

# Introduction aux nombres complexes

## MAT3

### 2 - Le corps des nombres complexes

#### Résumé du document

#### Table des matières

- 1. Rappel ..... 2
  - 1.1. Série / suite géométrique infinie ..... 2
  - 1.2. Tableau cercle trigonométrique ..... 2
- 2. Nomenclature ..... 3
- 3. Forme cartésienne ..... 4
  - 3.1. Addition ..... 4
  - 3.2. Soustraction ..... 4
  - 3.3. Multiplication ..... 4
- 4. Conjugé complexes ..... 5
  - 4.1. Propriétés ..... 5
  - 4.2. Utilisation du discriminant ..... 5

1. Rappel

1.1. Série / suite géométrique infinie

La formule pour calculer la valeur d’une série géométrique infinie est:

$$S(\infty) = \frac{\text{terme initial}}{1 - \text{raison}}$$

1.2. Tableau cercle trigonométrique

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

## 2. Nomenclature

Pour pouvoir résoudre la fonction:

$$x^2 + 1 = 0$$

nous avons du créer la valeur suivante:

$$j^2 = -1$$

Nous aurons la formule suivante:

$$z = a + bj$$

$a$  = Partie réelle et notée  $\text{Re}(z)$

$b$  = Partie imaginaire et notée  $\text{Im}(z)$

### 3. Forme cartésienne

Très pratique pour l'addition et la soustraction.

#### 3.1. Addition

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

#### 3.2. Soustraction

$$(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$$

#### 3.3. Multiplication

$$(a + bj) * (c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

## 4. Conjugué complexes

Le conjugué d'un nombre complexe est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire. Il est noté:  $\bar{z}$ . De ce fait on peut dire que :

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2$$

cela signifie que nous pouvons obtenir **un nombre réel** en multipliant un nombre complexe par son conjugué.

### 4.1. Propriétés

$$1. z \cdot z^* = a^2 + b^2, \text{ (si } z = a + bj),$$

$$2. (z^*)^* = z,$$

$$3. (z + w)^* = z^* + w^*,$$

$$4. (z - w)^* = z^* - w^*,$$

$$5. (zw)^* = z^*w^*$$

$$6. \text{ Si } w \neq 0, \text{ alors } \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}.$$

$$\text{Module } 1 = a^2 + b^2 = 1$$

Soit  $z$  un nombre complexe, alors:

$z$  est un nombre réel si et seulement si  $z = z^*$

$$\text{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\text{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2j}$$

### 4.2. Utilisation du discriminant

Regardons maintenant une application aux racines d'un polynôme à coefficients réels d'ordre 2.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On considère uniquement les cas où  $\Delta < 0$ . Le polynôme est donc irréductible sur  $R$  mais est réductible sur  $C$ . Ses racines sont des nombres complexes valant:

$$z_1 = \frac{-b + j \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - j \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La décomposition de  $P(x)$  sur les complexes donne:

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2)$$