

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

Práctica 01

Alumno: Erick Hernan Quispe
Pariona

1. Demuestre que \mathcal{F} es una σ - álgebra de subconjuntos de si, y solo si, satisface las siguientes propiedades:

a) $\phi \in \mathcal{F}$

Demostración

Si $\Omega \in \mathcal{F}$ y \mathcal{F} colección cerrada

$$\Omega^c = \phi \in \mathcal{F}$$

b) $A \in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

Demostración

$$A_1 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_1^c \in \mathcal{F}$$

$$A_2 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_2^c \in \mathcal{F}$$

c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Demostración:

$$\text{Por definición: } \{A_n\}_{n \in N} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{A_n\}_{n \in N}^c \in \mathcal{F}$$

Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ y a su vez $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}$

$$\text{Luego } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

2. Sea \mathcal{F} una σ - álgebra; demuestre que \mathcal{F}^c es una σ - álgebra definida por: $\mathcal{F}^c = \{A^c : A \in \mathcal{F}\}$

Demostración

Como \mathcal{F} es una σ - álgebra entonces cumple las siguientes propiedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Supongamos que \mathcal{F}^c es un σ - álgebra $\Omega \in \mathcal{F}^c$ que verifica la primera propiedad.

Luego como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión esta definida:

$\{A_n\} \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \{A_n\}^c \in \mathcal{F}$ se verifica por la tercera propiedad

Ahora por la tercera propiedad verificamos que:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^c = \{A^c / A \in \mathcal{F}\}$$

3. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \\ A^c & \text{si } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Determine el: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega = \Omega \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &\nexists\end{aligned}$$

4. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } [-1/n, 0] \\ A^c & \text{si } [0, 1/n] \end{cases}$$

Determine el: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

5. Sean A_1, A_2, \dots eventos aleatorios, demuestre :

$$\text{a) } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i)^c$$

Demostración

$$\text{Si: } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)$$

$$\text{Recuerde: } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i)^c$$

$$\text{b) Si } P(A_i) \geq 1 - e \text{ para } i=1,2,\dots,n \text{ entonces } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - ne$$

Demostración

$$\text{tenemos: } P(A_i) \geq 1 - e$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e \geq 1 - P(A_i) \\
&\prod_{i=1}^n e \geq \prod_{i=1}^n P(A_i)^c \\
&ne \geq \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \Rightarrow ne \geq 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\
&\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - ne \\
&c) P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k^c)
\end{aligned}$$

6. Demuestre las desigualdades de Boole

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Por inducción para familia finita queremos demostrar que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Luego: para n=1

$$P(A_1) \leq P(A_1) \text{ se cumple}$$

para n=h

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_h) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_h) \text{ Hipótesis Inductivo.}$$

para n=h+1

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_{h+1}) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_h + 1)$$

Para ello consideramos que:

$$x = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n, \text{ luego } P(x) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_h)$$

Entonces:

$$P(x \cup A_{h+1}) = P(x) + P(A_{h+1}) - P(x \cap A_{h+1})$$

Luego

$$P(x) + P(A_{h+1}) - P(x \cap A_{h+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_h) + P(A_{h+1}) -$$

$$P(x \cap A_{h+1})$$

$$\text{Así } P(x \cup A_{h+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_h) + P(A_{h+1})$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_{h+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_h)$$

Por tanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

7. Sea $\{A_n\} n \in N$ una sucesión de eventos. Demuestre que:

$$\text{a) } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n\right)^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n^c$$

Demostración

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n^c$$

$$\text{b) } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n\right)^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n^c$$

Demostración

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n^c$$

$$\text{c) } P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n^c\right)$$

Demostración

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n\right) &= \left(P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right]^c\right)^c = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n^c\right) \end{aligned}$$

8. Encuentre las condiciones sobre los eventos A_1 y A_2 para que la siguiente sucesión sea convergente.

$$A_n = \begin{cases} A_1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ A_2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$