

Introduction aux graphes

GRE

1 - Introduction

Abstract

Définition

Table des matières

- 1. Types de graphes 2**
 - 1.1. Graphes non orientés 2
 - 1.2. Graphes orientés 2
 - 1.3. Boucles, arêtes et arcs multiples 2
 - 1.4. Graphes simples, finis, vides, triviaux et nuls 2
 - 1.5. Degrés, demi-degrés et sommets pendants 2
 - 1.6. Graphes partiels et sous-graphes 3
 - 1.6.1. Graphes partiels 3
 - 1.6.2. Sous-graphes 3
 - 1.6.3. Sous-graphes partiels 3
- 2. Caractéristiques des graphes 4**
 - 2.1. Chaînes, cycles, chemins et circuits 4
 - 2.1.1. Chaînes 4
 - 2.1.2. Cycles 4
 - 2.1.3. Chemins 4
 - 2.1.4. Circuits 4
 - 2.2. Graphes sans cycles et forêts 4

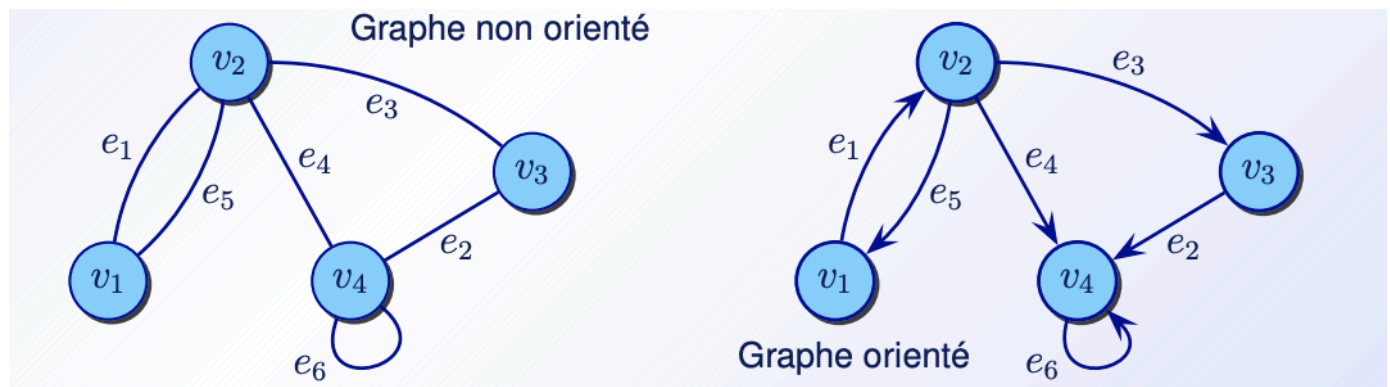
1. Types de graphes

1.1. Graphes non orientés

Un graphe non orienté est un ensemble de points appelés **sommets**, reliés par des segments appelés **arêtes**. Les arêtes n'ont pas de direction, ce qui signifie que si une arête relie les sommets A et B, on peut aller de A à B et de B à A. Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.

1.2. Graphes orientés

Un graphe orienté est un ensemble de points appelés **sommets**, reliés par des segments appelés **arcs**. Contrairement aux graphes non orientés, les arêtes ont une direction. Si une arête relie le sommet A au sommet B, on peut aller de A à B, mais pas de B à A.



1.3. Boucles, arêtes et arcs multiples

- Une **boucle** est une arête ou un arc qui relie un sommet à lui-même.
- Deux arêtes ou arcs qui relient les mêmes sommets sont appelés **arêtes multiples** ou **arcs multiples**.
- Deux arêtes ou arcs qui relient les mêmes sommets mais dans la même direction sont appelés **multiples** ou **parallèles**.
- Deux arcs qui relient les mêmes sommets mais dans des directions opposées sont appelés **arêtes opposées** ou **arcs opposés**.

1.4. Graphes simples, finis, vides, triviaux et nuls

- Un **graphe simple** est un graphe qui ne contient ni boucles ni arêtes multiples.
- n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes/arcs.
- Un graphe **vide** est un graphe sans arêtes ni arcs ($|E| = 0$).
- Un graphe **trivial** est un graphe avec un seul sommet et aucune arête ou arc ($|V| = 1$ et $|E| = 0$).
- Un graphe **nul** est un graphe sans sommet, arête ou arc ($|V| > 0$ et $|E| = 0$).

1.5. Degrés, demi-degrés et sommets pendants

- Le **degré** d'un sommet est noté $\deg(v)$, est égal au nombre d'arêtes ou d'arcs qui lui sont connectés, chaque boucle comptant pour deux.
- Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets ont le même degré.
- Le **demi-degré extérieur** d'un sommet est noté $\deg^+(v)$ et est égal au nombre d'arcs sortants du sommet.
- Le **demi-degré intérieur** d'un sommet est noté $\deg^-(v)$ et est égal au nombre d'arcs entrants du sommet.
- Un sommet est dit **pendant** s'il a un degré de 1.

Note

Le **Théorème d'Euler** dit que pour tout graphe $G = (V, E)$ alors,

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|$$

autrement dit, la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Note

De plus, pour tout graphe orienté $G = (V, E)$ alors,

$$\sum_{u \in V} \deg^+(u) = \sum_{u \in V} \deg^-(u) = |E|$$

1.6. Graphes partiels et sous-graphes

1.6.1. Graphes partiels

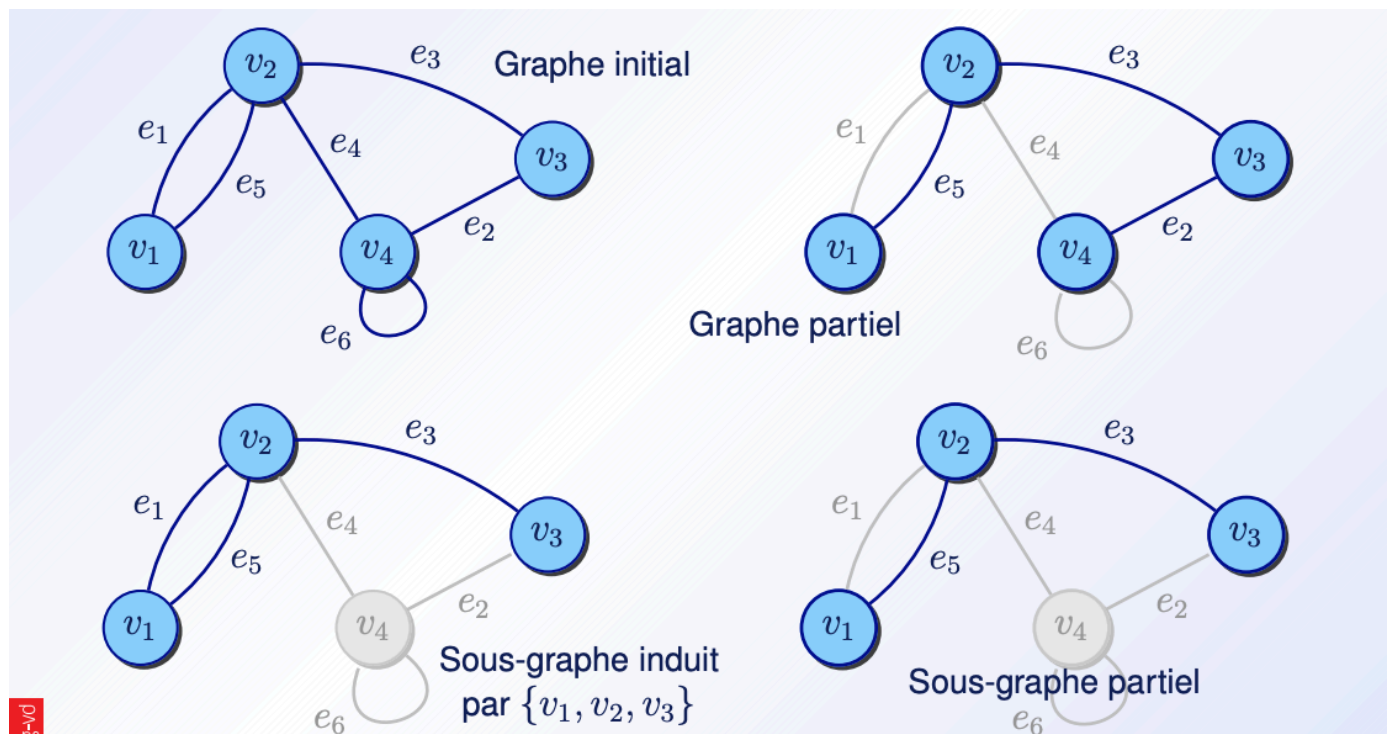
Un **graphe partiel** de G est un graphe contenant **tous les sommets** de G et un sous-ensemble de ses arêtes ou de ses arcs.

1.6.2. Sous-graphes

Un **sous-graphe** de G est un graphe contenant un sous-ensemble des sommets d'origine ainsi que toutes les arêtes ou arcs qui relient ces sommets.

1.6.3. Sous-graphes partiels

Un **sous-graphe partiel** de G est un graphe contenant un sous-ensemble des sommets d'origine ainsi qu'un sous-ensemble de ses arêtes ou arcs.



2. Caractéristiques des graphes

2.1. Chaînes, cycles, chemins et circuits

2.1.1. Chaînes

Une chaîne est une suite alternée de sommets et d'arêtes commençant et se terminant par un sommet où chaque arête est encadrée par ses deux extrémités.

2.1.2. Cycles

- Un cycle est une chaîne fermée, c'est-à-dire qu'elle commence et se termine par le même sommet.
- Une chaîne ou un cycle est **élémentaire** si chaque sommet y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne ou un cycle est **simple** si chaque arête y apparaît au plus une fois.

2.1.3. Chemins

Un chemin est une suite alternée de sommets et d'arcs commençant et se terminant par un sommet où chaque arc est encadré par ses deux extrémités.

2.1.4. Circuits

Un circuit est un chemin fermé, c'est-à-dire qu'il commence et se termine par le même sommet **comptant au moins un arc**.

2.2. Graphes sans cycles et forêts

- Un graphe sans cycles ou acyclique est un graphe sans cycles simples.
- Un graphe sans cycles est appelé une **forêt** et même un **arbre** s'il est connexe.

