Розробка та аналіз алгоритмів

4. Рекурентні співвідношення

- Основна теорема
- Приклади
- Доведення

Метод декомпозиції

- Розбиття
- Рекурсивний розв'язок
- Комбінування

Час роботи

$C(n)$

a, b

$D(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n \le c \\ C(n) + D(n) + aT(n/b), & n > 1 \end{cases}$$

MergeSort: $C(n) = \Theta(1)$, $a = 2$, $b = 2$, $D(n) = \Theta(n)$ $T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n \le 1 \\ \Theta(1) + \Theta(n) + 2T(n/2), & n > 1 \end{cases}$

Спрощення:

1) $n \in N$
2) $n \le c$, $T(n) = \Theta(1)$
3) $C(n) + D(n) = f(n)$

$\Rightarrow T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Основна теорема

$$T(n) = \underbrace{aT(n/b)} + \underbrace{f(n)}$$

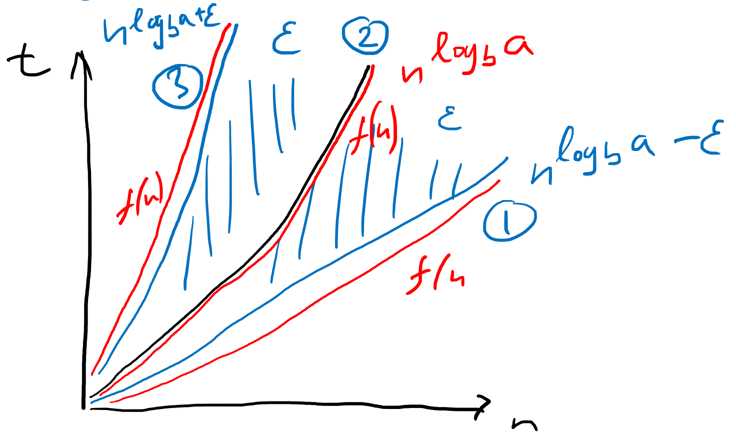
Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$ – константи, $f(n)$ – довільна функція.

Тоді рекурентне співвідношення $T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$ розв'язується наступним чином:

1) Якщо $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ для деякого $\varepsilon>0$, то $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2) Якщо $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\cdot \lg n)$

3) Якщо $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ для деякого $\varepsilon>0$ і якщо $af(n/b)\le c\cdot f(n)$ для $c<1$; достатньо великих n, то $T(n)=\Theta(f(n))$



1) Функція $f(n)$ поліноміально менша за $n^{\log_b a}$ $\Rightarrow$ $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

3) Функція $f(n)$ поліноміально більша за $n^{\log_b a}$ $\Rightarrow$ $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

Основна теорема. Приклад

Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$ – константи, $f(n)$ – довільна функція, а $T(n)$ – функція, визначена на множні невід'ємних цілих чисел за допомогою рекурентного співвідношення $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, де вираз n/b інтерпретується або як $\lfloor n/b \rfloor$, або як $\lceil n/b \rceil$. Тоді асимптотичну поведінку функції $T(n)$ можна виразити наступним чином.

1. Якщо $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.
2. Якщо $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$.
3. Якщо $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, і якщо $af(n/b) \leq cf(n)$ для деякої сталої $c < 1$ і всіх достатньо великих n, то $T(n) = \Theta(f(n))$.

1) Метод Штрассена: $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{2,81})$

$a = 7$, $b = 2$, $\underline{f(n) = n^2}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} \approx \underline{n^{2,81}} \Rightarrow$ 1-й випадок $n^2 = O(n^{2,81 - \varepsilon})$, $\varepsilon < 0,81$

2) Метод Карацуби: $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{1,585})$

$a = 3$, $b = 2$, $\underline{f(n) = n}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3} \approx \underline{n^{1,585}} \Rightarrow$ 1-й випадок $n = O(n^{1,585 - \varepsilon})$, $\varepsilon < 0,5$

3) Бінарний пошук: $T(n) = 1 \cdot T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\cancel{n^{\log_b a}}^{\,1} \lg n) = \Theta(\lg n)$

$a = 1$, $b = 2$, $\underline{f(n) = 1}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 \underline{= 1} \Rightarrow$ 2-й випадок $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$1 = \Theta(1)$

Основна теорема. Приклад

Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$ – константи, $f(n)$ – довільна функція, а $T(n)$ – функція, визначена на множні невід'ємних цілих чисел за допомогою рекурентного співвідношення $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, де вираз n/b інтерпретується або як $\lfloor n/b \rfloor$, або як $\lceil n/b \rceil$. Тоді асимптотичну поведінку функції $T(n)$ можна виразити наступним чином.

1. Якщо $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.
2. Якщо $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$.
3. Якщо $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, і якщо $\underline{af(n/b) \leq cf(n)}$ для деякої сталої $c < 1$ і всіх достатньо великих n, то $T(n) = \Theta(f(n))$.

умова регулярності

4) $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n \cdot \lg n \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \lg n)$

$a = 3,\ b = 4,\ f(n) = \underline{n \cdot \lg n},\ n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(\underline{n^{0,793}}) \Rightarrow f(n) = \Omega(n^{0,793 + \varepsilon}),\ \varepsilon < 0,2$

$3f(n/4) = 3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \lg(n/4) \leq \frac{3}{4}(n \lg n) = \frac{3}{4} f(n) \Rightarrow c = \frac{3}{4} < 1$

5) $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = \underline{n \cdot \lg n},\ n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = \underline{n}$

Не існує сталої $\varepsilon > 0$: $n \lg n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$

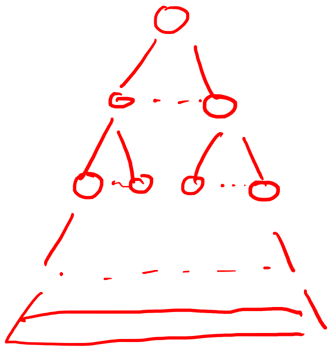
Основна теорема

Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$ – константи, $f(n)$ – довільна функція, а $T(n)$ – функція, визначена на множні невід'ємних цілих чисел за допомогою рекурентного співвідношення $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, де вираз n/b інтерпретується або як $\lfloor n/b \rfloor$, або як $\lceil n/b \rceil$. Тоді асимптотичну поведінку функції $T(n)$ можна виразити наступним чином.

1. Якщо $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \boxed{\Theta\left(n^{\log_b a}\right)}$. ← робота на останньому рівні (листках) дерева
2. Якщо $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$. ← робота розподілена рівномірно по дереву
3. Якщо $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ для деякої сталої $\varepsilon > 0$, і якщо $af(n/b) \leq cf(n)$ для деякої сталої $c < 1$ і всіх достатньо великих n, то $T(n) = \Theta(f(n))$.

робота відбувається у корені дерева

$n = 1, b, b^2, b^3, \ldots$



Доведення основної теореми. Лема 1

Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$, $f(n)$ – невід'ємна функція, визначена для точних степенів числа b.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{якщо } n = 1 \\ aT(n/b) + f(n), & n = b^i, \text{ де } i > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right).}$$

\# рівня | Час роботи вузла

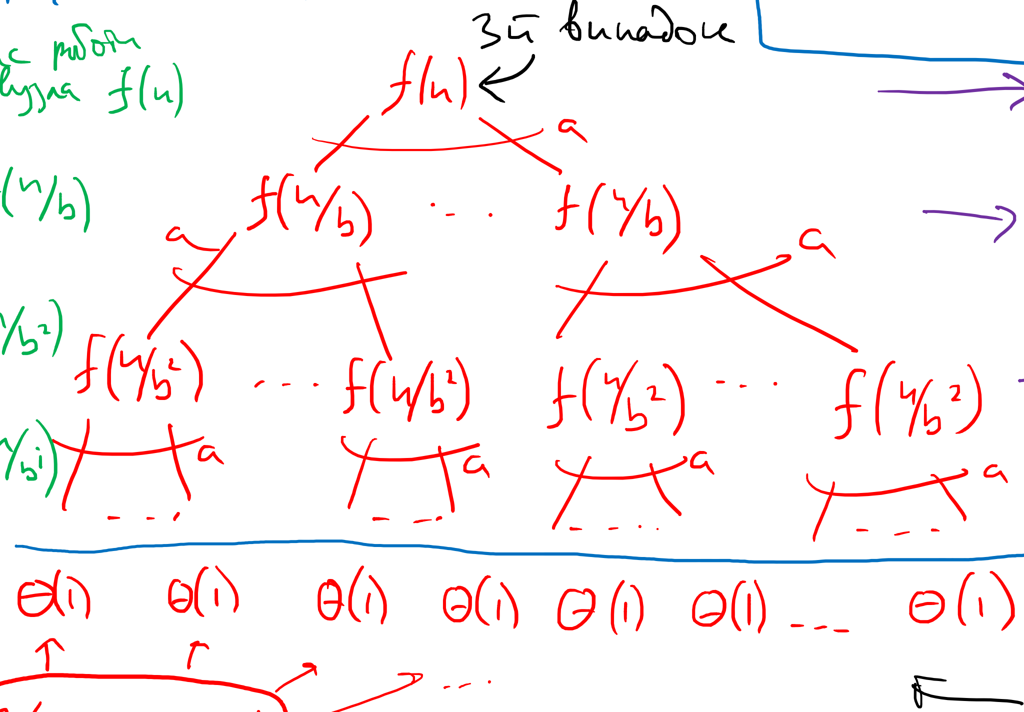
$0 \Rightarrow 1$, $f(n)$

$1 \Rightarrow a$, $f(n/b)$

$2 \Rightarrow a^2$, $f(n/b^2)$

$i \Rightarrow a^i$, $f(n/b^i)$

кількість рівнів $\log_b n$



$\longrightarrow f(n)$

$\longrightarrow a \cdot f(n/b)$

$\longrightarrow a^2 \cdot f(n/b^2)$

$\longrightarrow \boxed{a^i \cdot f(n/b^i)}$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot f(n/b^j) \quad (1)$$

$+$

$\longrightarrow \boxed{\Theta(n^{\log_b a})} \quad (2)$

1й випадок

$\boxed{a^{\log_b n} = n^{\log_b a}}$ кількість листків

$n = b^k \Rightarrow k = \log_b n$

$\boxed{n/b^{\log_b n} = 1}$

Доведення основної теореми. Лема 2

Нехай $a \geq 1$ та $b > 1$ - константи, $f(n)$ - невід'ємна функція. Тоді $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right)$

Можна асимптотично оцінити наступним чином.

1) Якщо для деякої константи $\varepsilon > 0$ виконується $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, то $g(n) = O(n^{\log_b a})$

2) Якщо $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$

3) Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ і $\forall n \geq b$ виконується $af(n/b) \leq cf(n)$ при $c < 1$, то $g(n) = \Theta(f(n))$

Доведення леми 2. Частина 1

1. $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(n/b^j\right)$. Якщо для деякої константи $\varepsilon > 0$ виконується умова $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$, то $g(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$.

$$g(n) = O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a-\varepsilon}\right) = \underline{O\left(n^{\log_b a}\right)}.$$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a-\varepsilon} = n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a-\varepsilon}}\right)^j = n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{\cancel{a} \cdot b^{\varepsilon}}{\underbrace{\cancel{b^{\log_b a}}}_{\to a}}\right)^j =$$

$$= n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b n-1} b^{\varepsilon \cdot j}} = n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot \left(\frac{\left(b^{\varepsilon}\right)^{\log_b n}-1}{b^{\varepsilon}-1}\right) = n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot \frac{n^{\varepsilon}-1}{b^{\varepsilon}-1} = n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot O\left(n^{\varepsilon}\right) =$$

$$= O\left(n^{\log_b a-\varepsilon} \cdot n^{\varepsilon}\right) = O\left(n^{\log_b a-\cancel{\varepsilon}+\cancel{\varepsilon}}\right) = O\left(n^{\log_b a}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{k} b^k = \frac{b^{k+1}-1}{b-1} \Leftarrow$$ геометрична прогресія

Доведення леми 2. Частина 2

2. $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$. Якщо $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.

$$g(n) = \Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{a}{\underbrace{b^{\log_b a}}_{a}}\right)^j = n^{\log_b a} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} 1 = \underbrace{n^{\log_b a} \cdot \log_b n}$$

Доведення леми 2. Частина 3

3. $g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(n/b^j\right)$. Якщо для деякої константи $c<1$ та всіх $n \ge b$ виконується співвідношення $a\, f(n/b) \le c\, f(n)$, то $g(n)=\Theta\left(f(n)\right)$.

① $g(n)=\Omega(f(n))$ $\rightarrow$ $g(n)=\Theta(f(n))$

$f(n/b) \le \frac{c}{a} \cdot f(n)$

$f(n/b^j) \le \left(\frac{c}{a}\right)^j \cdot f(n)$

$a^j \cdot f(n/b^j) \le c^j \cdot f(n)$

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot f(n/b^j) \le \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j \cdot f(n) = f(n)\cdot \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j \le$$

$$\le f(n)\cdot \sum_{j=0}^{\infty} c^j = f(n)\cdot \frac{1}{1-c} = O(f(n)) \Rightarrow g(n)=O(f(n))$$

②

$$\sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{1}{1-k}, \quad k<1$$

Доведення основної теореми. Завершення

Лема 1 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n)$

Лема 2

1) Якщо $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ для $\varepsilon > 0$: $g(n) = O(n^{\log_b a})$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2) Якщо $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$: $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$$

3) Якщо $f(n) = \underline{\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})}$, $a \cdot f(n/b) \le c \cdot f(n)$, $c < 1$: $g(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \underline{\Theta(f(n))} = \Theta(f(n))$$