Probabilité conditionnelle

PST

4 - Probabilité conditionnelle

Résumé du document

Definition

Table des matières

1. Probabilité conditionnelle

1.1. Concept

La probabilité conditionnelle nous permet de calculer la probabilité d'un événement en fonction d'une condition.

L'opération permettant de calculer la probabilité conditionnelle est la suivante:

$$A = \text{probabilité que l'évenement A se passe}$$
$$B = \text{événement qui s'est réalisé}$$

Nous cherchons donc la chance que l'évenement A se passe en sachant que l'événement B s'est réalisé:

$$P(A \mid B)$$

La formule de base permettant de calculer cette probabilité est:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

1.1.1. Remarques

$$P(B \mid B) = 1$$

si A est inclus dans B, alors $A \cap B = A$ et donc

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

1.2. Théorème de multiplication

En utilisant l'inverse de la formule présentée au point 2 nous pouvons retrouver $P(A \cap B)$, pour cela nous aurons la formule suivante:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \mid B) * P(B) \\ &= P(B \mid A) * P(A) \end{aligned}$$

1.3. Théorème des probabilités totales

Soient A et B deux événements quelconques. Comme B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω, on aura selon le théorème des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B) * P(B) + P\left(A \mid \overline{B}\right) * P\left(\overline{B}\right) \\ &= P(A \mid B) * P(B) + P\left(A \mid \overline{B}\right) * P(1 - P(B)) \end{aligned}$$

2. Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes qui fait appel aux théorèmes de multiplication et de probabilités totales est très important. Par exemple, il donna naissance à une autre approche de la statistique. Nous présenterons d'abord la version simple du théorème puis sa version composée.

2.1. Version simplifiée

Supposons que A et B soient deux événements d'un ensemble fondamental Ω, avec $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) * P(A)}{P(B)}$$

2.2. Version composée

Soient une partition $H_1, H_2, ..., H_k$ et un événement B d'un ensemble fondamental Ω, avec $P(B) \neq 0$. Pour tout indice $1 \lessapprox j \lessapprox k$, on aura,

$$\begin{aligned} P(H_j \mid B) &= \frac{P(H_j \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \mid H_j) * P(H_j)}{P(B \mid H_1) * P(H_1) + ... + P(B \mid H_k) * P(H_k)} \end{aligned}$$

2.3. Filtre bayesien anti-spam

$$\begin{gathered} p_i : \text{probabilité qu'un mot choisi au hasard dans un message électronique} \\ \text{est le mot } i \text{ en sachat que le mot est un spam.} \\ q_i : \text{probabilité qu'un mot choisi au hasard dans un message électronique} \\ \text{est le mot } i \text{ en sachant que le message n'est pas un spam} \end{gathered}$$

2.3.1. Exemple

$$\begin{gathered} M_i : \text{le mot choisi au hasard dans le message électronique est le mot } i; \\ S : \text{le message électronique est un spam} \end{gathered}$$

Ainsi,

$$p_i = P(M_i \mid S) \text{ et } q_i = P\left(M_i \mid \overline{S}\right)$$

Pour illustrer le fonctionnement du filtre bayesien, supposons que la proportion de messages spam d'une certaine compagnie vaut 0.9 et que pour le mot "hypothèque" noté $1, p_1 = 0.05$ et $q_1 = 0.001$.

Pour ce mot, on a alors

$$p_1 = P(M_1 \mid S) = 0.05 \text{ et } q_1 = P\left(M \mid \overline{S}\right) = 0.001$$

Un nouveau message électronique vient d'arriver et le mot "hypothèque" y apparaît exactement une fois. En appliquant le théroème de Bayes, la probabilité que le message électronique soit un spam est

$$P(S \mid M_1) = \frac{P(M_1 \mid S) * P(S)}{P(M_1 \mid S) * P(S) + P\left(M_1 \mid \overline{S}\right) * P\left(\overline{S}\right)} = 0.998$$

3. Indépendance

L’événement A est **indépendant** de l’événement B si le fait de savoir que B s’est déroulé n’influence pas la probabilité de A.

Nous aurons donc

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Or, par définition d’une probabilité conditionnelle,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ainsi, on obtient

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On peut donc dire que A est indépendant de B si

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Deux événements sont dépendants s’ils ne sont pas indépendants.