



长安大学

空间分析

多边形的最小外接圆算法

专 业： 遥感科学与技术

班 级：

学 号：

姓 名： 杨英锐

2011.5.30



長安大學

目录

绪论	1
第一章 构造多边形前的准备	1
1.1 点、线、圆	1
1.2 三角形及其外接圆	1
第二章 计算多边形的一些特性	2
2.1 构造多边形	2
2.2 多边形的周长和面积	3
2.3 多边形的长轴、短轴	3
第三章 多边形的最小外接圆	4
3.1 算法思想	4
3.2 算法收敛性问题和运算结果	5
结论	6
参考文献	6



长安大学

绪论

多边形的最小外接圆的算法很多，不少算法是基于最小凸包的，比较麻烦；还有是先将矢量数据栅格化再计算的，精度就不足，判断圆的直径两侧法的，也比较麻烦。在此，提出了一种简单易行的算法。该算法具有思想简单，容易实现，精度高的优点。

在此，该算法的程序是基于 C++ 面向对象的程序设计实现的，还用了 MATLAB 辅助计算。实际上只要知道其思想，用其他的编程语言很容易就能实现。

程序在实现计算最小外接圆的同时，也实现了其他一些几何图形的计算功能，有：计算直线的长度，计算三角形的最小外接圆，计算多边形的长轴、短轴、周长、面积等。其中计算三角形的最小外接圆是计算多边形最小外接圆的主要内容和核心程序。

该程序只主要实现对计算最小外接圆的算法有用的算法，但它具有易扩充的优点，很容易将其他算法包容进来。

第一章 构造多边形前的准备

1.1 点、线、圆

俗话说：“点动成线，线动成面”，在构造其他几何图形之前，先要定义点，在此是平面的分析，这里的点就只有一个平面坐标就可以满足要求了。

两个点连接起来就是一条线。

圆是由圆心、半径确定的。在此没有什么值得提起的算法。

1.2 三角形及其最小外接圆

确定三边或三个顶点都能确定一个三角形，由于边是由点联成的，在此以确定三个顶点来确定一个三角形，三边由三个顶点算出。

在此最主要的就是计算三角形的最小外接圆，这也是计算多边形的最小外接圆的核心。由于基于不同的编程语言，这里介绍两种算法。一种是基于 C++ 的平时用的方法，另一种是基于 MATLAB 的矩阵处理算法。

无论是那种方法，首先都是判断三角形的形状，即该三角形是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形，若是直角三角形或钝角三角形，那就简单了。直接



长安大学

计算最长边的中点坐标为圆心，长边的一半为半径就得到最小外接圆。

判断三角形的形状是用勾股定理的方法，设 a, b 为短边， c 为长边，若有：

$$a^2 + b^2 > c^2$$

成立，就是锐角三角形，进行下面的处理。

第一种方法是计算三角形的两条边的中垂线的交点为圆心，圆心到三个顶点中任意一点的距离为半径，得到最小外接圆。

第二种办法的思想是，最小外接圆的圆心到锐角三角形三个顶点的距离相等，然后列出三个距离公式：

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = r^2 ;$$

$$(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 = r^2 ;$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 ;$$

其中 a, b, c 是三角形的三个顶点。将平方项打开后，用某两式相减消去 r^2 项，得到两个线性无关的没有 (x, y) 平方项的等式，其中一种形式如：

$$(x_a - x_b)x + (y_a - y_b)y = (x_a^2 - x_b^2 + y_a^2 - y_b^2) / 2 ;$$

$$(x_a - x_c)x + (y_a - y_c)y = (x_a^2 - x_c^2 + y_a^2 - y_c^2) / 2 ;$$

构造矩阵：

$$\begin{bmatrix} x_a - x_b & y_a - y_b \\ x_a - x_c & y_a - y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_a^2 - x_b^2 + y_a^2 - y_b^2) / 2 \\ (x_a^2 - x_c^2 + y_a^2 - y_c^2) / 2 \end{bmatrix}$$

可将矩阵写成：

$$AX = W;$$

解此方程即得到最小外接圆的圆心：

$$X = A^{-1} W ;$$

再用简单的两点间的距离公式求得半径，最小外接圆的解法就完成了。

第二章 计算多边形的一些特性

2.1 构造多边形

这里多边形可以有二种构造形式，一种是只存储多边形的顶点序列，另一种



是存储多边形的边，选择哪种方式就由人喜欢了。只是要注意多边形的闭合。若要构造具有内岛的多边形，注意一下多边形的顺时针或逆时针方向，或称右手边为多边形内部的准则。

2.2 多边形的周长和面积

计算多边形的周长就是直接将多边形的边的长累加就行了。

计算多边形的面积时，若构造多边形时有按右手边为内部的准则构造，那么无论是带内岛的多边形，还是不带内岛的，都可以用以下方法求得：

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) * (y_{i+1} + y_i) / 2$$

但是此程序中没有按照右手测为内部的准则构造多边形，计算多边形的面积时要求个绝对值。

2.3 多边形的长轴、短轴

多边形的长轴的算法，要计算多边形顶点的距离的上三角矩阵，然后找出距离上三角矩阵中最大值的行列号，就是对应着多边形两个距离最远的顶点间的下标。

计算短轴的算法比计算长轴的要复杂点。短轴是与长轴相垂直的，所以计算短轴前要先计算长轴，算得长轴后，将坐标系旋转至 x 轴与长轴平行。计算旋转后长轴的中点坐标 (x_m', y_m') ，就是短轴上的一个点。此时，短轴的方程就是：

$$x = x_m'$$

关键的就是计算短轴的起点和终点。首先在旋转后的多边形的边中，利用它们的起点和终点的 x 坐标，判断那根线段与短轴有交点，即有：

$$(x'_{\text{起点}} - x_m') (x'_{\text{终点}} - x_m') \leq 0$$

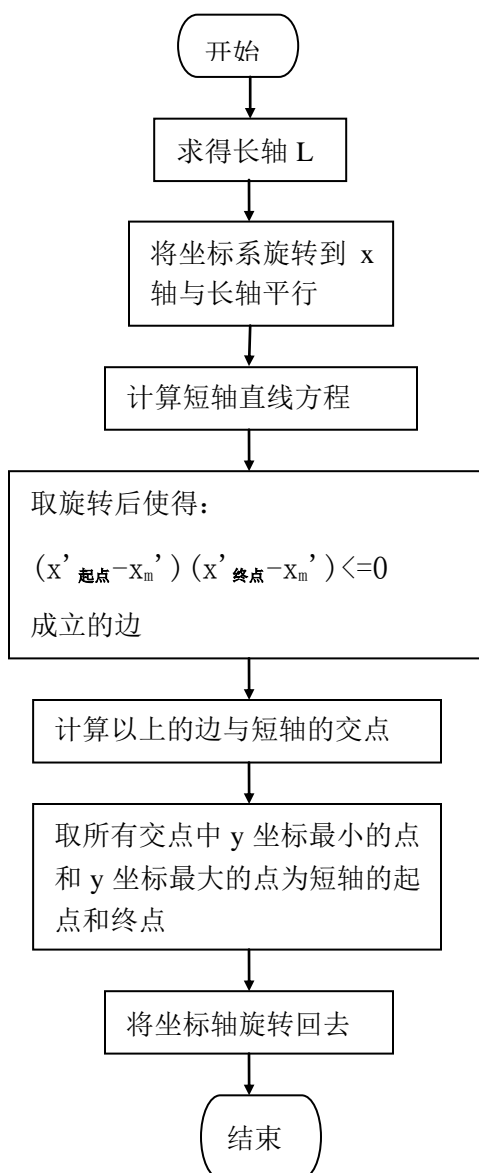


图 1 计算多边形短轴算法流程图

的边与短轴有交点。计算出所有这些交点，然后取一个 y 值最小的为短轴起点，去 y 值最大的为短轴的终点，再经坐标的反向旋转，转回到原来的坐标系中，就得到短轴了。

在此，这个算法的精妙之处是没有计算所有的边与短轴的交点，然后再判断哪些是真交点，哪些是假交点然后剔除，只需要构造与短轴有真交点的边的直线方程并解求，大大减小了运算的时间复杂度，加快了运算速度。

第三章 多边形的最小外接圆

3.1 算法思想

多边形的最小外接圆算法，有基于最小凸包的算法，有缩圆法，有矢栅转换后然后用栅格数据计算的方法。在基于最小凸包的算法中，还需要计算最小凸包，就计算最小凸包的算法，就比这里的算法复杂许多。基于缩圆法的也不是很实用。栅格数据的算法精度不高。

此处计算最小外接圆，前文的算法中已经作了很多准备。这里的算法步骤如下：

首先，要计算出多边形的长轴 L 。

第二，可以直接以长轴中心为圆心 O ，以长轴为直径作圆，也可以计算多边形各顶点到长轴中心的距离，取最远点与长轴的两端点作三角形 ABC ，作该三角形的最小外接圆 O 。

第三步，判断以上的圆是不是要求的最小外接圆，即计算各顶点到该圆圆心的距离，取其最大值，判断该最大值与以上的圆的半径的大小。若该最大值小于圆的半径，则以上求得的圆就是多边形的最小外接圆，若该最大值大于圆的半径，则要继续迭代。

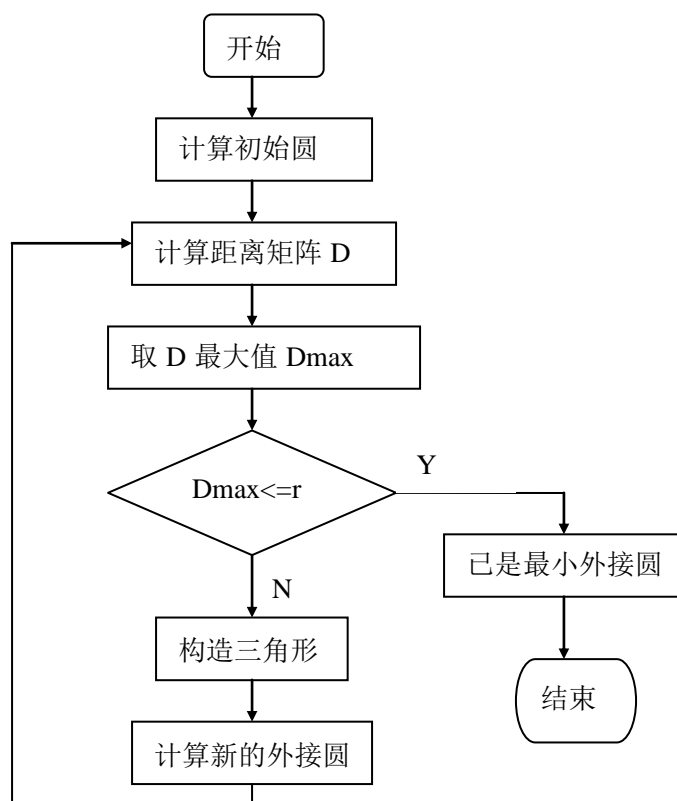


图2 多边形最小外接圆算法流程图



第四步，取以上最大距离的顶点 P，计算 P 与三角形 ABC 的三个顶点的距离，用 P 点取代与其距离最近得点作新的三角形。

第五步，计算新三角形的最小外接圆，返回第二步继续迭代。

3.2 算法收敛性问

题和运算结果

这个算法存在的疑问就是迭代是否收敛的问题。在此也没有在量的计算上证明该算法的收敛性问题，而是运用尺规作图法证明了该算法的收敛性，迭代后得到的用于计算最小外接圆的三角形，越来越往等边三角形的形式靠拢，可能的让算法继续迭代的点的所在的区域需要满足很多条件，该区域会很快的收缩，而且已经被排除的点不会再被选进来，由此确定算法的收敛性。

该算法的优点是思想简单，易于实现，精度高。不失为计算最小外接圆的好算法与编程思想的好选择。

图 3 为多边形，图 4 为计算最小外接圆的运算结果。

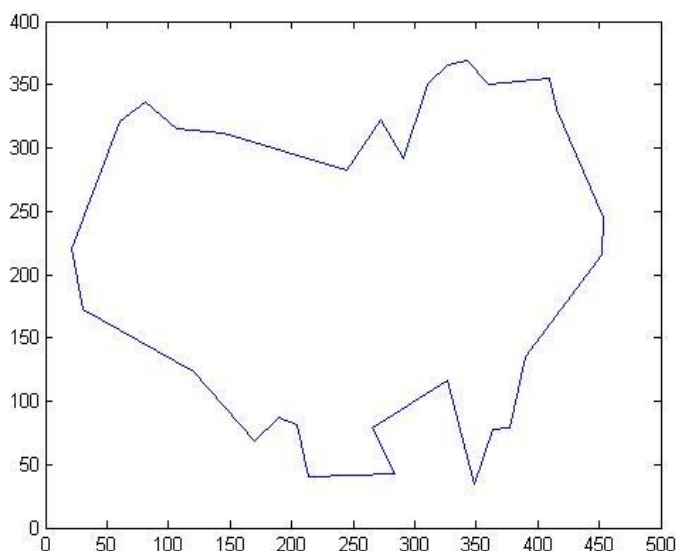


图 3 多边形

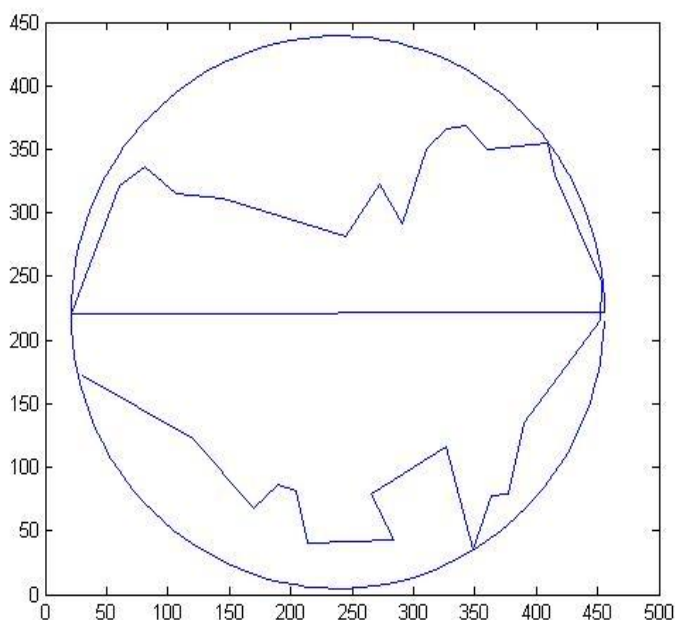


图 4 多边形的最小外接圆



长安大学

结论

求解三角形的最小外接圆问题中,对直角三角形和钝角三角形直接求其长轴中点为圆心,长轴为直径得到最小外接圆,省去很多计算过程。对锐角三角形,使用了矩阵运算的思想,易于 MATLAB 编程实现。

在求解多边形的面积中,注意到多边形边界的环绕方向,可以处理带有内岛的多边形。在求解其短轴时,将与短轴不真正相交的边除去,不计算其假交点然后剔除,也节约了一些运算量。

在计算多边形的最小外接圆中,充分运用了求解三角形的最小外接圆的算法,及多边形长轴的优势,巧妙的剔除不是外接圆上的点的顶点。而且可以运用尺规作图法证明其收敛性。算法思想简单,易于实现,有保持了矢量数据高精度的优点,不受多边形内岛的影响。是实现求解多边形最小外接圆的不可多得的优秀算法。

参考文献

- 1 郭仁忠,空间分析,北京:高等教育出版社,2001
- 2 张强,王正林,精通 MATLAB 图像处理,电子工业出版社,2009
- 3 孙家广,计算机图形学(第3版),清华大学出版社,1998
- 4 谭浩强,C++面向对象程序设计,清华大学出版社,2006
- 5 罗敏,三角形最小外接圆的矩阵解法,2011