

# Formulaire SysRF

Antonin Kenzi

14 décembre 2023

## Polynôme d'interpolation :

1

Forme de lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x - x_i}$$

$$L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \lambda_i^{-1} = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$$

Evaluation :

$$P_n = L(x) \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i} y_i$$

Formule barycentrique :

$$P_n = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i}}$$

forme de Newton :

$$P_n(x) = c_0 + c_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

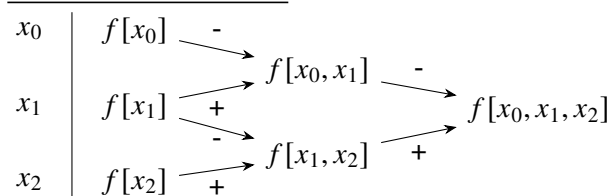
$$f[x_0] = y_0 = c_0 \quad f[x_n] = y_n$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Schéma de newtown :



Erreur d'interpolation :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

$$M_{n+1} := \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

## Splines :

2

Calcul d'une spline cubique :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$a_i = \frac{1}{6h}(y''_{i+1} - y''_i) \quad b_i = \frac{1}{2}(y''_i)$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6}(y''_{i+1} + 2y''_i) \quad d_i = y_i$$

Calcul des dérivées secondes :

$$y''_{i-1} + 4y''_i + y''_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

avec  $i = 1, \dots, n-1$

Matrice tridiagonale :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y''_0 \\ 0 \\ 0 \\ y''_5 \end{bmatrix}$$

Sur la calculatrice :

- Matrice tridiagonale sto->(ctrl + var) -> A
- menu -> Matrice et vecteur(7) -> simultané(6)
- A, vecteur colonne de droite -> :=

## Intégration :

3

Quadrature interpolation :

formule interpolatoire :

$$Q_n = \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

avec :

$$w_k = \int_a^b L_k(x) dx = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx$$

- $Q_n$  est une formule d'intégration de degré au moins  $n$
- $x_k$  sont les points de quadrature
- $w_k$  sont les poids de quadrature

$$E[f] = Q - I = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i - \int_a^b f(x) dx$$

## Formule de Newton-Cotes :

4

Les formules interpolatoires polynomiales avec noeuds équidistants sont appelées des formules de Newton-Cotes

Fermées (car a et b en font partie) :

$$x = a + (b - a)t \quad t \in [0, 1] \Leftrightarrow dx = (b - a)dt$$

$$w_k = (b - a) \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{nt - j}{k - j} dt$$

$$f_0 = f(a)$$

Trapezes (degré de precision 1) :

$$Q_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \quad h = b - a$$

Simpson (degré de précision 3) :

$$Q_2 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad h = \frac{b-a}{2}$$

3/8 de Newton (degré de précision 3) :

$$Q_3 = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \quad h = \frac{b-a}{3} \quad f_0 = f(a)$$

Boole (degré de précision 5) :

$$Q_4 = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \quad h = \frac{b-a}{4}$$

degré de précision :

- Prendre nombre de point impair.
- subdiviser l'intervalle en sous intervalle de taille égale.

Regles des trapezes composées :

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

avec

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Regle du point milieu

$$M(h) = h \sum_{i=1}^n f(x_{k+\frac{1}{2}}) \quad x_{k+\frac{1}{2}} = a + (k + \frac{1}{2})h$$

Lien avec la regle des trapezes :

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]$$

exemple :

- $T(h) = h/2(f_0 + f_4)$
- $M(h) = h(f_2)$
- $T(h/2) = 1/2(T(h) + M(h))$
- $M(h/2) = h/2(f_1 + f_3)$
- $T(h/4) = 1/2(T(h/2) + M(h/2))$

Erreur (trapezes composées) : convergence lente  
sauf cas optimal :

- $f(x)$  est périodique
- $f(x)$  infiniment dérivable
- Intégrale sur une période

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Regles des Simpson composées :

Sous 4 interval de taille  $h = (b-a)/4$

$$S_c = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

Paire : 2n sous intervalle de taille  $h = (b-a)/2n$

$$S_c = \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}) \right]$$

Erreur (Simpson composées) :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_c \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

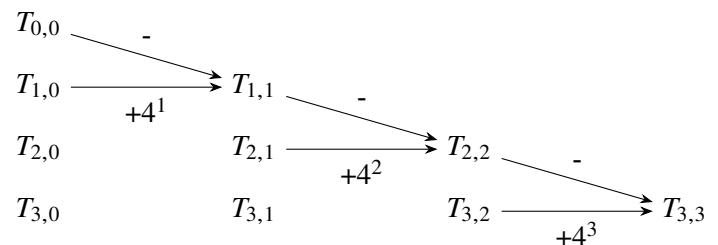
**Intégration de Romberg**

5

Principe :

$$T_{i,0} = T(h_i) \quad h_i = \frac{b-a}{2^i}$$

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$



Attention :

Si fonction a une singularité, amélioration de la précision pas significative. Si fonction est périodique et infiniment dérivable, Trapezes composées est optimal.

**Intégration de Gauss**

6

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

$$w_i = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Polynomes de Legendre :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

**Equations non linéaires :**

7

Méthode de la bisection :

Principe :

- 2 point a et b tels que :
  - $f(x)$  continue sur  $[a,b]$
  - $f(a)f(b) < 0$
  - $f(x)$  contient au moins un zéro sur  $[a,b]$

Algorithme :

1.  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  et  $f(x_1)$
2. Si  $f(x_1) = 0$  alors  $x_1$  est la solution
3. Si  $f(a)f(x_1) < 0$  alors  $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$  et  $f(x_2)$
4. sinon  $a = x_1$
5. on recommence 1

Borne à priori :  $|x_k - r| \leq \frac{b-a}{2^k} \quad r \Rightarrow f(r) = 0$

Avantage et inconvénient :

- Avantage :
  - Convergence garantie
  - Facile à mettre en oeuvre
- Inconvénient :
  - Convergence lente

Méthode de la sécante :

Principe : On remplace  $f(x)$  par une fonction plus simple et itère avec  
algorithme :

1. Choisir  $x_0$  et  $x_1$
2. Calculer  $f(x_0)$  et  $f(x_1)$
3. Remplacer  $f(x)$  par la droite passant par les points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_1, f(x_1))$
4. déterminer le zéro de la droite
5.  $x_0 = x_1$  et  $x_1 = x_2$
6. on recommence 2

formule :

$$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Avantage et inconvénient :

- Avantage :
  - Convergence superlinéaire  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Inconvénient :
  - Convergence non garantie

Méthode de Newton :

Principe : On remplace  $f(x)$  par la tangente en  $x_k$

Hypothèses :  $f(x)$  est continument dérivable

formule :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Avantage et inconvénient :

- Avantage :
  - Convergence quadratique
  - Facile à mettre en oeuvre
  - un seul point de départ
  - Généralisable à plusieurs variables
- Inconvénient :
  - Convergence non garantie
  - Nécessite le calcul de la dérivée et la différentiabilité de  $f$
  - deux évaluations de  $f$  par itération

Ordre de convergence :

$$F'(x_k) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} F'(x) = \frac{f''(r)f(r)}{f'(r)^2}$$

$$e_{k+1} = \frac{f''(r)f(r)}{2f'(r)^2} e_k^2$$

$$\frac{F''(r)}{2} = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$$

**Equations non linéaires à plusieurs variables : 8**

Principe :

on cherche  $r$  tel que  $F(r) = r$  :

Iteration du point fixe :

Algorithme :

1. Choisir  $x_0$
2.  $x_{k+1} = G(x_k)$
3. on recommence 1

$$\|x_k - r\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|x_{l+1} - x_l\| \quad 0 < l < 1$$

Estimation à priori :

$$\|x_k - r\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \quad l = 0$$

Estimation à posteriori :

$$\|x_k - r\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\| \quad l = k - 1$$

$$L := \max_{x \in [a,b]} \|J(x)\|$$

Jacobienne de F :

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Norme de  $\|J(x)\|$  :  
sous la forme de la norme de Frobenius

$$\|J(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|^2}$$

Avantage et inconvénient :

- Avantage :
  - Résultat global
- Inconvénient :
  - Difficile de trouver le Domaine

Ordre de convergence :

$$\|e_{k+1}\| \leq \|J(r)\| \|e_k\|$$

Généralement linéaire

Conversion quadratique si  $\|J(r)\| = 0$

Méthode de Newton :

Principe :

On considère le système d'équation non linéaire :

$$f(x, y) = 0 \quad g(x, y) = 0$$

Algorithme :

1. Choisir  $(x_0, y_0)$  proche de  $(r, s)$
2. remplace  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  par le plan tangent  
 $T_f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)$   
 $T_g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0)g_x(x_0, y_0) + (y - y_0)g_y(x_0, y_0)$
3. déterminer l'intersection des plans avec le plan Oxy (cela donne une droite)

$$T_f(x, y) = 0 \quad T_g(x, y) = 0$$

4. déterminer le point d'intersection des droites
5. intersection des droites :  $(x_1, y_1)$  nouvelle approximation de  $(r, s)$
6. on recommence 2 avec  $(x_1, y_1)$

la méthode de Newton(-Raphson)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \xi_k \\ &= x_k - \frac{g(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k) - f(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)}{f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k) - f_y(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)} \\ y_{k+1} &= y_k - \eta_k \\ &= y_k - \frac{f(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k) - g(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k)}{f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k) - f_y(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)} \end{aligned}$$

$r = x_k$  et  $s = y_k$

Ordre de convergence :

Au moins égal à 2

Généralisation :

$$F(r) = 0 \quad F = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

algorithme :

1. Choisir  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$
2.  $x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)$
3. on recommence 1

Ajouter peut-être Banach :

**Courbes de Bézier :**

9

Algorithme de De Casteljau :

Ordre 1 :

$$P_0 = \binom{1}{1} \quad P_1 = \binom{2}{3}$$

alors

$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = \binom{1}{1}(1-t) + \binom{2}{3}t = \binom{1-t}{1+2t}$$

Ordre 2 :

On construit d'abord deux courbes de Bézier d'ordre 1

$$P_0 = \binom{1}{1} \quad P_1 = \binom{2}{3} \quad P_2 = \binom{4}{2}$$

$$P(t) = (1-t)Q_0(t) + tQ_1(t)$$

$$\begin{aligned} &= (1-t)((1-t)P_0 + tP_1) + t((1-t)P_1 + tP_2) \\ &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 \end{aligned}$$

Ordre 3 :

On construit d'abord deux courbes de Bézier d'ordre 2

$$P(t) = (1-t)R_0(t) + tR_1(t)$$

= ...

$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

#### Propriétés :

- points initialement donnés = points de contrôle
- Les courbes de Bézier passent par le premier et le dernier point de contrôle
- Les courbes de Bézier sont contenues dans l'enveloppe convexe des points de contrôle
- Les courbes de Bézier sont stables sous transformations affines (translation, rotation, homothétie)

#### Polynôme de Bernstein :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

#### Relation avec les courbes de Bézier :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

#### Propriétés :

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{n-1}(t)$$

en  $t = 0$  et  $t = 1$  :

$$P'(0) = n(P_1 - P_0) \quad P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

la direction de la tangente en  $P_0$  est identique à celle de la droite  $P_0P_1$  et la direction de la tangente en  $P_n$  est identique à celle de la droite  $P_{n-1}P_n$

#### Résolution des systèmes linéaires

10

résoudre  $A\vec{x} = \vec{b}$  pour trouver  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

#### hypotheses

- $A$  est une matrice  $n \times n$ .
- $A$  est inversible.

#### methodes

- **méthode directe** :  $A^{-1}$  est calculé explicitement.  
Exemple : Elimination de Gauss,  $LU$ ,  $LL^T$ ,  $QR$
- **méthode iterative** :  $\vec{x}$  est calculé par une suite de vecteurs  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$

#### méthode iterative

#### Normes vecteurs

Classique :

$$\|v\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

–  $p = 1$  : norme  $L_1$  (norme de Manhattan)

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

–  $p = 2$  : norme  $L_2$  (norme euclidienne)

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

–  $p = \infty$  : norme  $L_\infty$  (norme du maximum)

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

#### Normes matricielles

$$\|A\vec{v}\|_p \leq \|A\|_p \|\vec{v}\|_p \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \iff \|A\|_p = \max_{\vec{v} \neq 0} \frac{\|A\vec{v}\|_p}{\|\vec{v}\|_p}$$

–  $p = 1$  : norme  $L_1$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

–  $p = 2$  : norme  $L_2$

$$\|A\|_2 = \max |\lambda(A^T A)|$$

–  $p = \infty$  : norme  $L_\infty$

$$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

#### Lien entre $\|\vec{x} - \vec{x}_k\|$ et $\|\vec{b} - A\vec{x}_k\|$

$$\frac{\|\vec{x} - \vec{x}_k\|_p}{\|\vec{x}\|_p} \leq \underbrace{\|A\|_p \|A^{-1}\|_p}_{\text{erreur relative}} \frac{\|\vec{b} - A\vec{x}_k\|_p}{\|\vec{b}\|_p} \quad \text{résidu relatif}$$

erreur relative  $\leq \kappa_p(A)$

résidu relatif

$\kappa_p(A)$  est le conditionnement de  $A$ . Si  $\kappa_p(A)$  est grand, alors  $A$  est mal conditionné.

#### Méthode directe

11

#### Elimination de Gauss

1. Transformer la matrice  $A$  en forme échelonnée.

2. Substituer les valeurs trouvees dans les equations.

### Factorisation LU

1. Transformer la matrice  $A$  en forme echelonnee.  $A = LU$
2. Substituer en avant  $L\vec{y} = \vec{b}$ . avec  $L$  la matrice triangulaire inferieure.
3. Substituer en arriere  $U\vec{x} = \vec{y}$ . avec  $U$  la matrice triangulaire superieure.

voir slide 9.

### méthode de Doolittle

$$u_{km} = a_{km} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} u_{jm} \quad m = k, k+1, \dots, n$$

$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \right) \quad m = k+1, k+2, \dots, n$$

### Besoin de pivotement

Elim. de Gauss/LU sans pivotement peut echouer si  $a_{kk} = 0$ .

Permuter les lignes de  $A$  pour avoir  $a_{kk} \neq 0$ . Mettre le plus grand element en valeur absolue en haut.

$$LU = PA$$

$P$  est une matrice de permutation.

Initialiser  $P$  comme la matrice identite  $I$ .

Si  $A$  subit une permutation,  $P$  doit subir la meme permutation.