

Graphes sans circuits et applications

Les graphes sans circuits (DAG) sont essentiels en gestion de projets, ordonnancement et compilation.

Propriétés fondamentales

- Tout graphe fini sans circuits possède au moins un sommet sans prédécesseurs et un sans successeurs
- Tout sous-graphe partiel d'un graphe sans circuits est sans circuits
- Permettent d'introduire une notion de rang : $\text{rang}(u) < \text{rang}(v)$

Tri topologique (Kahn) - $O(n + m)$

But : Ordonner les sommets en respectant les relations d'ordre (indispensable pour ordonnancement)

Applications : Compilation, gestion projets, détection cycles Principe : Répéter jusqu'à épuisement des sommets

1. Identifier un sommet sans prédécesseurs dans le graphe résiduel
2. Le numéroter dans l'ordre croissant (rang topologique)
3. Le supprimer du graphe avec tous ses arcs sortants

Propriété : Si le graphe contient un cycle, l'algorithme s'arrête avant d'avoir numéroté tous les sommets

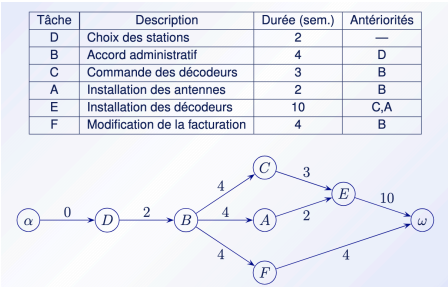
Plus court/long chemin - Équation de Bellman

Applications : Ordonnancement projets, optimisation, planification Avantage DAG : Traitement dans l'ordre topologique, pas d'itérations multiples comme Bellman-Ford classique Plus court chemin : $\lambda_j = \min_{i \in \text{Pred}[j]} (\lambda_i + c_{ij})$ avec $\lambda_s = 0$ Plus long chemin : $\lambda_j = \max_{i \in \text{Pred}[j]} (\lambda_i + c_{ij})$ avec $\lambda_s = 0$ Algorithme : Traiter sommets dans ordre topologique, appliquer équation Complexité : $O(n + m)$ (une seule passe suffit grâce au DAG)

Graphes potentiels-tâches

Modélisation de projets

- Sommets : tâches du projet
- Arcs : contraintes de précédence (i précède j)
- Poids : durée d_i de la tâche i
- Ajouts : sommet début a et fin w (poids 0)



Méthode du chemin critique

But : Identifier les tâches critiques dont tout retard retarde le projet entier Applications : Gestion de projets, planification industrielle, optimisation

Phase 1 - Calcul dates au plus tôt (forward pass) :

- $t_a = 0$ (début projet)
- $t_j = \max_{i \in \text{Pred}[j]} (t_i + d_i)$ pour chaque tâche j
- Traitement dans l'ordre topologique

Phase 2 - Calcul dates au plus tard (backward pass) :

- $T_w = t_w$ (durée minimale retard)
- $T_i = \min_{j \in \text{Succ}[i]} (T_j) - d_i$ pour chaque tâche i
- Traitement dans l'ordre topologique inverse

Résultats :

- Tâche critique : $t_i = T_i$ (marge libre nulle)
- Chemin critique : Succession de tâches critiques de début à fin
- Durée projet : t_w (date plus tôt de fin)
- Marge libre tâche i : $T_i - t_i$ (retard possible sans impact)

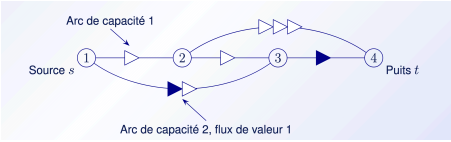
Composition d'un nœud

Nom des tâches	Numéros topologiques
Date de début au plus tôt	Date de début au plus tard

Flots dans un réseau

Concepts fondamentaux

Réseau : $R = (V, E, c, u)$ avec capacités u_{ij} et coûts c_{ij} Flot compatible : Respecte capacités et conservation Loi de conservation : $\sum_{\text{entrant}} = \sum_{\text{sortant}}$ (sauf source/puits)



Réseau d'augmentation

Principe : Construire graphe permettant d'augmenter le flot

- Arcs directs : (i, j) si $x_{ij} < u_{ij}$, capacité résiduelle = $u_{ij} - x_{ij}$
- Arcs inverses : (j, i) si $x_{ij} > 0$, capacité = x_{ij} (annuler flot)



Algorithmes de flot maximum

Ford-Fulkerson - $O(mf^*)$

But : Trouver flot de valeur maximale de source s vers puits t Applications : Réseau transport, affectation ressources, couplage Principe général : 1. Partir d'un flot initial (souvent flot nul) 2. Construire réseau d'augmentation du flot actuel 3. Chercher chemin augmentant de s à t (DFS par exemple) 4. Si chemin existe : augmenter flot et retour étape 2 5. Si aucun chemin : flot actuel est optimal

Terminaison : Algorithme se termine quand aucun chemin augmentant Complexité : $O(mf^*)$ où f^* = valeur flot maximum (non polynomial)

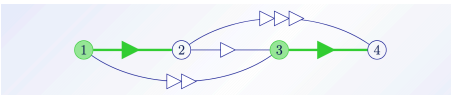
Edmonds-Karp - $O(m^2n)$

Amélioration de Ford-Fulkerson : Choix du chemin augmentant Stratégie : Choisir plus court chemin (nombre d'arcs) via BFS Avantages :

- Complexité polynomiale garantie
- Évite cas pathologiques de Ford-Fulkerson
- Plus efficace en pratique sur graphes denses

Coupe et théorème max-flow min-cut

Coupe (S, T) : Partition de V avec $s \in S, t \in T$ Capacité coupe : $\sum_{(i,j) \in S, j \in T} u_{ij}$ Théorème Ford-Fulkerson : Valeur flot max = capacité coupe min



Flot maximum à coût minimum

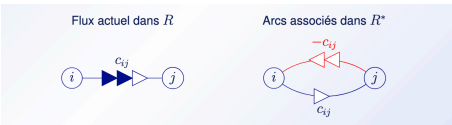
Algorithme de Busacker-Gowen

But : Flot de valeur maximale avec coût total minimal Principe : À chaque itération, saturer le plus court chemin (coût) dans réseau d'augmentation Problème : Arcs inverses ont coûts négatifs → impossibilité d'utiliser Dijkstra

Fonction de potentiel (Edmonds-Karp)

Solution : Transformer les coûts pour éliminer les valeurs négatives Potentiel : λ_i = distance depuis s dans réseau actuel Coût réduit : $c'_{ij} = c_{ij} + \lambda_i - \lambda_j$

Condition : Réseau de base sans circuits de coût négatif

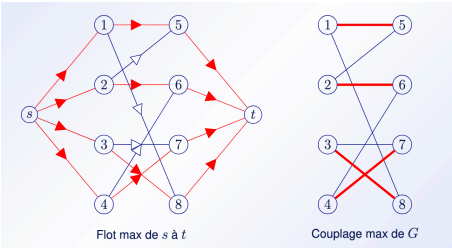


Applications des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

Transformation :

1. Orienter arêtes $A \rightarrow B$ (capacité 1)
2. Ajouter source s reliée à A (capacité 1)
3. Ajouter puits t relié depuis B (capacité 1)
4. Flot max = taille couplage max



Problème d'affectation linéaire

Contexte : n personnes, n tâches, coût c_{ij} pour personne i sur tâche j Objectif : Affecter chaque personne à une tâche (coût minimum) Méthode : Couplage parfait de coût minimum → flot max-coût min

Problème de transbordement

Modélisation : Réseau $R = (V, E, c, u)$

- Sources : offre $b_i < 0$
- Puits : demande $b_i > 0$
- Transit : $b_i = 0$

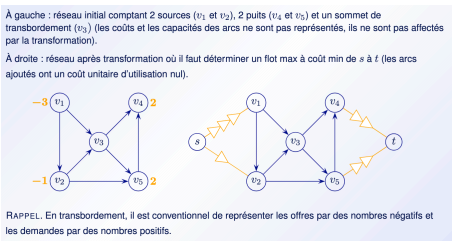
Équation conservation : $\sum_{j \in \text{Pred}(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \text{Succ}(i)} x_{ij} = b_i$ Condition équilibre : $\sum_{i \in V} b_i = 0$

Transformation en flot max-coût min :

1. Source artificielle s → sources (coût 0, capacité = |offre|)
2. Puits → puits artificiel t (coût 0, capacité = demande)

Cas particuliers :

- Transport : graphe biparti complet (sources vers puits)
- Affectation : transport avec offres = demandes = 1



Types de graphes

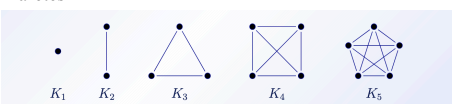
Graphes complets et complémentaires

Graphe complet K_n : Graphe simple où toute paire sommets distincts reliée

- Nombre arêtes : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Tous sommets ont degré $n - 1$
- Exemple : K_4 a 6 arêtes, K_5 a 10 arêtes

Graphe complémentaire \bar{G} de $G = (V, E)$:

- Mêmes sommets que G
- Arêtes = toutes arêtes possibles non présentes dans G
- $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E, u \neq v \text{ et } u, v \in V\}$
- Propriété : G et \bar{G} forment partition complète des arêtes



Tournois

Définition : Graphe orienté simple où chaque paire sommets reliée par exactement un arc
Construction : Orientation complète d'un graphe complet
Propriétés fondamentales :

- Graphe sous-jacent = graphe complet K_n
- Nombre total d'arcs = $\binom{n}{2}$
- Au plus 1 sommet sans prédécesseurs (source)
- Au plus 1 sommet sans successeurs (puits)

Caractérisation acyclique : Tournoi sans circuits \iff matrice adjacence définit ordre strict total

Applications : Modélisation compétitions, classements, votes

Graphes bipartis

Définition : Graphe $G = (V, E)$ avec $V = A \cup B$ (A, B disjoints) tel que toute arête relie sommet de A à sommet de B
Notation : $G = (A, B, E)$ ou $G = (A \cup B, E)$

Théorème caractérisation : Graphe biparti \iff ne contient aucun cycle de longueur impaire

Graphes bipartis complets $K_{r,s}$:

- r sommets dans A , s sommets dans B
- Toute paire ($a \in A$, $b \in B$) reliée par arête
- Nombre arêtes = $r \times s$
- Applications : modélisation relations complètes entre deux ensembles



Couplages et chaînes augmentantes

Couplage : Ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes sans extrémités communes

- **Couplage parfait** : Sature tous les sommets du graphe
- **Couplage maximum** : Cardinal maximal parmi tous couplages possibles
- **Sommet saturé** : Incident à arête du couplage

Chaînes alternées (relativement à couplage M) : Chaîne dont arêtes alternent : dans M , hors M , dans M , hors M , ...

Chaînes augmentantes (relativement à M) : Chaîne alternée avec extrémités NON saturées par M

Propriété clé : Permet augmenter taille couplage de 1

Théorème de Berge (1957) - Condition optimalité : Couplage M maximum \iff graphe ne contient aucune chaîne augmentante relative à M

Applications algorithmes : Base algorithmes hongrois, Blossom



Recouvrements et complexité

Recouvrement : Arêtes couvrant tous les sommets

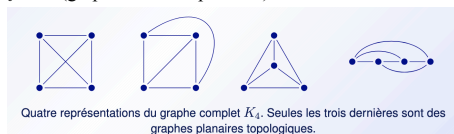
Transversal : Sommets couvrant toutes les arêtes

Complexité : Recouvrement min = polynomial, Transversal min = NP-difficile

Graphes planaires

Définitions et formule d'Euler

Planaire : Représentable sur le plan sans croisements d'arêtes
Faces : Régions délimitées par les arêtes (incluant face extérieure)
Formule d'Euler : $n - m + f = 2$ (graphe connexe planaire)



Bornes et non-planarité

Inégalité générale (graphes simples connexes, $n \geq 3$) : $m \leq 3n - 6$

Démonstration :

- Chaque face bordée par ≥ 3 arêtes $\rightarrow 3f \leq 2m$
- Formule Euler : $f = 2 - n + m$
- Substitution : $3(2 - n + m) \leq 2m \rightarrow m \leq 3n - 6$

Inégalité bipartie (graphes bipartis simples connexes, $n \geq 4$) : $m \leq 2n - 4$

Démonstration :

- Graphe biparti : chaque face bordée par ≥ 4 arêtes $\rightarrow 4f \leq 2m$
- Même substitution $\rightarrow m \leq 2n - 4$

Applications non-planarité :

- K_5 : $n = 5, m = 10$ mais $10 \nrightarrow \leq 3(5) - 6 = 9 \rightarrow$ non planaire
- $K_{3,3}$: $n = 6, m = 9$ mais $9 \nrightarrow \leq 2(6) - 4 = 8 \rightarrow$ non planaire

Théorème de Kuratowski (1930) : Subdivision :

Graphe obtenu en insérant sommets au milieu d'arêtes

Théorème : Graphe planaire \iff ne contient aucune subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$