Racines n-ièmes d'un nombre complexe

MAT3

5 - Racines et Polynômes complexes

Résumé du document

Definition

Table des matières

1. Définition

Soit z un nombre complexe et n un entier positif, une racine n-ième de z est un nombre complexe vérifiant:

$$\boxed{w^n = z}$$

Tout nombre complexe z non null possède n racines n-ièmes distinctes.

2. Racine de nombre sous forme exponentielle

Si $z = re^{j\theta}$, alors ses n racines n-ièmes sont égales à

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r} * e^{\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1}$$

2.1. Conditions pour que w soit une racine n-ième de z

Soit $z = re^{j\theta}$ un nombre complexe non nul et $w = \rho e^{j\varphi}$ un autre nombre complexe. w est une racine n-ième de z (c'est-à-dire $w^n = z$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. **Condition sur le module :**

$$|w^n| = |z| \iff \rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r}$$

2. **Condition sur l'argument :**

$$n\varphi \equiv \theta (\operatorname{mod} 2\pi) \iff n\varphi = \theta + 2k\pi \iff \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{avec } k \text{ un entier}$$

Cela signifie que le module de w doit être $\sqrt[n]{r}$ et son argument doit être de la forme $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ pour un entier k.