

1장 : 자료구조 기본개념

소프트웨어(프로그램)의 개발은 자료구조 및 알고리즘과의 관계에서 작성되며, 알고리즘은 자료구조와 함께 특정 프로그래밍언어로 구현될 때 프로그램 자체라고 할 수 있다. (소프트웨어, 프로그램, 시스템)

1.1 개요: 시스템 생명주기 (시스템: large-scale program)

⇒ 시스템 생명주기 (system life cycle): 프로그램 개발단계
정확하고 효율적으로 소프트웨어의 개발, 사용 및 관리를 위한 개발과정

- 개발할 소프트웨어에 대한 정확한 이해
- 사용할 자료와 자료간의 연산관계를 분석 -> 최적의 자료구조 정의

(1) 요구사항 분석 (requirements analysis)

- 문제에 대한 적절한 해를 구하기 위한 요구조건(기능, 제약조건등)을 정의 -> 요구 명세서 작성
- 프로젝트들의 목적을 정의한 명세 (specification) 들의 집합
- 개발할 시스템의 성격을 이해, 개발방법, 개발자원 및 예산 예측.

(2) 명세 (specification): 시스템이 무엇을 수행해야 하는가 정의

- 기능적 명세 (functional specification)
 - 입력/출력 명세 - 구문적 제약조건 (비 절차적 명세)
 - 기능적 명세 - 의미적 제약조건 (절차적 또는 비절차적)

(3) 설계(design)

- 명세된 기능을 어떻게 수행하는가 기술 (추상적 언어: Pseudo code)

- . 시스템 구조 설계 (내부 프로그램, 모듈간 관계구조 설계)
- . 프로그램 설계 (각 모듈에서의 처리절차, 알고리즘 설계)
- . 사용자 인터페이스 설계

- 전체 시스템 설계 : top-down, bottom-up

하향식(top-down): 크고 복잡한 시스템 개발시 사용

- . 문제들을 실제 다룰 수 있을 정도의 작은 단위들로 나눔
- . 프로그램을 독립된 기능을 수행하는 작은 세그먼트로 분리

상향식(bottom-up): 하위 레벨부터 상세히 프로그램을 작성

- . 작은 문제를 해결, 하나의 기능을 수행

(4) 구현(implementation) – coding

- 구조화 프로그래밍 (assignment, conditional, loop)

순차, 선택, 반복의 세가지 구조만으로 표현

구조가 명확하여 정확성 검증, 테스트 및 유지보수 용이.

- modular 프로그래밍 (one function, one entry/exit point)

프로그램을 여러 개의 작은 모듈로 나누어, 계층관계로

구성하는 기법 (모듈별로 개발, 테스트 및 재사용 가능)

(5) 검증(Verification)

- 테스트(testing): 프로그램의 수행 검증, 프로그램 성능 검사
(모듈검사, 통합검사, 시스템 검사..)

- 정확성 증명(correctness proofs):

수학적 기법들을 사용하여 프로그램의 정확성 증명

- debugging – 오류제거

(6) 운영 및 유지보수 (operation and maintenance)

- 시스템 설치(installation), 운영, 유지보수
- 새로운 요구조건 - 변경,
- 수정 내용 기록 유지

*기타: 품질평가: 정확성, 유지보수성, 무결성(보안성 평가), 사용성

1.2 자료구조란 (프로그램 = 자료구조 + 알고리즘)

* 프로그램의 작성의 기본적인 절차는 다음과 같다.

- 예): . 문제해결을 위한 자료간의 관계를 이해 및 표현되는 자료구조선택
- . 자료구조에 따른 연산방법 (알고리즘) 선택
 - . 프로그램 구현을 위한 프로그래밍 언어 선택

자료구조(data structure)란 특정한 자료형(data type)의 값이 저장될 논리적 구조를 나타내며, 다양한 방법으로 연결된 변수들의 집합을 의미한다.

자료형(data type): (data type = value set + operation set)

상수, 변수, 수식 등의 객체(objects) 들의 값의 집합과 이 객체들에 대한 연산(operation)의 집합

⇒ 자료형의 분류 (기본, 파생데이터 타입, 집단화, 사용자정의, 등)



<데이터구조의 형태>

⇒ 추상 자료형 (**Abstract Data Type: ADT**)

- . 자료와 연산의 특성을 논리적으로 추상화하여 정의한 자료형
- . 자료 객체 (object)들과 수행될 연산 (operation) 의 정의
(예: 수강 등록 시스템 – student, course, 등은 object
이 object 에 적용할 insert, remove 등이 operation)

13 객체 지향적 설계: 구조적 프로그래밍 설계와의 비교

* 유사점: 분할-정복 기법: 복잡한 문제를 여러 개의 단순한 부분 작업으로 나누어 각각을 개별적으로 해결 (차이점: 문제의 분할 방법)

* 분할 방법:

- . 알고리즘적 분해(함수적 분해): 소프트웨어를 프로세스의 스텝을 나타내는 (또는 기능적 모듈로) 분해한다. Ex) C 의 함수

- . 객체 지향적 분해: 응용분야의 개체를 모델링하는 객체의 집합.
객체들 간의 상호작용으로 시스템을 형성.
- 장점: 소프트웨어의 재 사용성, 변화에 유연한 시스템.

⇒ 자료가 얼마나 잘 구조화 되어 있는가에 따라 프로그램의 속도, 개발시간 유지보수의 비용이 결정됨

⇒ 자료구조는 데이터를 유용하게 구조화 할 수 있는 다양한 방법론을 study한다. (data encapsulation, data abstraction,..)

1.4 데이터 추상화 와 캡슐화 (예: VCR작동- play, ffw, rw 등)

• 데이터 캡슐화(Encapsulation)

(사용자는 VCR의 내부회로와 상호작용 못함)

- 내부표현은 사용자로부터 감추어져 있다(캡슐화의 원칙)
- 외부로부터 데이터객체의 자세한 구현을 은닉(information hiding)

• 데이터 추상화 (Data abstraction)

- 무엇(what)과 어떻게(how)를 독립
- 객체의 명세(specification)와 구현(implementation)을 분리

* 추상화 와 캡슐화의 장점

- (1) 소프트웨어 개발 간소화: 복잡한 작업 -> 부분작업들로 분해
- (2) 검사와 디버깅의 단순화: 각 부분 독자적으로 검사, 디버깅
- (3) 재 사용성: 자료 구조가 시스템에서 별개의 개체로 구현

2. 알고리즘

- . 알고리즘(Algorithm)의 정의: (An algorithm is a finite set of instructions that accomplishes a particular task)
- . 문제해결 방법을 추상화 하여 단계적 절차를 논리적으로 기술한 명세서 (예: 요리를 하기 위한 순서)
- . 특정한 일을 수행하기 위한 명령어의 유한 집합
- . 동일한 문제에 여러 개의 알고리즘이 존재함

알고리즘은 다음조건 (criteria)을 만족해야 함

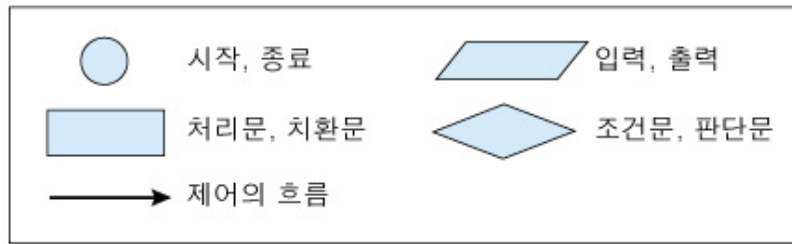
- i. 입력(input) : 0 or more are externally provided
- ii. 출력 (Output) : 적어도 한 개 이상의 결과가 생성됨
- iii. 명확성(definiteness) : 모호하지 않은 명확한 명령
- iv. 유한성(finiteness) : 종료
- v. 유효성(effectiveness) : 기본적, 실행가능 명령

-Algorithm 기술방법

- . 자연어로 서술적표현 : (정확성 결여)
- . 프로그래밍 언어로 구체적 : (문법상의 복잡성)
- . flowchart (순서도이용 도식화) : (명백성과 모호성의 결여)
 - 장점: 알고리즘의 흐름파악이 용이
 - 단점: 복잡한 알고리즘의 표현이 어려움
- . 의사코드(pseudocode)로 추상화 : best way

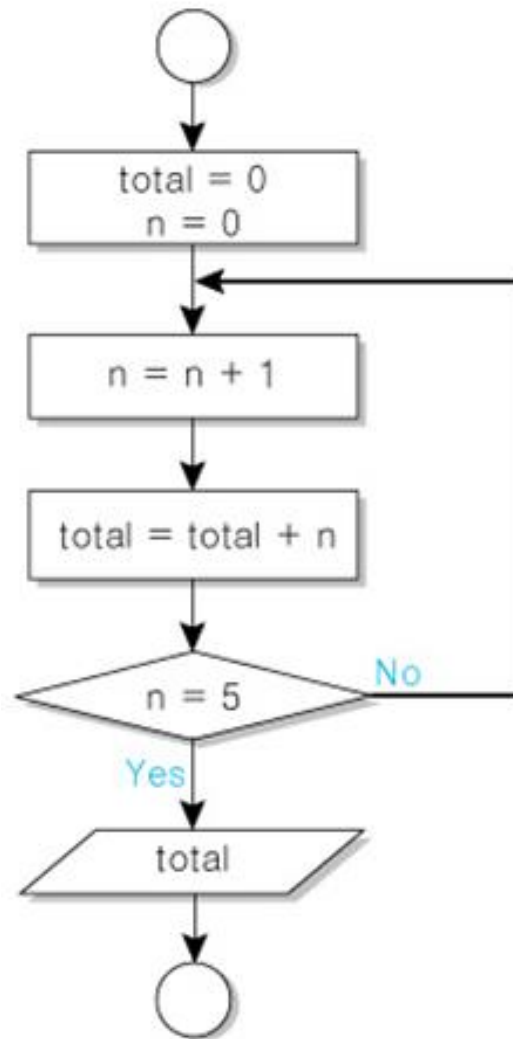
ex. program \doteq algorithm

● 순서도(flowchart)를 이용한 알고리즘의 표현



(표현 기호들)

예) 1~5까지의 합을 구하는 알고리즘을 flowchart로 작성하시오



● 의사코드(가상코드)로 알고리즘 표현

- 프로그래밍 언어와 유사하게 표현 (직접 실행은 불가)
- 특정 프로그래밍 언어로 변환이 용이함

2.1 의사코드(Pseudocode) 작성

1) **Assignment** ; causes a value to be assigned to a variable
Variable(변수) <- expression(값) 할당

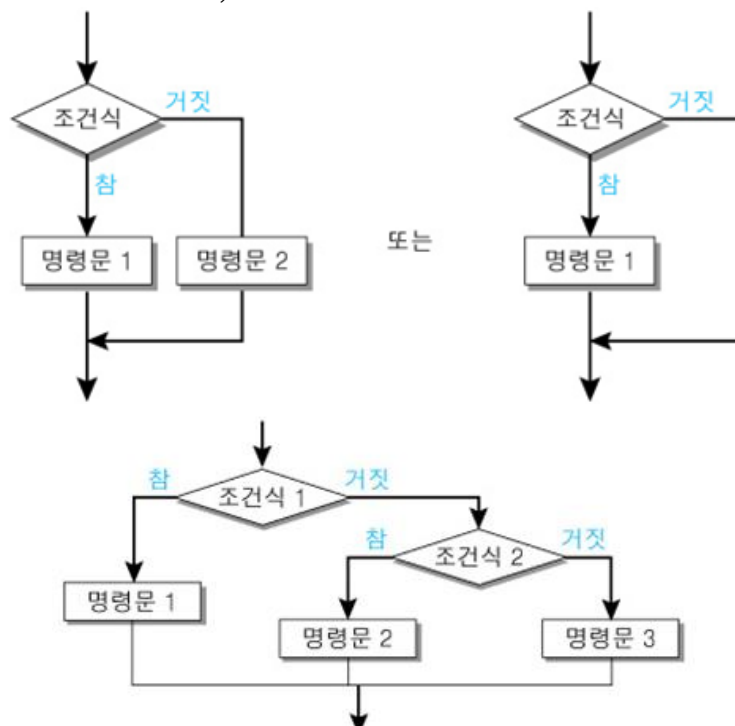
ex) {Compute sum of two numbers, first and second}
{And the result is assigned to SUM}

```
BEGIN
  INPUT first and second
  sum ← first + second
END.
```

2) **Control statements** ; flow of control through algorithm
- **Condition, Sequence, Iteration**

● **Conditional**: if-then or if-then-else

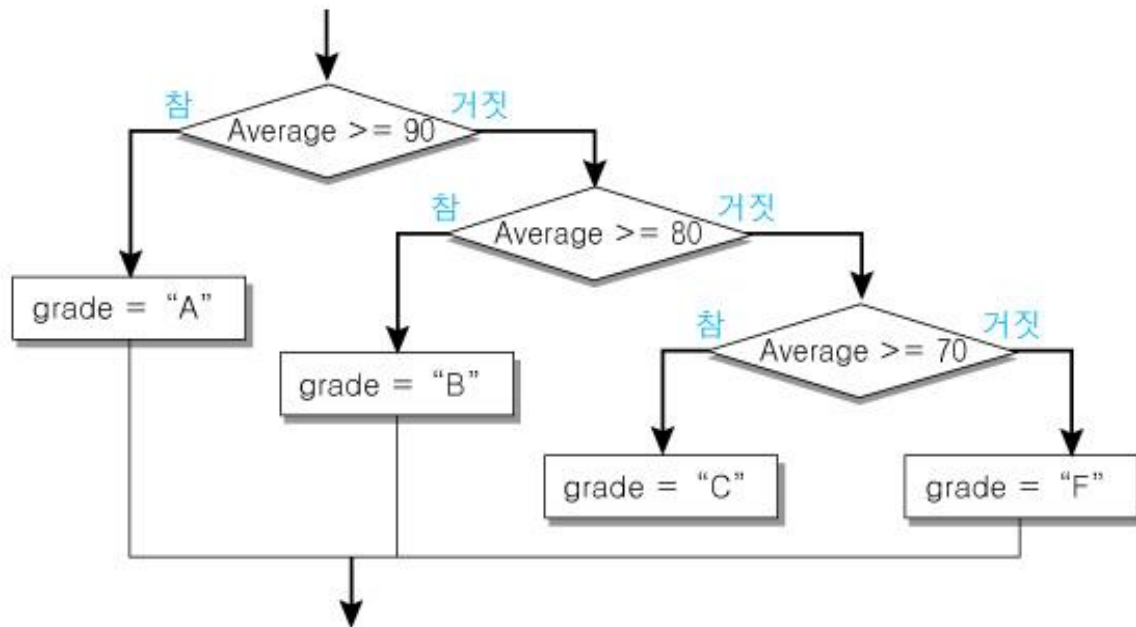
- if P then action1 else action2 , if P then action,
- if P1 then action1, elseif P2 then action2 else action3




```

if Average >= 90 then grade = "A" ;
else if Average >= 80 then grade = "B" ;
else if Average >= 70 then grade = "c" ;
else grade = "F" ;

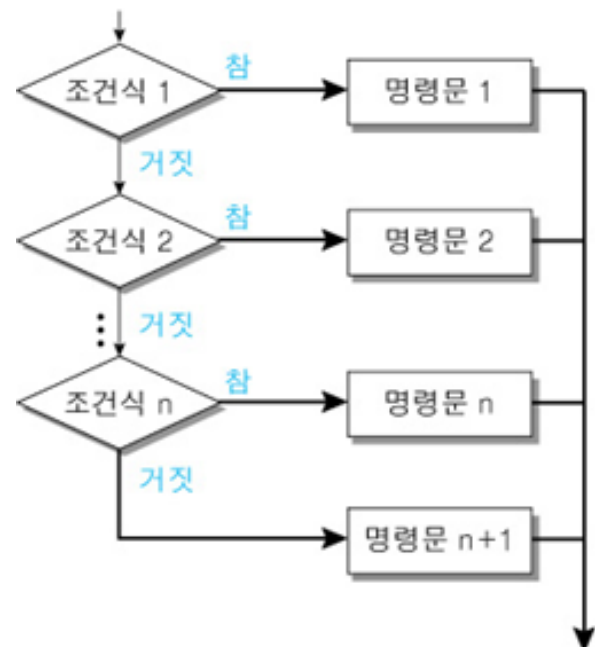
```



```

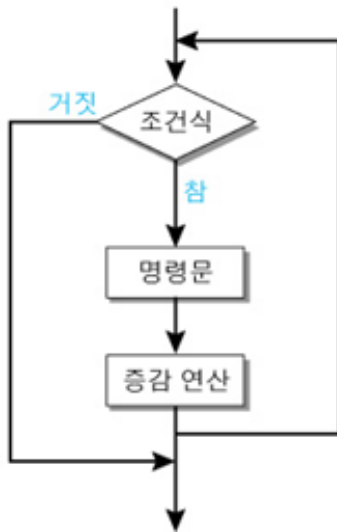
switch {
  case: Average ≥ 90:
    grade = "A" ;
  case: Average ≥ 80:
    grade = "B" ;
  case: Average ≥ 70:
    grade = "C" ;
  default:
    : grade = "F" ;
}

```

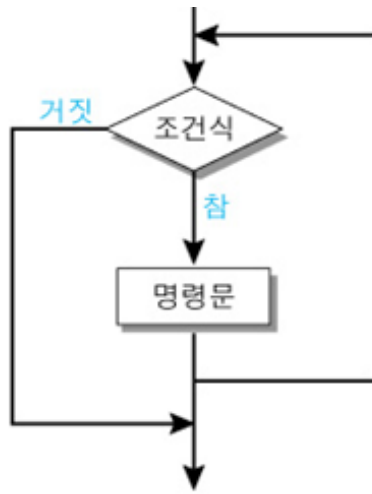


- **Sequence:** list of statements to be executed as a single unit

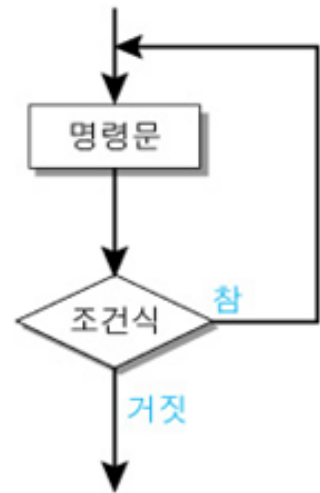
● Iteration (loops) For, while, do-while, repeat,...



(For)



(while)



(do-while)

2.2 Simple Algorithm Example

ex) Find sum of first n odd numbers (n개 홀수의 합)

```

procedure find_odd
begin
  sum ← 0
  i ← 1
  input n
  while i ≤ n do
    begin
      sum ← sum + i ;
      i ← i+2
    end
  end
  output sum
end
  
```

ex) Find max of 3 numbers

```

procedure find-max {
  input a, b, c
  large = a;

  if b>large then large= b;
  if c>large then large = c;
  return large
}
  
```

* Find Min of 3 numbers

ex) Testing whether a positive integer is prime

```
procedure is_prime(m)
begin
  for i=2 to m-1 do
    if m MOD i=0 then return false
  return (true)
end is_prime.
```

Ex) finding a prime larger than a given integer

```
procedure large_prime(n)
begin
  m=n+1
  while not(is_prime(m)) do
    m=m+1
  return m
end large_prime
```

Ex) Find largest in a finite sequence (while loop)

```
procedure find_large (s,n)  {
  large := s1
  i:=2
  while i ≤ n do {
    if si > large then large := si
    i:= i+1
  }
  return(large)
}
```

Ex) function selectionSort(list, n) {

 for (i = 0; i < n-1; i++) {

 min = i;

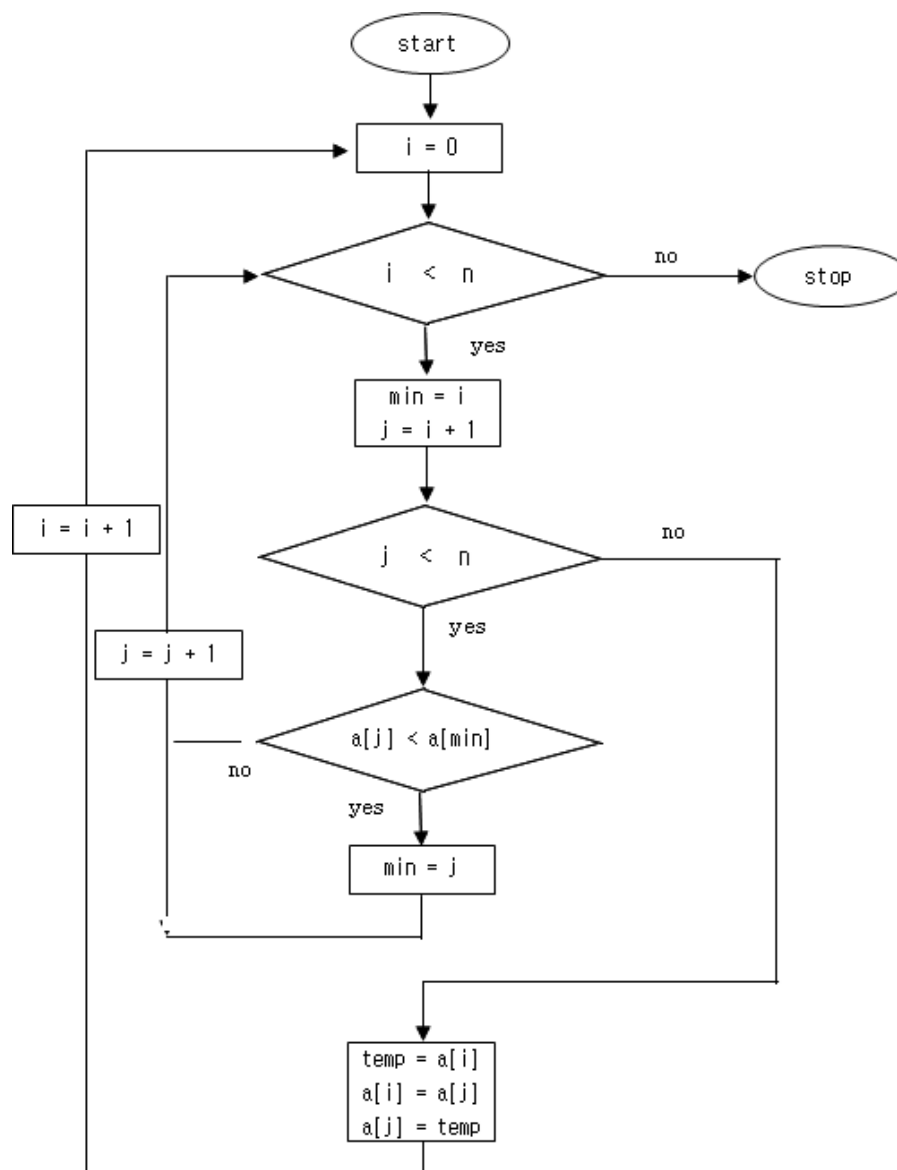
 for (j = i+1; j < n; j++) {

 if (list[j] < list[min]) min = j;

 swap(list[i], list[min]);

 }

}



예제 1) [이진탐색] : 정수 searchnum 이 배열 list 에 있는지 검사

. list[0] <= list[1] <= ... <= list[n-1] /* 미리 정렬되어 있음 */

. list[i] = searchnum 인 경우 인덱스 i 를 반환, 없는 경우는 -1 반환

(초기 값 : left = 0, right = n-1;

list 의 중간 위치 : middle = (left + right) / 2)

* list[middle] 과 searchnum 비교 시 다음 3 가지중 하나를 선택

1) searchnum < list[middle]: /* search again between left and moddile-1 */

2) searchnum = list[middle]: /* middle 을 반환 */

3) searchnum > list[middle]: /* search again between middle+1 and right*/

● Version 1

```
while (left <= right) {  
    middle = (left + right) / 2;  
    if (searchnum < list[middle])           right = middle - 1;  
    else if (searchnum == list[middle])     return middle;  
    else left = middle + 1;  
}
```

● Version 2

```
while (left<=right) {  
    middle = (left + right)/2;  
    switch (COMPARE(list[middle], searchnum)) {  
        case -1: left = middle + 1;      break;  
        case 0: return middle;  
        case 1: right = middle - 1;      break; }  
    }  
    return -1; }
```

```

char compare (int x, int y)
{
    if (x > y) return 1;
    else if (x < y) return -1;
    else return 0;
}

```

[ex] 다음 코드를 완성하고 실행결과를 보이시오

```

int binarySearch(int data[], int num, int left, int right){
...
....
}

```

```

void main()
{
    int data[] = { 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100};
    int num, found;

    cout << "Enter an integer to search : ";
    cin >> num;
    found = binarySearch(data, num, 0, 9);

    if (found == -1)
        cout << "Not in the list" << endl;
    else
        cout << "Found at position " << found << endl;
}

```

2.3 순환 알고리즘 (Recursive Algorithm)

- 수행이 완료되기 전에 자기 자신을 다시 호출
- 순환 알고리즘의 장단점.
 - . 장점 : 대단히 강력한 알고리즘 표현 방법일 뿐 아니라 복잡한 알고리즘의 과정을 명료하게 표현 가능
 - . 단점 : 비 순환 알고리즘보다 시간(time)과 공간(space)면에 있어 비효율적이다.
- 순환 알고리즘의 구성
 - . 반드시 순환호출을 끝내는 종료 조건이 있어야 한다.
 - . 종료 조건에 접근하는 다음 단계의 순환호출이 있다.

* Factorial function

- 반복적 정의: $n! = n*(n-1)*(n-2) \dots *2*1$
- 순환적 정의:
$$\begin{aligned} n! &= 1 && \text{if } n=1 \\ n! &= n*(n-1)! && \text{if } n>1 \end{aligned}$$

ex) recursive factorial

```
int factorial (int n)
{
    if (n == 0) return 1    /* anchor (종료조건)*/
    else return
        n * factorial(n-1); /* recursive step(순환호출) */
}
```

$$3! = 3*2! = 3*2*1! = 3*2*1*0! \quad (0! = 1)$$

*** Factorial 의 반복 프로그램 (non-recursive factorial)**

```
int factorial(int n)
{
    int fact = 1;
    for (int i=1; i ≤ n; i++)
        fact = fact*i;
    return fact;
}
```

ex) 이진 탐색

```
int binsearch(int list[], int searchnum, int left, int right)
{
    /* search list[0] list[1] ... list[n-1] for searchnum*/
    int middle;

    if (left <= right) {
        middle = (left + right) / 2;
        switch (COMPARE(list[middle], searchnum)) {
            case -1: return
                        binsearch(list, searchnum, middle+1, right);

            case 0: return middle;
            case 1: return
                        binsearch(list, searchnum, left, middle-1);
        }
    }
    return -1;
}
```


Ex) Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, ...)

□ $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ (단, $F(0) = 0, F(1) = 1$)

```
procedure Fibonacci(int n) {  
    if ((n == 0) or (n == 1)) return n // base case  
                                     // F(0) = 0, F(1) = 1  
    else return (Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2));  
}
```

```
procedure Fibonacci(int n) {  
    if ((n == 1) || (n == 0)) return n; // base case  
    sum = 1; second = 0;  
    for (i = 2; i <= n; i++) // n 까지  
        first = second;  
        second = sum;  
        sum = first + second;  
    return (sum); // 마지막 결과를 돌려줌  
}
```

Ex) Reverse String

```
//S is string, size: 크기  
Function Reverse(S, size)  
{  
    while (Size > 0) {  
        print S[Size-1];  
        --Size;  
    }  
}
```

```
Function Reverse (S, size)  
{  
    if (size == 0) return  
    else {  
        print (S[size-1])  
        Reverse(S, size-1);  
    }  
}
```

ex) Towers of Hanoi

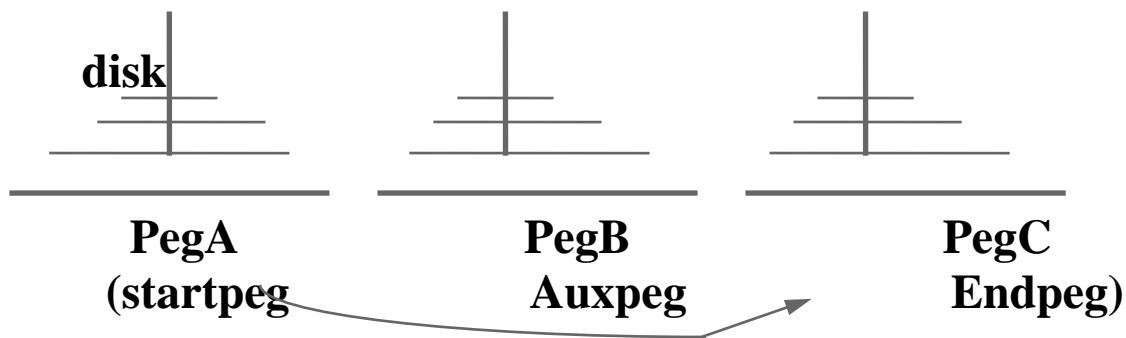
$$m_1 = 1 \quad (k = 1)$$

$$m_k = 2m_{k-1} + 1 \quad (k \geq 2),$$

$$\text{then } m_n = 2^n - 1 \quad \text{for } n \geq 1$$

Requirement:

1) move one at a time 2) smaller disk on top of larger disk



■ Algorithm: move n disk from startpeg to endpeg using auxpeg

1) if only one disk, output “move disk from startpeg to endpeg”

2) else

move (**n-1 disk** from **startpeg to auxpeg** using endpeg)

output “Move disk from startpeg to endpeg”

move (**n-1 disk** from **auxpeg to endpeg** using startpeg)

if $n = 1$, move disk1 from startpeg to endpeg

if $n = 2$,
move disk1 from startpeg to auxpeg
move disk2 from startpeg to endpeg
move disk1 from auxpeg to endpeg

if disk = 3, move disk1,2 from startpeg to auxpeg ->.....
move disk 3 from startpeg to endpeg
move disk1,2 from auxpeg to endpeg ->.....

2.4 성능 분석 (performance Analysis)

1) Program 을 평가하는 요소

- (1) 본래의 개발요구사항의 충족여부
- (2) 정확성 (works correctly?)
- (3) 충분한 documentation 의 여부 (how to use it and how it works)
- (4) Logical unit 별로 module 화 여부 (5) Readability
- (6) Space complexity (memory utilization, 효율성)
- (7) Time complexity (efficiency of running time)

2) 알고리즘 분석 시 고려사항

1) 공간 복잡도(space complexity)

프로그램을 실행시켜 완료하는데 필요한 공간의 양
(amount of memory required by storage structure)

2) 시간 복잡도(time complexity)

프로그램을 실행시켜 완료하는데 필요한 컴퓨터 시간의 양
(amount of time required to execute the algorithm)

3) Space Complexity (공간 복잡도)

● 프로그램의 실행에 필요한 공간 $S(p)$

*공간 요구량 : $S(P) = c + S_P(I)$

($S(P)$: 전체공간, c : 고정공간, $S_P(I)$: 가변공간, 인스턴스 특성)

. 고정 기억공간 : 프로그램 입출력 횟수나 크기와 관계없는 공간 요구

ex) 프로그램 코드(명령어) 공간, 단순변수, 집합체, 상수 등 저장할 공간

. 가변 기억공간 : 변수, 참조된 변수가 필요한 공간, 순환 스택 공간,

[예제 1]:

```
float abc(float a, float b, float c)
{
    return a+b+b*c + (a+b-c) / (a+b) + 4.0;
}
```

소요공간:

- 1) 변수 3 개 (a,b,c) 저장하고 함수 abc 에서 값을 반환 하는데 한 word 가 필요.
- 2) 고정 공간 요구만을 가짐 $S_p(i) = 0$

[예제 2]

```
float sum(float list[], int n)
{
    float tsum = 0;    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)    tsum += list[i];
    return tsum;
}
```

소요공간:

- 1) 배열을 전달할 때, 배열의 주소를 전달함 (call by ref)
⇒ 따라서 소요공간은 배열의 주소 값 ⇒ 4bytes
- 2) 매개변수 n, 지역변수 tsum, i 의 공간 (4*3=12 bytes)
- 3) 가변 공간 없음... 모두 16bytes

. 가변공간요구: variable space requirements

- . 가변크기의 구조체 (예: A[]).
- . 문제의 instance i 에 의존하는 공간
- . recursion 의 경우 추가공간 소요 (지역변수, 매개변수, return address 등)

[예제 3] 순환 알리즘

```
float rsum(float list[], int n)
{
    if (n) return  rsum(list, n-1) + list[n-1];
    return 0;
}
```

소요공간:

- 1) 배열주소 list 값을 위한 data 변수 => 4bytes
- 2) 매개변수 n=4bytes
- 3) 반환주소 공간: 4bytes
- 4) 따라서 매회 호출시 마다 $3 \times 4 = 12$ bytes 소요됨
⇒ n 번 호출시, 총 소요공간은 $12 \times n$

4) 시간 복잡도 (Time complexity)

* 프로그램의 실행에 필요한 시간
(프로그램 P에 의해 소요되는 시간 : $T(P)$)

- 1) 컴파일 시간 + 실행 시간 (T_p) 으로 구성됨
- 2) 컴파일 시간은 프로그램의 특성에 영향 없음
⇒ run time 만 고려

* Estimating run time is not easy

- 가장 좋은 방법: 시스템 clock 사용
- 다른 방법: 프로그램이 수행하는 연산의 횟수계산
 - . 알고리즘의 기본연산의 수(number of basic operations in algorithm)
 - . This gives us Machine-independent estimate

정의: 프로그램 단계(program step)

실행 시간이 Instance 특성에 상관없이 구문적으로 또는
의미적으로 독립성을 갖는 프로그램의 단위

Comments(주석): 0 step

Declarative Statement(선언문): 0 step

Expressions and Assignment (산술식 및 지정문)

1 step, but it depends on expression

Iteration statement (for, while, ... sum of iteration)(반복문)

제어부분에 대해 단계수 고려

If (expr) then (statement1) else (statement2): depends on
expression and statements

Function invocation(함수 호출): 1 step

Begin, end, { {, } } 0 step

Function: 0 step

ex) 1.	float sum (float list[], int n);	0
2.	{	0
3.	float tempsum=0;	1
4.	int i;	0
5.	for (I =0; I<n ; I ++)	n+1
6.	tempsum += list[I];	n
7.	return tempsum;	1
8.	}	0

=> Total Steps: $2n+3$

ex)	1.	void add (int a[][max_size...]	0
	2.	{	0
	3.	int i, j;	0
	4.	for (i=0; i<m; i++)	m+1
	5.	for (j= 0; j<n; j++)	m(n+1)
	6.	c[i][j] = a[i][j] + b[i][j];	mn
	7.	}	0

=> total steps: $2mn+2m+1$

ex)	sum = 0;	1
	i = 0;	1
	while (i < n) {	n+1
	cin >> num	n
	sum = sum + num;	n
	i++	n
	}	0
	mean = sum / n	1

=> total steps: $4n+4$

ex) [수치 값 리스트의 합산을 위한 반복 호출]

float sum(float list[], int n)	0
{	0
float tempsum = 0;	1
int i;	0
for (i = 0; i < n; i++)	n+1
count += 2;	n
count += 3;	1
return 0;	1
}	

=> total steps in counts: $2n + 4$ steps

2.5 점근 표기법 (O , Ω , Θ) : (Asymptotic/Order Notation)

* Step count 는 (either best or worst) difficult task, not precise
=> 정확한 단계의 계산: 무의미

* Order notation: 상수 인자나 적은수의 자료무시하고, 함수를 정의하거나, 비교하는 방법:

- 1) 알고리즘의 시간 복잡도를 표기하기 위한 방법
- 2) 알고리즘의 실제 수행시간이 아니라 명령어의 실행 빈도수를 함수로 표현한 것
- 3) 동일한 일을 수행하는 2 개의 서로 다른 알고리즘의 time complexity 를 비교할 수 있다.
- 4) 어떤 알고리즘의 특성변화에 따른 실행시간의 증가 추이를 예측할 수 있다.
(Ex. 처리해야 할 자료의 개수 변화에 따른 실행시간 증가 추이 예측)

정의 [Big "oh"] $[f(n)=O(g(n))]$

iff $\exists c, n_0 > 0$, such that $f(n) \leq cg(n) \quad \forall n, n \geq n_0$

$\Rightarrow f$ is of order AT MOST $g(n)$, if there exists positive constants C , such that $|f(n)| \leq C|g(n)|$,

$\Rightarrow (g(n))$ 은 $f(n)$ 의 상한선(upper bound)이 된다

$\Rightarrow f(n)$ 의 수행시간이 $g(n)$ 보다는 덜 걸린다

$f(n)=O(g(n))$ 은 그 알고리즘이 n 개의 입력자료가 수행 될 때, 걸리는 시간이 $|g(n)|$ 에 상수 C 를 곱한 것보다 항상 같거나 작아진다는 의미.

ex) $3n+2 = O(n)$,

(sol) $3n+2 \leq 4n$ for all $n \geq 2$ 즉, 2 보다 큰 모든 n 에 대하여 $3n+2$ 는 $4n$ 보다 항상 작다. $n_0=2, c=4$

ex) $1000n^2 + 100n - 6 = O(n^2)$

(sol) $1000n^2 + 100n - 6 \leq 1001n^2$, for $n \geq 100$

ex) $6 \cdot 2^n + n^2 \leq 7 \cdot 2^n$, for $n \geq 4$, $\Rightarrow 6 \cdot 2^n + n^2 = O(2^n)$

ex) $3n+3 = O(n^2)$ is correct, but not this way.

ex) $f(x) = 100x^2 - 50x + 2$

$f(n) = a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0$, then $f(n) = O(n^m)$

● $O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$

$O(1)$: computing time is constant

$O(n)$ is linear, $O(n^2)$ is quadratic,

$O(2^n)$ is exponential

*** Some Rule**

1) 상수는 무시한다.

$O(cf(n)) = O(f(n))$, ex) $O(3n^2) = O(n^2)$

2) 더 할 때는 max 를 택한다.

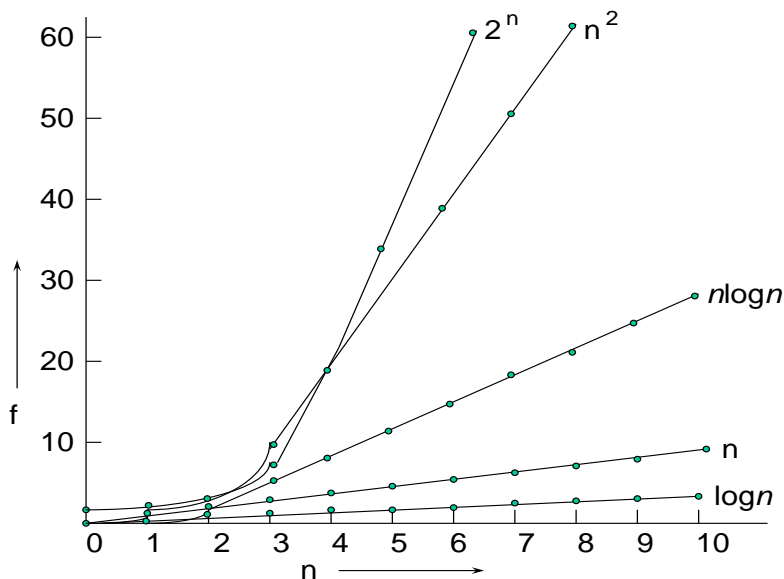
$O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

ex) $O(2n^3 + 108n) = O(n^3)$

3) $O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$

ex) $O(n) * O(n-1) * O(n \log n) = O(n(n-1)n \log n) = O(n^3 \log n)$

4) Assignment, read/write instruction = $O(1)$



ex) 어떤 프로그램이 다음과 같은 성질이 있는 $f(n)$ 과 $g(n)$ 으로
구성되었을 때 running time 을 계산하시오

$$f(n) = \begin{cases} n^4 & \text{if } n \text{ is even} \\ n^2 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} n^2 & \text{if } n \text{ is even} \\ n^3 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

(sol) running time = $O(f(n) + g(n))$ 이며, $O(\max(f(n), g(n)))$ 이므로
 $O(n^4)$ if n is even, and $O(n^3)$ if n is odd 이다.

ex) 다음 segment code 의 running time 을 구하시오

for $i = 2$ to n do $a[i] = 0$

for $i = 1$ to n do

for $j = 1$ to n do

$a[i] := a[i] + a[j]$ \Rightarrow (Sol) $O(n) + o(n^2) = O(n^2)$

정의 [Omega] $[f(n) = \Omega(g(n))]$

iff $\exists c, n_0 > 0$, such that $f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \forall n, n \geq n_0$

$n \geq n_0$ 인 모든 n 에 대하여 $f(n) \geq c * g(n)$ 을 만족하는 양의 상수 c 와 n_0 가
존재한다면 $f(n) = \Omega(g(n))$ 이다.

- $g(n)$ 은 $f(n)$ 의 하한(Lower bound) 이다.
- $f(n)$ 이 $g(n)$ 이상의 시간이 걸린다

Ex) $n^3 + 2n^2 = \Omega(n^3)$ 이다

(sol) 이유: $n^3 + 2n^2 \geq n^3$ for all $n \geq 1$.

(즉 1 보다 큰 모든 n 에 대하여 $n^3 + 2n^2$ 는 n^3 보다 항상 크다. ($n_0=1, c=1$)
즉, 많은 하한 값들 중에서 제일 큰 값을 택하는 것이 타당하다.

정의 [Theta] $[f(n) = \Theta(g(n))]$

iff $\exists C_1, C_2, n_0 > 0, \text{ s.t } C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n), \forall n, n \geq n_0$

$\Rightarrow n \geq n_0$ 인 모든 n 에 대하여 $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ 을 만족하는
양의 상수 c_1, c_2 와 n_0 가 존재한다면 $f(n) = \theta(g(n))$ 이다.

($g(n)$ 이 $f(n)$ 에 대해 상한 값과 하한 값을 모두 가지는 경우)

$\Rightarrow g(n)$ 은 $f(n)$ 의 상한(Upper bound) 인 동시에 하한 (Lower bound) 이다.

$\Rightarrow f(n)$ is "theta of $g(n)$ " 이라고 읽는다.

ex) $3n + 2 = \theta(n)$

(sol) $3n + 2 \geq 3n$ for all $n \geq 2$, $3n + 2 \leq 4n$ for all $n \geq 2$
 $c_1 = 3$ and $c_2 = 4$

ex) $10n^2 + 4n + 2 = \theta(n^2)$ 이다

(sol) $10n^2 + 4n + 2 \geq 10n^2$ for all $n \geq 1$
 $10n^2 + 4n + 2 \leq 11n^2$ for all $n \geq 1$, $c_1 = 10$ and $c_2 = 11$

* 결론: 점근적 복잡도(asymptotic complexity: O, Ω, Θ)는
정확한 단계수의 계산 없이 쉽게 구함