - m + f = 2$$

où n = sommets, m = arêtes, f = faces.

2.2.1. Conséquences pour graphes simples connexes

Cas général ($n \geq 3$) :

$$m \leq 3n - 6$$

Corollaire : K_5 n'est pas planaire (car $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$).

Cas biparti ($n \geq 4$) :

$$m \leq 2n - 4$$

Corollaire : $K_{3,3}$ n'est pas planaire (car $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$).

2.2.2. Démonstrations

Cas général : Chaque face a ≥ 3 arêtes sur sa frontière $\Longrightarrow 3f \leq 2m$.

Cas biparti : Chaque face a ≥ 4 arêtes sur sa frontière $\Longrightarrow 4f \leq 2m$.

2.3. Théorème de Kuratowski

Subdivision : graphe obtenu en insérant des sommets au milieu de certaines arêtes.

Théorème (Kuratowski, 1930) : Un graphe est planaire $\Longleftrightarrow$ il ne contient aucun sous-graphe partiel qui est une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.