

Représentation géométrique et plan de Gauss

MAT3

3 - Représentation géométrique et plan de Gauss

Résumé du document

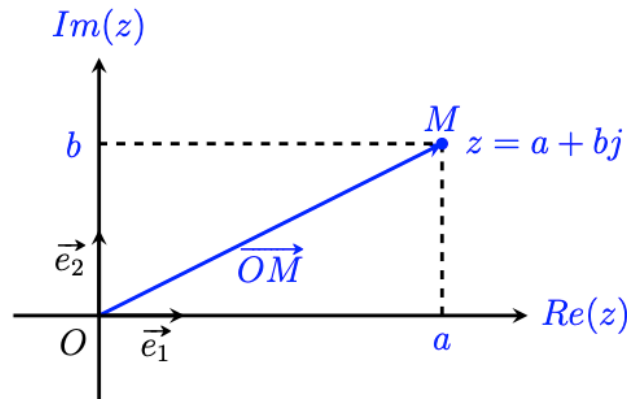
Ce document présente la représentation géométrique des nombres complexes dans le plan de Gauss, où chaque nombre complexe $z = a + bj$ est représenté par le point $M(a, b)$. Il aborde également le conjugué complexe, la forme trigonométrique (module et argument), ainsi que les opérations avec la forme trigonométrique telles que la multiplication, division, et puissance. La formule de Moivre est aussi expliquée pour les puissances de nombres complexes.

Table des matières

1. Représentation dans le plan	2
1.1. Conjugué complexe dans le plan	2
2. Forme trigonométrique	3
2.1. Module	3
2.2. Argument principal	3
3. Détermination d'un nombre complexe par la forme trigonométrique	4
3.1. Forme trigonométrique \rightarrow algébrique	4
3.2. Propriétés	4
4. Opération avec la forme trigonométrique	5
4.1. Multiplication avec la forme trigonométrique	5
4.2. Division avec la forme trigonométrique	5
4.3. Puissance avec la forme trigonométrique	5
5. Informations complémentaires	6
5.1. Formule de Moivre	6
5.2. Autres	6

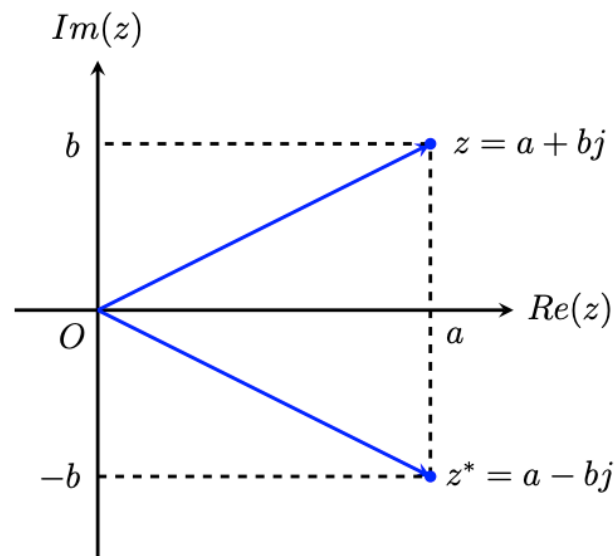
1. Représentation dans le plan

Dans un repère orthonormé du plan \mathbb{R}^2 , un nombre complexe $z = a + bj$ est représenté par le point $M(a, b)$, où a est la partie réelle et b la partie imaginaire. Cette représentation visuelle se fait dans le plan complexe, également appelé plan de Gauss.



1.1. Conjugué complexe dans le plan

Dans le plan complexe, le conjugué complexe de z , z^* représente la symétrie par rapport à l'axe des réels.



2. Forme trigonométrique

Tout nombre complexe peut-être défini par deux valeurs nommées **module** et **argument principal**.

2.1. Module

Le module correspond à la norme du vecteur nombre complexe $z = a + b = \overrightarrow{OM}$ et on le note:

$$|z| = r = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Le module sera toujours une valeur positive, car on parle de longueur.

2.2. Argument principal

L'argument principal d'un nombre imaginaire dit z correspond à l'angle orienté θ , mesuré en radian et exprimé dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$ que forme le vecteur \overrightarrow{OM} avec l'axe des nombres réels positifs. Pour calculer l'angle nous devons toujours prendre la partie la plus petite de celui-ci soit en passant par le cadran 1 et 2 ou par 4 et 3 en ajoutant le signe $-$ avant.

Pour le calculer l'angle θ nous pouvons utiliser le tableau suivant:

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b \geq 0 \end{cases}$$

3. Détermination d'un nombre complexe par la forme trigonométrique

Un nombre complexe peut-être déterminé uniquement grâce à son module et son argument principal. Il est aussi possible de définir l'inverse en partant du module et de son angle, on peut donc écrire z comme étant:

$$z = r(\cos(\theta) + j * \sin(\theta)).$$

Cette forme est appelée la **forme trigonométrique** ou autrement dit forme polaire de z .

3.1. Forme trigonométrique \rightarrow algébrique

Pour passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique il suffit de poser:

$$a = \operatorname{Re}(z) = r * \cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Im}(z) = r * \sin(\theta)$$

3.2. Propriétés

1. $|z| \geq 0$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
2. $z * z^* = |z|^2$
3. $|z| = |z^*|$
4. $|z * w| = |z| * |w|$
5. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Inégalité triangulaire),
7. Si $z = a + 0j = a$ est un nombre réel pur, alors $|z| = |a|$, c.-à-d. le module est la valeur absolue.

4. Opération avec la forme trigonométrique

4.1. Multiplication avec la forme trigonométrique

Prenons deux nombres complexes sous forme trigonométrique:

$$z_1 = r_1(\cos(\Theta_1) + j * \sin(\Theta_1)) \quad \text{et} \quad z_2 = r_2(\cos(\Theta_2) + j * \sin(\Theta_2))$$

Pour multiplier deux nombres complexes sous forme trigonométrique nous devons:

1. **Multiplier les modules de z_1 et z_2 ,**
2. **Additionner les arguments de z_1 et z_2 .**

Nous aurons donc:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + j * \sin(\Theta_1 + \Theta_2))$$

4.2. Division avec la forme trigonométrique

Prenons deux nombres complexes sous forme trigonométrique:

$$z_1 = r_1(\cos(\Theta_1) + j * \sin(\Theta_1)) \quad \text{et} \quad z_2 = r_2(\cos(\Theta_2) + j * \sin(\Theta_2))$$

avec z_2 **non nul**!

1. **Diviser le module de z_1 par celui de z_2 ,**
2. **Soustraire l'argument de z_2 à celui de z_1 .**

Nous aurons la formule suivante:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) + j * \sin(\Theta_1 - \Theta_2))$$

4.3. Puissance avec la forme trigonométrique

La formule générale de z^n pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n * (\cos(n * \Theta) + j * \sin(n * \Theta))$$

Donc il suffit de :

1. **Elever le module de z à la puissance n ,**
2. **Multiplier l'argument de z par n .**

5. Informations complémentaires

5.1. Formule de Moivre

Soit $\cos(\theta) + j * \sin(\theta)$ un nombre complexe et soit $n \in \mathbb{Z}$ un nombre entier, alors nous aurons:

$$(\cos(\theta) + j * \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j * \sin(n\theta)$$

5.2. Autres

À noter que si $\text{Arg}(z) = \alpha$ alors,

$\text{Arg}(z * j)$ = on fait une rotation de $\frac{\pi}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{z}{j}\right)$ = on fait une rotation de $\frac{-\pi}{2}$