Représentation géométrique et plan de Gausss

Guillaume T.

MAT3

3 - Représentation géométrique et plan de Gauss

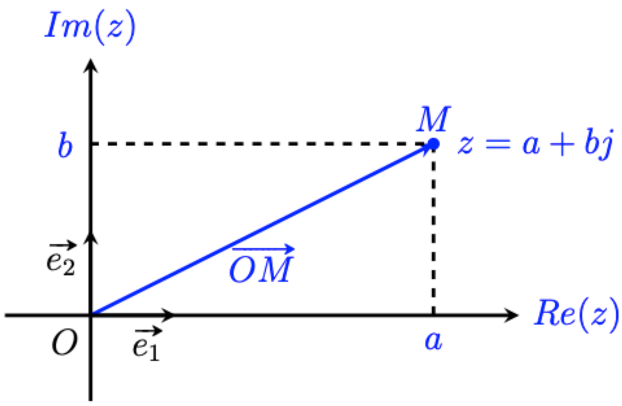
Résumé du document

Definition

Table des matières

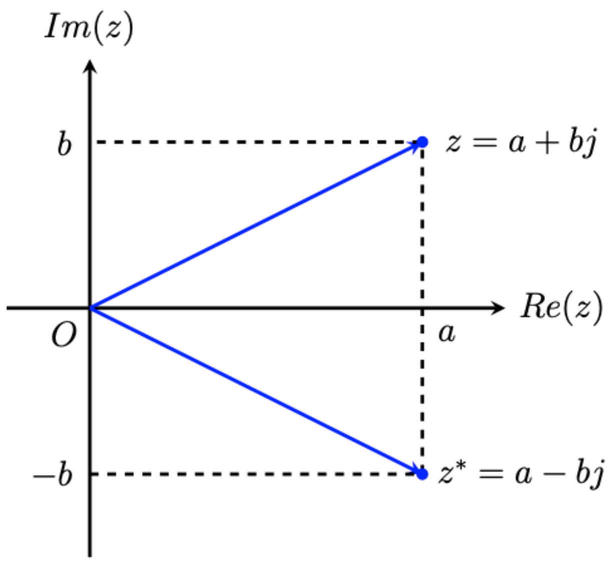
1. Représentation dans le plan

Dans un repère orthonormé du plan R^2, un nombre complexe $z = a +$ bj est représenté par le point $M(a, b)$, où a est la partie réelle et b la partie imaginaire. Cette représentation visuelle se fait dans le plan complexe, également appelé plan de Gauss.



1.1. Conjugé complexe dans le plan

Dans le plan complexe, le conjugé complexe de z, z^* représente la symétrie par rapport à l'axe des réels.



2. Forme trigonométrqiue

Tout nombre complexe peut-être défini par deux valeur nommées **module** et **argument principal**.

2.1. Module

Le module correspond à la norme du vecteur nombre complexe $z = a + b = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on le note:

$$|z| = r = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.2. Argument principal

L'argument principal d'un nombre imaginaire dit z correspond à l'angle orienté θ, mesuré en radian et exprimé dans l'intervale $]-\pi, \pi]$ que forme le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec l'axe des nombres réels positifs. Pour calculer l'angle nous devrons toujours prendre la partie la plus petite de celui-ci soit en passant par le cadran 1 et 2 ou par 4 et 3 en ajoutant le signe $-$ avant.

Pour le calculer l'angle θ nous pouvons utiliser le tableau suivant:

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \quad \text{et } b < 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } a = 0 \quad \text{et } b < 0 \\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \quad \text{et } b > 0 \\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \quad \text{et } b \geq 0 \end{cases}$$

3. Determination d’un nombre complexe par la forme trigonométrique

4. Multiplication avec la forme trigonométrique

Prenons deux nombres complexes sous forme trigonométrique:

$$z_1 = r_1(\cos(\Theta_1) + j * \sin(\Theta_1)) \text{ et } z_2 = r_2(\cos(\Theta_2) + j * \sin(\Theta_2))$$

Pour multiplier deux nombres complexes sous forme trigonométrique nous devons:

1. **Multiplier les modules de z_1 et z_2,**
2. **Additionner les arguments de z_1 et z_2.**

Donc nous aurons:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + j * \sin(\Theta_1 + \Theta_2))$$

5. Division avec la forme trigonométrique

Prenons deux nombres complexes sous forme trigonométrique:

$$z_1 = r_1(\cos(\Theta_1) + j * \sin(\Theta_1)) \ \text{ et } \ z_2 = r_2(\cos(\Theta_2) + j * \sin(\Theta_2))$$

avec z_2 **non nul**!

1. **Diviser le module de z_1 par celui de z_2,**
2. **Soustraire l'argument de z_2 à celui de z_1.**

Nous aurons la formule suivante:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) + j * \sin(\Theta_1 - \Theta_2))$$

6. Puissance avec la forme trigonométrique

La formule générale de z^n pour $n \in Z$:

$$z^n = r^n * (\cos(n * \Theta) + j * \sin(n * \Theta))$$

Donc il suffit de:

1. **D'élever le module de z à la puissance n,**
2. **Multiplier l'argument de z par n.**

7. Rappel

À noter que si $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$ alors,

$$\mathrm{Arg}(z * j) = \text{on fait une rotation de } \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{j}\right) = \text{on fait une rotation de } \frac{-\pi}{2}$$